

l'intégrale

MÉTHODES
ET EXERCICES

PC | PC*

OLIVIER FIAT

Physique

méthodes et exercices

DUNOD

Avec la collaboration scientifique de Pierre-Emmanuel Leroy

Conception et création de couverture : Atelier 3+

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
	

© Dunod, Paris, 2017

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-077224-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos

ix

I Optique 1

CHAPITRE 1 SUPERPOSITION D'ONDES LUMINEUSES 3

Les méthodes à retenir	4
Énoncés des exercices	16
Du mal à démarrer ?	26
Corrigés des exercices	27

CHAPITRE 2 DISPOSITIF DES TROUS D'YOUNG 37

Les méthodes à retenir	38
Énoncés des exercices	50
Du mal à démarrer ?	64
Corrigés des exercices	65

CHAPITRE 3 INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON 77

Les méthodes à retenir	78
Énoncés des exercices	92
Du mal à démarrer ?	102
Corrigés des exercices	103

CHAPITRE 4 DIFFRACTION 113

Les méthodes à retenir	114
Énoncés des exercices	129

Du mal à démarrer ?	138
Corrigés des exercices	139
II Thermodynamique	147
CHAPITRE 5 TRANSFERTS THERMIQUES	149
Les méthodes à retenir	150
Énoncés des exercices	159
Du mal à démarrer ?	169
Corrigés des exercices	170
CHAPITRE 6 DIFFUSION DE PARTICULES	183
Les méthodes à retenir	184
Énoncés des exercices	191
Du mal à démarrer ?	197
Corrigés des exercices	198
III Mécanique	205
CHAPITRE 7 RÉFÉRENTIELS NON GALILÉENS	207
Les méthodes à retenir	208
Énoncés des exercices	219
Du mal à démarrer ?	233
Corrigés des exercices	235
CHAPITRE 8 VÉHICULE À ROUES	249
Les méthodes à retenir	250
Énoncés des exercices	259
Du mal à démarrer ?	266
Corrigés des exercices	267

CHAPITRE 9 **FLUIDES EN ÉCOULEMENT, ÉTUDE LOCALE** **273**

Les méthodes à retenir	274
Énoncés des exercices	284
Du mal à démarrer ?	293
Corrigés des exercices	294

CHAPITRE 10 **FLUIDES PARFAITS** **307**

Les méthodes à retenir	308
Énoncés des exercices	313
Du mal à démarrer ?	322
Corrigés des exercices	323

CHAPITRE 11 **BILANS MACROSCOPIQUES** **331**

Les méthodes à retenir	332
Énoncés des exercices	343
Du mal à démarrer ?	354
Corrigés des exercices	356

IV Électromagnétisme **367**

CHAPITRE 12 **TRANSPORT DE CHARGES** **369**

Les méthodes à retenir	370
Énoncés des exercices	377
Du mal à démarrer ?	382
Corrigés des exercices	383

CHAPITRE 13 **CHAMP ÉLECTRIQUE EN RÉGIME STATIONNAIRE** **389**

Les méthodes à retenir	390
Énoncés des exercices	406
Du mal à démarrer ?	415
Corrigés des exercices	416

CHAPITRE 14	CHAMP MAGNÉTIQUE EN RÉGIME STATIONNAIRE	427
	Les méthodes à retenir	428
	Énoncés des exercices	445
	Du mal à démarrer ?	462
	Corrigés des exercices	464
CHAPITRE 15	ÉQUATIONS DE MAXWELL	481
	Les méthodes à retenir	482
	Énoncés des exercices	490
	Du mal à démarrer ?	495
	Corrigés des exercices	495
V	Physique des ondes	501
CHAPITRE 16	ÉQUATION DE D'ALEMBERT	503
	Les méthodes à retenir	504
	Énoncés des exercices	513
	Du mal à démarrer ?	524
	Corrigés des exercices	525
CHAPITRE 17	ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE	539
	Les méthodes à retenir	540
	Énoncés des exercices	552
	Du mal à démarrer ?	559
	Corrigés des exercices	560
CHAPITRE 18	PHÉNOMÈNES DE PROPAGATION LINÉAIRES : ABSORPTION ET DISPERSION	571
	Les méthodes à retenir	572
	Énoncés des exercices	582
	Du mal à démarrer ?	592

Corrigés des exercices 593

CHAPITRE 19 **INTERFACES ENTRE DEUX MILIEUX** **603**

Les méthodes à retenir 604

Énoncés des exercices 612

Du mal à démarrer ? 621

Corrigés des exercices 622

CHAPITRE 20 **PHYSIQUE DU LASER** **631**

Les méthodes à retenir 632

Énoncés des exercices 643

Du mal à démarrer ? 650

Corrigés des exercices 651

CHAPITRE 21 **PHYSIQUE QUANTIQUE** **657**

Les méthodes à retenir 658

Énoncés des exercices 670

Du mal à démarrer ? 683

Corrigés des exercices 684

CHAPITRE 22 **FORMULAIRE MATHÉMATIQUE** **695**

22.1 Équations différentielles 695

22.2 Fonctions de plusieurs variables, équations aux dérivées partielles 697

22.3 Analyse vectorielle 698

22.4 Intégrales de champs et grandeurs élémentaires 702

Index 705

Avant-propos

Présentation générale.

Cet ouvrage de la collection Méthodes et exercices traite de l'intégralité du programme de physique des filières PC et PC*. Chacun des 21 chapitres est divisé en quatre parties (le chapitre 22 est un formulaire de mathématiques).

Les méthodes à retenir : chaque chapitre commence par plusieurs fiches structurées avec des rappels de cours synthétiques, des méthodes de raisonnement ou de calcul, un exemple complet et un renvoi aux exercices concernés.

Énoncés des exercices : des énoncés d'exercices d'application du cours et de nombreux exercices inspirés d'écrits et d'oraux de concours sont proposés. Ils sont affectés d'un niveau de difficulté, de 1 à 4.

Du mal à démarrer ? : des indications de méthode ou de calcul sont données à l'image de celles qui seraient données en colle ou à l'oral des concours.

Corrigés des exercices : les solutions détaillées sont entièrement rédigées.

Conseils de travail.

Nous vous encourageons à adopter une discipline de travail rigoureuse. Vous ne devez jamais oublier que c'est en faisant qu'on apprend. Lire un énoncé puis son corrigé est absolument contre-productif, et même si vous avez l'impression de « tout comprendre » (ce qui est flatteur pour le rédacteur de la solution !) vous n'apprendrez presque rien, et surtout vous ne retiendrez rien. Un exercice est fait pour être cherché, longuement, avec application, puis rédigé complètement, applications numériques, commentaires et conclusions compris. Si vous ne trouvez pas la réponse, cherchez encore. Si vous ne trouvez toujours pas, reportez-vous à la fiche méthode et réessayez en profitant des rappels et conseils qui y sont donnés. Si vous ne trouvez toujours pas, reportez-vous à l'aide donnée dans la rubrique « Du mal à démarrer ? ». Si vous n'avez que partiellement trouvé, laissez-vous un peu de temps encore, une nuit de repos, et cherchez encore le lendemain, c'est souvent profitable. Enfin, vous pouvez consulter le corrigé, sans oublier qu'avoir réellement compris une solution, c'est être capable une heure, une semaine ou un an après, de la restituer.

À propos du choix d'exercices.

Les exercices ont été choisis pour couvrir tout le programme, et tous les styles : certains sont calculatoires, d'autres plus qualitatifs, d'autres encore à forte composante documentaire (c'est alors mentionné dans le titre) avec une volonté dans cet ouvrage de proposer beaucoup de lectures graphiques (schémas, diagrammes, cartes de champ, de potentiel). Certains exercices qui demandent une initiative particulière de modélisation, de choix d'hypothèses, d'organisation du raisonnement, sont estampillés « résolution de problème ».

Quelques données plus techniques.

- Les grandeurs complexes sont soulignées, les grandeurs vectorielles surmontées d'une flèche, les vecteurs unitaires notés \vec{u} .
- L'imaginaire pur est noté i en électromagnétisme et dans l'étude des ondes, et j dans les chapitres d'électricité pour éviter la confusion avec l'intensité.
- Nous avons délibérément omis de fournir les lois d'analyse vectorielle dans le corps des exercices, afin d'éviter de donner ainsi une indication trop précise. Nous avons ainsi respecté la convention de l'écrit des concours, où la liste des formules utiles est toujours donnée avant ou après l'énoncé.
- Un formulaire de mathématiques utiles à la physique est proposé à la fin de l'ouvrage.
- Il en est de même pour les formules de trigonométrie et les éléments différentiels de longueur, de surface et de volume pour les intégrales spatiales.
- Un index complet est proposé à la toute fin de ce livre.

En guise de conclusion.

Nous espérons que cet ouvrage vous aidera à réussir le mieux possible les épreuves de physique des concours et nous vous souhaitons bon courage pour votre travail.

Première partie

Optique

CHAPITRE *1*

Superposition d'ondes lumineuses

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Chemin optique.
- ◇ Déphasage.
- ◇ Surface d'onde.
- ◇ Loi de Malus.
- ◇ Temps de cohérence.
- ◇ Largeur spectrale.
- ◇ Intensité lumineuse.
- ◇ Superposition d'ondes cohérentes et d'ondes incohérentes.
- ◇ Formule de Fresnel.
- ◇ Contraste.
- ◇ Phases en progression arithmétique.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

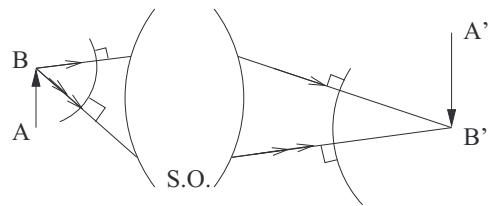
- ◇ Exprimer et utiliser la loi de Malus.
- ◇ Établir et utiliser la formule de Fresnel dans le cas général.
- ◇ Établir et utiliser la formule de Fresnel si $I_1 = I_2$.
- ◇ Étudier la superposition de N ondes cohérentes.

Les méthodes à retenir

Exprimer et utiliser la loi de Malus.

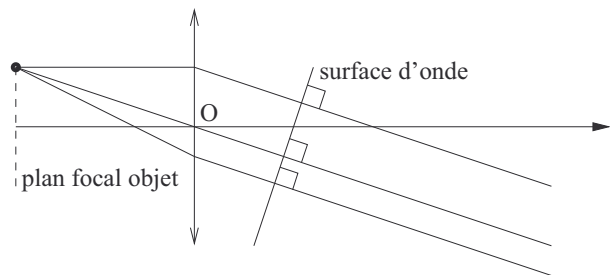
La **loi de Malus** est indissociable du modèle des **rayons lumineux** : les **surfaces d'onde** sont orthogonales aux rayons issus d'une source ponctuelle de lumière. La difficulté particulière de cette loi est le lien entre cet énoncé et son utilité principale : le calcul des différences de marche. Donnons trois exemples fondamentaux.

- Un système d'optique géométrique (S.O.), ne comportant que des milieux transparents séparés par des dioptries et des miroirs, donne d'un objet AB une image A'B'. Le **stigmatisme** se traduit par « tout rayon issu de B converge vers B' » après traversée du système.

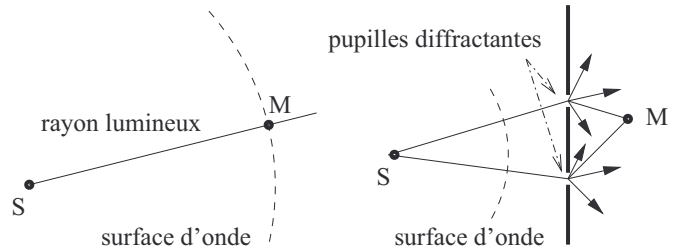


La forme des surfaces d'onde évolue de B vers B'. On distingue sur le schéma la surface d'onde sphérique issue de B et la surface d'onde sphérique convergeant vers B'. Une conséquence importante est que le délai de propagation de l'onde lumineuse de B à B' est **indépendante du rayon choisi**.

- Les rayons issus d'une source ponctuelle dans le plan focal objet d'une lentille mince convergente émergent tous parallèles au rayon passant par le centre et non dévié. Les surfaces d'onde sont donc des plans orthogonaux à cette direction.



- La **diffraction** d'un faisceau lumineux est l'un des cas d'invalidité du modèle de rayon lumineux. Un point de l'espace situé après une pupille diffractante peut ainsi être affecté par deux ondes lumineuses issues de la même source et pourtant déphasées.

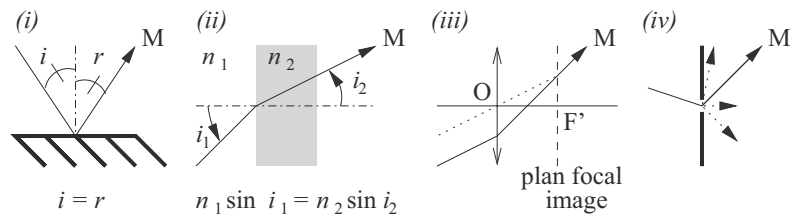


La loi de Malus permet de calculer non pas un **chemin optique** mais une **différence** de chemins optique par simplification de chemins égaux. Voici la démarche recommandée pour calculer la différence de marche

$$\delta = [SM]_1 - [SM]_2$$

entre deux rayons issus de la même source ponctuelle S et convergent vers un point M en suivant des trajets distincts indexés 1 et 2.

- a) On trace soigneusement (à la règle, sur la copie comme sur le tableau) les marches des rayons issus de la source S et qui convergent vers le point M d'étude. Voici les règles de tracé.
- i) On respecte les lois de Descartes à la réflexion sur les miroirs.
 - ii) On respecte les lois de Descartes à la réfraction à la traversée d'un dioptre.
 - iii) On respecte les règles de construction des rayons à la traversée des lentilles minces.
 - iv) Lors de la diffraction sur une pupille, on choisit le rayon issu d'un de ses points P en l'assimilant à une source ponctuelle secondaire.



b) En partant de la source S, on identifie la surface d'onde, sphérique ou plane, la plus avancée possible, celle à partir de laquelle les deux rayons considérés subissent des sorts différents.

c) On nomme H_1 et H_2 (par exemple) les intersections de cette surface avec les rayons 1 et 2. D'après la loi de Malus,

$$[SH_1] = [SH_2]$$

d) En partant dans le sens inverse de la lumière depuis M, on identifie la surface d'onde, sphérique ou plane, la plus avancée possible, celle à partir de la quelle les deux rayons considérés subissent des sorts différents.

e) On nomme K_1 et K_2 (par exemple) les intersections de cette surface avec les rayons 1 et 2. D'après la loi de Malus,

$$[MK_1] = [MK_2]$$

f) En utilisant le principe de retour inverse de la lumière,

$$[K_1M] = [K_2M]$$

g) On en déduit la simplification

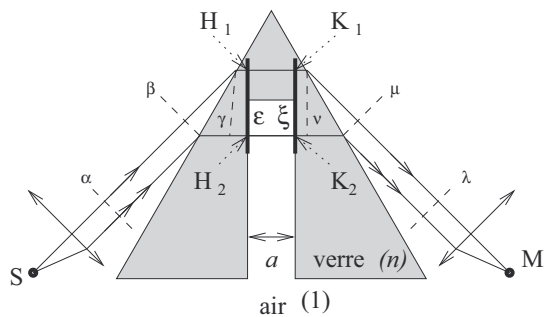
$$\delta = ([SH_1] + [H_1K_1] + [K_1M]) - ([SH_2] + [H_2K_2] + [K_2M]) = [H_1K_1] - [H_2K_2]$$

Bien sûr, d'autres simplifications du même type peuvent être opérées dans la différence restante.

h) Cette méthode est bien adaptée aux situations dans lesquelles la présence de lentilles entraîne l'existence de rayons parallèles. Par défaut, il est souvent plus facile de calculer directement les longueurs de rayon grâce à la géométrie euclidienne.

Exemple :

Dans le dispositif suivant, un prisme de verre creusé d'une cavité de largeur a , est traversé par un faisceau de lumière parallèle issu d'une source S au foyer objet d'une lentille convergente et le point M est au foyer image d'une autre lentille convergente.



La différence de marche entre le rayon 1 marqué d'une flèche et le rayon 2 marqué de deux flèches, est calculée selon la méthode décrite.

(a) Les rayons sont tracés sur la figure. Notons que la mesure des angles au rapporteur sur la figure permet de calculer la valeur numérique de l'indice n du verre :

$$1 \cdot \sin 75^\circ = n \sin 45^\circ \text{ donc } n = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 1,37$$

(b) À partir de S, les surfaces d'onde successives sont des plans équiphasés α, β , puis par réfraction (voir exercice 1.1) γ et enfin ϵ au delà duquel la lumière traverse le verre pour le rayon 1 et l'air pour le rayon 2.

(c) Les points H_1 et H_2 sont tracés sur la figure.

(d) De même, les surfaces d'onde issues de M dans le sens inverse de la lumière sont successivement λ, μ, ν et ξ .

(e) Les points K_1 et K_2 sont tracés sur la figure.

(f) et (g) On en déduit

$$\delta = [H_1 K_1] - [H_2 K_2] = na - a = (n - 1)a$$

↔ **Exercice 1.1.**

Établir et utiliser la formule de Fresnel dans le cas général.

Deux ondes lumineuses ne peuvent **interférer** que si elles sont **cohérentes** :

- elles sont issues d'une même source S
- cette source émet une onde **quasi monochromatique** de pulsation ω
- les deux ondes arrivant en M ont un décalage temporel inférieur au **temps de cohérence** assimilé à la durée caractéristique d'un **train d'onde**.

L'onde émise en S est caractérisée par la fonction d'onde complexe

$$\underline{a}(t) = \underline{A}_0 e^{i\omega t}$$

L'onde issue de S arrivant en M par le chemin 1 est définie par la fonction complexe du temps $\underline{a}_1(t)$, celle arrivant par le chemin 2 est définie par $\underline{a}_2(t)$. Tout l'intérêt de la notion de chemin optique est résumé dans la formule fondamentale suivante qui traduit le **principe ondulatoire** : « ce qui se passe en M à la date t est ce qui s'est passé en S à la date $t - \frac{|SM|}{c}$ », où c est la vitesse de la lumière dans le vide, avec un éventuel facteur d'atténuation β :

$$\begin{cases} \underline{a}_1(t) = \beta_1 \underline{a} \left(t - \frac{|SM|_1}{c} \right) \\ \underline{a}_2(t) = \beta_2 \underline{a} \left(t - \frac{|SM|_2}{c} \right) \end{cases}$$

En notant λ_0 la longueur d'onde dans le vide, on a $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ et en notant $\underline{A}_{1,2} = \beta_{1,2} \underline{A}_0 = A_{1,2} e^{i\varphi_0}$, il vient

$$\begin{cases} \underline{a}_1(t) = \underline{A}_1 e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi[S_1M]_1}{\lambda_0}\right)} \\ \underline{a}_2(t) = \underline{A}_2 e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi[S_1M]_2}{\lambda_0}\right)} \end{cases}$$

ou en grandeurs réelles

$$\begin{cases} a_1(t) = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi[S_1M]_1}{\lambda_0} + \varphi_0\right) \\ a_2(t) = A_2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi[S_1M]_2}{\lambda_0} + \varphi_0\right) \end{cases}$$

La formule de Fresnel générale donne l'expression de l'intensité lumineuse I en M en fonction de celles I_1 et I_2 qui y seraient observées si l'onde 1 ou l'onde 2 était seule :

$$I = K < (a_1(t) + a_2(t))^2 > \text{ et } \begin{cases} I_1 = K < a_1^2(t) > \\ I_2 = K < a_2^2(t) > \end{cases}$$

En linéarisant les expressions et en utilisant le fait que la valeur moyenne d'un cosinus carré dépendant du temps vaut $\frac{1}{2}$ et que celle d'un cosinus dépendant du temps vaut 0, on obtient

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$$

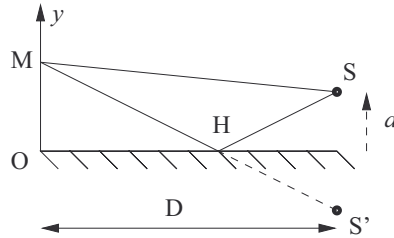
où $\delta = [S_1M] - [S_2M]$ est la différence de marche et $I_1 = K \frac{A_1^2}{2}$ et $I_2 = K \frac{A_2^2}{2}$. Voici le résumé de la démarche et quelques conseils de méthode.

- a) Le préalable indispensable au calcul est la construction des rayons. Au concours, un calcul de différence de marche mal ajusté à partir d'une construction fautive, qui révèle des lacunes en optique géométrique, n'a aucune valeur.
- b) La formule de Fresnel générale prouve que le problème des interférences à deux ondes se ramène à un problème de géométrie, la détermination de la différence de marche δ .
- c) À partir de l'expression de l'intensité lumineuse fonction, par δ , de la position de M sur un écran, on cherche
 - i) la position des **franges brillantes** où l'intensité lumineuse est maximale, soit I_{\max}
 - ii) la position des **franges sombres** où l'intensité lumineuse est minimale, soit I_{\min}
 - iii) le cas échéant l'**interfrange** séparant deux franges de même nature consécutives
 - iv) et le **contraste**

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Exemple :

Dans le dispositif suivant, S est une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 . On suppose $D \gg a$ et $D \gg y$. L'indice de l'air est pris égal à 1.



En M se superposent l'onde lumineuse arrivant en ligne droite de S et celle qui s'est réfléchiée en H sur le miroir. Les lois de Descartes à la réflexion permettent de considérer que le rayon semble provenir de S', symétrique orthogonal de S par rapport au miroir. À la réflexion, l'onde complexe est multipliée par $-\rho = \rho e^{i\pi}$, ρ un peu inférieur à 1 est le coefficient d'atténuation, et le signe - correspond à un déphasage de l'onde de π . Les distances sont obtenues grâce au théorème de Pythagore :

$$\begin{cases} SM = \sqrt{D^2 + (y - a)^2} = D \sqrt{1 + \frac{(y-a)^2}{D^2}} \simeq D \left[1 + \frac{y^2 - 2ay + a^2}{2D^2} \right] \\ S'M = \sqrt{D^2 + (y + a)^2} = D \sqrt{1 + \frac{(y+a)^2}{D^2}} \simeq D \left[1 + \frac{y^2 + 2ay + a^2}{2D^2} \right] \end{cases}$$

En considérant que ces distances sont très proches, on en déduit en grandeurs complexes

$$\begin{cases} \underline{a}_1(t) = \beta \underline{A}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi|SM|}{\lambda_0}\right)} \\ \underline{a}_2(t) = \rho e^{i\pi} \beta \underline{A}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi|S'M|}{\lambda_0}\right)} \end{cases}$$

et en grandeurs réelles

$$\begin{cases} a_1(t) = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi|SM|}{\lambda_0} + \varphi_0\right) \\ a_2(t) = \rho A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi|S'M|}{\lambda_0} + \varphi_0 + \pi\right) \end{cases}$$

Par application de la formule de Fresnel générale :

$$I = I_1 + \rho^2 I_1 + 2\rho I_1 \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} - \pi\right)$$

$$\text{avec } I_1 = \frac{KA_1^2}{2} \text{ et } \delta = [\text{SM}] - [\text{S}'\text{M}] = -\frac{2ay}{D}$$

$$\text{donc } I = I_1 + \rho^2 I_1 - 2\rho I_1 \cos \frac{4\pi ay}{\lambda_0 D}$$

L'intensité lumineuse sur l'axe y est une fonction périodique de y , les franges sont donc régulièrement espacées, et le contraste est

$$C = \frac{(I_1 + \rho^2 I_1 + 2\rho I_1) - (I_1 + \rho^2 I_1 - 2\rho I_1)}{(I_1 + \rho^2 I_1 + 2\rho I_1) + (I_1 + \rho^2 I_1 - 2\rho I_1)} = \frac{2\rho}{1 + \rho^2}$$

L'étude élémentaire de cette fonction prouve que le contraste croît de 0 à 1 quand ρ croît de 0 à 1. Il est donc maximal quand $\rho = 1$, donc que le miroir est parfait.

↪ Exercices 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7.

Établir et utiliser la formule de Fresnel
si $I_1 = I_2$.

Le contraste de la figure d'interférences vaut $C = 1$ lorsque les deux ondes qui se superposent en M donnent individuellement la même intensité $I_1 = I_2 = I_0$ (voir exercice 1.3). Dans ce cas (de loin le plus fréquent dans les problèmes de concours), la formule de Fresnel s'écrit

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right)$$

Il est important de savoir redémontrer rapidement cette expression, sans faire le calcul complet de la valeur moyenne du carré de la somme des deux ondes cosinusoidales, car la méthode suivante en grandeurs complexes est généralisable à la superposition de deux, trois, N et même une infinité non dénombrable d'ondes cohérentes. En voici le détail à deux ondes.

a) En effectuant le rapport des expressions complexes des ondes 1 et 2 en M, on obtient la **formule fondamentale de déphasage**, que nous appellerons « formule clé » dans la suite de cet ouvrage :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{a}_1(t) = \beta \underline{A}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi[\text{SM}]_1}{\lambda_0}\right)} \\ \underline{a}_2(t) = \beta \underline{A}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi[\text{SM}]_2}{\lambda_0}\right)} \end{array} \right. \Rightarrow \underline{a}_2(t) = \underline{a}_1(t) e^{-i\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}}$$

qui se traduit en français ainsi : en M, à amplitudes égales, l'onde 2 est égale à l'onde 1 à un terme de déphasage près dont l'argument est proportionnel à la différence de marche $\delta = [\text{SM}]_2 - [\text{SM}]_1$.

b) On en déduit l'onde résultante (on omet le t pour alléger les notations).

$$\underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 = \underline{a}_1 \left(1 + e^{-i \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}} \right)$$

c) En grandeurs complexes, l'intensité lumineuse est définie par $I = K \underline{a} \underline{a}^*$ où l'étoile désigne le conjugué, et K une constante multiplicative dont on ne cherche jamais à préciser la valeur ni la dimension. On en déduit

$$I_1 = K \underline{a}_1 \underline{a}_1^* = K \underline{a}_2 \underline{a}_2^* = I_2$$

et on note I_0 cette intensité commune.

d) On a donc

$$I = K \underline{a}_1 \underline{a}_1^* \left(1 + e^{-i \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}} \right) \left(1 + e^{i \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}} \right)$$

$$\text{soit } I = I_1 \left(2 + e^{-i \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}} + e^{i \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}} \right) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right)$$

qui est bien la formule de Fresnel simple à intensités égales.

e) Les franges brillantes sont d'intensité $4I_0$, elles correspondent à

$$\cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = 1 \text{ soit } p = \frac{\delta}{\lambda_0} = k \in \mathbf{Z}$$

f) Les franges sombres sont des zones d'extinction d'intensité nulle, elles correspondent à

$$\cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = -1 \text{ soit } p = \frac{\delta}{\lambda_0} = k + \frac{1}{2} \text{ avec } k \in \mathbf{Z}$$

g) $p = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ est l'**ordre d'interférences**, il est entier sur les franges brillantes et demi-entier sur les franges sombres.

h) Le lieu géométrique sur un écran des points M d'égale ordre d'interférences définit la forme des franges, on calcule le cas échéant l'interfrange, distance entre deux franges pour une variation d'une unité de p .

Exemple :

Le dispositif des **miroirs de Fresnel** est un système de deux miroirs M_1 et M_2 faisant un angle α très faible entre eux. Une source ponctuelle monochromatique S de longueur d'onde dans le vide λ_0 est placée sur un axe perpendiculaire à l'arête et au miroir M_1 , à la distance h de celui-ci. Un écran est placé parallèlement à ce miroir, à la distance $2h$. Un point M de l'écran, dans le plan (O, x, y) de la figure, est repéré par son ordonnée y .

Les sources jumelles S_1 et S_2 sont les symétriques orthogonales de S par rapport aux deux miroirs. Compte-tenu de la petitesse de α , leurs coordonnées sont

$$S_1 \begin{vmatrix} 3h \\ 0 \end{vmatrix} \text{ et } S_2 \begin{vmatrix} 3h \\ -2h\alpha \end{vmatrix}$$

On en déduit les distances

$$\begin{cases} S_1M = \sqrt{9h^2 + y^2} = 3h\sqrt{1 + \frac{y^2}{9h^2}} \approx 3h\left(1 + \frac{y^2}{18h^2}\right) \\ S_2M = \sqrt{9h^2 + (y + 2h\alpha)^2} \approx 3h\left(1 + \frac{(y + 2h\alpha)^2}{18h^2}\right) \end{cases}$$

donc $\delta = [S_2M] - [S_1M] = \frac{2\alpha h(y + \alpha h)}{3}$

Les franges brillantes sont définies par

$$\delta = k\lambda_0 \text{ soit } y_k = -\alpha h + k \cdot \frac{3\lambda_0}{2\alpha h}, k \in \mathbf{Z}$$

L'interfrange est donc

$$i = |y_{k+1} - y_k| = \frac{3\lambda_0}{2\alpha h}$$

↪ Exercices 1.8, 1.9, 1.10, 1.11.

Étudier la superposition de N ondes cohérentes.

Certains dispositifs, comme le **réseau plan à une dimension**, divisent une onde incidente quasi monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 , en N ondes cohérentes dont les expressions au point d'observation M sont $\underline{a}_1(t), \dots, \underline{a}_n(t), \dots, \underline{a}_N(t)$, avec une **différence de marche entre deux ondes consécutives constante** ; il en est donc de même du déphasage :

$$\delta_{n,n+1} = [\text{SM}]_{n+1} - [\text{SM}]_n = \delta \text{ et } \varphi_{n,n+1} = \varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$$

On en déduit que

- les **phases sont en progression arithmétique** :

$$\varphi_n = \varphi_1 + (n - 1)\varphi$$

- donc les différences de marche sont en progression arithmétique :

$$\delta_n = [\text{SM}]_n - [\text{SM}]_1 = (n - 1)\delta$$

- donc par application de la formule clé, les ondes complexes sont en progression géométrique :

$$\underline{a}_n(t) = \underline{a}_1(t) e^{-i \frac{(n-1)2\pi\delta}{\lambda_0}} = \underline{a}_1(t) [e^{-i\varphi}]^{n-1}$$

Ces propriétés facilitent le calcul de l'onde résultante et de l'intensité lumineuse associée pour cette superposition de N ondes. Voici la démarche du calcul.

- a) Les ondes étant cohérentes, on somme les ondes complexes, et selon une formule classique de mathématiques

$$\underline{a}(t) = \sum_{n=1}^N \underline{a}_n(t) = \underline{a}_1(t) \frac{1 - [e^{-i\varphi}]^N}{1 - e^{-i\varphi}}$$

- b) On factorise le numérateur et le dénominateur par l'exponentielle de l'angle moitié :

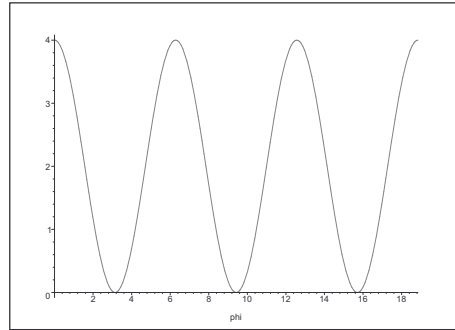
$$\underline{a}(t) = \underline{a}_1(t) \frac{e^{-i \frac{N}{2}\varphi}}{e^{-i\varphi}} \cdot \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

- c) On en déduit l'intensité lumineuse

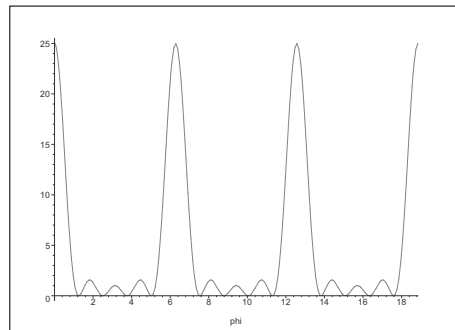
$$I = K \underline{a}(t) \underline{a}^*(t) = I_1 \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

- d) Les propriétés de cette fonction de φ doivent être mémorisées. On les obtient par utilisation d'un outil graphique.

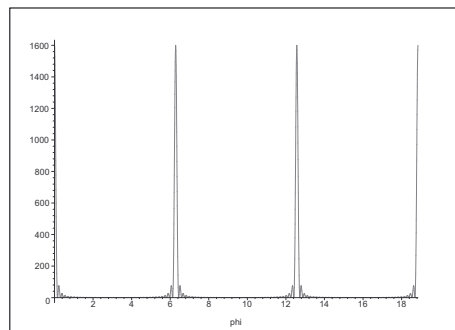
- Pour $N = 2$, on retrouve la formule de Fresnel, l'intensité lumineuse varie sinusoidalement entre 0 et $4I_1$ avec une période de 2π .



- Pour N variant de 3 à 10, la figure se déforme, il apparaît des pics d'intensité $N^2 I_1$ pour $\phi = p \cdot 2\pi$, p entier relatif, leur largeur diminue quand N augmente, et l'intensité est très petite devant la valeur maximale en dehors des pics. Voici l'allure de la courbe pour $N = 5$.



- Pour N supérieur à 10, la figure s'assimile à un **peigne de Dirac**, avec des pics d'intensité $N^2 I_1$ pour $\phi = p \cdot 2\pi$ de largeur extrêmement faible, et l'intensité est négligeable devant $N^2 I_1$ partout ailleurs. Voici l'allure de la courbe pour $N = 40$.



Exemple :

Il y a deux alternatives à l'utilisation du grapheur pour justifier l'existence de pics et mesurer leur largeur. La première, détaillée dans l'exercice 1.13, est l'utilisation du diagramme de Fresnel. La seconde est plus analytique. Notons $F_N(\varphi) = \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$ la **fonction de réseau**.

- Elle est paire et périodique de période 2π . On peut donc se ramener à l'étude sur l'intervalle $[0, \pi]$.
- Pour $\varphi \rightarrow 0$, son équivalent est

$$F_N(\varphi) \approx \frac{\frac{N^2 \varphi^2}{4}}{\frac{\varphi^2}{4}} = N^2$$

ce qui prouve que l'intensité des pics est $N^2 I_1$.

- Sur l'intervalle d'étude, la première annulation de la fonction de réseau est obtenue pour

$$\frac{N\varphi}{2} = \pi \text{ soit } \varphi = \frac{2\pi}{N}$$

- Pour $\varphi = \frac{\pi}{N}$, en calculant la valeur exacte au numérateur et en faisant le développement limité au dénominateur (c'est un petit angle pour pour $N > 30$), la fonction de réseau vaut

$$F_N\left(\frac{\pi}{N}\right) \approx \frac{1}{\frac{\pi^2}{4N^2}} = 0,4053N^2 \approx 0,5N^2$$

On est donc à peu près à mi-hauteur du pic.

- En dehors du pic, pour $\varphi \in \left[\frac{2\pi}{N}, \pi\right]$, le sinus au numérateur de la fonction de réseau est majoré par 1 et celui au dénominateur est minoré par

$$\sin^2 \frac{\pi}{N} \approx \frac{\pi^2}{N^2} \text{ donc } F_N(\varphi) \leq \frac{N^2}{\pi^2} \approx \frac{N^2}{10}$$

En somme, le pic a une largeur totale $\frac{4\pi}{N}$ et une largeur à mi-hauteur $\frac{2\pi}{N}$, qui tendent vers 0 quand N tend vers l'infini, une hauteur $N^2 I_0$ et l'intensité en dehors des pics est inférieure à un dixième à celle des pics.

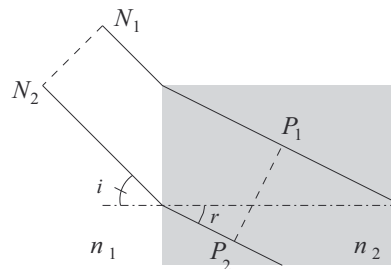
↪ **Exercices 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16.**

Énoncés des exercices

1.1

Loi de Malus à la traversée d'un dioptre plan

Dans la figure suivante, un faisceau de lumière parallèle se réfracte en traversant un dioptre plan séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 . La droite (N_1N_2) est perpendiculaire à la direction du faisceau incident, la droite (P_1P_2) est perpendiculaire à la direction du rayon du faisceau réfracté.



- Montrer que $[N_1P_1] = [N_2P_2]$.
- Quel est le lien entre ce résultat et la loi de Malus ?

1.2

Démonstration de la formule de Fresnel générale : calcul de l'intensité

On reprend les notations du cours. Les deux ondes lumineuses incidentes en M issues d'une source S ponctuelle, monochromatique, de pulsation ω s'écrivent en grandeurs réelles :

$$\begin{cases} a_1(t) = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi[SM]_1}{\lambda_0} + \varphi_0\right) \\ a_2(t) = A_2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi[SM]_2}{\lambda_0} + \varphi_0\right) \end{cases}$$

On donne

$$2 \cos p \cos q = \cos(p+q) + \cos(p-q)$$

- Donner les expressions de

$$I_1 = K \langle a_1^2(t) \rangle \text{ et } I_2 = K \langle a_2^2(t) \rangle$$

en fonction de K, A_1 et A_2 .

- Donner l'expression de

$$I = K \langle (a_1(t) + a_2(t))^2 \rangle$$

en fonction de I_1 , I_2 et la différence de marche δ .

- La formule de Fresnel dépend-elle du choix de la différence calculée, $[SM]_2 - [SM]_1$ ou $[SM]_1 - [SM]_2$?

1.3

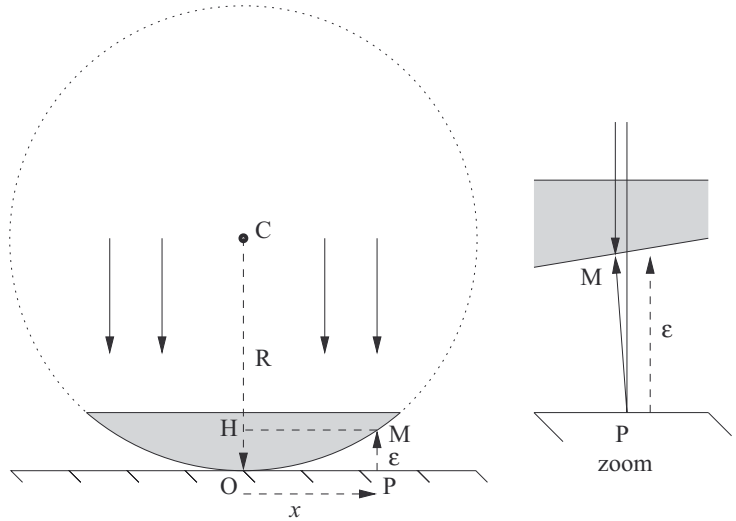
Contraste maximal

Justifier que le contraste d'une figure d'interférences à deux ondes en lumière monochromatique est maximal quand $I_1 = I_2$.

1.4

Anneaux de Newton

Une lentille plan-convexe L, fragment d'une bille de verre d'indice n , de rayon R et de centre C est posée sur un miroir plan, le contact ponctuel se trouvant en O . On éclaire le dispositif sous incidence normale en lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 .



On observe les interférences sur la face sphérique. En un point M de cette face, repéré par le rayon x , se rencontrent le rayon ayant traversé la lentille et celui qui, en plus de la traversée, s'est réfléchi sur le miroir en P .

a) Montrer que l'épaisseur de la couche d'air en $x \ll R$ est

$$\epsilon \approx \frac{x^2}{2R}$$

b) À la réflexion sur le miroir, on observe un déphasage de π équivalent à l'ajout au chemin optique de $\frac{\lambda_0}{2}$. Montrer que les franges sont des cercles concentriques, préciser le rayon de la n ème frange brillante et celui de la n -ième frange sombre en considérant qu'un point central est une frange et en numérotant du centre vers la périphérie.

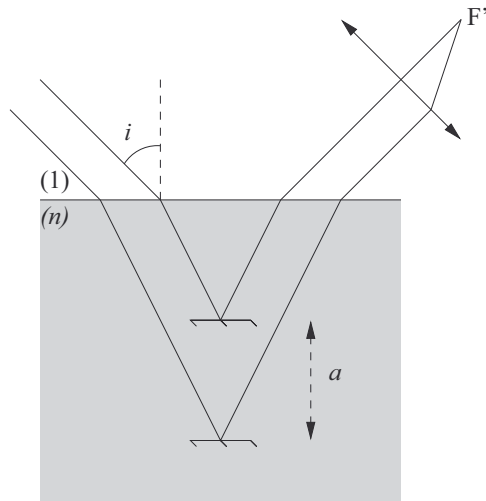
c) Décrire qualitativement ce qu'on observe en lumière blanche.



1.5

Cristaux liquides

Le comportement optique d'un cristal liquide est assimilable à un système de deux miroirs parallèles distants de a plongés dans un liquide d'indice n . Ils sont éclairés par un faisceau laser monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 , d'angle d'incidence i avec la surface du liquide. On place un capteur d'intensité lumineuse au foyer image F' d'une lentille convergente perpendiculaire à la direction des rayons émergents.



- a) Déterminer la différence de marche δ entre les deux rayons tracés sur la figure en fonction de a , i et n .
- b) On suppose que le milieu liquide n'est pas parfaitement transparent et que l'intensité lumineuse d'un rayon seul est

$$I = I_0 e^{-\frac{\mathcal{L}}{\ell}}$$

où \mathcal{L} est la distance parcourue dans le liquide et ℓ une longueur caractéristique d'absorption. Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse détectée en F' . On négligera cette atténuation dans la fin de l'exercice, ce qui revient à prendre ℓ très grand devant a .

- c) Quelle est la plus petite valeur de a pour laquelle on observe une intensité nulle ?
- d) Expliquer qualitativement pourquoi l'observation d'une image sur un écran à cristaux liquides fait apparaître des couleurs très différentes quand on la regarde avec un angle d'incidence important.

1.6

Absence d'interférences entre ondes de pulsations différentes

En un point M de l'espace se superposent deux ondes lumineuses de pulsations ω_1 et ω_2 différentes, issues de deux sources ponctuelles S_1 et S_2 , dont les expressions sont

$$\begin{cases} a_1(t) = A \cos\left(\omega_1 t - \frac{2\pi[S_1 M]}{\lambda_0}\right) \\ a_2(t) = A \cos\left(\omega_2 t - \frac{2\pi[S_2 M]}{\lambda_0}\right) \end{cases}$$

On donne

$$2 \cos p \cos q = \cos(p + q) + \cos(p - q)$$

a) Donner les expressions de

$$I_1 = K \langle a_1^2(t) \rangle \text{ et } I_2 = K \langle a_2^2(t) \rangle$$

en fonction de K, A_1 et A_2 .

b) Donner l'expression de

$$I = K \langle (a_1(t) + a_2(t))^2 \rangle$$

c) Pourquoi dit-on qu'il n'y a pas d'interférences entre deux lumières de couleurs distinctes ?

1.7

Absence d'interférences à sources distinctes, à δ trop grand (analyse documentaire)

Modèle d'émission. Dans le modèle des « trains d'onde », une source de lumière monochromatique émet une succession de bouffées de lumière quasi sinusoïdales dans des intervalles de temps successifs $[t_n, t_{n+1}[= [nT, (n+1)T[$, qui s'écrivent sous la forme du produit d'une enveloppe

$$\mathcal{E}_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_n \\ A & \text{si } t_n \leq t < t_{n+1} \\ 0 & \text{si } t \geq t_{n+1} \end{cases}$$

et d'une porteuse

$$\mathcal{P}_n(t) = \cos(\omega t + \varphi_n)$$

La phase φ_n du train d'onde de numéro n est tirée aléatoirement. T est de l'ordre de la microseconde.

Capteur de lumière. Le temps de réponse d'un capteur de lumière quadratique est de l'ordre de la milliseconde. Il mesure une intensité lumineuse I, produit de la valeur moyenne du carré de l'onde réelle par une constante K.

a) On superpose en M deux ondes lumineuses de même amplitude A et de même pulsation ω , issues de deux sources ponctuelles S_1 et S_2 . On note δ la différence de marche entre les deux ondes. Justifier qu'on ne peut observer d'interférences entre les deux ondes.

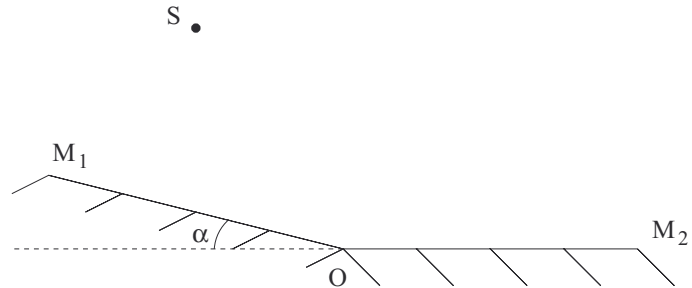
b) On superpose en M deux ondes lumineuses issues d'une source ponctuelle S d'amplitude A et de pulsation ω , ayant suivi deux chemins optiques distincts $[SM]_1$ et $[SM]_2$. On note δ la différence de marche entre les deux ondes. Justifier qu'on ne peut observer d'interférences entre les deux ondes si $\delta \geq cT$.



1.8

Miroirs de Fresnel

Dans le dispositif suivant, $\alpha = 0,08$ mrad est un petit angle (il a été exagéré sur la figure), S est une source ponctuelle de lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 , O est un point de l'arête (O, z) intersection des miroirs M_1 et M_2 . On donne $OS = R = 80$ cm. S_1 (respectivement S_2) est le symétrique orthogonal de S par rapport à M_1 (resp. M_2).



L'écran est

- parallèle à l'arête (O, z)
- perpendiculaire au plan médiateur de $[S_1S_2]$
- à la distance $d = 1,20$ m de O.

On note H le projeté orthogonal de O sur le miroir ; un point M de l'écran est repéré par $\overline{HM} = x$ et l'axe HY passe par O.

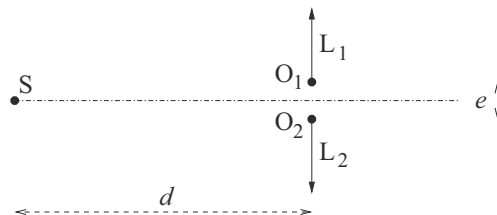
- Faire une figure complète. Donner les coordonnées des points S_1 , S_2 et M dans le référentiel (H, x, y).
- Déterminer l'intensité lumineuse $I(x)$ si S est une source ponctuelle de lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 576,9$ nm. Calculer l'interfrange.
- S est une source ponctuelle de lumière blanche. Décrire la figure observée.



1.9

Lentille brisée

On considère une lentille convergente de focale $f' = 25$ cm, coupée par un plan contenant l'axe optique et son centre. On obtient alors deux demi-lentilles L_1 et L_2 symétriques par rapport à ce plan, de centre O_1 et O_2 et de focale f' . On notera $e = 2$ mm la distance entre les centres des deux demi-lentilles. L'espace entre les deux lentilles est opaque. On place sur l'axe de symétrie, à une distance $d = 40$ cm du plan des lentilles, une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 600$ nm. On note S'_1 et S'_2 les images de S par L_1 et L_2 .



On donne les relations de conjugaison de Descartes avec les notations usuelles :

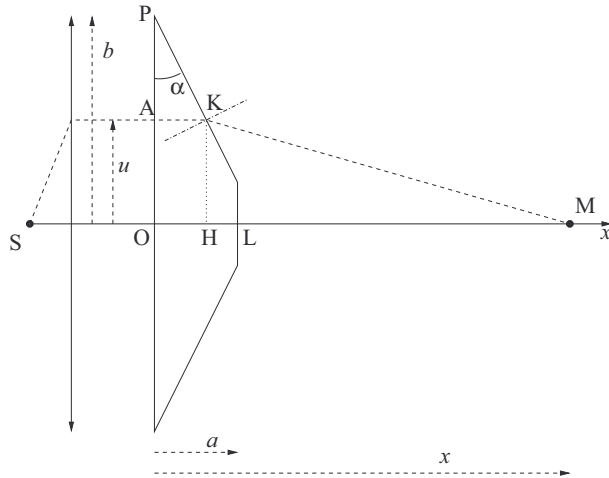
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \text{ et } \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

- Déterminer les positions de S'_1 et S'_2 et calculer la distance e' les séparant.
- On place un écran à une distance $D = 250$ cm des deux lentilles. On note D' la distance entre l'écran et le plan contenant S'_1 et S'_2 . Un point M de l'écran, dans le plan de la figure, est repéré par son ordonnée y . On suppose $D' \gg e'$ et $D' \gg y$. Calculer l'interfrange i .
- Calculer le nombre de franges observables si l'écran possède une hauteur $h = 10$ cm.

1.10

Interférences à trois ondes

Dans le dispositif suivant, S est une source ponctuelle de lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 et la lame de verre trapézoïdale est faite d'un verre transparent d'indice n . On définit β par la relation $\sin\beta = n \sin\alpha$.



- Identifier les trois rayons issus de S qui se croisent en M.
- On s'intéresse au rayon (SAM).
 - Montrer que l'angle en M du triangle (MHK) vaut $\beta - \alpha$.
 - En déduire que

$$u = \frac{x - b \tan \alpha \tan(\beta - \alpha)}{1 - \tan \alpha \tan(\beta - \alpha)}$$

- Donner l'expression de la différence de marche

$$\delta = [\text{SOLM}] - [\text{SAKM}]$$

en fonction de x et de u et justifier (sans l'exprimer complètement) que c'est une fonction affine de x qu'on notera désormais

$$\delta(x) = \lambda x + \mu$$

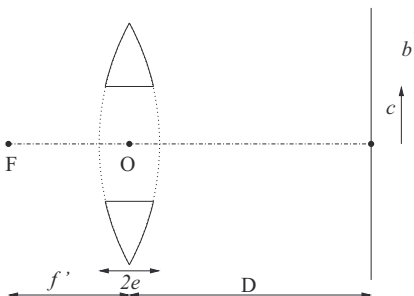
- Donner l'expression de la fonction d'onde complexe en M.
- En déduire l'intensité lumineuse $I(M)$.
- Calculer le contraste.



1.11

Lentille trouée (résolution de problème)

Une lentille convergente de centre O , de rayon b , de distance focale f' et d'épaisseur au centre $2e$, est percée en son centre selon un disque de rayon $c < b$. On place en son foyer objet F une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 . On place un écran plan à une distance D de O avec $D > f' \gg b > c$.



Quelle est la forme des franges observées ? Combien en distingue-t-on ? Faire l'application numérique avec $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$, $c = 3,0 \text{ mm}$, $b = 1,0 \text{ cm}$, $f' = 1,0 \text{ m}$ et $D = 3,0 \text{ m}$.



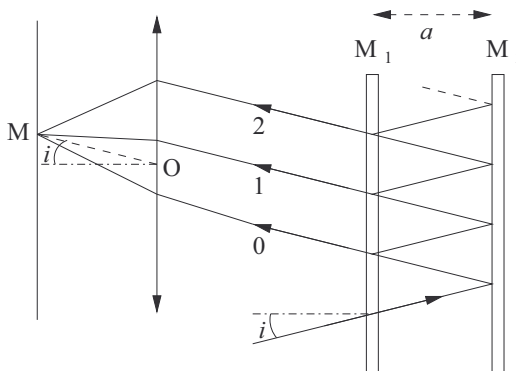
1.12

Interféromètre de Fabry-Perot (PT (2) 2012)

Un interféromètre de Fabry-Perot est formé de deux miroirs parallèles M_1 et M_2 semi-réfléchissants, distants de a . On note r le coefficient de réflexion en amplitude de l'onde lumineuse et t le coefficient de transmission des miroirs :

$$r = \frac{a_r}{a_i} \text{ et } t = \frac{a_t}{a_i}$$

Une onde lumineuse incidente frappe M_1 avec un angle d'incidence i très faible. Elle subit une suite infinie de transmissions et de réflexions. On fait l'observation à l'infini dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f' .



On note $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k, \dots$ les ondes lumineuses complexes en M des rayons successifs émergeant de M_1 . On pose $\varphi = \frac{4\pi a \cos i}{\lambda_0}$.

- a) Déterminer la différence de marche en M entre les rayons k et $k + 1$.
- b) Déterminer le rapport entre les amplitudes complexes des ondes correspondantes.
- c) Montrer que l'intensité lumineuse en M s'écrit

$$I(\varphi) = \frac{J_0}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Exprimer m en fonction de r et faire l'application numérique avec $r = 0,9$.



1.13

Étude graphique de la fonction de réseau grâce aux diagrammes de Fresnel

L'onde complexe superposition de N ondes dont les phases forment une suite arithmétique s'écrit

$$\underline{a}(t) = \sum_{n=1}^N \underline{a}_n(t) = \underline{a}_1(t) \cdot \underline{s}(\varphi) \text{ avec } \underline{s}(\varphi) = 1 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \dots + e^{iN\varphi}$$

- a) On prend $N = 6$. Tracer dans le plan complexe la représentation de fresnel de $\underline{s}(\varphi)$ dans les cas suivants :
 - i) $\varphi = 0$
 - ii) $\varphi = \frac{\pi}{6}$
 - iii) $\varphi = \frac{\pi}{3}$
 - iv) $\varphi = \pi$.
- b) En mesurant à chaque fois la longueur du vecteur somme, tracé l'allure de la fonction de réseau

$$F_6(\varphi) = |\underline{s}|^2$$

en fonction de φ .

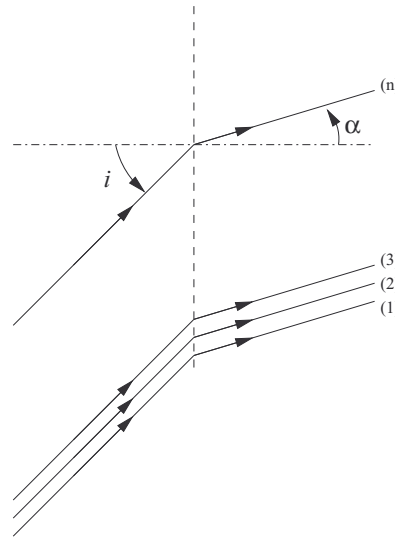
- c) Justifier par construction graphique sommaire les résultats énoncés dans le cours quand N est grand.



1.14

Formule fondamentale des réseaux

Un réseau plan à transmission est formé de N fentes parallèles distantes de a , pas du réseau. Il est placé sur le plateau d'un **spectrogoniomètre** où il est éclairé par un faisceau de lumière parallèle monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 , dont l'angle d'incidence est i , et observé à l'infini, au foyer image d'une lentille convergente sous un angle de visée α .

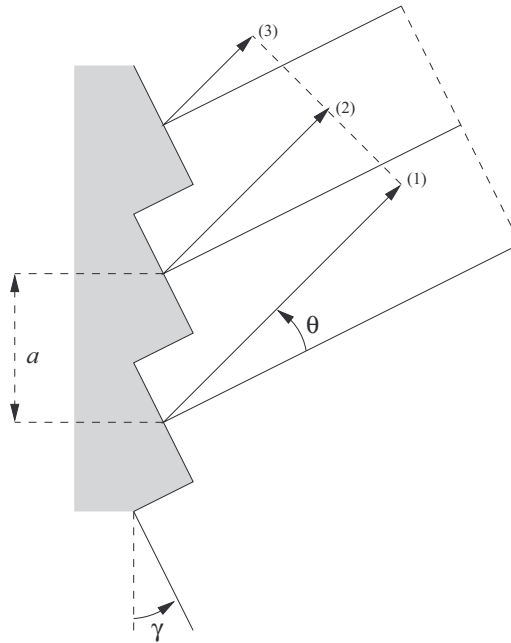


- Quel phénomène explique qu'il est possible d'observer de la lumière dans une direction α distincte de i ?
- Donner l'expression de la différence de marche δ entre les rayons passant par deux fentes consécutives. En déduire l'expression du déphasage φ .
- Par application du résultat du cours, en déduire qu'on observe des pics de lumière dans des directions α_p privilégiées. Énoncer la **formule fondamentale des réseaux** reliant a , i , α , λ_0 et un entier relatif p appelé ordre.
- On prend $i = 0$, $\lambda_0 = 620 \text{ nm}$ et $a = 3,0 \mu\text{m}$. Combien de pics distincts observe-t-on quand on fait varier l'angle α de la lunette de visée ?
- Pour une valeur donnée $p \neq 0$ de l'ordre d'observation, à i fixé, on note $\alpha_p(i)$ l'angle d'observation du pic de lumière. On fait varier i et on définit l'angle de déviation $D_p(i) = i - \alpha_p(i)$. Montrer que $D_p(i)$ passe par un minimum D_p^* lorsque $\alpha_p(i) = -i$. En déduire l'expression de λ_0 en fonction de p , a et D_p^* .
- La source de lumière est maintenant une lampe à vapeur atomique dont le spectre comporte un nombre fini de radiations monochromatiques. Expliquer pourquoi le dispositif agit comme un spectroscopie et justifier qu'il est possible expérimentalement de déterminer assez précisément les valeurs des différentes longueurs d'onde du spectre.

1.15

Réseau à échelettes

Le réseau à échelettes est un réseau par réflexion formé de facettes réfléchissantes éclairées ici sous incidence normale par un faisceau laser de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$. Les facettes sont inclinées d'un angle $\gamma = 0,464 \text{ rad}$ par rapport à la verticale et leurs centres sont distants de a . Chacune se comporte comme une pupille diffractante et diffuse la lumière dans toutes les directions. On fait l'observation à l'infini dans une direction faisant un angle θ avec la normale à la facette.



- a) Déterminer la différence de marche δ entre les rayons réfléchis par deux facettes contiguës. En déduire le déphasage φ .
- b) On observe au total 12 pics de lumière. En déduire une estimation de la valeur de a .

1.16

Superpositions partielles

Un dispositif optique (un réseau plan par exemple) éclairé par une source monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 opère une division de l'onde et forme en un point M de l'espace la superposition de N ondes dont les phases sont en progression arithmétique de raison φ . N est un multiple de 6.

- a) Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I(\varphi)$ en fonction de I_1 , N et φ , et préciser l'allure de cette fonction en fonction de φ .
- b) On occulte toutes les ondes d'indice pair. Même question.
- c) On occulte toutes les ondes d'indice congru à 1 ou 2 modulo 3. Même question.
- d) On occulte toutes les ondes d'indice 0 modulo 3. Même question (on pourra poser $N = 3N'$ et $\varphi' = 3\varphi$ pour l'étude graphique).

Du mal à démarrer ?

1.1

On peut tracer les plans d'onde limites dans les deux milieux, on obtient ainsi deux triangles rectangles d'hypothénuse commun confondu avec le dioptré. L'utilisation des relations de trigonométrie et de la deuxième loi de Descartes permettent de conclure.

1.2

La valeur moyenne d'un cosinus carré dépendant du temps vaut $\frac{1}{2}$, celle d'un cosinus dépendant du temps vaut 0 et celle d'un cosinus constant est égale à ce cosinus. En linéarisant le produit des deux cosinus apparaissant dans le développement du carré de la somme des deux ondes, on obtient le résultat attendu.

1.3

Après avoir exprimé le contraste en fonction de I_1 et I_2 , on peut justifier que ce contraste, toujours inférieur ou égal à 1, ne vaut 1 que lorsque $I_1 = I_2$.

1.4

L'expression de ε peut être obtenue par application du théorème de Pythagore, puis utilisation d'un développement limité. La différence de marche est facile à relier à ε .

1.5

Comme il est indiqué dans la méthode du cours, il faut trouver la surface d'onde la plus avancée avant et après les miroirs. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 1.1. Le calcul de δ et celui des distances parcourues dans le liquide pour la question (b) nécessitent beaucoup de soin avec les relations de trigonométrie.

1.6

La valeur moyenne d'un cosinus carré dépendant du temps vaut $\frac{1}{2}$, celle d'un cosinus dépendant du temps vaut 0 et celle d'un cosinus constant est égale à ce cosinus.

1.7

Dans les différentes valeurs moyennes apparaissent les différences des phases des deux trains d'onde qui se superposent. Comme ces phases sont tirées aléatoirement à chaque train d'onde, et que la moyenne est effectuée par le capteur sur environ 1000 trains d'onde, la valeur moyenne du cosinus de ces angles est nulle.

1.8

On vérifiera que S, S_1 et S_2 sont équidistants de O, et que les droites (OS_1) et (OS_2) font des angles $\pm\alpha$ avec (H, y) . On en déduit les coordonnées des trois points, puis les distances (simplifiées par développement limité) et enfin δ .

1.9

(a) On applique les relations de conjugaison de Descartes pour déterminer la position et la taille des images de A_1S par la demi-lentille 1 (A_1 est le projeté orthogonal de S sur l'axe de la demi-lentille 1) et de A_2S par la demi-lentille 2. (b) On calcule les distances S'_1M et S'_2M grâce au théorème de Pythagore et on sim-

plifie l'expression grâce à un développement limité. On en déduit δ et l'interfrange. (c) Le fait que S'_1 et S'_2 soient les images de S par des demi-lentilles a pour conséquence que l'écran n'est pas totalement soumis aux deux ondes. La hauteur de la zone d'interférences est inférieure à h .

1.10

Le début de cet exercice nécessite de bons réflexes de géomètre. Les résultats étant donnés, on peut passer en première lecture ces difficultés, et se concentrer sur le calcul en grandeurs complexes de la somme \underline{a} des trois ondes, et le calcul de l'intensité lumineuse $K\underline{a}\underline{a}^*$ (évidemment, la formule de Fresnel n'est pas adaptée ici car trois ondes interfèrent).

1.11

Il est aisé de trouver les deux rayons qui se superposent en un point M de l'écran d'ordonnée $y \in [c, b]$. Le chemin optique du rayon direct SM est calculé par application du théorème de Pythagore et développement limité. Le chemin optique du rayon dévié par la lentille est calculé en utilisant la loi de Malus, et en imaginant la lentille complète.

1.12

Il faut faire un schéma détaillé où figurent le rayon incident au point P_k du miroir 1, le rayon k émergeant vers M, puis les rayons successifs jusqu'au point P_{k+1} et le rayon émergeant $k+1$. Le tracé des plans d'onde permet de déterminer δ . L'évaluation de l'amplitude des rayons en tenant compte des coefficients de réflexions et de transmissions successives permet de déterminer le rapport des modules des amplitudes. La sommation de la série géométrique donne le résultat.

1.13

La construction des vecteurs représentatifs pour $N = 6$ ne pose pas de difficulté. Les formes géométriques obtenues (segment, demi-cercle, cercle) dans ce cas peuvent être généralisées.

1.14

La différence de marche est calculée en traçant les plans d'onde en amont et en aval de deux fentes consécutives. La limitation du nombre d'ordres observables est conséquence du fait qu'un sinus est compris entre -1 et 1 .

1.15

La différence de marche est calculée en traçant les plans d'onde en amont et en aval de deux miroirs consécutifs. L'observation est possible pour $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \theta_{\text{lim}}]$, on doit déterminer θ_{lim} par des considérations de trigonométrie, et on en déduit l'intervalle des valeurs possibles pour l'entier p .

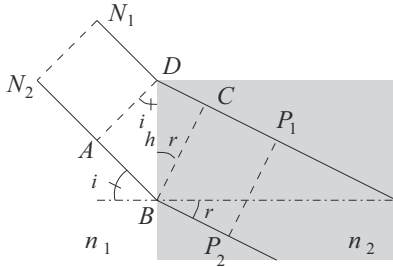
1.16

Les cas (a), (b) et (c) se ramènent au cas du cours. Dans le cas (d), il faut superposer deux séries de même raison et de même nombre de termes, mais de premiers termes distincts.

Corrigés des exercices

1.1

- a) Construisons les surfaces d'onde les plus avancées, (DA) en amont et (CD) en aval du dioptre. Notons h l'hypothénuse commun aux deux triangles rectangles (BCD) et (DAB). On identifie les angles i et r dans ces triangles.



La différence entre les deux chemins est

$$\delta = [N_2P_2] - [N_1P_1]$$

$$\delta = ([N_1A] + [AB] + [BP_2]) - ([N_1D] + [DC] + [CP_1])$$

soit $\delta = [AB] - [DC]$. Dans les triangles rectangles (DAB) et (BCD),

$$AB = h \sin i \text{ et } DC = h \sin r$$

$$\text{donc } \delta = [AB] - [DC] =$$

$$n_1 h \sin i - n_2 h \sin r = h(n_1 \sin i - n_2 \sin r) = 0$$

d'après la deuxième loi de Descartes à la réfraction.

- b) Si le plan matérialisé par la droite (N_1N_2) est une surface équiphasé, alors le résultat de la première question prouve qu'il en est de même pour la surface (P_1P_2) qui est donc à son tour surface d'onde, et elle est bien perpendiculaire aux rayons, ce qui est conforme à la loi de Malus.

1.2

- a) la valeur moyenne d'un cosinus carré dépendant du temps vaut $\frac{1}{2}$ donc

$$\begin{cases} I_1 = K < A_1^2 \cos^2 \left(\omega t - \frac{2\pi[SM]_1}{\lambda_0} + \varphi_0 \right) > = \frac{KA_1^2}{2} \\ I_2 = K < A_2^2 \cos^2 \left(\omega t - \frac{2\pi[SM]_2}{\lambda_0} + \varphi_0 \right) > = \frac{KA_2^2}{2} \end{cases}$$

- b) On a

$$I = K < a_1^2(t) > + K < a_2^2(t) > + 2K < a_1(t)a_2(t) >$$

$$I = I_1 + I_2 + KA_1A_2 < \cos \left(\omega t - \frac{2\pi[SM]_1}{\lambda_0} + \varphi_0 \right) >$$

$$\cos \left(\omega t - \frac{2\pi[SM]_2}{\lambda_0} + \varphi_0 \right) >$$

En utilisant la formule de linéarisation donnée par l'énoncé :

$$I = I_1 + I_2 + KA_1A_2 < \cos \left(2\omega t - \frac{2\pi([SM]_1 + [SM]_2)}{\lambda_0} + 2\varphi_0 \right) >$$

$$+ KA_1A_2 < \cos \left(-\frac{2\pi([SM]_1 - [SM]_2)}{\lambda_0} \right) >$$

La valeur moyenne du premier cosinus, qui dépend du temps, est nulle. Le second cosinus est constant, il est donc égal à sa valeur moyenne. De plus

$$I_1 I_2 = \frac{K^2 A_1^2 A_2^2}{4} = \left(\frac{KA_1 A_2}{2} \right)^2$$

$$\text{donc } KA_1 A_2 = 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$\text{donc } I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$$

- c) La fonction cosinus étant paire, on peut calculer indifféremment la différence de marche par l'une ou l'autre des formules.

1.3

Le contraste vaut

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

$$\text{soit } C = \frac{(I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}) - (I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2})}{(I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}) + (I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2})}$$

$$C = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2I_1 + 2I_2}$$

Cette fraction, toujours inférieure ou égale à 1, prend sa valeur maximale 1 lorsque

$$I_1 + I_2 = 2\sqrt{I_1 I_2} \text{ donc } (I_1 + I_2)^2 = 4I_1 I_2$$

$$\text{donc } (I_1 - I_2)^2 = 0 \text{ soit } I_1 = I_2$$

1.4

- a) On a $x = HM$, $\varepsilon = R - CH$ et $CH^2 + HM^2 = R^2$, d'où

$$\varepsilon = R - \sqrt{R^2 - x^2} = R \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \right]$$

$$\varepsilon \approx R \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2R^2} \right) \right] = \frac{x^2}{2R}$$

Chapitre 1 Superposition d'ondes lumineuses

- b) La différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent en M est

$$\delta = 2\varepsilon + \frac{\lambda_0}{2}$$

Par application de la formule de Fresnel, on a interférence constructive ou destructive selon que l'ordre d'interférence

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{x^2}{\lambda_0 R} + \frac{1}{2}$$

est un entier ou un demi-entier. Les franges brillantes sont donc des cercles de rayon

$$x_k = \sqrt{\lambda_0 R \left(k + \frac{1}{2} \right)}$$

où k est un entier et les franges sombres de rayon

$$x'_k = \sqrt{k\lambda_0 R}$$

Au centre, $x = 0$, donc on a une tache sombre qu'on nomme première frange sombre avec $k = 0$. La n ième frange sombre est donc de rayon

$$r'_n = x'_{n-1} = \sqrt{(n-1)\lambda_0 R}$$

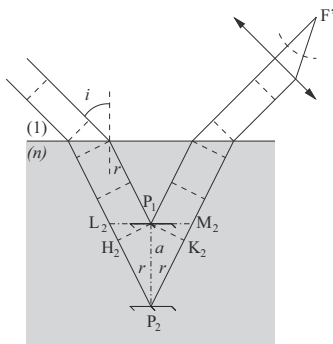
et la n ième frange brillante est de rayon

$$r_n = x_{n-1} = \sqrt{\lambda_0 R \left((n-1) + \frac{1}{2} \right)}$$

- c) Le centre est une tache sombre quelle que soit la valeur de λ . La plus petite des franges brillantes est celle correspondant à λ_0 le plus petit : elle est donc violette, puis toutes les couleurs s'allument, on a donc des cercles concentriques irisés.

1.5

- a) On trace le plan d'onde P_1H_2 le plus avancé en amont des miroirs, et P_1K_2 en aval (on utilise le fait que la réfraction ne provoque pas de différence de marche).



La différence de marche est

$$[SF']_1 - [SF']_2 = ([SP_1] + [P_1F']) - ([SH_2] + [H_2P_2] + [P_2K_2] + [K_2F'])$$

La loi de Malus entraîne

$$[SP_1] = [SH_2] \text{ et } [F'P_1] = [F'K_2]$$

et d'après le principe de retour inverse de la lumière

$$[P_1F'] = [K_2F']$$

La différence de marche se simplifie donc :

$$\delta = -[H_2P_2] - [P_2K_2]$$

Notons r l'angle de réfraction au dioptre air-liquide. La deuxième loi de Descartes donne

$$1 \sin i = n \sin r$$

La différence de marche vaut donc

$$\delta = -2a \cos r = -2a \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}$$

- b) On peut écrire

$$\begin{cases} I_1 = I_0 e^{-\frac{\mathcal{L}_1}{\ell}} \\ I_2 = I_0 e^{-\frac{\mathcal{L}_2}{\ell}} \end{cases}$$

$$\text{avec } \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 = L_2P_2 + P_2M_2 = \frac{2a}{\cos r}$$

On en déduit que

$$I_2 = I_1 e^{-\frac{2a}{\ell \cos r}}$$

Par application de la formule de Fresnel générale

$$I = I_1 \left(1 + e^{-\frac{2a}{\ell \cos r}} + 2e^{-\frac{a}{\ell \cos r}} \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right)$$

- c) On observe une intensité nulle lorsque le cosinus vaut -1 , la plus petite valeur correspond à

$$\delta = \frac{\lambda_0}{2} \text{ soit } a = \frac{\lambda_0}{4 \cos r} = \frac{\lambda_0}{4 \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}}$$

- d) En inversant la relation précédente, on peut considérer que pour a fixé, la longueur d'onde éteinte λ_0 dépend de l'angle d'incidence i . Pour un faisceau de lumière blanche, la couleur perçue est donc la couleur complémentaire de cette longueur d'onde éteinte. Lorsqu'on observe sous une incidence nulle (observation normale), puis proche de $\frac{\pi}{2}$ (observation rasante), les radiations éteintes sont respectivement

$$\begin{cases} \lambda_{0n} = 4a \\ \lambda_{0r} = 4a \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \end{cases}$$

On observe donc une couleur complémentaire différente selon l'incidence i .

1.6

- a) La valeur moyenne d'un cosinus carré dépendant du temps vaut $\frac{1}{2}$ donc

$$I_1 = \frac{KA_1^2}{2} \text{ et } I_2 = \frac{KA_2^2}{2}$$

- b) On a

$$I = K < a_1^2(t) > + K < a_2^2(t) > + 2K < a_1(t)a_2(t) >$$

$$I = I_1 + I_2 + KA_1A_2 < \cos\left(\omega_1 t - \frac{2\pi[S_1M]}{\lambda_0}\right) >$$

$$\cos\left(\omega_2 t - \frac{2\pi[S_2M]}{\lambda_0}\right) >$$

En utilisant la formule de linéarisation donnée par l'énoncé :

$$I = I_1 + I_2 + KA_1A_2 < \cos\left((\omega_1 + \omega_2)t - \frac{2\pi([S_1M] + [S_2M])}{\lambda_0}\right) >$$

$$+ KA_1A_2 < \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t - \frac{2\pi([S_1M] - [S_2M])}{\lambda_0}\right) >$$

- c) Le premier cosinus est de pulsation $\omega_1 + \omega_2$ non nulle, sa valeur moyenne est donc nulle. Si $\omega_1 \neq \omega_2$, il en est de même du second cosinus et

$$I = I_1 + I_2$$

Il n'y a donc pas d'interférence entre deux lumières de pulsations, donc de couleurs distinctes.

1.7

- a) L'onde issue de S_1 arrivant en M à la date t est celle émise à la date $t - \frac{[S_1M]}{c}$. Posons

$$\frac{[S_1M]}{c} = p_1 T \text{ et } \psi_{n,1} = \varphi_{n-p_1,1}$$

en supposant que p_1 est un entier. Ainsi, le n ième train d'onde en M à la date t correspond au $n - p_1$ ième émis par la source S_1 :

$$a_1(t) = A \cos(\omega t + \psi_{n,1})$$

De même, l'onde 2 détectée en M à la date t est

$$a_2(t) = A \cos(\omega t + \psi_{n,2})$$

Le capteur mesure la valeur moyenne, sur une durée $T_c \approx 1000 \times T$, du carré de la somme des deux ondes.

$$I = K < (a_1(t) + a_2(t))^2 > \text{ soit}$$

$$I = K < a_1^2(t) > + K < a_2^2(t) > + 2K < a_1(t)a_2(t) >$$

En subdivisant l'intervalle en 1000 intervalles :

$$K < a_1^2(t) > = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} a_1^2(t) dt \text{ soit}$$

$$K < a_1^2(t) > = \frac{K}{1000T} \sum_{n=0}^{999} \int_0^T A^2 \cos^2(\omega t + \psi_{n,1}) dt$$

Or la valeur moyenne d'un cosinus carré vaut $\frac{1}{2}$ donc

$$K < a_1^2(t) > = \frac{K}{1000} \cdot 1000 \cdot \frac{A^2}{2} = \frac{KA^2}{2}$$

et de même $K < a_2^2(t) > = \frac{KA^2}{2}$. Pour simplifier le calcul, l'énoncé suggère de choisir synchronisée l'émission des trains d'onde par les deux sources. On en déduit

$$\begin{aligned} 2K < a_1(t)a_2(t) > &= \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} a_1(t)a_2(t) dt \\ &= \frac{KA^2}{1000T} \sum_{n=0}^{999} \int_0^T 2A^2 \cos(\omega t + \psi_{n,1}) \cos(\omega t + \psi_{n,2}) dt \end{aligned}$$

On linéarise le produit des deux cosinus :

$$\begin{aligned} 2K < a_1(t)a_2(t) > &= \frac{KA^2}{1000} \left[\sum_{n=0}^{999} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega t + \psi_{n,1} + \psi_{n,2}) dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{999} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\psi_{n,1} - \psi_{n,2}) dt \right] \end{aligned}$$

La valeur moyenne du premier cosinus, qui dépend du temps, est nulle. Le second cosinus est constant, il est donc égal à sa valeur moyenne :

$$2K < a_1(t)a_2(t) > = \frac{KA^2}{1000} \sum_{n=0}^{999} \cos(\psi_{n,1} - \psi_{n,2})$$

Or les phases des deux trains d'onde sont tirées aléatoirement, et indépendamment l'une de l'autre à chaque nouveau train d'onde (c'est ici qu'on traduit l'**incohérence des sources**). Par conséquent, leur différence est un angle tiré aléatoirement sur le cercle trigonométrique. On somme les cosinus d'environ mille angles aléatoires sur le cercle trigonométrique, cette somme vaut donc zéro. On en déduit que

$$2K < a_1(t)a_2(t) > = 0 \text{ donc } I = I_1 + I_2$$

Il n'y a donc pas d'interférences entre ces deux ondes. Remarquons qu'il n'en serait pas de même si la durée des trains d'onde était supérieure au temps de réaction du capteur.

b) Le raisonnement est analogue à celui de la question précédente. Les phases des deux ondes qui arrivent en M à la date t sont

$$\begin{cases} \Psi_{n,1} = \varphi_{n-p_1} \\ \Psi_{n,2} = \varphi_{n-p_2} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} p_1 = \frac{[SM]_1}{cT} \\ p_2 = \frac{[SM]_2}{cT} \end{cases}$$

Les deux phases sont donc égales si

$$|p_1 - p_2| < 1 \text{ soit } \frac{\delta}{cT} < 1$$

Dans ce cas, on retrouve le calcul habituel du cours et on obtient la formule de Fresnel, il y a interférence. Si $\delta \geq cT$, alors les phases des deux ondes φ' et φ'' sont celles de deux trains d'onde distincts, elles sont donc tirées aléatoirement et indépendamment l'une de l'autre. On en déduit que

$$\begin{aligned} 2K < a_1(t)a_2(t) > &= \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} a_1(t)a_2(t) dt \\ &= \frac{K}{1000T} \sum_{n=0}^{999} \int_0^T 2A^2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi[SM]_1}{\lambda_0} + \varphi'\right) \cdot \\ &\quad \cos\left(\omega t - \frac{2\pi[SM]_2}{\lambda_0} + \varphi''\right) dt \end{aligned}$$

Soit, en linéarisant le produit des deux cosinus et en subdivisant l'intervalle d'intégration :

$$\begin{aligned} 2K < a_1(t)a_2(t) > &= \frac{KA^2}{1000} \cdot \\ &\sum_{n=0}^{999} \frac{1}{T} \int_0^T \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi([SM]_1 + [SM]_2)}{\lambda_0} + \varphi' + \varphi''\right) dt + \\ &\quad \sum_{n=0}^{999} \frac{1}{T} \int_0^T \cos\left(-\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} + \varphi' - \varphi''\right) dt \end{aligned}$$

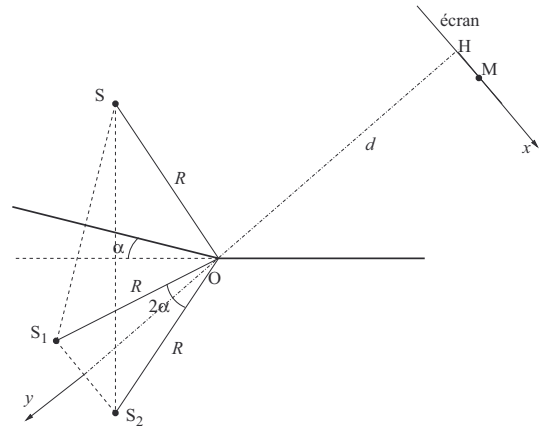
La valeur moyenne du premier cosinus, qui dépend du temps, est nulle. Le second cosinus est constant, il est donc égal à sa valeur moyenne :

$$2K < a_1(t)a_2(t) > = \frac{KA^2}{1000} \sum_{n=0}^{999} \cos\left(-\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} + \varphi' - \varphi''\right)$$

et comme à la question précédente, la somme de 1000 cosinus d'angles tirés aléatoirement (l'ajout du terme avec δ ne change rien) est nul et $I = I_1 + I_2$: il n'y a pas d'interférences. On peut dire que lorsque la différence de marche est trop grande, ce sont toujours des trains d'onde distincts qui arrivent en M par les deux chemins, et la source devient incohérente à elle-même.

1.8

a) Voici la figure complète.



Les points S, S₁, S₂ sont à égale distance R de O. Les coordonnées des trois points sont

$$S_1 \begin{vmatrix} -R \sin \alpha \approx -R\alpha \\ d + R \cos \alpha \approx d + R \end{vmatrix}, S_2 \begin{vmatrix} R \sin \alpha \approx R\alpha \\ d + R \cos \alpha \approx d + R \end{vmatrix}, M \begin{vmatrix} x \\ 0 \end{vmatrix}$$

b) Les distances peuvent se calculer en calculant les normes des vecteurs.

$$S_1M = \sqrt{(x + R\alpha)^2 + (d + R)^2} = (d + R) \sqrt{1 + \frac{(x + R\alpha)^2}{(d + R)^2}}$$

$$S_1M \approx (d + R) \left[1 + \frac{x^2 + 2xR\alpha + R^2}{2(d + R)^2} \right]$$

$$\text{et } S_2M \approx (d + R) \left[1 + \frac{x^2 - 2xR\alpha + R^2}{2(d + R)^2} \right]$$

On en déduit

$$\delta = [S_1M] - [S_2M] = \frac{2xR\alpha}{d + R}$$

Par application de la formule de Fresnel, on a donc

$$I(x) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi x R \alpha}{\lambda_0 (d + R)} \right)$$

Les franges brillantes sont obtenues quand le cosinus vaut +1, donc quand

$$\delta = k\lambda_0 \text{ soit } x_k = k \frac{\lambda_0 (d + R)}{2R\alpha}$$

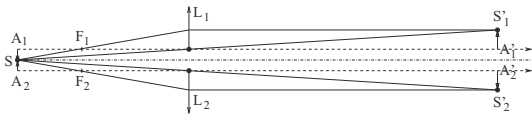
où k est un entier relatif. L'interfrange est donc

$$i = |x_{k+1} - x_k| = \frac{\lambda_0 (d + R)}{2R\alpha} = 9,0 \text{ mm}$$

- c) L'interfrange est proportionnel à λ . Les franges bleues sont donc moins larges que les franges vertes, elles-mêmes moins larges que les rouges. Autour de la frange centrale brillante ($k = 0$) blanche (les trois couleurs y sont brillantes), on distingue une bande jaune de chaque côté (le bleu est éteint, le vert et le rouge brillent), puis une bande rouge de part et d'autre.

1.9

- a) Les sources secondaires sont les images de S par les deux demi-lentilles. Définissons les axes optiques de chaque demi-lentille et notons A_1 et A_2 les projetés orthogonaux de S sur chacun de ces axes. L'image de l'objet A_1S est $A'_1S'_1$, celle de A_2S est $A'_2S'_2$.



Par application des relations de conjugaison :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{O_1A'_1} - \frac{1}{-d} = \frac{1}{f'} \\ \frac{1}{O_2A'_2} - \frac{1}{-d} = \frac{1}{f'} \end{array} \right. \text{ donc}$$

$$\overline{O_1A'_1} = \overline{O_2A'_2} = \frac{df'}{d-f'} = 66,7 \text{ cm}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{A'_1S'_1}}{\overline{A_1S}} = \frac{\overline{O_1A'_1}}{\overline{O_1A_1}} \\ \frac{\overline{A'_2S'_2}}{\overline{A_2S}} = \frac{\overline{O_2A'_2}}{\overline{O_2A_2}} \end{array} \right. \text{ donc}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{A'_1S'_1} = \frac{ef'}{2(d-f')} = 1,67 \text{ mm} \\ \overline{A'_2S'_1} = -\frac{ef'}{2(d-f')} = -1,67 \text{ mm} \end{array} \right.$$

On en déduit

$$e' = 2 + 2 \times 1,67 = 5,3 \text{ mm}$$

- b) Le système équivalent est donc formé de deux sources ponctuelles monochromatiques S'_1 et S'_2 distantes de $e' = 5,3 \text{ mm}$ et situées à

$$D' = D - 66,7 = 183,3 \text{ cm}$$

de l'écran. Les distances sont

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_1M = \sqrt{D'^2 + (y - e'/2)^2} \approx D' \left[1 + \frac{y^2 - e'y + e'^2/4}{2D'^2} \right] \\ S'_2M = \sqrt{D'^2 + (y + e'/2)^2} \approx D' \left[1 + \frac{y^2 + e'y + e'^2/4}{2D'^2} \right] \end{array} \right.$$

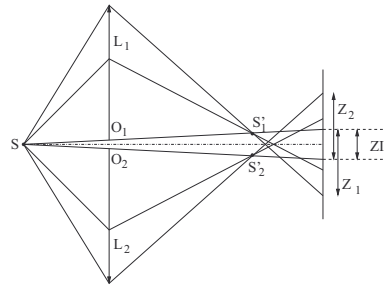
On en déduit la différence de marche

$$\delta = [S'_2M] - [S'_1M] = \frac{e'y}{D'}$$

Les franges brillantes sont définies par $\delta = k\lambda_0$ où k est un entier relatif, donc

$$y_k = k \frac{\lambda_0 D'}{e'} \text{ et } i = |y_{k+1} - y_k| = \frac{\lambda_0 D'}{e'} = 0,208 \text{ mm}$$

- c) On pourrait penser, à tort, faire le rapport $\frac{h'}{i}$. Mais les sources ponctuelles n'émettent pas de lumière dans toutes les directions car la lumière issue de S n'a traversé à chaque fois qu'une demi-lentille. Le faisceau de lumière passant par S'_1 est limité par le rayon extrême ($SO_1S'_1$) et de même pour l'autre point. Voici donc la figure qui fait apparaître la zone Z_1 de l'écran touchée par le faisceau passant par S'_1 , la zone Z_2 touchée par celui passant par S'_2 , et leur intersection ZI appelée **zone d'interférences**.



La largeur de cette zone est calculée par application du théorème de Thalès.

$$\frac{h'}{e} = \frac{D+d}{d} \text{ donc } h' = 1,45 \text{ cm}$$

On voit donc

$$\frac{h'}{i} = 69 \text{ franges}$$

1.10

- a) Les trois rayons sont celui tracé en pointillés sur le schéma, son symétrique par rapport à l'axe et le rayon droit horizontal (SOHLM).
- b) Calcul de la différence de marche.

- i) L'angle d'incidence en K est α , l'angle de réfraction est donc β d'après la deuxième loi de Descartes. L'angle entre (KM) et le dioptre vaut donc $\frac{\pi}{2} - \beta$. Or l'angle entre le dioptre et (KM) est α donc l'angle en K du triangle (MHK) est $\frac{\pi}{2} - \beta + \alpha$. L'angle en M est donc l'angle complémentaire

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta + \alpha \right) = \beta - \alpha$$

ii) Dans le triangle (MHK) :

$$HM = \frac{u}{\tan(\beta - \alpha)}$$

Dans le triangle (PAK) :

$$AK = (b - u) \tan \alpha$$

On en déduit

$$x = OM = OH + HM = AK + HM \text{ soit}$$

$$x = (b - u) \tan \alpha + \frac{u}{\tan(\beta - \alpha)} \text{ donc}$$

$$u = \frac{x - b \tan \alpha \tan(\beta - \alpha)}{1 - \tan \alpha \tan(\beta - \alpha)}$$

iii) Le chemin optique du rayon droit horizontal est

$$[\text{SOHLM}] = [\text{SOH}] + [\text{HL}] + [\text{LM}]$$

$$[\text{SOHLM}] = [\text{SOH}] + n(a - AK) + (x - a)$$

La droite (HK) est un plan d'onde, donc par application de la loi de Malus

$$[\text{SOH}] = [\text{SAK}]$$

On en déduit la différence de marche

$$\delta = n(a - AK) + (x - a) - KM$$

$$\text{or } \begin{cases} AK = (b - u) \tan \alpha \\ KM = \frac{u}{\cos(\beta - \alpha)} \end{cases}$$

et u est une fonction affine de x . Il en est donc de même pour AK , KM et δ , soit

$$\delta(x) = \lambda x + \mu$$

c) En M se superposent trois ondes. Par symétrie, l'onde inférieure a même expression que l'onde supérieure. Prenons comme référence le rayon (SOLM) et notons $\underline{a}_1(t)$ l'onde associée. Par application de la formule clé :

$$\underline{a}_2 = \underline{a}_3 = \underline{a}_1 e^{i \frac{2\pi\delta(x)}{\lambda_0}}$$

On en déduit

$$\underline{a}(t) = \underline{a}_1 \left(1 + 2e^{i \frac{2\pi\delta(x)}{\lambda_0}} \right)$$

d) Dans ce cas d'interférences à 3 ondes, on n'applique évidemment pas la formule de Fresnel mais on revient à la définition. L'intensité lumineuse est

$$I = K \underline{a}(t) \underline{a}^*(t)$$

$$I = K \underline{a}_1(t) \underline{a}_1^*(t) \left(1 + 2e^{i \frac{2\pi\delta(x)}{\lambda_0}} \right) \left(1 + 2e^{-i \frac{2\pi\delta(x)}{\lambda_0}} \right)$$

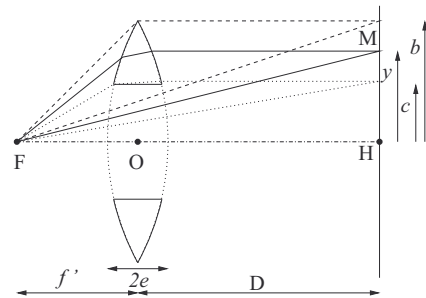
$$I = I_1 \left(5 + 4 \cos \frac{2\pi\delta(x)}{\lambda_0} \right)$$

e) L'intensité maximale est obtenue quand le cosinus vaut +1, l'intensité minimale quand ce cosinus vaut -1. Le contraste est donc

$$C = \frac{9I_1 - I_1}{9I_1 + I_1} = 0,8$$

1.11

Soit M un point de l'écran. Il reçoit deux rayons, celui ayant traversé la lentille et celui passant par le trou dans la lentille.



Si la lentille n'était pas trouée, les rayons issus de F formant une onde sphérique émergeraient de la lentille selon une onde plane parallèle à l'écran. Par application de la loi de Malus, il y a donc égalité des chemins optiques

$$[\text{FPM}] = [\text{FOH}] = 1(D + f' - 2e) + n \cdot 2e = D + f' + 2e(n - 1)$$

Le chemin optique du rayon direct est

$$[\text{FM}] = \sqrt{(D + f')^2 + y^2} \approx (D + f') \left(1 + \frac{y^2}{2(D + f')^2} \right)$$

On en déduit la différence de marche

$$\delta(y) = [\text{FPM}] - [\text{FM}] = 2e(n - 1) + \frac{y^2}{2(D + f')}$$

Par application de la formule de Fresnel

$$I(y) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta(y)}{\lambda_0} \right)$$

La figure étant invariante par rotation autour de l'axe, les franges sont donc circulaires concentriques. Elles n'apparaissent que là où les deux rayons peuvent apparaître.

• Les rayons ayant traversé la lentille trouée ne frappent l'écran que pour $c \leq y \leq b$ (en c , l'inégalité n'est qu'approximative).

- Les rayons traversant le trou ne frappent l'écran que pour $y \leq y_0$ avec, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{y_0}{c} = \frac{D + f'}{f'} \text{ soit } y_0 = \frac{c(D + f')}{f'} = 12 \text{ mm} > b$$

La zone d'interférences est donc limitée à $y \in [c, b]$. Les franges brillantes sont définies par $\delta = k\lambda_0$ où k est un entier relatif, soit

$$\frac{y_k^2}{2(D + f')} = k\lambda_0 - 2e(n - 1)$$

Les bornes de variation de y se traduisent par

$$\frac{c^2}{2(D + f')} \leq k\lambda_0 - 2e(n - 1) \leq \frac{b^2}{2(D + f')}$$

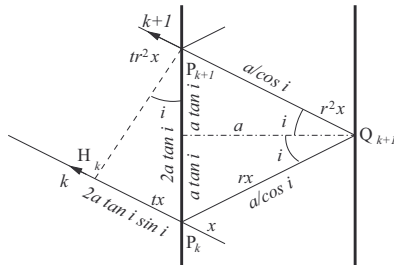
$$\text{soit } 1,125 \cdot 10^{-6} \leq k\lambda_0 - 2e(n - 1) \leq 12,5 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{soit } 1,875 + \frac{2e(n - 1)}{\lambda_0} \leq k \leq 20,83 + \frac{2e(n - 1)}{\lambda_0}$$

Il y a donc un nombre de franges visibles égal au nombre d'entiers compris entre 1,875 et 20,83, soit 19.

1.12

- a) Détaillons la construction des surfaces d'onde en partant d'un point P_k sur le miroir M_1 .



En partant de M et en suivant le sens inverse de la lumière, le plan d'onde passant par P_{k+1} coupe le rayon k en H_k . Les différents triangles rectangles de la figure permettent d'identifier les différentes longueurs indiquées sur la figure. On en déduit

$$\delta = [P_k Q_{k+1} P_{k+1} M] - [P_k H_k M]$$

$$\delta = [P_k Q_{k+1}] + [Q_{k+1} P_{k+1}] - [P_k H_k]$$

$$\text{soit } \delta = \frac{2a}{\cos i} - 2a \tan i \sin i$$

$$\delta = \frac{2a}{\cos i} - \frac{2a \sin^2 i}{\cos i} = 2a \cos i$$

- b) Le rayon incident en P_k (noté x sur le schéma) subit
- une transmission quand il sort selon le rayon k (noté tx)

- une réflexion partielle sur M_1 (rx), puis une réflexion partielle sur M_2 (r^2x) et une transmission à travers M_1 (tr^2x) quand il sort selon le rayon $k + 1$.

Le rapport des amplitudes réelles est donc r^2 . Par application de la formule clé et en tenant compte de ce coefficient, on en déduit le rapport des amplitudes complexes

$$\underline{a}_{k+1} = r^2 \underline{a}_k e^{-i \frac{2\pi \delta}{\lambda_0}} \text{ donc}$$

$$\frac{\underline{a}_{k+1}}{\underline{a}_k} = r^2 e^{-i \frac{4\pi a \cos i}{\lambda_0}} = r^2 e^{-i\varphi}$$

- c) L'onde résultante en M est la somme des amplitudes qui forment une suite géométrique de raison $r^2 e^{-i\varphi}$:

$$\underline{a} = \underline{a}_0 \sum_{k=0}^{\infty} (r^2 e^{-i\varphi})^k$$

Le module de la raison est strictement inférieur à 1, donc cette série géométrique converge et sa somme est

$$\underline{a} = \underline{a}_0 \frac{1}{1 - r^2 e^{-i\varphi}}$$

On en déduit l'intensité lumineuse

$$I = K \underline{a} \underline{a}^* = K \underline{a}_0 \underline{a}_0^* \frac{1}{1 - r^2 e^{-i\varphi}} \cdot \frac{1}{1 - r^2 e^{i\varphi}}$$

$$I = \frac{I_0}{1 - 2r^2 \cos \varphi + r^4}$$

En utilisant la relation de trigonométrie

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

on en déduit

$$I = \frac{I_0}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$I = \frac{\frac{I_0}{(1 - r^2)^2}}{1 + \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

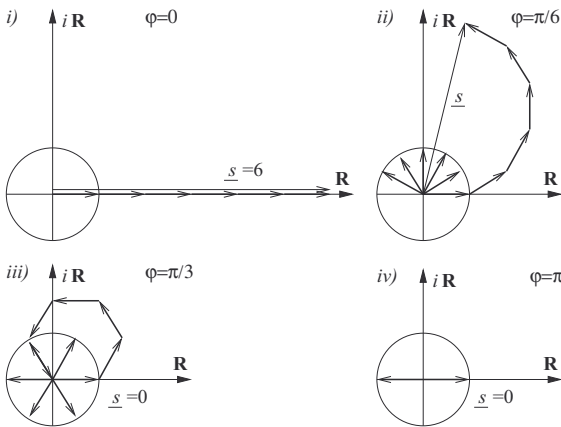
Par identification avec la formule donnée par l'énoncé

$$J_0 = \frac{I_0}{(1 - r^2)^2} \text{ et } m = \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} = 90$$

1.13

- a) Sur chaque diagramme, on trace les six complexes sur le cercle trigonométrique puis leur somme.

Chapitre 1 Superposition d'ondes lumineuses



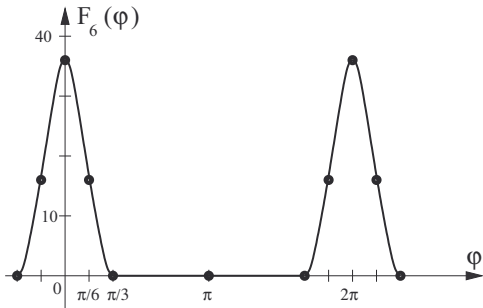
b) On ne dispose que de 4 points pour tracer l'allure de la courbe, on la complète en utilisant sa parité et sa périodicité de 2π . Pour $\varphi = \frac{\pi}{6}$, on mesure la longueur du vecteur et on applique l'échelle :

$$\left| \underline{s}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right| \approx 4$$

On en déduit le tableau de valeurs

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$F_6(\varphi)$	36	16	0	0

On en déduit l'allure de la courbe



c) Par généralisation des graphes observés pour $N = 6$, on affirme les résultats suivants.

- Pour $\varphi = 0$, tous les vecteurs ont pour affixe 1 donc

$$\underline{s}(0) = N \text{ donc } F_N(0) = N^2$$

- Pour $\varphi = \frac{\pi}{N}$, la somme des complexes forme un quasi-demi-cercle de périmètre N (le cercle entier a donc pour périmètre $2N$) donc de diamètre d avec

$$2N = \pi d \text{ donc } d = \frac{2N}{\pi}$$

$$\text{donc } \underline{s}\left(\frac{\pi}{N}\right) \approx i \frac{2N}{\pi}$$

$$\text{donc } F_N\left(\frac{\pi}{N}\right) \approx \frac{4N^2}{\pi^2} \approx 0,5N^2$$

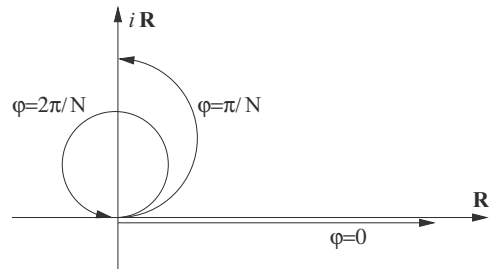
On retrouve donc l'expression de la largeur $\frac{2\pi}{N}$ du pic à mi-hauteur.

- Pour $\varphi = \frac{2\pi}{N}$, la somme des complexes forme un cercle complet, ce qui correspond à la première annulation de la fonction de réseau

$$\underline{s}\left(\frac{2\pi}{N}\right) = 0 \text{ donc } F_N\left(\frac{2\pi}{N}\right) = 0$$

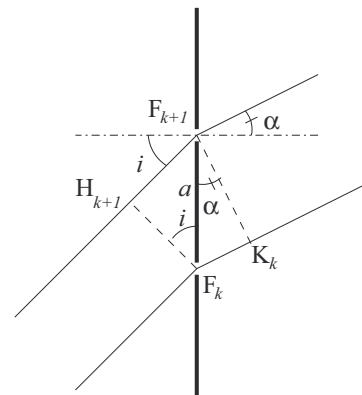
- Pour $\varphi \in \left[\frac{2\pi}{N}, \pi\right]$, les vecteurs d'affixes $e^{ik\varphi}$ se répartissent presque uniformément sur le cercle trigonométrique et

$$\underline{s}(\varphi) \approx 0 \text{ donc } F_N(\varphi) \approx 0$$



1.14

- Il y a diffraction de la lumière, le rayon est un faisceau dont la largeur angulaire est proche de π si la fente est assez étroite, chaque fente se comporte donc comme une source ponctuelle secondaire.
- On agrandit la figure et on fait apparaître les plans d'onde pour deux rayons voisins.



Par application de la loi de Malus :

$$\delta = [H_{k+1}F_{k+1}] - [F_kK_k] = a \sin i - a \sin \alpha$$

$$\text{et } \varphi = \frac{2\pi a(\sin i - \sin \alpha)}{\lambda_0}$$

- c) L'intensité lumineuse dans la direction α est maximale lorsque $\varphi = p \cdot 2\pi$, p entier relatif, et négligeable pour toute autre valeur de α . On en déduit la formule fondamentale des réseaux

$$a(\sin i - \sin \alpha_p) = p\lambda_0$$

- d) On a un pic de lumière pour les valeurs

$$\sin \alpha = -\frac{p\lambda_0}{a} = -0,207p$$

Or un sinus ne peut prendre que des valeurs entre -1 et 1 donc

$$-1 \leq -0,207p \leq 1 \text{ soit } -4,84 \leq p \leq 4,84$$

$$\text{donc } p \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

soit 9 pics au total.

- e) On exprime les relations entre les différentes grandeurs comme des égalités de fonctions de la variable i :

$$\begin{cases} \sin i - \sin \alpha_p(i) = \frac{p\lambda_0}{a} \\ D_p(i) = i - \alpha_p(i) \end{cases}$$

Dérivons ces deux relations par rapport à i , à p fixé :

$$\begin{cases} \cos i - \frac{d\alpha_p(i)}{di} \cos \alpha_p(i) = 0 \\ \frac{dD_p(i)}{di} = 1 - \frac{d\alpha_p(i)}{di} \end{cases}$$

Au minimum de déviation, la dérivée de $D_p(i)$ est nulle donc

$$\frac{d\alpha_p(i)}{di} = 1 \text{ donc } \cos i - \cos \alpha_p(i) = 0$$

$$\text{donc } \cos i = \cos \alpha_p(i) \text{ soit } \alpha_p(i) = \pm i$$

Si $\alpha_p(i) = i$, alors la formule des réseaux donne $p = 0$, ce qui est exclu, on en déduit que $\alpha_p(i) = -i$ au minimum de déviation. En remplaçant dans les deux relations, on obtient

$$\begin{cases} 2 \sin i = \frac{p\lambda_0}{a} \\ D_p^* = 2i \end{cases}$$

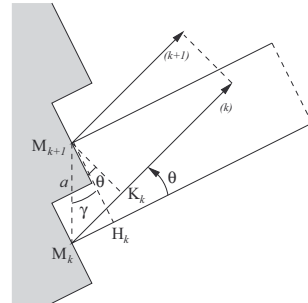
et en éliminant i entre ces deux relations

$$\lambda_0 = \frac{2a}{p} \sin \frac{D_p^*}{2}$$

- f) À i donné, et pour p donné, l'angle $\alpha_p(i)$ dépend de λ_0 , donc le spectrogoniomètre permet de séparer les différentes longueurs d'onde du spectre. Par application du résultat de la question précédente, l'observation du minimum de déviation et la mesure précise des angles permise par le dispositif expérimental (4 voire 5 chiffres significatifs) permet la détermination précise des valeurs des longueurs d'onde.

1.15

- a) Détaillons la construction des surfaces d'onde.



Par application de la loi de Malus, la différence de marche est

$$\delta = [H_k M_k] + [M_k K_k] = a \sin \gamma + a \sin(\gamma + \theta)$$

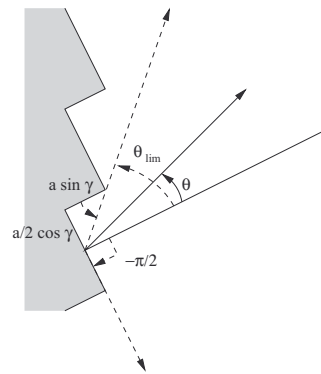
$$\text{donc } \varphi = \frac{2\pi a(\sin \gamma + \sin(\gamma + \theta))}{\lambda_0}$$

- b) Par application du résultat du cours, il y a des pics de lumière pour

$$\varphi = p \cdot 2\pi \text{ soit } a(\sin \gamma + \sin(\gamma + \theta)) = p\lambda_0$$

p étant un entier relatif. L'observation est possible pour

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \theta_{\text{lim}}\right]$$



En utilisant les dimensions indiquées sur le schéma, on en déduit

$$\tan \theta_{\text{lim}} = \frac{\frac{a}{2} \cos \gamma}{a \sin \gamma} = \frac{1}{2 \tan \gamma}$$

$$\text{donc } \theta_{\text{lim}} = 0,785 \text{ rad}$$

On en déduit un encadrement pour p :

$$\frac{a}{\lambda_0} \left[\sin \gamma + \sin \left(\gamma - \frac{\pi}{2} \right) \right] \leq p \leq \frac{a}{\lambda_0} \left[\sin \gamma + \sin(\gamma + \theta_{\text{lim}}) \right]$$

$$\text{soit } -0,447 \frac{a}{\lambda_0} \leq p \leq 1,396 \frac{a}{\lambda_0}$$

La différence entre les deux bornes vaut environ 12 (nombre de pics visibles, à une unité près) donc

$$12 \approx 1,396 \frac{a}{\lambda_0} + 0,447 \frac{a}{\lambda_0}$$

$$\text{donc } a \approx \frac{12\lambda_0}{1,843} = 3,9 \mu\text{m}$$

1.16

a) Par application de la formule du cours

$$I(\varphi) = I_1 \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Cette fonction est de période 2π , elle présente des pics très étroits pour $\varphi = p \cdot 2\pi$ de hauteur $N^2 I_1$.

b) Tout se passe comme si on avait $N' = \frac{N}{2}$ ondes déphasées de $\varphi' = 2\varphi$ donc

$$I(\varphi) = I_1 \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \varphi}$$

C'est une fonction périodique de période π qui présente des pics très étroits de hauteur $\frac{N^2 I_1}{4}$.

c) Tout se passe comme si on avait $N' = \frac{N}{3}$ ondes déphasées de $\varphi' = 3\varphi$ donc

$$I(\varphi) = I_1 \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{3\varphi}{2}}$$

C'est une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{3}$ qui présente des pics très étroits de hauteur $\frac{N^2 I_1}{9}$.

d) On doit ici revenir à la superposition des ondes complexes.

$$\underline{a}(t) = \underline{a}_1 \sum_{n=1}^{\frac{N}{3}} \left[e^{-i3\varphi} \right]^n + \underline{a}_2 \sum_{n=1}^{\frac{N}{3}} \left[e^{-i3\varphi} \right]^n$$

Or $\underline{a}_2 = \underline{a}_1 e^{-i\varphi}$ et

$$\sum_{n=1}^{\frac{N}{3}} \left[e^{-i3\varphi} \right]^n = \frac{e^{-i\frac{N}{2}\varphi}}{e^{-i\frac{3\varphi}{2}}} \cdot \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{3\varphi}{2}}$$

On en déduit

$$\underline{a}(t) = \underline{a}_1 (1 + e^{-i\varphi}) \cdot \frac{e^{-i\frac{N}{2}\varphi}}{e^{-i\varphi}} \cdot \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{3\varphi}{2}}$$

L'intensité lumineuse est

$$I(\varphi) = K \underline{a}(t) \underline{a}^*(t) \text{ soit}$$

$$I(\varphi) = K \underline{a}_1 \underline{a}_1^* (2 + 2 \cos \varphi) \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{3\varphi}{2}}$$

$$I(\varphi) = 2I_1 (1 + \cos \varphi) \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{3\varphi}{2}}$$

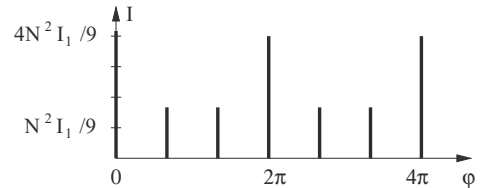
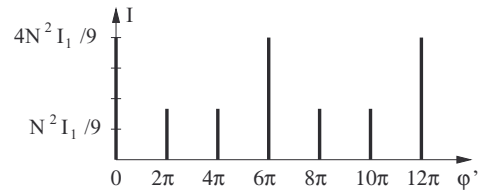
N étant multiple de 6, on peut poser $N = 3N'$ et $3\varphi = \varphi'$. On écrit donc

$$I(\varphi') = 2I_1 \left(1 + \cos \frac{\varphi'}{3} \right) \left[\frac{\sin^2 \frac{N'^2 \varphi'}{2}}{\sin^2 \varphi'} 2 \right]$$

C'est une fonction périodique de période 6π , produit de la fonction de réseau habituelle qui vaut N'^2 pour $\varphi' = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$, par le terme $1 + \cos \frac{\varphi'}{3}$ qui vaut 2 pour $\varphi' = 0$ et $\frac{1}{2}$ pour $\varphi' = 2\pi$ et 4π . On en déduit l'allure du graphe, qui fait apparaître des pics de hauteur

$$4N'^2 I_1 = \frac{4N^2 I_1}{9}$$

et des pics secondaires de hauteur $\frac{N^2 I_1}{9}$.



CHAPITRE 2

Dispositif des trous d'Young

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Dispositif des trous d'Young.
- ◇ Champ d'interférences.
- ◇ Ordre d'interférences.
- ◇ Franges d'interférences.
- ◇ Localisation.
- ◇ lame à faces parallèles.
- ◇ Perte de contraste.
- ◇ Élargissement spatial.
- ◇ Élargissement spectral.
- ◇ Blanc d'ordre supérieur.
- ◇ Spectre cannelé.
- ◇ Montage de Fraunhofer.

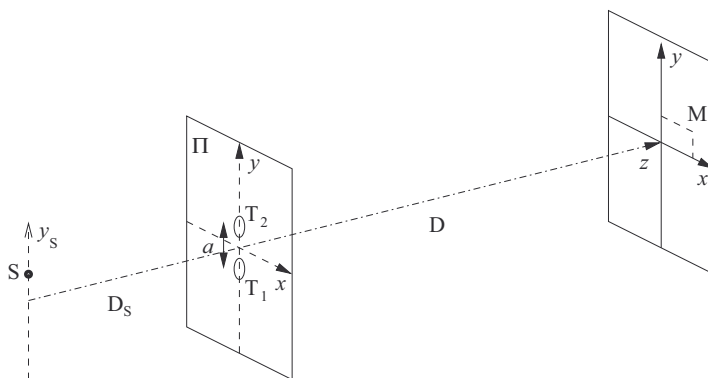
Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Décrire le dispositif des trous d'Young et justifier les observations.
- ◇ Interpréter la modification des franges par ajout d'une lame.
- ◇ Expliquer le brouillage par élargissement spatial de la source.
- ◇ Expliquer le brouillage par élargissement spectral de la source.
- ◇ Expliquer et quantifier les observations en lumière blanche.
- ◇ Décrire le montage de Fraunhofer et expliciter ses conséquences dans le cas du réseau.

Les méthodes à retenir

Décrire le dispositif des trous d'Young et justifier les observations.

Le dispositif des **trous d'Young** opère une **division du front d'onde**. Il est formé de deux trous T_1 et T_2 , dans un plan opaque Π , très petits et distants de a , éclairé par une source ponctuelle S dans un plan à la distance D_S de Π , l'observation se fait sur un écran à une distance D de Π .



La position de la source est repérée par y_s , celle du point M par x et y . On suppose D et D_S très grands devant x , y , y_s et a . Voici la méthode générale d'étude des interférences sur l'écran, en lumière monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0 .

- La taille des trous est de l'ordre de grandeur de λ_0 . Par effet de **diffraction**, T_1 et T_2 se comportent comme des sources secondaires émettant de la lumière dans toutes les directions de l'espace.
- Il y a donc interférence entre ST_1M et ST_2M . Si on note n_0 l'indice du milieu transparent (la plupart du temps, $n_0 \approx 1$ pour l'air), la différence de marche est

$$\delta = [ST_1M] - [ST_2M] = n_0 (ST_1 - ST_2 + T_1M - T_2M)$$

- On calcule chacune de ces distances en géométrie analytique. En prenant l'origine du repère au milieu O des deux trous,

$$T_1 \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{a}{2} \\ 0 \end{vmatrix} \quad M \begin{vmatrix} x \\ y \\ D \end{vmatrix} \quad \text{donc } \overrightarrow{T_1M} \begin{vmatrix} x \\ y + \frac{a}{2} \\ D \end{vmatrix}$$

$$T_1M = \|\overrightarrow{T_1M}\| = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} = D \sqrt{1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2 + ay + \frac{a^2}{4}}{D^2}}$$

On simplifie l'expression grâce à un développement limité :

$$T_1 M \simeq D \left[1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{y^2 + ay + \frac{a^2}{4}}{2D^2} \right]$$

et de même

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2 M \simeq D \left[1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{y^2 - ay + \frac{a^2}{4}}{2D^2} \right] \\ ST_1 \simeq D_S \left[1 + \frac{y_S^2 + ay_S + \frac{a^2}{4}}{2D_S^2} \right] \\ ST_2 \simeq D_S \left[1 + \frac{y_S^2 - ay_S + \frac{a^2}{4}}{2D_S^2} \right] \end{array} \right.$$

d) On en déduit la différence de marche

$$\delta = n_0 a \left[\frac{y}{D} + \frac{y_S}{D_S} \right]$$

e) Par application de la formule de Fresnel, en supposant que les deux trous d'Young donnent individuellement en M la même intensité $I_1 = I_2 = I_0$

$$I(M) = I(y) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right)$$

- Les **franges** sont définies par $\delta = \text{cste}$, donc par $y = \text{cste}$: elles sont rectilignes et parallèles à l'axe x perpendiculaire à celui (y) des trous.
- Les franges brillantes sont définies par

$$\delta = k\lambda_0 \text{ ou } p = \frac{\delta}{\lambda_0} = k \in \mathbf{Z}$$

où p est l'**ordre d'interférences**.

- L'ordonnée de la frange d'ordre p est

$$\text{soit } y_p = -\frac{D}{D_S} y_S + p \frac{\lambda_0 D}{n_0 a}$$

- La **frange centrale brillante** est celle d'ordre $p = 0$, elle correspond à une différence de marche nulle, et c'est en général la plus brillante de toutes. Son ordonnée est $y_0 = -\frac{D}{D_S} y_S$.
- L'**interfrange** vaut

$$i = |y_{p+1} - y_p| = \frac{\lambda_0 D}{n_0 a}$$

- Le **contraste** vaut $C = 1$.

f) Les franges apparaissent quelle que soit la position de l'écran, elles n'ont donc pas de localisation particulière et sont dites **non localisées**. Si les trous d'Young sont de taille très supérieure à la longueur d'onde, l'angle des faisceaux diffractés est faible, et les interférences ne seront visibles que dans la zone de l'écran touchée simultanément par les deux faisceaux, appelée **champ d'interférences**.

Exemple :

Les formules générales peuvent être mémorisées dans le cas où $n_0 = 1$ (dans l'air) et $y_S = 0$ (source sur l'axe) :

$$\delta = \frac{ay}{D} \text{ et } i = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

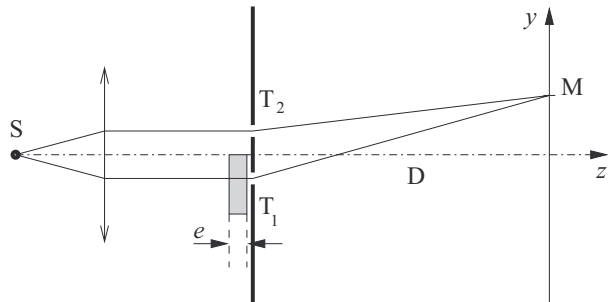
On tolère au concours leur expression sans démonstration, (à moins bien sûr qu'il ne soit explicitement demandé de les établir). Elles permettent la détermination expérimentale d'une longueur d'onde λ_0 connaissant l'écart a entre les trous, ou réciproquement celle de a connaissant λ_0 . Sur un écran à $D = 10,00$ m, muni d'une échelle de mesure en millimètres, avec des trous d'Young distants de $a = 0,500$ mm, on observe dix franges nettement séparées par des franges sombres. On mesure $10i = 107$ mm donc $i = 10,7$ mm avec une précision de 3 chiffres significatifs. On peut donc donner avec la même précision

$$\lambda_0 = \frac{ai}{D} = 535 \text{ nm}$$

↪ Exercices 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5.

Interpréter la modification des franges par ajout d'une lame.

Le dispositif des trous d'Young est éclairé par un faisceau laser, ou une source ponctuelle monochromatique située au foyer objet d'une lentille convergente, de longueur d'onde dans le vide λ_0 . On intercale une **lame transparente à faces parallèles** d'épaisseur e et d'indice n en amont de l'un des trous d'Young.



La différence de marche en M est modifiée et vaut

$$\delta = [ST_1M] - [ST_2M] = (n - n_0)e + \frac{n_0 ay}{D}$$

Par rapport à la situation en l'absence de lame,

- a) il y a déplacement du système de franges, la frange centrale brillante (correspondant à $\delta = 0$ et à un ordre d'interférences nul) passe de $y = 0$ à

$$y_{p=0} = \frac{(n_0 - n)eD}{n_0 a}$$

- b) l'interfrange $i = \frac{\lambda_0 D}{n_0 a}$ n'est pas modifié.

Ce résultat permet la détermination expérimentale de l'épaisseur e ou celle de l'indice n de la lame.

Exemple :

On prend $D = 3,00$ m, $n_0 = 1,00$, $n = 1,50$, $a = 1,20$ mm. On peut détecter un déplacement minimal $\Delta y = 0,50$ mm des franges. L'épaisseur minimale e de la lame est donc

$$e_{\min} = \left| \frac{n_0 a \Delta y}{(n_0 - n)eD} \right| = 0,40 \text{ } \mu\text{m}$$

↪ **Exercices 2.6, 2.7, 2.8, 2.9.**

Expliquer le brouillage par élargissement spatial de la source.

La source ponctuelle n'est qu'un modèle. Dans la réalité expérimentale, une source large est assimilée à la juxtaposition de sources élémentaires non cohérentes entre elles. Lorsqu'une telle source éclaire le dispositif des trous d'Young, on doit donc sommer les intensités lumineuses données par chaque source élémentaire. Comme celles-ci sont décalées spatialement les unes par rapport aux autres, les franges brillantes et sombres sont décalées sur l'écran et on peut observer un **brouillage**. Il est possible de mettre en évidence ce brouillage par le **calcul intégral** de l'intensité lumineuse sur l'écran, le calcul du contraste et la mise en évidence de son annulation quand la largeur de la source atteint une valeur critique. Ce calcul, proposé à l'exercice 2.10, n'est pas exigible. Le programme officiel le remplace par le **critère semi-quantitatif de brouillage des franges par élargissement spatial de la source**. Voici l'énoncé et la méthode de vérification de ce critère, qu'on peut généraliser à tout dispositif interférentiel à deux ondes.

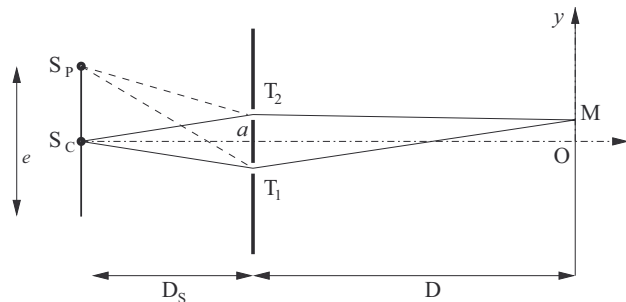
- En un point donné M de l'écran, on calcule l'ordre d'interférences p_C créé par une source ponctuelle S_C au centre de la source large.
- En ce même point M, on calcule l'ordre d'interférences p_P créé par une source ponctuelle S_P à la périphérie de la source large.
- La variation d'ordre d'interférences **évaluée sur la demi-largeur spatiale** de la source est

$$|\Delta p| = |p_P - p_C|$$

- Le critère énonce qu'il y a brouillage lorsque $|\Delta p| > \frac{1}{2}$.

Exemple :

Considérons une source de largeur e éclairant le dispositif des trous d'Young.



- Pour une source ponctuelle S_C au centre, la différence de marche vaut

$$\delta_C = \frac{n_0 a y}{D} \text{ donc } p_C = \frac{\delta_C}{\lambda_0} = \frac{n_0 a y}{\lambda_0 D}$$

- Pour une source ponctuelle S_P à la périphérie, la différence de marche vaut

$$\delta_P = \frac{n_0 a \frac{e}{2}}{D_s} + \frac{n_0 a y}{D} \text{ donc } p_P = \frac{\delta_P}{\lambda_0} = \frac{n_0 a e}{2\lambda_0 D_s} + \frac{n_0 a y}{\lambda_0 D}$$

c) La variation d'ordre d'interférences évaluée sur la demi-largeur spatiale de la source est

$$|\Delta p| = |p_P - p_C| = \frac{n_0 a e}{2\lambda_0 D_S}$$

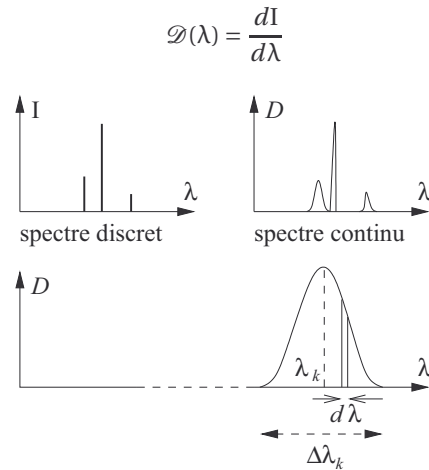
d) Le brouillage apparaîtra donc selon le critère quand

$$\frac{n_0 a e}{2\lambda_0 D_S} > \frac{1}{2} \text{ soit } e > \frac{\lambda_0 D_S}{n_0 a}$$

↔ **Exercice 2.10.**

Expliquer le brouillage par élargissement spectral de la source.

La source monochromatique n'est qu'un modèle. En première approximation, le spectre d'une source à vapeur atomique présente des pics de longueurs d'onde $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_n$. On parle alors de **spectre discret** et on le représente en bâtons d'abscisse λ_k et de hauteur I_k , intensité lumineuse correspondant à cette radiation. Plus précisément encore, le spectre d'une source réelle est **continu** et présente des bandes spectrales centrées autour de longueurs d'onde λ_k et de largeur $\Delta\lambda_k$. On le représente alors par une courbe en mesurant en ordonnée la **densité spectrale**.



Chaque bande spectrale élémentaire, de largeur $d\lambda$ est assimilable à une radiation monochromatique incohérente avec les autres. Lorsqu'une telle source éclaire le dispositif des trous d'Young, on doit donc sommer les intensités lumineuses données par chaque bande élémentaire $[\lambda, \lambda + d\lambda]$. Comme l'interfrange dépend de la longueur d'onde, les figures d'interférences sur l'écran sont décalées et d'interfrange distinctes les unes par rapport aux autres, on peut donc observer un **brouillage**.

Il est possible de mettre en évidence ce brouillage par le **calcul intégral** de l'intensité lumineuse sur l'écran, le calcul du contraste et la mise en évidence de son annulation quand la largeur spectrale de la source atteint une valeur critique. Ce calcul, proposé à l'exercice 2.13, n'est pas exigible. Le programme officiel le remplace par le **critère semi-quantitatif de brouillage des franges par élargissement spectral de la source**. Voici l'énoncé et la méthode de vérification de ce critère, qu'on peut généraliser à tout dispositif interférentiel à deux ondes.

- En un point donné M de l'écran, on calcule l'ordre d'interférences p_C créé par la source ponctuelle S si elle était monochromatique, au centre du spectre, de longueur d'onde λ_k .
- En ce même point M, on calcule l'ordre d'interférences p_P créé par la source ponctuelle S si elle était monochromatique, à la périphérie du spectre, de longueur d'onde extrême $\lambda_k + \frac{\Delta\lambda_k}{2}$.
- La variation d'ordre d'interférences **évaluée sur la demi-largeur spectrale** de la source est

$$|\Delta p| = |p_P - p_C|$$

- Le critère énonce qu'il y a brouillage lorsque $|\Delta p| > \frac{1}{2}$.

On constate donc la très grande analogie entre les brouillages par élargissement spatial et par élargissement spectral. La différence subtile est la suivante. Dans les notations du début de ce chapitre, l'ordre d'interférences vaut

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{n_0 a}{\lambda} \left[\frac{y}{D} + \frac{y_S}{D_S} \right]$$

- La variation de p entre le centre C et la périphérie P de la source étendue spatialement est due à la variation de y_S .
- La variation de p entre la longueur d'onde centrale et la longueur d'onde extrême de la source de spectre large est due à la variation de λ .

Exemple :

La lampe à vapeur de mercure est polychromatique et possède dans son spectre une raie verte de longueur d'onde moyenne $\lambda_c = 546,1$ nm et de largeur spectrale $\Delta\lambda = 1,0$ nm. En utilisant un condenseur et un diaphragme, elle devient une source ponctuelle S, on la filtre pour ne garder que la raie verte et on la place à égale distance de trous d'Young distants de $a = 2,0$ mm.

Un écran est placé à la distance $D = 2,0$ m. En un point M d'ordonnée y sur l'écran, en prenant l'indice de l'air égal à 1, la différence de marche est

$$\delta = \frac{ay}{D}$$

La variation de l'ordre d'interférences mesurée sur la moitié de la largeur spectrale est

$$\Delta p = \frac{\delta}{\lambda_c} - \frac{\delta}{\lambda_c + \frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{\delta}{\lambda_c} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_c}} \right]$$

$$\Delta p \approx \frac{\delta\Delta\lambda}{2\lambda_c^2}$$

D'après le critère, il y a brouillage si

$$\Delta p > \frac{1}{2} \text{ soit } \delta > \frac{\lambda_c^2}{\Delta\lambda}$$

$$\text{donc } \frac{ay}{D} > \frac{\lambda_c^2}{2\Delta\lambda} \text{ soit } y > \frac{\lambda_c^2 D}{2a\Delta\lambda} = 30 \text{ cm}$$

L'interfrange vaut $i = \frac{\lambda_c D}{a} = 0,546$ mm, le brouillage apparaît donc à 550 franges du centre de l'écran, ce qui est pratiquement impossible à obtenir dans le dispositif des trous d'Young. Il est donc très peu vraisemblable qu'on puisse l'observer, le dispositif des trous d'Young est insuffisant pour mesurer la largeur spectrale de la raie verte du mercure.

↪ Exercices 2.11, 2.12, 2.13.

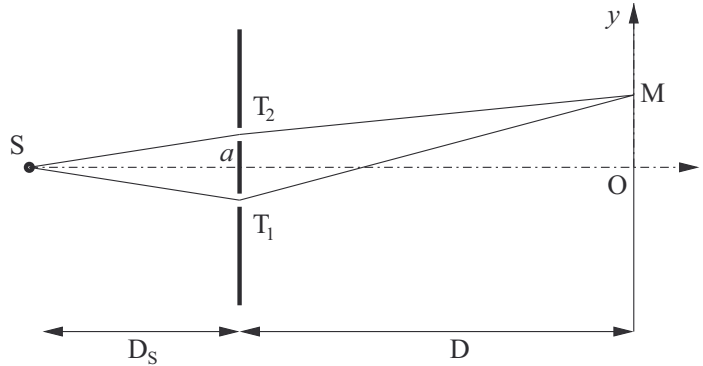
Expliquer et quantifier les observations en lumière blanche.

Le spectre de la lumière blanche s'étend de $\lambda = 400$ nm (limite de l'ultraviolet) à $\lambda = 800$ nm (limite de l'infrarouge). La largeur spectrale et la longueur d'onde moyenne de la lumière blanche sont donc

$$\Delta\lambda = 400 \text{ nm et } \lambda_c = 600 \text{ nm}$$

On éclaire un dispositif de trous d'Young avec une source ponctuelle S de lumière blanche à égale distance des deux trous, ceux-ci sont distants de a , et on place un écran à la distance D du plan des trous.

On note O le centre de l'écran, où la différence de marche est nulle, et on repère un point de l'écran par son ordonnée y .



La largeur spectrale étant très grande, le brouillage est obtenu dès que y dépasse une très faible valeur : en utilisant le critère détaillé au paragraphe précédent, en prenant l'indice de l'air égal à 1, D de l'ordre du mètre et a de l'ordre du millimètre,

$$|\Delta p| > \frac{1}{2} \Rightarrow y > \frac{\lambda_c^2 D}{a \Delta \lambda} \approx 0,90 \text{ mm}$$

L'interfrange est de l'ordre de

$$i = \frac{\lambda_c D}{a} = 0,60 \text{ mm}$$

On ne verra donc pas des franges au sens habituel du terme, mais des **irisations** au voisinage du centre de l'écran. Voici les trois observations et le vocabulaire associé.

a) Pour une longueur d'onde λ donnée, la frange centrale brillante définie par $p = 0$ est séparée par les franges sombres $p = \pm \frac{1}{2}$. Elle est donc délimitée sur l'écran par

$$-\frac{\lambda}{2} < \delta < \frac{\lambda}{2} \text{ soit } -\frac{\lambda D}{2a} < y < \frac{\lambda D}{2a}$$

Sa largeur $\Delta y = \frac{\lambda D}{a} = i$ pour trois longueurs d'onde caractéristiques du spectre est donc

couleur	violet	jaune	rouge
λ (nm)	400	600	800
Δy	$2d$	$3d$	$4d$

avec $d = \frac{400 \cdot 10^{-9} \cdot D}{2a}$. Pour $-d < y < d$, il y a donc superposition des franges brillantes pour toutes les longueurs d'onde du spectre de la lumière blanche. On aura donc une tache blanche qu'on appelle **blanc d'ordre supérieur**.

b) Pour $-3d < y < -2d$ ou $2d < y < 3d$, on est sur la frange sombre du violet, il n'y a donc superposition que des franges brillantes du jaune et du rouge, on aura donc une couleur proche du vert, mais cette couleur fluctue très vite : ce sont les **teintes de Newton**.

c) Pour y de l'ordre de quelques d , le brouillage fait apparaître une teinte blanchâtre à l'œil. Mais en observant au spectroscope, on voit apparaître un spectre présentant des extinctions de certaines longueurs d'onde, on les appelle des cannelures, c'est le **spectre cannelé**. La détermination des valeurs de λ correspondantes au point M d'ordonnée y se ramène à la recherche des solutions de l'équation

$$\delta_\lambda(y) = p \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \frac{ay}{D} = p \frac{\lambda}{2}, p \in \mathbf{Z}$$

Pour la résoudre, on cherche les bornes pour l'entier p en utilisant l'encadrement

$$400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm} \text{ donc } p_{\min} \leq p \leq p_{\max}$$

puis on dresse un tableau (à condition que le nombre de cannelures soit raisonnable) des valeurs de λ pour chaque valeur de p entre p_{\min} et p_{\max} .

Exemple :

Prenons $D = 9,0 \text{ m}$, $a = 1,5 \text{ mm}$, l'indice de l'air $n_0 = 1$ et cherchons les longueurs d'onde éteintes dans le spectre cannelé observé en $y = 2,0 \text{ cm}$. L'encadrement de λ donne celui de p :

$$\lambda = \frac{2ay}{Dp} \text{ donc } 400 \text{ nm} < \frac{2ay}{Dp} < 800 \text{ nm}$$

$$\text{soit } 1,25 \cdot 10^6 < \frac{Dp}{2ay} < 2,50 \cdot 10^6$$

$$\text{donc } 1,25 \cdot 10^6 \cdot \frac{2ay}{D} < p < 2,50 \cdot 10^6 \cdot \frac{2ay}{D}$$

$$\text{soit } 8,3 < p < 16,7 \text{ donc } p \in \{9, \dots, 16\}$$

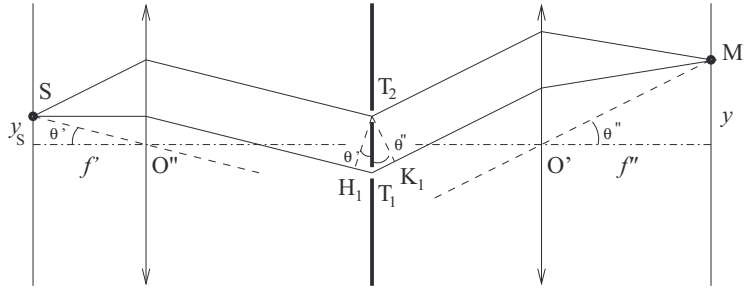
Il y a donc 8 cannelures dont les longueurs d'onde sont

p	9	10	11	12	13	14	15	16
λ (nm)	741	667	606	556	513	476	444	417

↪ **Exercices 2.14, 2.15, 2.16.**

Décrire le montage de Fraunhofer et expliciter ses conséquences dans le cas du réseau.

Le **montage de Fraunhofer** impose un éclairage et une observation à l'infini. La source ponctuelle S est placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente de distance focale f' , l'écran est placé dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f'' .



La détermination de la différence de marche est un cas typique d'utilisation de la loi de Malus.

$$\delta = [ST_1M] - [ST_2M] = [H_1T_1] + [T_1K_1] = n_0 a \sin \theta' + n_0 a \sin \theta''$$

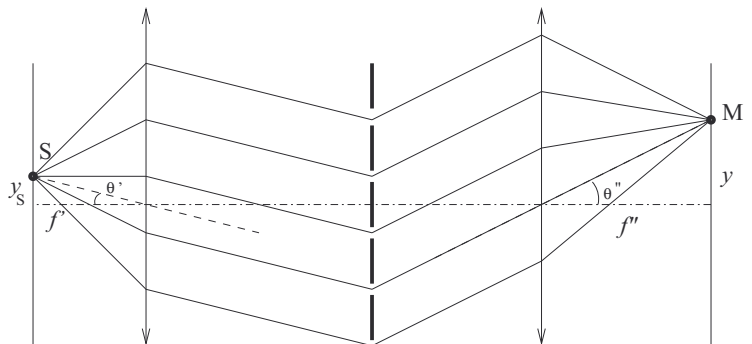
Dans les conditions de Gauss, l'hypothèse des petits angles est vérifiée donc

$$\begin{cases} \theta' \simeq \tan \theta' = \frac{y_s}{f'} \\ \theta'' \simeq \tan \theta'' = \frac{y}{f''} \end{cases} \text{ donc } \delta \simeq n_0 a (\theta' + \theta'') = \frac{n_0 a y_s}{f'} + \frac{n_0 a y}{f''}$$

Cette expression est analogue à celle donnée au début de ce chapitre, en l'absence de lentilles, en remplaçant D_s par f' et D par f'' . Les lois énoncées précédemment se généralisent donc.

L'un des intérêts du montage de Fraunhofer est qu'il facilite l'étude d'un système à trois, N trous régulièrement répartis sur un plan opaque.

En particulier, le réseau plan éclairé et observé dans les conditions de Fraunhofer forme un diviseur en N ondes dont les phases sont en progression arithmétique (voir chapitre 1).



La différence de marche entre deux ondes consécutives est

$$\delta = n_0 a (\sin \theta' - \theta'')$$

(on ne fait pas l'hypothèse des petits angles). La superposition des N ondes a pour expression complexe

$$\underline{a} = \underline{a}_1 [1 + e^{-i\varphi} + \dots + e^{-ik\varphi} + \dots + e^{-i(N-1)\varphi}] \text{ avec } \varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$$

et l'intensité lumineuse vaut

$$I = K \underline{a} \underline{a}^* = I_0 \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Si N est grand, on obtient des pics de lumière lorsque $\varphi = p\pi$, où p est un entier relatif, donc dans les directions définies par la **formule fondamentale des réseaux**

$$n_0 a (\sin \theta' - \sin \theta'') = p \lambda_0$$

Exemple :

Dans le cas des deux trous d'Young éclairés par une source de lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 :

- la frange d'ordre d'interférences p est définie par

$$\frac{\delta}{\lambda_0} = p \text{ soit } y_p = -\frac{y_s f'}{f''} + p \frac{\lambda_0 f'}{a}$$

- la frange centrale brillante, définie par $\delta = 0$, donc d'ordre d'interférences nul, est située en

$$y_0 = -\frac{y_s f''}{f'}$$

et le point M correspondant est le conjugué de S par le système des deux lentilles en l'absence des trous d'Young ;

- l'interfrange est

$$i = |y_{p+1} - y_p| = \frac{\lambda_0 f'}{a}$$

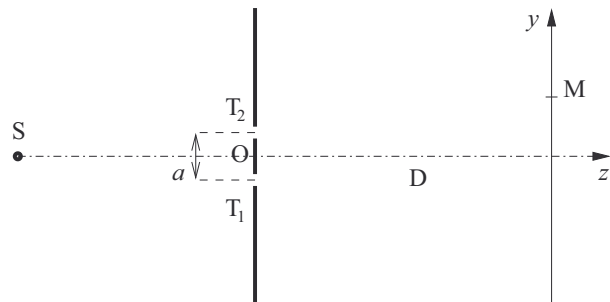
↪ **Exercices 2.17, 2.18, 2.19, 2.20.**

Énoncés des exercices

2.1

Une première méthode alternative de calcul de δ

Dans le dispositif des trous d'Young, la source ponctuelle S est placée sur l'axe médiateur des trous et l'observation est faite en un point M de l'écran situé dans le plan (S, T_1, T_2) .



- Donner les coordonnées dans le référentiel (O, y, z) des points T_1 , T_2 et M.
- En déduire les composantes des vecteurs $\overrightarrow{T_1M}$ et $\overrightarrow{T_2M}$.
- Justifier l'identité

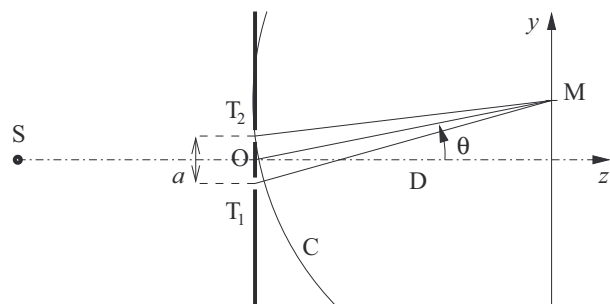
$$\left(\overrightarrow{T_1M} - \overrightarrow{T_2M}\right) \cdot \left(\overrightarrow{T_1M} + \overrightarrow{T_2M}\right) = (T_1M - T_2M)(T_1M + T_2M)$$

- En remarquant que $T_1M + T_2M \approx 2D$, en déduire l'expression de la différence de marche δ .

2.2

Une deuxième méthode alternative de calcul de δ

Dans le dispositif des trous d'Young, la source ponctuelle S est placée sur l'axe médiateur des trous et l'observation est faite en un point M de l'écran situé dans le plan (S, T_1, T_2) . On définit l'angle θ , très petit devant 1, entre l'axe (O, z) et la droite (OM) . On trace les rayons T_1M et T_2M , et l'arc de cercle C de centre M passant par T_1



- On note H_1 le point d'intersection entre (T_1M) et C. Donner l'expression de la différence de marche δ en utilisant ce point.
- Au voisinage des points T_1 , H_1 et T_2 , on assimile C au segment $[T_2H_1]$. Faire une figure agrandie et en déduire δ en fonction de a , θ et l'indice n_0 .
- En déduire l'expression de δ en fonction de a , D , y et n_0 .



2.3

Effet de dissymétrie des trous d'Young

Deux trous d'Young distants de a sont percés dans un plan opaque Π . Lors du perçage, une dissymétrie apparaît, le trou T_1 est plus large que le trou T_2 . Quelle est la conséquence sur l'observation ?



2.4

Champ d'interférences et visibilité des franges d'Young

Deux trous d'Young distants de $a = 2,0$ mm ont même largeur $1000\lambda_0$. La lumière diffractée par un de ces trous forme un faisceau conique de demi-angle au sommet $\theta \approx 1,0$ mrad. On prend $\lambda_0 = 600$ nm.

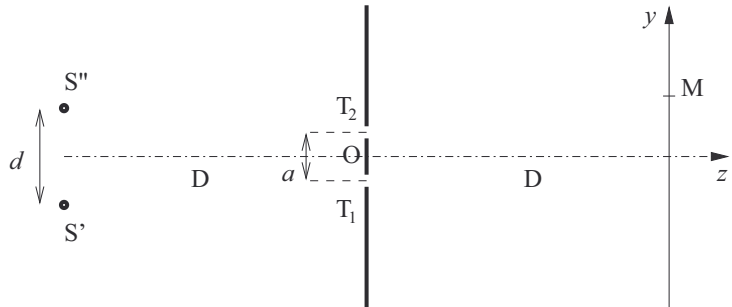
- a) À quelle distance minimale D du plan des trous d'Young doit-on placer l'écran pour observer au moins trois franges ?
- b) Pourquoi la visibilité des franges est-elle pratiquement impossible sur les bords du champ d'interférences ?



2.5

Brouillage des franges d'Young à deux sources

Le dispositif des trous d'Young est éclairé par deux sources non cohérentes S' et S'' , de même intensité lumineuse, monochromatiques, de même longueur d'onde dans le vide λ_0 , situées symétriquement sur l'axe à la distance d l'une de l'autre, dans un plan situé à la distance D du plan opaque Π . On fait l'observation dans le plan (S', S'', T_1, T_2), sur un écran situé à la distance D de Π . Le point M de l'écran est repéré par son ordonnée y . On prend l'indice de l'air égal à 1.



- a) Identifier les quatre rayons qui frappent M . Lesquels interfèrent ?
- b) Déterminer l'intensité lumineuse $I'(y)$ donnée en M par S' et celle $I''(y)$ donnée en M par S'' . En déduire l'intensité $I(y)$.
- c) On donne la relation de trigonométrie

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

En déduire qu'on peut écrire

$$I(y) = 4I_0 \left(1 + \gamma \cos \frac{2\pi\delta(y)}{\lambda_0} \right)$$

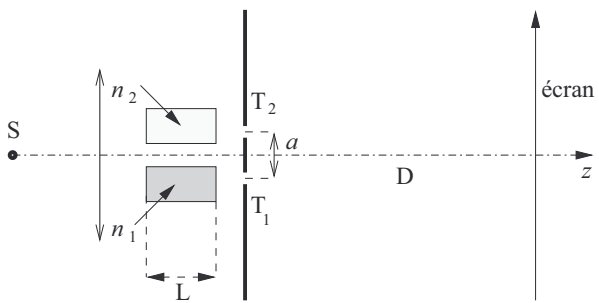
- d) En déduire l'expression du contraste C en fonction de d et déterminer la valeur minimale positive de d pour laquelle ce contraste s'annule et les franges d'interférences sont brouillées.



2.6

Mesure de l'indice d'un gaz transparent

Dans le dispositif suivant, les deux rectangles sont des réservoirs identiques à faces parallèles et transparentes, de longueur intérieure L , dans lesquels on injecte des gaz transparents d'indices respectifs n_1 et n_2 .



On prend $L = 50,0 \text{ cm}$, $D = 10,0 \text{ m}$, $a = 2,0 \text{ mm}$ et l'indice de l'air extérieur, dans lequel le dispositif est placé, est $n_0 = 1,00028$. La masse molaire de l'air est $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et la constante des gaz parfaits vaut $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- a) Déterminer l'ordonnée sur l'écran de la frange centrale brillante, où l'ordre d'interférences est nul, lorsque les deux réservoirs sont remplis d'air à même pression et même température, d'indice n_0 .
- b) On fait le vide dans le réservoir 1 ($n_1 = 1$) et on remplit le 2 d'un gaz d'indice n . Déterminer l'expression de l'indice n en fonction de a , L , D , n_0 et de l'ordonnée y_0 de la frange centrale brillante.
- c) On fait le vide dans le réservoir 1 ($n_1 = 1$) et on remplit le 2 d'air dont la pression vaut $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et dont on fait varier la température T . On relève la valeur de l'ordonnée y_0 de la frange centrale brillante et on obtient le tableau de valeurs suivantes

T (K)	270	280	290	300	310	320	330	340
y_0 (mm)	759	732	707	683	661	641	621	603

On note $n(T)$ l'indice de l'air à la température T . Montrer que le produit $(n(T) - 1)T$ est constant.

- d) En déduire la température T_0 de l'air extérieur.
- e) On assimile l'air à un gaz parfait, en déduire la loi de Gladstone-Dale

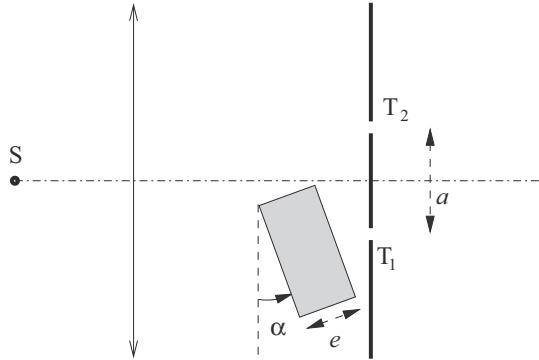
$$n - 1 = K_{GD} \mu$$

où μ est la masse volumique et donner la valeur de la constante K_{GD} pour l'air à la pression P_0 .

2.7

Effet d'une rotation de la lame à faces parallèles

Dans le dispositif des trous d'Young éclairés par une source ponctuelle monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0 , au foyer objet d'une lentille convergente, on place une lame transparente à faces parallèles, d'épaisseur e et d'indice n , en amont du trou T_1 . Cette lame pivote d'un angle α .



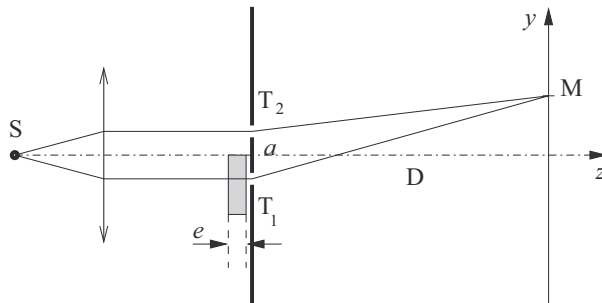
Déterminer le déplacement de la frange centrale brillante sur un écran situé à D du plan des trous d'Young lorsque la lame pivote de 0 à α . On prendra l'indice de l'air égal à 1. Donner son expression simplifiée si α est un petit angle.

2.8

Brouillage par effet dispersif

Dans le dispositif suivant, la lame transparente, à faces parallèles et d'épaisseur e est dispersive, son indice de réfraction dépend de la longueur d'onde dans le vide λ_0 selon la loi de Cauchy

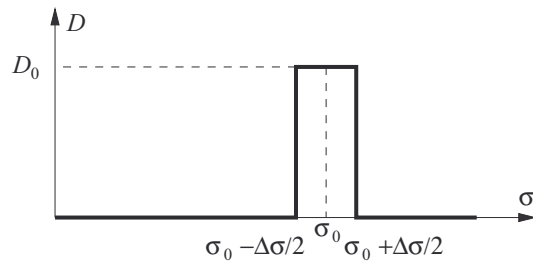
$$n(\sigma) = A + B\sigma^2 \text{ avec } \sigma = \frac{1}{\lambda_0}, \text{ nombre d'onde}$$



La source n'est pas monochromatique mais possède un profil spectral rectangulaire en nombre d'onde, c'est-à-dire que l'intensité lumineuse dI_0 correspondant à une bande spectrale de largeur $d\sigma$ est

$$dI_0 = \mathcal{D}(\sigma)d\sigma \text{ avec } \mathcal{D}(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma < \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \\ \mathcal{D}_0 & \text{si } \sigma \in \left[\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}, \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right] \\ 0 & \text{si } \sigma > \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \end{cases}$$

\mathcal{D}_0 est la densité spectrale.



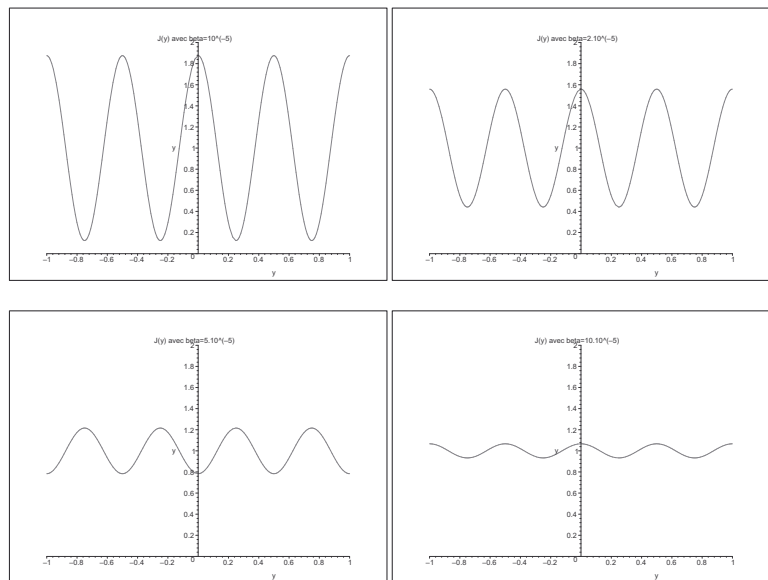
- a) On prend l'indice de l'air égal à 1. Soit M un point de l'écran et σ un nombre d'onde dans l'intervalle $[\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}, \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}]$. Donner l'expression de l'intensité lumineuse $dI(\sigma)$ créée en M par la bande spectrale $[\sigma, \sigma + d\sigma]$.
- b) En déduire l'expression intégrale de l'intensité lumineuse relative

$$J(y) = \frac{I(y)}{\Delta\sigma}$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

- c) Voici les allures des graphes de $J(y)$ pour différentes valeurs de la largeur spectrale relative

$$\beta = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0}$$

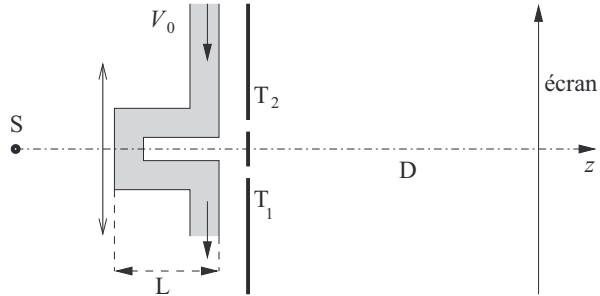


Commenter ces graphes et proposer une conclusion.

2.9

Mesure de la vitesse d'un fluide (résolution de problème)

Dans le dispositif suivant, les trous d'Young sont distants de a et S est une source ponctuelle de lumière quasi monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0 , placée au foyer objet de la lentille convergente. Le liquide dans le tuyau est de l'eau, d'indice n . On prend l'indice de l'air égal à 1. L'eau se déplace à la vitesse V_0 (très inférieure à la vitesse c de la lumière dans le vide) et on admet la loi de relativité des vitesses : dans le référentiel du laboratoire, la lumière se déplace à la vitesse égale à la somme vectorielle de la vitesse de la lumière dans l'eau et de la vitesse de l'eau dans le référentiel du laboratoire.

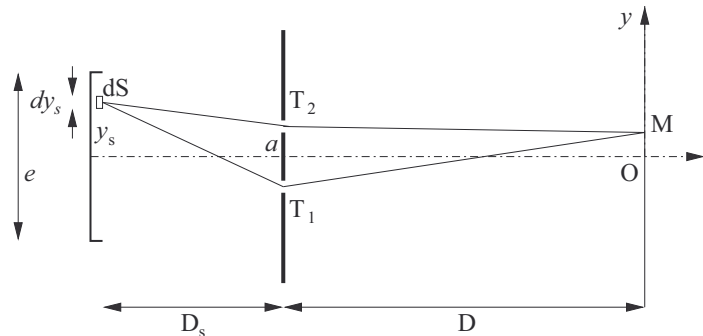


Lorsque l'eau circule dans le tuyau, le système de franges observées sur l'écran se décale de Δy par rapport à sa position quand l'eau est immobile. En déduire la vitesse V_0 .

2.10

Brouillage des franges par élargissement spatial

Une source large $[AB]$ définie par $y \in [-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}]$ dans le plan $x = -D_s$ éclaire un plan opaque en $x = 0$ percé de deux trous d'Young en T_1 ($y = -\frac{a}{2}$) et T_2 ($y = \frac{a}{2}$). Un écran est placé en $x = D$ et un point M de cet écran est repéré par son ordonnée y . D et D_s sont très grands devant e , a et y . Dans le plan de la source, l'intervalle $[y_s, y_s + dy_s]$ délimite une source élémentaire quasiment ponctuelle dS , fragment de la source, de largeur dy_s , qui donne sur l'écran une intensité $dI_0 = I_0 \frac{dy_s}{e}$ lorsqu'un seul trou d'Young est ouvert. Les sources élémentaires sont incohérentes deux à deux.



a) Montrer l'expression de la différence de marche pour la source dS :

$$\delta(y_S) = [dST_2M] - [dST_1M] = -\frac{y_S a}{D_S} - \frac{y a}{D}$$

b) En déduire l'intensité dI en M créé par la source dS .

c) Justifier que $I(M) = \int_{y_S = -\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} dI$. Calculer cette intégrale et l'écrire sous la forme

$$I = 2I_0 \left[1 + \gamma \cos \frac{2\pi y a}{\lambda_0 D} \right]$$

où on précisera l'expression de γ en utilisant la fonction sinus cardinal : $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$. On pourra utiliser la relation

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

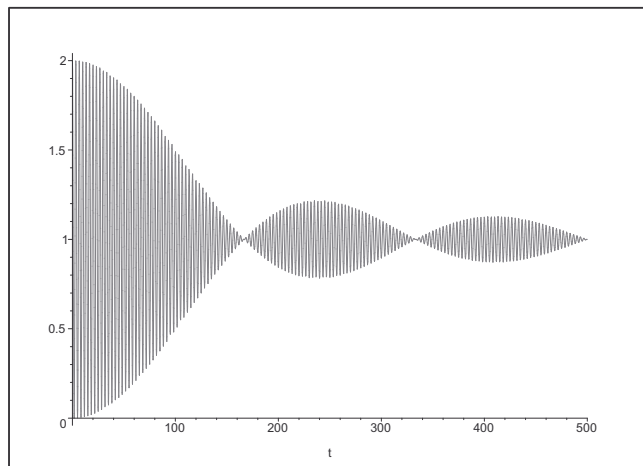
d) En déduire l'expression du contraste de la figure.

e) La fonction sinus cardinal est maximale pour $x = 0$ et devient très faible à l'extérieur de l'intervalle $[-\pi, \pi]$. En déduire la valeur de e au dessus de laquelle on observera un brouillage et retrouver la condition donnée par le critère de brouillage.

2.11

Détermination expérimentale d'une largeur spectrale (analyse documentaire)

Une source de lumière ponctuelle S présentant un profil spectral de largeur $\Delta\lambda$ et de longueur d'onde moyenne $\lambda_0 = 668 \text{ nm}$ éclaire un dispositif de trous d'Young dont la distance a varie à vitesse constante $V_0 = 100 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ avec $a = 0$ à $t = 0$. S est à égale distance des deux trous. L'écran est à la distance $D = 5,00 \text{ m}$, on place un capteur de lumière en un pont M d'ordonnée $y = 1,0 \text{ cm}$. On obtient le graphe suivant, donnant l'intensité lumineuse en fonction de la date t exprimée en secondes.



Donner une estimation de la largeur spectrale $\Delta\lambda$.

2.12

Élargissement spectral d'une radiation par effet Doppler

Un gaz parfait monoatomique de masse molaire M dans une ampoule est porté à la température T et émet une radiation principale de fréquence f_0 dans le référentiel de l'atome émissif. Lorsque l'atome est en mouvement à la vitesse \vec{v} constante dans le référentiel \mathcal{R} un observateur fixe dans \mathcal{R} percevra une onde de fréquence différente. En notant \vec{u} le vecteur unitaire dirigé de l'ampoule vers l'observateur, la fréquence perçue est f_p, f_a dans le cas particulier où l'atome vient vers l'observateur ($\vec{v} = +v\vec{u}$) et f_e dans le cas particulier où l'atome s'éloigne de l'observateur ($\vec{v} = -v\vec{u}$) avec

$$f_p = \frac{f_0}{1 - \frac{v \cdot \vec{u}}{c}}, \quad f_a = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} \quad \text{et} \quad f_e = \frac{f_0}{1 + \frac{v}{c}}$$

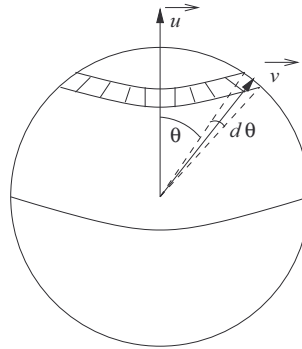
On rappelle que $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ où $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

- a) On rappelle que l'énergie interne molaire d'un gaz parfait monoatomique est $U_m = \frac{3}{2}RT$. En déduire que la vitesse moyenne v des atomes du gaz parfait monoatomique est reliée à la température par la loi

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

avec $k_B = \frac{R}{N_A}$. On suppose désormais que tous les atomes ont la même vitesse v .

- b) On noté θ l'angle entre \vec{u} et \vec{v} pour un atome donné. Exprimer f_p en fonction de f_0, v, c et α . Retrouver ainsi les expressions de f_a et f_e données par l'énoncé.
- c) On donne pour l'hélium $M = 4,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $T = 600 \text{ K}$. Estimer numériquement la largeur spectrale relative $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_a - f_e}{f_0}$.
- d) Pour les N atomes émetteurs dans l'ampoule, on note dN le nombre d'atomes dont le vecteur vitesse fait avec \vec{u} un angle compris entre θ et $\theta + d\theta$: ce sont ceux dont l'extrémité du vecteur vitesse se trouve dans la zone hachurée suivante :



Montrer que $dN = \frac{N}{2} \sin \theta d\theta$.

- e) On note $\mathcal{D}(\lambda) = \frac{dI_0}{d\lambda}$ la densité spectrale de la source, où dI_0 est l'intensité lumineuse reçue par l'observateur dans la bande spectrale $[\lambda, \lambda + d\lambda]$. On admet que dI_0 est proportionnel au nombre dN d'atomes émettant dans cette bande. Montrer que le profil spectral est rectangulaire, c'est-à-dire que $\mathcal{D}(\lambda)$ est constant pour $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, nul partout ailleurs.
- f) Pour l'hélium à 600 K , $f_0 = 5,106 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Calculer les valeurs de

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{2} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{2}$$



2.13

Brouillage des franges par élargissement spectral

Une source ponctuelle S placée à égale distance de deux trous d'Young distants de a , possède un profil spectral rectangulaire en nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$. La densité spectrale en nombre d'onde est constante sur l'intervalle $\left[\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}, \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}\right]$ où elle vaut

$$\mathcal{D}(\sigma) = \frac{dI}{d\sigma} = \mathcal{D}_0$$

et nulle partout ailleurs. On prend l'indice de l'air égal à 1.

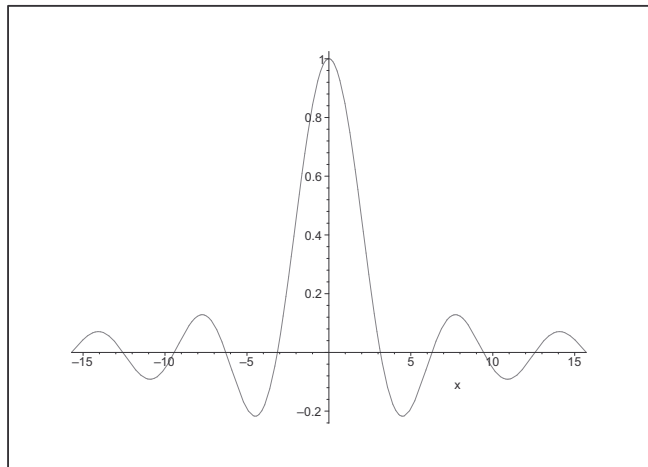
- a) Par application de la formule de Fresnel, donner l'expression de la contribution $dI(\sigma)$ de la bande spectrale élémentaire $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ à l'intensité lumineuse en un point M d'ordonnée y sur un écran à la distance D du plan des trous d'Young.
- b) En déduire l'intensité lumineuse totale et l'exprimer sous la forme

$$I(y) = 2I_0 \left[1 + \text{sinc} \frac{2\pi y}{u} \cos \frac{2\pi y}{v} \right]$$

où sinc est la fonction sinus cardinal

$$\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$$

dont voici l'allure du graphe



Préciser les expressions de I_0 , u et v .

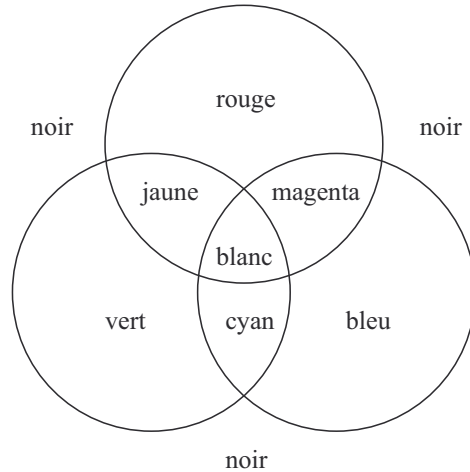
- c) En considérant que $\Delta\sigma \ll \sigma_0$, justifier que le contraste de la figure d'interférences au voisinage de M est

$$C(y) = \left| \text{sinc} \frac{2\pi y}{u} \right|$$

- d) En déduire l'ordonnée y à laquelle le contraste s'annule et comparer au résultat donné par le critère semi-quantitatif de brouillage des franges.

2.14**Analyse sommaire des teintes de Newton**

On utilise pour la perception des couleurs le cercle chromatique basé sur les trois couleurs primaires rouge ($\lambda_R = 700 \text{ nm}$), vert ($\lambda_V = 546 \text{ nm}$) et bleu ($\lambda_B = 436 \text{ nm}$) :



Une source ponctuelle de lumière blanche est placée à égale distance de deux trous d'Young distants de $a = 1,0 \text{ mm}$. Un écran est placé à $D = 10 \text{ m}$ du plan des trous d'Young. La position d'un point M de l'écran est repérée par son ordonnée y . On prend l'indice de l'air égal à 1.

- Donner l'expression de l'ordre d'interférences $p_\lambda(y)$ au point M pour une radiation de longueur d'onde λ .
- On adopte le modèle suivant : une radiation est brillante en y si son ordre d'interférences $p_\lambda(y)$ est compris entre $k - \frac{1}{4}$ et $k + \frac{1}{4}$ et éteinte si $p_\lambda(y)$ est compris entre $k + \frac{1}{4}$ et $k + \frac{3}{4}$ où k est un entier. Construire un diagramme pour $0 \leq y \leq 5 \text{ mm}$ indiquant les zones de brillance et les zones d'extinction de chaque couleur primaire.
- En déduire une description par couleurs de cette zone.

2.15**Construction graphique du spectre cannelé**

La densité spectrale solaire pour la longueur d'onde λ est le rapport entre l'intensité de la lumière solaire dI et la largeur spectrale $d\lambda$ de la bande de longueur d'onde $[\lambda, \lambda + d\lambda]$. Elle s'écrit

$$\mathcal{D}(\lambda) = \frac{dI}{d\lambda} = \frac{K}{\lambda^5 \left(\exp \frac{hc}{\lambda k_B T} - 1 \right)}$$

où $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck, $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ la célérité de la lumière dans le vide, $k_B = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ la constante de Boltzmann et $T = 5800 \text{ K}$. On prend l'indice de l'air égal à 1.

- a) En utilisant un outil graphique, tracer la courbe représentative de $\mathcal{D}(\lambda)$ pour

$$\lambda \in [300 \text{ nm}, 900 \text{ nm}]$$

en prenant $K = 10^{-29}$ pour des commodités d'échelle. Commenter le fait que le maximum d'acuité de l'œil humain se situe entre 500 nm et 550 nm.

- b) On filtre la lumière solaire par un verre athermique qui la débarrasse des radiations infrarouges, puis on la concentre au foyer S d'un miroir parabolique. S est à égale distance de deux trous d'Young distants de $a = 1,0 \text{ mm}$, un écran est placé à $D = 1,0 \text{ m}$ du plan des trous d'Young et on place un spectroscopie au point M d'ordonnée $y = 1,0 \text{ cm}$. Justifier que la densité spectrale en M est

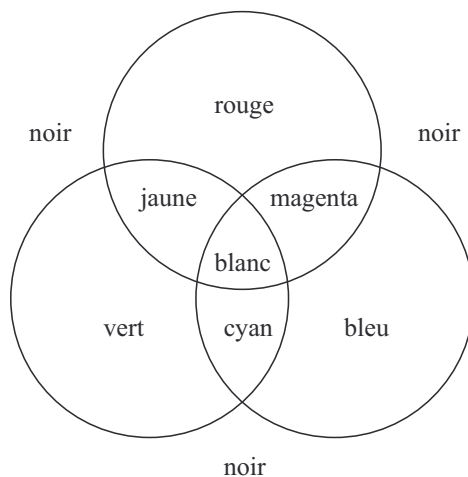
$$\mathcal{E}(\lambda) = 2\mathcal{D}(\lambda) \left(1 + \cos \frac{2\pi a y}{\lambda D} \right)$$

- c) En utilisant un outil graphique, tracer la courbe représentative de $\mathcal{E}(\lambda)$ pour

$$\lambda \in [400 \text{ nm}, 800 \text{ nm}]$$

Combien de cannelures le spectre présente-t-il ?

- d) On passe de $D = 1,0 \text{ m}$ à $D = 10,0 \text{ m}$. Combien de cannelures le spectre présente-t-il ? Quelle est la teinte de Newton visible en M ? On donne le cercle chromatique basé sur les trois couleurs primaires rouge ($\lambda_R = 700 \text{ nm}$), vert ($\lambda_V = 546 \text{ nm}$) et bleu ($\lambda_B = 436 \text{ nm}$) :



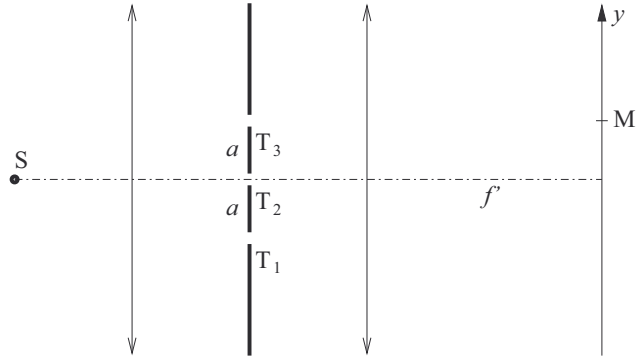
2.16

Détermination de a à partir du spectre cannelé

On éclaire en lumière blanche deux trous d'Young distants de a . La source ponctuelle S est à égale distance des deux trous. L'écran est situé à la distance $D = 2,50 \text{ m}$ du plan des trous d'Young. On place un spectroscopie au point M de l'écran d'ordonnée $y = 1,5 \text{ cm}$. On observe 17 cannelures dans le spectre $[400 \text{ nm}, 800 \text{ nm}]$. On prend l'indice de l'air égal à 1. Déterminer l'intervalle des valeurs possibles de a .

2.17**Trois trous d'Young dans les conditions de Fraunhofer**

Trois trous d'Young alignés sont éclairés dans les conditions de Fraunhofer par une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 au foyer objet d'une lentille convergente. L'écran est dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f' . On note a la distance entre deux trous consécutifs. On prend l'indice de l'air égal à 1.



Déterminer l'expression de l'onde complexe en M, en déduire celle de l'intensité lumineuse $I(y)$ et tracer, de préférence sans utiliser l'outil informatique, l'allure de sa courbe représentative.

2.18**Séparation angulaire d'un système de deux étoiles**

Une lentille mince convergente précédée de deux trous d'Young T et U distants de a , vise les deux composantes de même luminosité d'une étoile double (S_1, S_2). Un filtre spectral permet de travailler en lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 660 \text{ nm}$. On prend l'indice de l'air égal à 1.



- a) On s'intéresse à l'étoile S_1 vue sous un angle $\frac{\alpha}{2}$. Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I_1(y)$ créée par cette étoile au point M.
- b) S_2 est vue sous un angle $-\frac{\alpha}{2}$ par rapport à l'axe optique. Donner $I_2(y)$ puis $I(y)$ due aux deux étoiles.
- c) On donne la formule de trigonométrie

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Calculer le contraste C.

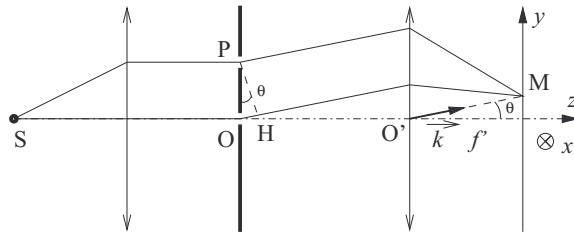
- d) On fait varier a . Pour quelles valeurs de a a-t-on $C = 0$? On détermine de façon expérimentale, la plus petite valeur de a vérifiant ces conditions : $a_{\min} = 220$ mm). En déduire la valeur de α .



2.19

Trous d'Young non alignés

Dans le dispositif suivant, le rayon (SOM) est le rayon de référence et on cherche à exprimer la différence de marche entre ce rayon et le rayon (SPM).



La source ponctuelle S monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0 , est au foyer objet de la lentille convergente de gauche. Le point M a pour coordonnées (x, y) sur l'écran. Le vecteur $\vec{k} = k\vec{u}$ a pour norme $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ et est selon le vecteur unitaire \vec{u} qui vise M depuis le centre optique O' de la lentille de droite, de distance focale f' .

- a) Justifier que

$$\delta = [\text{SOM}] - [\text{SPM}] = OP \sin \theta = \vec{u} \cdot \vec{OP} \text{ avec } \vec{u} \simeq \begin{pmatrix} \frac{x}{f'} \\ \frac{y}{f'} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- b) En déduire la relation entre les grandeurs complexes

$$\underline{a}_P(M) = \underline{a}_O(M) e^{i\vec{k} \cdot \vec{OP}}$$

- c) On remplace le plan contenant O et P du schéma précédent par un plan opaque dans lequel on a percé quatre trous d'Young, leurs coordonnées dans ce plan sont

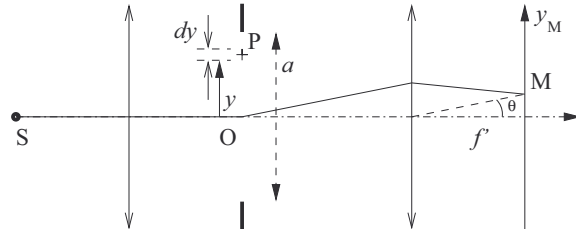
$$T \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, U \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, V \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, W \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse $I(x, y)$ au point M. Décrire la figure observée sur l'écran.

2.20

Introduction à l'étude de la diffraction

Le passage de deux à N trous d'Young est ici généralisé à une pupille diffractante de largeur a , infiniment large dans la direction perpendiculaire, étudiée dans les conditions de Fraunhofer. S est une source ponctuelle de lumière quasi monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0 . On prend l'indice de l'air égal à 1.



On définit autour d'un point P de la pupille, d'ordonnée y , une pupille élémentaire de largeur dy . On admet que cette pupille se comporte comme une source secondaire de lumière qui, par effet de diffraction, émet de la lumière dans toutes les directions en aval de la pupille. On considère un point M de l'écran, d'ordonnée y_M et repéré par le petit angle θ . On a tracé sur la figure le rayon de référence (SOM).

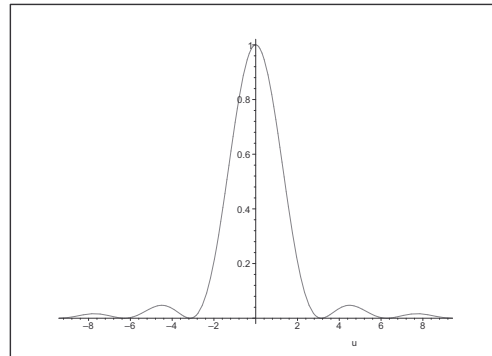
- a) Tracer le rayon (SPM).
- b) Déterminer la différence de marche $\delta_M(y) = [\text{SPM}] - [\text{SOM}]$ en fonction de y , et θ puis en fonction de y , y_M et f' .
- c) La contribution de la pupille élémentaire à l'onde complexe donnée en M

$$d\underline{a} = \underline{a}_O e^{-i \frac{2\pi \delta_M(y)}{\lambda_0}} \frac{dy}{a}$$

(\underline{a}_O est un terme de référence correspondant à l'onde passant par O). En déduire par calcul intégral la fonction d'onde $\underline{a}(M)$ et l'intensité lumineuse $I(M)$ en fonction de y_M en utilisant la fonction sinus cardinal carré

$$\text{sin}^2 u = \left(\frac{\text{sin } u}{u} \right)^2$$

dont l'allure du graphe est la suivante.



- d) Décrire sommairement la figure sur l'écran.

Du mal à démarrer ?

2.1 Le carré scalaire est égal au carré de la norme.

2.2 Les propriétés géométriques du cercle et des triangles rectangles permettent d'identifier les angles et les différentes longueurs pertinentes.

2.3 On pourra supposer S à égale distance des deux trous d'Young et poser $I_2 = \beta I_1$. Il suffit ensuite d'appliquer la formule de Fresnel générale et de calculer le contraste pour conclure.

2.4 On trace les deux faisceaux coniques et on détermine, par un raisonnement de géométrie, la largeur de la zone d'intersection des deux faisceaux sur l'écran. Elle doit être supérieure à trois interférences.

2.5 Seuls les rayons issus de S' d'une part, ceux issus de S'' d'autre part interfèrent. Les intensités $I'(y)$ et $I''(y)$ sont obtenues par un calcul classique. Les sources étant incohérentes, on somme les deux intensités.

2.6 Le calcul est identique à celui effectué dans le cours, en remplaçant $(n-1)e$ par $(n_1 - n_2)L$.

2.7 La difficulté est purement géométrique. Il est conseillé de faire une figure très agrandie, en prenant un angle α assez grand. La deuxième loi de Descartes à la réfraction met en évidence l'angle de réfraction r . On pourra noter H_1 et K_1 les points d'entrée et de sortie du rayon dans la lame de verre, puis exprimer les différentes longueurs en cherchant des triangles rectangles et en utilisant les angles $\alpha - r$ et r .

2.8 (a) On utilise la formule de Fresnel. (b) On exprime $I(y)$ par une intégrale d'intensités lumineuses car les ondes correspondant aux bandes spectrales élémentaires sont deux à deux incohérentes. (c) On pourra remarquer que l'allure des courbes d'intensité donne accès au contraste.

2.9 On calcule les vitesses dans les parties haute et basse du tube par composition des vitesses (dans le référentiel de l'eau, la lumière se déplace à $\frac{c}{n}$). On en déduit les indices apparents des liquides dans les deux branches et la suite du calcul est classique.

2.10 On calcule l'intégrale des intensités lumineuses créées séparément par chacune des sources élémentaires. Le calcul complet demande beaucoup de soin, mais il est très guidé.

2.11 En s'inspirant du calcul proposé dans l'exemple du cours, on pourra exprimer Δp en fonction de $\Delta \lambda$ et de λ_0 . Il est aisé de déterminer sur le graphique la date à laquelle le brouillage est atteint, et d'en déduire $\Delta \lambda$.

2.12 La principale difficulté de l'exercice est la démonstration de l'expression de dN à la question (d). On justifiera que $dN = N \frac{d\mathcal{A}}{d\mathcal{A}}$ où \mathcal{A} est l'aire de la sphère et $d\mathcal{A}$ l'aire de la bandelette hachurée. Pour la question (e), on écrira que $\frac{dI_0}{d\lambda} = \frac{dI_0}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\lambda}$.

2.13 (a) On pourra remarquer que $\frac{2\pi\delta(y)}{\lambda} = 2\pi\delta(y)\sigma$. (b) Le calcul de l'intégrale fait apparaître la différence de deux sinus, qu'on pourra écrire sous la forme d'un produit. (c) Le cosinus oscillant entre -1 et $+1$, on identifie I_{\max} et I_{\min} dans l'expression de $I(y)$. (d) On peut considérer qu'après la première annulation du sinus cardinal, celui-ci reste très faible et le contraste est presque nul.

2.14 Sur un axe gradué en y , on repère les ordonnées pour lesquelles les différentes couleurs sont allumées ou éteintes. On peut le rendre plus lisible en traçant des segments sur des axes superposés, puis analyser dans chaque intervalle la couleur résultant de la superposition grâce au cercle chromatique.

2.15 (a) On calcule numériquement $\frac{hc}{k_B T}$ puis on utilise un grapheur. (b) Par application de la formule de Fresnel, $\mathcal{E}(\lambda)$ est le produit de $\mathcal{D}(\lambda)$ par une fonction trigonométrique de λ . (c) L'utilisation du grapheur fait apparaître le spectre cannelé et il suffit de compter le nombre d'annulations. (d) On vérifie qu'il n'y a plus qu'une seule cannelure et l'utilisation du cercle chromatique permet de déterminer la couleur complémentaire de la radiation éteinte.

2.16 L'encadrement des longueurs d'onde éteintes permet d'en déduire, par inversion de la double inégalité, celui de l'ordre d'interférences, puis celui de l'entier k correspondant aux extinctions. S'il y a 17 entiers entre deux réels, leur différence est comprise entre 17 et 18.

2.17 On superpose trois ondes cohérentes dont les phases sont en progression arithmétique. On peut les exprimer en fonction de celle qui passe par T_2 , puis sommer les trois ondes complexes et en déduire l'intensité lumineuse. Pour tracer l'allure de la courbe, on peut tracer l'allure de la fonction cosinus et en déduire, de proche en proche, celle de la fonction complète.

2.18 La sommation des intensités obtenues par la formule de Fresnel donne l'expression de $I(M)$. L'annulation du contraste permet de calculer la valeur de α .

2.19 En utilisant la formule clé vue au chapitre 1; on peut exprimer chacune des quatre ondes arrivant en M en fonction du produit d'une fonction de référence \underline{a}_O et des exponentielles complexes $e^{i\vec{k}\cdot\vec{OP}}$ où P s'identifie tour à tour à T, U, V, W . La sommation des quatre ondes cohérentes donne $\underline{a}(M)$. On en déduit l'intensité lumineuse en fonction de x et de y .

2.20 La sommation discrète d'ondes complexes cohérentes est remplacée par une sommation intégrale. Comme en grandeurs réelles, la primitive de e^{ibx} est $\frac{e^{ibx}}{ib}$. Il faut mener le calcul avec soin jusqu'à obtenir, après simplifications, le sinus cardinal.

Corrigés des exercices

2.1

a) Les coordonnées sont lues sur le schéma

$$T_1 \left| \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{a}{2} \end{array} \right., T_2 \left| \begin{array}{c} 0 \\ \frac{a}{2} \end{array} \right. \text{ et } M \left| \begin{array}{c} D \\ y \end{array} \right.$$

b) On en déduit

$$\overrightarrow{T_1 M} \left| \begin{array}{c} D \\ y + \frac{a}{2} \end{array} \right., \overrightarrow{T_2 M} \left| \begin{array}{c} D \\ y - \frac{a}{2} \end{array} \right.$$

c) On développe l'identité remarquable

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{T_1 M} - \overrightarrow{T_2 M}) (\overrightarrow{T_1 M} + \overrightarrow{T_2 M}) &= \overrightarrow{T_1 M}^2 - \overrightarrow{T_2 M}^2 \\ &= T_1 M^2 - T_2 M^2 = (T_1 M - T_2 M)(T_1 M + T_2 M) \end{aligned}$$

d) L'identité s'écrit

$$\left| \begin{array}{c} 0 \\ a \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} 2D \\ 2y \end{array} \right| = \frac{\delta}{n_0} \cdot 2D$$

$$\text{soit } 2ay = \frac{2D\delta}{n_0} \text{ donc } \delta = \frac{n_0 ay}{D}$$

2.2

a) La différence de marche est

$$\delta = [ST_1 M] - [ST_2 M] = [ST_1] + [T_1 H_1] + [H_1 M] - [ST_2] - [T_2 M]$$

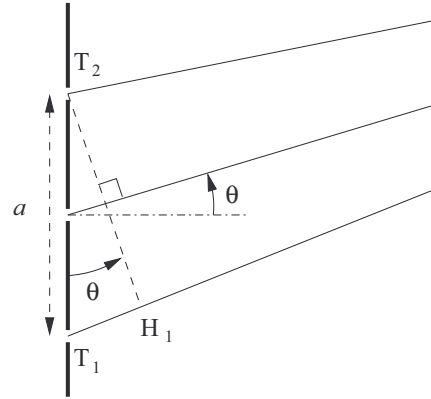
Pour des rayons issus de M, la loi de Malus indique que C est une surface d'onde car elle est perpendiculaire aux rayons. On en déduit que

$$[MH_1] = [MT_2] \text{ donc } [H_1 M] = [T_2 M]$$

en utilisant le principe de retour inverse de la lumière. S étant à égale distance de T_1 et de T_2 , la différence de marche vaut donc

$$\delta = [T_1 H_1] = n_0 T_1 H_1$$

b) La figure agrandie est la suivante.



Dans le triangle $(T_1 H_1 T_2)$ assimilé à un triangle rectangle,

$$T_1 H_1 = a \sin \theta \approx a \theta \text{ donc } \delta = n_0 a \theta$$

c) On a $\theta \approx \tan \theta = \frac{y}{D}$ donc

$$\delta = \frac{n_0 ay}{D}$$

2.3

Les intensités données en M par chaque trou pris séparément sont différentes. On doit donc revenir à la formule de Fresnel générale, posons $I_2 = \beta I_1$ avec $\beta < 1$. Dans les notations du cours, en prenant l'indice de l'air égal à 1, et en supposant la source placée à égale distance des deux trous d'Young,

$$\delta = \frac{ay}{D} \text{ et } I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$$

$$\text{soit } I = I_1 \left(1 + \beta + 2\sqrt{\beta} \cos \frac{2\pi ay}{\lambda_0 D} \right)$$

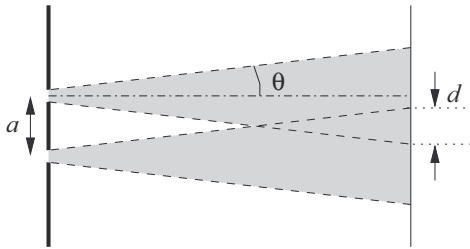
Il n'y a donc pas de frange totalement sombre (I ne s'annule jamais) et le contraste vaut

$$C = \frac{2\sqrt{\beta}}{1 + \beta} < 1$$

Le contraste est d'autant plus proche de 0 que les deux trous ont des largeurs différentes.

2.4

a) Les faisceaux coniques ont l'allure suivante.



La largeur du champ d'interférences est

$$d = 2D \tan \theta - a \approx 2D\theta - a$$

L'interfrange est

$$i = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

On observera au moins trois franges si

$$d > 3i \text{ soit } 2D\theta - a > \frac{3\lambda_0 D}{a}$$

$$\text{soit } D > \frac{a}{2\theta - \frac{3\lambda_0}{a}} = 1,8 \text{ m}$$

b) Sur les bords du champ d'interférences, la figure indique qu'on est au cœur de l'un des faisceaux coniques (celui issu de T_1 par exemple), et à la périphérie de l'autre faisceau (celui issu de T_2). L'intensité lumineuse I_1 est donc proche de sa valeur maximale I_0 et I_2 est proche de zéro. Le contraste est donc

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \approx 2\sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \approx 0$$

donc les franges ne sont plus visibles.

2.5

a) Les quatre rayons sont ($S'T_1M$), ($S''T_1M$), ($S'T_2M$) et ($S''T_2M$). Seuls les rayons issus d'une même source interfèrent, les sources S' et S'' sont incohérentes, il y a donc interférence entre ($S'T_1M$) et ($S'T_2M$) d'une part, entre ($S''T_1M$) et ($S''T_2M$) d'autre part.

b) La différence de marche en M entre les deux rayons issus de S' est

$$\delta'(M) = [S'T_1M] - [S'T_2M] = S'T_1 + T_1M - S'T_2 - T_2M$$

Les coordonnées des quatre points sont

$$S' \left| \begin{array}{l} -D \\ -\frac{d}{2} \end{array} \right., T_1 \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{a}{2} \end{array} \right., T_2 \left| \begin{array}{l} 0 \\ \frac{a}{2} \end{array} \right. \text{ et } M \left| \begin{array}{l} D \\ y \end{array} \right.$$

On en déduit

$$\overrightarrow{S'T_1} \left| \begin{array}{l} D \\ \frac{d-a}{2} \end{array} \right. \text{ donc}$$

$$S'T_1 = \sqrt{D^2 + \frac{(d-a)^2}{4}} = D\sqrt{1 + \frac{(d-a)^2}{4D^2}}$$

$$S'T_1 \approx D \left[1 + \frac{d^2 - 2ad + a^2}{8D^2} \right]$$

On exprime de même

$$S'T_2 \approx D \left[1 + \frac{d^2 + 2ad + a^2}{8D^2} \right]$$

$$T_1M \approx D \left[1 + \frac{4y^2 + 4ay + a^2}{8D^2} \right]$$

$$T_2M \approx D \left[1 + \frac{4y^2 - 4ay + a^2}{8D^2} \right]$$

On en déduit

$$\delta'(M) = \delta'(y) = -\frac{ad}{2D} + \frac{ay}{D}$$

Par application de la formule de Fresnel on en déduit

$$I'(y) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta'(y)}{\lambda_0} \right)$$

Le calcul est parfaitement analogue pour l'autre source, il suffit de remplacer d par $-d$:

$$I''(y) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta''(y)}{\lambda_0} \right) \text{ avec } \delta''(y) = \frac{ad}{2D} + \frac{ay}{D}$$

Les deux sources sont incohérentes, on somme donc les intensités lumineuses

$$I(y) = I'(y) + I''(y) = 2I_0 \left(2 + \cos \frac{2\pi\delta'(y)}{\lambda_0} + \cos \frac{2\pi\delta''(y)}{\lambda_0} \right)$$

c) En utilisant la relation donnée,

$$I(y) = 4I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi(\delta'(y) + \delta''(y))}{2\lambda_0} \cos \frac{2\pi(\delta'(y) - \delta''(y))}{2\lambda_0} \right)$$

$$I(y) = 4I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi ay}{\lambda_0 D} \cos \frac{\pi ad}{\lambda_0 D} \right)$$

Par identification

$$\gamma = \cos \frac{\pi ad}{\lambda_0 D} \text{ et } \delta(y) = \frac{ay}{D}$$

- d) L'intensité est maximale lorsque le cosinus vaut +1 si $\gamma > 0$ ou -1 si $\gamma < 0$,

$$\text{donc } I_{\max} = 4I_0(1 + |\gamma|)$$

L'intensité est minimale lorsque le cosinus vaut -1 si $\gamma > 0$ ou +1 si $\gamma < 0$

$$\text{donc } I_{\min} = 4I_0(1 - |\gamma|)$$

Le contraste vaut donc

$$C = \frac{4I_0(1 + |\gamma|) - 4I_0(1 - |\gamma|)}{4I_0(1 + |\gamma|) + 4I_0(1 - |\gamma|)} = |\gamma|$$

$$\text{soit } C = \left| \cos \frac{\pi ad}{\lambda_0 D} \right|$$

Il s'annule lorsque

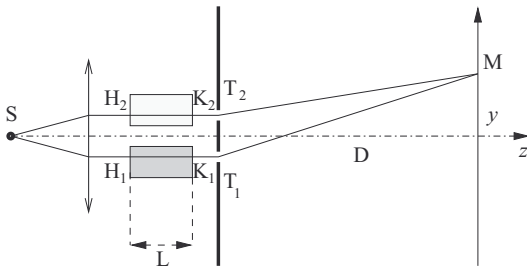
$$\frac{\pi ad}{\lambda_0 D} = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$$

La plus petite valeur positive est obtenue pour $n = 0$, donc

$$d = \frac{\lambda_0 D}{2a}$$

2.6

- a) Les deux réservoirs étant remplis d'air de même indice, il n'y a aucune différence de marche en amont des trous d'Young, le point de l'écran où δ est nul est donc le point équidistant de T_1 et T_2 , c'est donc le centre en $y = 0$.
- b) Soit M le point de l'écran d'ordonnée y . Détaillons la marche des deux rayons qui s'y superposent.



La différence de marche est

$$\delta = [SH_1] + [H_1K_1] + [K_1T_1] + [T_1M] - [SH_2] - [H_2K_2] - [K_2T_2] - [T_2M]$$

D'après la loi de Malus,

$$[SH_1] = [SH_2] \text{ et } [K_1T_1] = [K_2T_2]$$

De plus, le calcul de la norme des vecteurs puis le développement limité donne

$$\begin{cases} T_1M = D \left[1 + \frac{y^2 + ay + \frac{a^2}{4}}{2D^2} \right] \\ T_2M = D \left[1 + \frac{y^2 - ay + \frac{a^2}{4}}{2D^2} \right] \end{cases} \text{ donc } T_1M - T_2M = \frac{ay}{D}$$

Enfin, par définition du chemin optique

$$[H_1K_1] = L \text{ et } [H_2K_2] = nL$$

On en déduit

$$\delta = (1 - n)L + \frac{n_0 ay}{D}$$

La frange brillante centrale est définie par

$$\delta = 0 \text{ soit } n = 1 + \frac{n_0 ay_0}{DL}$$

- c) La formule établie à la question précédente est encore valable. On peut donc écrire

$$n(T) - 1 = \frac{n_0 ay_0}{DL}$$

On complète donc le tableau de valeurs en calculant $n(T) - 1$ et le produit $(n(T) - 1)T$.

T (K)	270	280	290	300
y_0 (mm)	759	732	707	683
$n(T) - 1$ ($\times 10^{-4}$)	3,036	2,928	2,828	2,732
$(n(T) - 1)T$	0,08197	0,08198	0,08201	0,08196
T (K)	310	320	330	340
y_0 (mm)	661	641	621	603
$n(T) - 1$ ($\times 10^{-4}$)	2,644	2,564	2,484	2,412
$(n(T) - 1)T$	0,08196	0,08205	0,08197	0,08201

Le produit est presque constant :

$$(n(T) - 1)T \approx 0,082 \text{ K}$$

- d) Pour l'air extérieur

$$n_0 - 1 = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ donc } T_0 = \frac{0,082}{2,8 \cdot 10^{-4}} = 293 \text{ K}$$

- e) La loi des gaz parfaits s'écrit

$$P_0V = \frac{m}{M}RT \text{ soit } P_0M = \frac{m}{V}RT = \mu RT$$

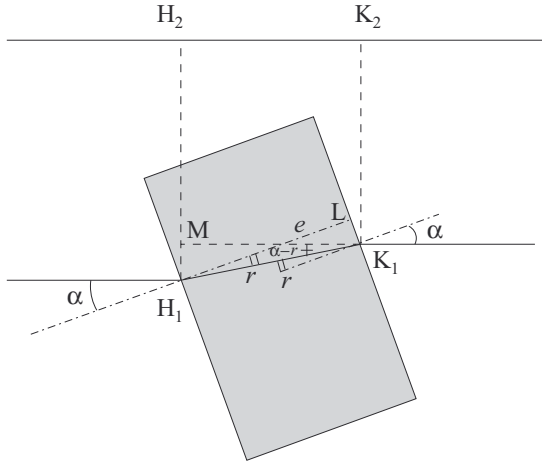
$$\text{donc } n - 1 = \frac{0,082}{T} = \frac{0,082R}{P_0M} \mu$$

On en déduit

$$K_{GD} = \frac{0,082R}{P_0M} = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

2.7

Voici le schéma détaillé du trajet du rayon qui traverse la lame, en tenant compte de la double réfraction à l'entrée et à la sortie.



La deuxième loi de Descartes s'écrit $\sin \alpha = n \sin r$. La différence de marche induite par la lame de verre en amont des trous d'Young est, par application de la loi de Malus

$$[ST_1] - [ST_2] = [H_1K_1] - [H_2K_2]$$

Dans le triangle rectangle (H_1K_1L) :

$$\cos r = \frac{H_1L}{H_1K_1} \text{ donc } H_1K_1 = \frac{e}{\cos r}$$

Dans le triangle rectangle (H_1MK_1) :

$$\cos(\alpha - r) = \frac{MK_1}{H_1K_1} \text{ donc } MK_1 = H_1K_1 \cos(\alpha - r) = \frac{e \cos(\alpha - r)}{\cos r}$$

Or $H_2K_2 = MK_1$ donc

$$\delta = nH_1K_1 - H_2K_2 = \frac{ne}{\cos r} - \frac{e \cos(\alpha - r)}{\cos r}$$

En un point d'ordonnée y sur l'écran, la différence de marche est donc

$$\frac{ne}{\cos r} - \frac{e \cos(\alpha - r)}{\cos r} + \frac{ay}{D}$$

La frange centrale brillante, où la différence de marche vaut 0 se trouve donc en

$$y_0(\alpha) = -\frac{De}{a} \cdot \frac{n - \cos(\alpha - r)}{\cos r}$$

Pour $\alpha = 0, r = 0$ et

$$y_0(0) = -\frac{De}{a}(n - 1)$$

On en déduit

$$\Delta y_0 = \frac{De}{a} \left[\frac{n - \cos(\alpha - r)}{\cos r} - (n - 1) \right]$$

Si α est un petit angle, les développements limités au deuxième ordre s'écrivent

$$\begin{aligned} \alpha &= nr \\ \cos r &= 1 - \frac{r^2}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \\ \cos(\alpha - r) &= 1 - \frac{\alpha^2(n-1)^2}{2n^2} \\ \frac{n - \cos(\alpha - r)}{\cos r} &\approx \frac{n - 1 + \frac{\alpha^2(n-1)^2}{2n^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}} \approx \\ &\left(n - 1 + \frac{\alpha^2(n-1)^2}{2n^2} \right) \left(1 + \frac{\alpha^2}{2n^2} \right) \approx \\ n - 1 + \frac{\alpha^2}{2n^2} \left((n-1)^2 + (n-1) \right) &= \\ n - 1 + \frac{\alpha^2(n-1)}{2n} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\Delta y_0 \approx \frac{De\alpha^2(n-1)}{2an}$$

2.8

a) La différence de marche est la somme de celle en amont et de celle en aval des trous d'Young. Le calcul classique est détaillé dans le cours et

$$\delta = [ST_1M] - [ST_2M] = (n(\sigma) - 1)e + \frac{ay}{D}$$

Par application de la formule de Fresnel

$$dI = 2dI_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right)$$

$$\text{soit } dI(\sigma) = 2\mathcal{D}_0 d\sigma \left[1 + 2 \cos \left(2\pi\sigma \left((n(\sigma) - 1)e + \frac{ay}{D} \right) \right) \right]$$

pour $\sigma \in \left[\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}, \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right]$.

b) Les bandes spectrales, de nombres d'onde distincts, donc de longueurs d'onde distincts, sont incohérentes. On somme donc les intensités lumineuses.

$$I(y) = \int_{\sigma = \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} 2\mathcal{D}_0 d\sigma$$

$$\left[1 + \cos \left(2\pi\sigma \left((A + B\sigma^2 - 1)e + \frac{ay}{D} \right) \right) \right]$$

et $J(y) = \frac{I(y)}{\Delta\sigma}$. L'intégrale n'est pas facilement calculable car elle fait apparaître le cosinus d'une fonction polynomiale de degré 3 en σ .

- c) On voit nettement que le contraste entre J_{\min} et J_{\max} chute lorsque β varie de $1 \cdot 10^{-5}$ à $10 \cdot 10^{-5}$. Il y a donc brouillage des franges pour $\beta > 10 \cdot 10^{-5}$, donc quand

$$\Delta\sigma > \sigma_0 \cdot 10^{-4}$$

2.9

On calcule les vitesses dans les parties haute et basse du tube puis les indices apparents en faisant le développements limités en $n \frac{V_0}{c} \ll 1$

$$c_1 = -V_0 + \frac{c}{n} \text{ donc } c_1 = \frac{c}{n_1} \text{ avec}$$

$$n_1 = \frac{n}{1 - n \frac{V_0}{c}} \approx n \left[1 + n \frac{V_0}{c} \right]$$

$$c_2 = V_0 + \frac{c}{n} \text{ donc } c_2 = \frac{c}{n_2} \text{ avec}$$

$$n_2 = \frac{n}{1 + n \frac{V_0}{c}} \approx n \left[1 - n \frac{V_0}{c} \right]$$

La différence de marche en un point M d'ordonnée y se calcule classiquement en utilisant la loi de Malus :

$$\delta = (n_2 - n_1)L + \frac{ay}{D} = -\frac{2n^2V_0L}{c} + \frac{ay}{D}$$

La frange centrale brillante est définie par $\delta = 0$ donc elle se décale en

$$y_0 = \frac{2Dn^2V_0L}{ac}$$

lorsque l'eau circule. Elle est donc nulle quand l'eau est immobile et $\Delta y = y_0$. On en déduit

$$V_0 = \frac{ac\Delta y}{2Dn^2L}$$

2.10

- a) Les coordonnées des quatre points sont

$$dS \begin{vmatrix} -L \\ y_S \\ 0 \end{vmatrix}, T_1 \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{a}{2} \\ 0 \end{vmatrix}, T_2 \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} \\ 0 \end{vmatrix} \text{ et } M \begin{vmatrix} D \\ y \\ 0 \end{vmatrix}$$

Calculons l'une des quatre distances :

$$dST_1 = \|\overrightarrow{dSM}\| = \sqrt{L^2 + \left(y_S + \frac{a}{2}\right)^2} = L\sqrt{1 + \frac{y_S^2 + ay_S + \frac{a^2}{4}}{L^2}}$$

Effectuons le développement limité :

$$dST_1 \approx L + \frac{y_S^2 + ay_S + \frac{a^2}{4}}{2L}$$

On calcule de même :

$$dST_2 \approx L + \frac{y_S^2 - ay_S + \frac{a^2}{4}}{2L}$$

$$T_1M \approx D + \frac{y^2 + ay + \frac{a^2}{4}}{2D}$$

$$T_2M \approx D + \frac{y^2 - ay + \frac{a^2}{4}}{2D}$$

La différence de marche est

$$\delta = [dST_2M] - [dST_1M] = dST_2 + T_2M - dST_1 - T_1M$$

$$\text{soit } \delta = -\frac{ay_S}{L} - \frac{ay}{D}$$

- b) Les deux ondes, issues de la même source dS sont cohérentes, on peut donc appliquer la formule de Fresnel :

$$dI = \frac{2I_0}{e} \left[1 + \cos \frac{2\pi\delta(y_S)}{\lambda_0} \right] dy_S$$

- c) Les sources dS étant distinctes, elles sont deux à deux incohérentes et on somme les intensités lumineuses. L'intégrale a pour expression détaillée

$$I(M) = \int_{y_S=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{2I_0}{e} \left(1 + \cos \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left[\frac{y_S}{L} + \frac{y}{D} \right] \right) dy_S$$

$$\text{soit } I(M) = \frac{2I_0}{e} \left[y_S + \frac{\sin \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left[\frac{y_S}{L} + \frac{y}{D} \right]}{\frac{2\pi a}{\lambda_0 L}} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{2I_0}{e} \left[e + \frac{\sin \left(\frac{\pi ea}{\lambda_0 L} + \frac{2\pi ya}{\lambda_0 D} \right) - \sin \left(-\frac{\pi ea}{\lambda_0 L} + \frac{2\pi ya}{\lambda_0 D} \right)}{\frac{2\pi a}{\lambda_0 L}} \right]$$

En utilisant la relation de trigonométrie, il vient :

$$I(M) = \frac{2I_0}{e} \left[e + e \frac{2 \sin \frac{\pi ea}{\lambda_0 L} \cos \frac{2\pi ya}{\lambda_0 D}}{\frac{2\pi ea}{\lambda_0 L}} \right]$$

$$\text{soit } I(M) = 2I_0 \left[1 + \sin c \frac{\pi ea}{\lambda_0 L} \cos \frac{2\pi ya}{\lambda_0 D} \right]$$

C'est bien l'expression donnée par l'énoncé avec

$$\gamma = \sin c \frac{\pi ea}{\lambda_0 L}$$

Chapitre 2 Dispositif des trous d'Young

- d) Le terme $\cos \frac{2\pi ya}{\lambda_0 D}$ varie entre -1 et $+1$, donc $I(M)$ varie entre

$$I_{\min} = 2I_0 \left[1 - \left| \sin c \frac{\pi ea}{\lambda_0 L} \right| \right] \text{ et } I_{\max} = 2I_0 \left[1 + \left| \sin c \frac{\pi ea}{\lambda_0 L} \right| \right]$$

Le contraste vaut donc

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \sin c \frac{\pi ea}{\lambda_0 L} \right|$$

- e) Le brouillage apparaît lorsque le contraste devient très faible, donc lorsque l'argument du sinus cardinal atteint $-\pi$ ou π :

$$\frac{\pi ea}{\lambda_0 L} = \pi \text{ soit } \frac{ea}{\lambda_0 L} = 1$$

$$\text{ou } \frac{\pi(-e)a}{\lambda_0 L} = -\pi \text{ soit } \frac{(-e)a}{\lambda_0 L} = -1$$

Conformément à la loi du cours, calculons la variation de l'ordre d'interférence sur la moitié de la source, entre dS au centre ($y_S = 0$) et dS à la périphérie de la source ($y_S = \frac{e}{2}$) :

$$\Delta p = p(y_S = 0) - p(y_S = \frac{e}{2}) = \frac{\delta(0) - \delta(\frac{e}{2})}{\lambda_0} = \frac{ea}{2\lambda_0 L}$$

Or nous avons montré ci-dessus que le brouillage apparaît lorsque $\frac{ea}{\lambda_0 L} > 1$ donc lorsque $\Delta p > \frac{1}{2}$.

2.11

En prenant l'indice de l'air égal à 1, la différence de marche en M est

$$\delta(y) = \frac{ay}{D}$$

donc l'ordre d'interférences pour la longueur d'onde λ est

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{ay}{D\lambda}$$

La variation de l'ordre d'interférences évaluée sur la demi-largeur spectrale de la source est la différence entre le centre et la périphérie de la bande spectrale :

$$\Delta p = p(\lambda_0) - p\left(\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}\right)$$

$$\Delta p = \frac{ay}{D\lambda_0} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}} \right]$$

$$\Delta p \approx \frac{ay}{D\lambda_0} \left[1 - \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0} \right) \right] = \frac{ay\Delta\lambda}{2D\lambda_0^2}$$

Le critère donné par le cours indique que le brouillage est atteint lorsque $\Delta p > \frac{1}{2}$, soit

$$\frac{ay\Delta\lambda}{2D\lambda_0^2} > \frac{1}{2} \text{ soit } a > \frac{D\lambda_0^2}{y\Delta\lambda}$$

Sur le graphe fourni, on constate que l'intensité lumineuse varie rapidement entre I_{\max} (enveloppe supérieure) et I_{\min} (enveloppe inférieure) et que l'écart devient nul lorsque $t_1 = 170$ s. À cette date, le contraste s'annule donc

$$V_0 t_1 = \frac{D\lambda_0^2}{y\Delta\lambda}$$

$$\text{donc } \Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2 D}{yV_0 t_1} = 13 \text{ nm}$$

2.12

- a) Dans le modèle de la théorie cinétique des gaz parfaits, chaque atome est assimilé à une bille de masse m . Dans le modèle des gaz parfaits, il n'y a aucune interaction entre les atomes donc l'énergie interne d'une mole d'atomes est égale à la somme des énergies cinétiques :

$$\mathcal{N}_A \cdot \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} RT \text{ donc } \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

- b) Pour un atome se déplaçant vers l'observateur, $\vec{v} = v\vec{u}$ et pour un atome qui s'en éloigne $\vec{v} = -v\vec{u}$ donc

$$f_a = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} \text{ et } f_e = \frac{f_0}{1 + \frac{v}{c}}$$

- c) La masse d'un atome est

$$m = \frac{M}{\mathcal{N}_A}$$

$$\text{donc } v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1,93 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La largeur spectrale relative est

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{1}{1 + \frac{v}{c}} \approx \left(1 + \frac{v}{c} \right) - \left(1 - \frac{v}{c} \right)$$

$$\text{soit } \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{2v}{c} = 1,29 \cdot 10^{-5}$$

- d) Les extrémités des vecteurs vitesse sont répartis aléatoirement sur la surface de la sphère, d'aire $\mathcal{A} = 4\pi v^2$. L'aire de la zone hachurée est celle d'une bandelette qu'on peut assimiler à un rectangle de largeur $v d\theta$ et de longueur égale au périmètre du cercle de rayon $v \sin \theta$, elle vaut donc

$$d\mathcal{A} = 2\pi v \sin \theta \cdot v d\theta = 2\pi v^2 \sin \theta d\theta$$

On en déduit que

$$dN = N \cdot \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}} = N \frac{2\pi v^2 \sin \theta d\theta}{4\pi v^2}$$

$$\text{soit } dN = \frac{N}{2} \sin \theta d\theta$$

- e) La longueur d'onde observée quand le vecteur \vec{v} fait un angle θ avec \vec{u} est, d'après l'énoncé :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c}{f_0} \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c}\right)$$

$$\text{soit } \lambda = \frac{c}{f_0} \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right)$$

On en déduit

$$\mathcal{D}(\lambda) = \frac{dI_0}{d\lambda} = \frac{dI_0}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\lambda} \text{ soit}$$

$$\mathcal{D}(\lambda) = \frac{\frac{KdN}{d\theta}}{\frac{d\lambda}{d\theta}} = \frac{K\frac{N}{2} \sin \theta}{\frac{v}{f_0} \sin \theta} = \frac{KNf_0}{2v}$$

qui est bien une constante.

- f) Les longueurs d'onde extrêmes sont

$$\lambda_{\max} = \frac{c}{f_e} = \frac{c}{f_0} \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{f_a} = \frac{c}{f_0} \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

On en déduit

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 587,5 \text{ nm et } \Delta\lambda = \frac{v}{f_0} = 3,8 \text{ pm}$$

2.13

- a) La différence de marche vaut $\delta(y) = \frac{ay}{D}$. La loi de Fresnel donne

$$dI(\sigma) = 2dI \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta(y)\sigma}{\lambda}\right)$$

$$dI(\sigma) = 2\mathcal{D}_0 d\sigma (1 + \cos(2\pi\delta(y)\sigma))$$

- b) Les bandes spectrales élémentaires sont de longueurs d'onde deux à deux distinctes, donc elles forment des sources incohérentes et on somme les intensités lumineuses.

$$I(y) = \int_{\sigma=\sigma_0-\frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0+\frac{\Delta\sigma}{2}} 2\mathcal{D}_0 d\sigma (1 + \cos(2\pi\delta(y)\sigma))$$

$$I(y) = 2\mathcal{D}_0 \left[\sigma + \frac{\sin(2\pi\delta(y)\sigma)}{2\pi\delta(y)} \right]_{\sigma_0-\frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0+\frac{\Delta\sigma}{2}}$$

$$I(y) = 2\mathcal{D}_0 \Delta\sigma +$$

$$2\mathcal{D}_0 \frac{\sin\left(2\pi\delta(y)\left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\right) - \sin\left(2\pi\delta(y)\left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\right)}{2\pi\delta(y)}$$

En utilisant la relation trigonométrique

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

on peut écrire

$$I(y) = 2\mathcal{D}_0 \Delta\sigma + 2\mathcal{D}_0 \frac{2 \sin\left(\pi\delta(y)\Delta\sigma\right) \cos\left(2\pi\delta(y)\sigma_0\right)}{2\pi\delta(y)}$$

$$I(y) = 2\mathcal{D}_0 \Delta\sigma \left[1 + \frac{\sin\left(\pi\delta(y)\Delta\sigma\right)}{\pi\delta(y)\Delta\sigma} \cos\left(2\pi\delta(y)\sigma_0\right) \right]$$

et en remplaçant $\delta(y)$ par son expression

$$I(y) = 2\mathcal{D}_0 \Delta\sigma \left[1 + \sin c \frac{\pi a \Delta\sigma y}{D} \cos \frac{2\pi a \sigma_0 y}{D} \right]$$

Par identification,

$$I_0 = \mathcal{D}_0 \Delta\sigma, \quad u = \frac{2D}{a\Delta\sigma} \text{ et } v = \frac{D}{a\sigma_0}$$

- c) La période spatiale du cosinus est v , la pseudo-période du sinus cardinal est u avec $u \gg v$ d'après la relation de comparaison entre σ_0 et $\Delta\sigma$. Au voisinage de M , lorsque y varie, le cosinus oscille donc très vite entre -1 et $+1$ tandis que le sinus cardinal reste presque constant. Le contraste est donc

$$C = \frac{2I_0 \left[1 + \left| \sin c \frac{2\pi y}{u} \right| \right] - 2I_0 \left[1 - \left| \sin c \frac{2\pi y}{u} \right| \right]}{2I_0 \left[1 + \left| \sin c \frac{2\pi y}{u} \right| \right] + 2I_0 \left[1 - \left| \sin c \frac{2\pi y}{u} \right| \right]}$$

$$\text{soit } C = \left| \sin c \frac{2\pi y}{u} \right|$$

- d) Pour les valeurs positives de y , l'allure du sinus cardinal indique que le contraste s'annule pour la première fois quand $\frac{2\pi y}{u} = \pi$, et reste, à partir de cette valeur, inférieur à 0,2. On peut donc considérer qu'il s'annule pour

$$|y| > \frac{u}{2} \text{ soit } |y| > \frac{D}{a\Delta\sigma} \text{ soit}$$

$$|\delta(y)| = \left| \frac{ay}{D} \right| > \frac{1}{\Delta\sigma}$$

La variation de l'ordre d'interférence évaluée sur la demi-largeur spectrale de la source est

$$|\Delta p| = \frac{|\delta(y)|}{\lambda_{\min}} - \frac{|\delta(y)|}{\lambda_0}$$

$$|\Delta p| = |\delta(y)| \left[\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} - \sigma_0 \right] = |\delta(y)| \cdot \frac{\Delta\sigma}{2}$$

Le critère de brouillage du cours s'écrit

$$|\Delta p| > \frac{1}{2} \text{ soit } |\delta(y)| > \frac{1}{\Delta\sigma}$$

On retrouve donc bien la même condition que celle obtenue par le calcul intégral.

Chapitre 2 Dispositif des trous d'Young

2.14

- a) La différence de marche en M est $\delta(y) = \frac{ay}{D}$ donc l'ordre d'interférences vaut

$$p_y(\lambda) = \frac{\delta(y)}{\lambda} = \frac{ay}{D\lambda}$$

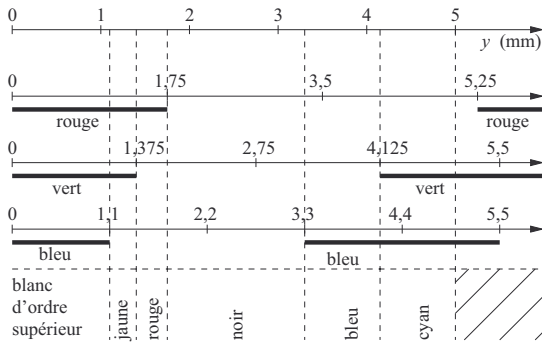
- b) Calculons l'interfrange pour les trois longueurs d'onde

$$i_R = \frac{\lambda_R D}{a} = 7,0 \text{ mm}$$

$$i_V = \frac{\lambda_V D}{a} = 5,5 \text{ mm}$$

$$i_B = \frac{\lambda_B D}{a} = 4,4 \text{ mm}$$

On divise cet interfrange en 4 et on trace les segments de brillance des différentes couleurs, en respectant l'échelle, sur l'intervalle proposé.



- c) Les couleurs correspondantes sont obtenues grâce au cercle chromatique.

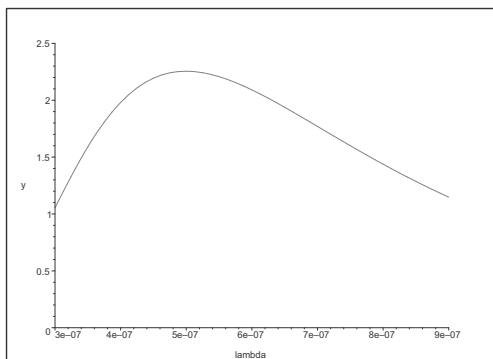
2.15

- a) On calcule

$$\frac{hc}{k_B T} = 2,48 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

et on trace l'allure de la fonction

$$\mathcal{D}(\lambda) = \frac{10^{-29}}{\lambda^5 \left(\exp \frac{2,48 \cdot 10^{-6}}{\lambda} - 1 \right)}$$



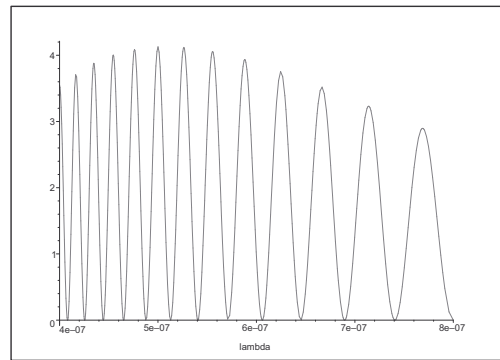
Le maximum est situé entre 500 nm et 550 nm, l'œil humain est donc bien adapté à l'observation des objets éclairés par la lumière solaire.

- b) La différence de marche est $\delta = \frac{ay}{D}$. La formule de Fresnel donne, pour la bande $[\lambda, \lambda + d\lambda]$:

$$dI(\lambda) = 2\mathcal{D}(\lambda)d\lambda \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda} \right)$$

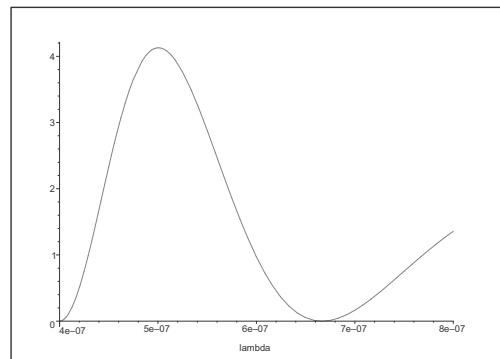
$$\text{donc } \mathcal{E}(\lambda) = \frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = 2\mathcal{D}(\lambda) \left(1 + \cos \frac{2\pi ay}{\lambda D} \right)$$

- c) Voici le graphe obtenu.



On identifie, dans la bande spectrale visible, 12 annulations de la densité spectrale, il y a donc 12 cannelures.

- d) Avec $D = 10,0$ m, voici le graphe obtenu.



Le spectre ne présente plus qu'une seule cannelure, pour $\lambda \approx 700$ nm, qui correspond à l'extinction du rouge. On observe donc la couleur complémentaire du rouge, et d'après le cercle chromatique, la teinte de Newton observée est le cyan.

2.16

Les radiations éteintes sont celles pour lesquelles l'ordre d'interférences est un demi-entier, soit

$$p_\lambda = \frac{\delta(y)}{\lambda} = k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{soit } \lambda_k = \frac{ay}{\left(k + \frac{1}{2}\right)D}$$

Dans l'intervalle des longueurs d'onde du visible :

$$400 \cdot 10^{-9} < \frac{ay}{\left(k + \frac{1}{2}\right)D} < 800 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{soit } 1,25 \cdot 10^6 < \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)D}{ay} < 2,50 \cdot 10^6$$

$$\text{soit } \frac{1,25 \cdot 10^6 \cdot ay}{D} < k + \frac{1}{2} < \frac{2,50 \cdot 10^6 \cdot ay}{D}$$

$$\text{donc } \frac{1,25 \cdot 10^6 \cdot ay}{D} - \frac{1}{2} < k < \frac{2,50 \cdot 10^6 \cdot ay}{D} - \frac{1}{2}$$

Il y a 17 cannelures, donc l'écart entre les deux bornes de l'entier k vaut entre 17 et 18, soit

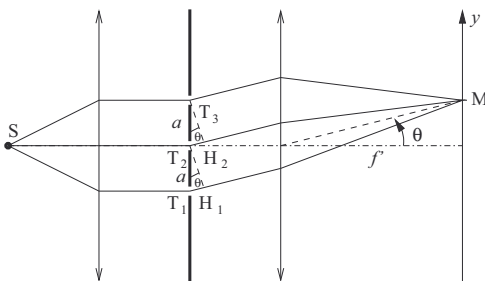
$$17 < \frac{2,50 \cdot 10^6 \cdot ay}{D} - \frac{1,25 \cdot 10^6 \cdot ay}{D} < 18$$

$$\text{donc } \frac{17D}{1,25 \cdot 10^6 y} < a < \frac{18D}{1,25 \cdot 10^6 y}$$

$$\text{soit } 2,27 \text{ mm} < a < 2,40 \text{ mm}$$

2.17

Voici les 3 rayons qui se superposent en M.



Choisissons le rayon 2 comme rayon de référence. La différence de marche entre le rayon 1 et le rayon 2 est, d'après la loi de Malus :

$$\delta_1 = [ST_1M] - [ST_2M] = [T_1H_1] = a \sin \theta \approx a\theta$$

$$\text{avec } \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{f'}$$

Le calcul est identique pour la différence de marche avec le rayon 3, donc

$$\delta_1 = \frac{ay}{f'} \quad \text{et} \quad \delta_3 = -\frac{ay}{f'}$$

Trois ondes se superposent, on ne peut donc pas utiliser la formule de Fresnel. Les ondes étant cohérentes, on somme les fonctions d'onde complexes :

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3 = \underline{a}_2 \left(e^{-i \frac{2\pi ay}{\lambda_0 f'}} + 1 + e^{i \frac{2\pi ay}{\lambda_0 f'}} \right)$$

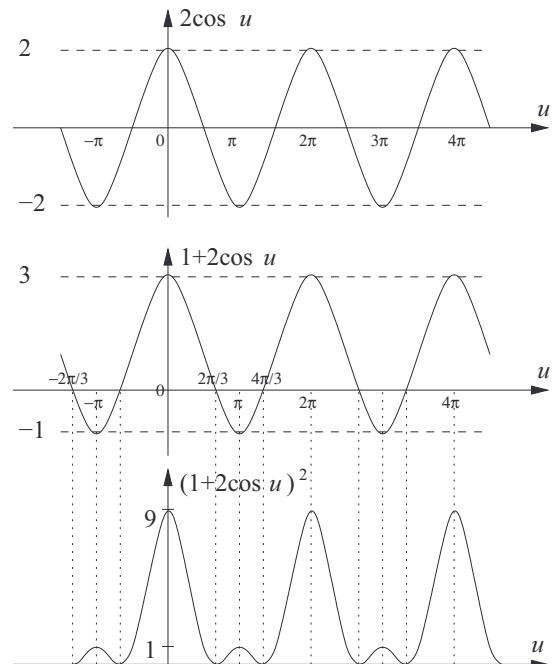
$$\text{soit } \underline{a}(M) = \underline{a}_2 \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi ay}{\lambda_0 f'} \right)$$

On en déduit

$$I(y) = K \underline{a}(M) \underline{a}^*(M) = K \underline{a}_2(M) \underline{a}_2^*(M) \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi ay}{\lambda_0 f'} \right)^2$$

$$\text{soit } I(y) = I_2 \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi ay}{\lambda_0 f'} \right)^2$$

On peut, sans outil graphique, obtenir l'allure du graphe. Posons $u = \frac{2\pi ay}{\lambda_0 f'}$. On trace successivement l'allure de $2 \cos u$, dont la période spatiale est l'interfrange habituel $i = \frac{\lambda_0 f'}{a}$, puis celle de $1 + 2 \cos u$, qui s'annule quand le cosinus vaut $-\frac{1}{2}$ donc quand son argument vaut $\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ ou $\frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, et enfin le carré de cette fonction en remarquant que quand elle s'annule, son carré s'annule avec une tangente horizontale. Voici l'allure des graphes en fonction de u .



Chapitre 2 Dispositif des trous d'Young

Ce graphe fait apparaître des pics d'intensité de hauteur $9I_2$ pour $y = k \frac{\lambda_0 f'}{a}$ et des pics secondaires de hauteur I_2 . Ce résultat est conforme aux résultats énoncés au chapitre 1 pour la superposition de N ondes dont les phases sont en progression arithmétique.

2.18

a) En amont des trous d'Young, les rayons sont parallèles et les surfaces d'onde sont donc des plans orthogonaux. Celui qui passe par U coupe l'autre rayon en H avec (THU) triangle rectangle et $\frac{\alpha}{2}$ est l'angle entre [TU] et [TH]. On en déduit que

$$\delta_m = [S_1 T] - [S_1 U] = S_1 H + HT - S_1 U = HT = a \sin \frac{\alpha}{2}$$

En aval, le calcul est le même que dans le cours :

$$\delta_\nu(y) = [TM] - [UM] = -\frac{ay}{f'}$$

Par application de la formule de Fresnel :

$$I_1(y) = 2I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi(\delta_\nu(y) + \delta_m)}{\lambda_0} \right]$$

b) La différence de marche entre les deux rayons issus de S_2 est obtenue en remplaçant $\frac{\alpha}{2}$ par $-\frac{\alpha}{2}$, donc δ_m par $-\delta_m$:

$$I_2(y) = 2I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi(\delta_\nu(y) - \delta_m)}{\lambda_0} \right]$$

Les deux étoiles forment deux sources incohérentes : on somme donc les intensités :

$$I(M) = I_1(y) + I_2(y) \text{ soit}$$

$$I(M) = 2I_0 \left[2 + \cos \frac{2\pi(\delta_\nu(y) + \delta_m)}{\lambda_0} + \cos \frac{2\pi(\delta_\nu(y) - \delta_m)}{\lambda_0} \right]$$

En utilisant la formule de trigonométrie donnée par l'énoncé, on obtient

$$I(M) = 4I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi\delta_m}{\lambda_0} \cos \frac{2\pi\delta_\nu(y)}{\lambda_0} \right]$$

Le terme $\cos \frac{2\pi\delta_\nu(y)}{\lambda_0}$ varie entre -1 et $+1$; $I(M)$ varie donc entre

$$\begin{cases} I_{\min} = 4I_0 \left[1 - \left| \cos \frac{2\pi\delta_m}{\lambda_0} \right| \right] \\ \text{et } I_{\max} = 4I_0 \left[1 + \left| \cos \frac{2\pi\delta_m}{\lambda_0} \right| \right] \end{cases}$$

Le contraste est donc

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \cos \frac{2\pi\delta_m}{\lambda_0} \right|$$

Il y a brouillage quand le contraste est nul, soit

$$\cos \frac{2\pi\delta_m}{\lambda_0} = 0 \text{ soit } \frac{2\pi\delta_m}{\lambda_0} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

où k est un entier. Pour $k = 0$:

$$\delta_m = \frac{\lambda_0}{4} \text{ soit } a \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\lambda_0}{4}$$

$$\text{soit } \alpha = 2 \arcsin \frac{\lambda_0}{4a} = 1,5 \text{ } \mu\text{rad}$$

Cette valeur est bien plus faible (donc la détection est bien meilleure) que le pouvoir séparateur habituellement obtenu avec des instruments d'optique géométrique.

2.19

a) La différence de marche est

$$\delta = [SO] + [OH] + [HM] - [SP] - [PM]$$

La loi de Malus donne

$$[SP] = [SO] \text{ et } [MP] = [MH]$$

et par principe de retour inverse de la lumière

$$[PM] = [HM]$$

La différence de marche vaut donc

$$\delta = [OH] = OP \sin \theta$$

Par définition du produit scalaire :

$$\vec{OH} \cdot \vec{OP} = OH \cdot OP \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = OH \cdot OP \sin \theta$$

$$\text{soit } OH \vec{u} \cdot \vec{OP} = OH \cdot OP \sin \theta$$

$$\text{donc } \vec{u} \cdot \vec{OP} = OP \sin \theta = \delta$$

Le vecteur \vec{u} étant unitaire dans la direction de $\vec{O'M}$,

$$\vec{u} = \frac{\vec{O'M}}{O'M} = \frac{1}{O'M} \begin{vmatrix} x \\ y \\ f' \end{vmatrix}$$

Comme θ est un petit angle, on fait l'approximation $O'M \approx f'$ donc

$$\vec{u} \approx \begin{vmatrix} \frac{x}{f'} \\ \frac{y}{f'} \\ 1 \end{vmatrix}$$

b) L'application de la formule clé (voir chapitre 1) donne

$$\underline{a}_p(M) = \underline{a}_O(M) e^{i \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}} = \underline{a}_O(M) e^{i \frac{2\pi\vec{u} \cdot \vec{OP}}{\lambda_0}}$$

Or $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{u}$ donc

$$\underline{a}_p(M) = \underline{a}_O(M) e^{i \vec{k} \cdot \vec{OP}}$$

- c) Les quatre ondes sont cohérentes, on somme donc les quatre fonctions d'onde complexes données par la formule établie à la question précédente. On calcule les quatre produits scalaires

$$\vec{k} \cdot \vec{OT} = \frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'}, \quad \vec{k} \cdot \vec{OU} = \frac{2\pi ay}{\lambda_0 f'}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{OV} = -\frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'}, \quad \vec{k} \cdot \vec{OW} = -\frac{2\pi ay}{\lambda_0 f'}$$

On en déduit

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_O \left[e^{i\frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'}} + e^{i\frac{2\pi ay}{\lambda_0 f'}} + e^{-i\frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'}} + e^{-i\frac{2\pi ay}{\lambda_0 f'}} \right]$$

$$\underline{a}(M) = 2\underline{a}_O \left[\cos \frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'} + \cos \frac{2\pi ay}{\lambda_0 f'} \right]$$

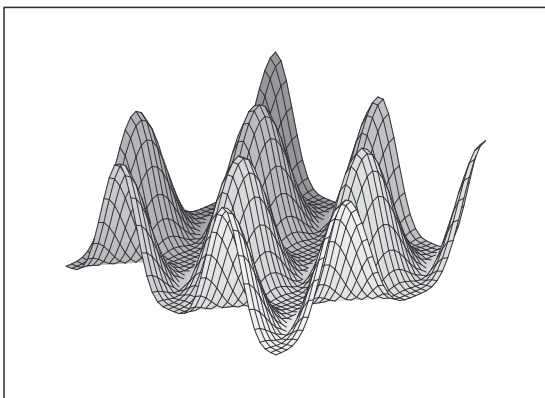
L'intensité lumineuse est donc

$$I(x, y) = K \underline{a}(M) \underline{a}^*(M) = 4I_0 \left[\cos \frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'} + \cos \frac{2\pi ay}{\lambda_0 f'} \right]^2$$

On observe ainsi des pics de lumière de hauteur $16I_0$ à chaque fois que la somme des deux cosinus vaut ± 2 , donc quand

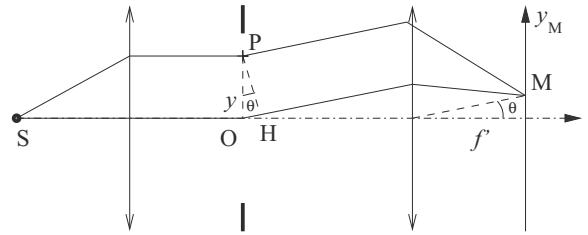
$$(x, y) = \left(n \frac{\lambda_0 f'}{2a}, m \frac{\lambda_0 f'}{2a} \right)$$

où n et m sont deux entiers. Ces pics sont séparés par des lignes croisées sur lesquelles l'intensité est nulle. Voici l'allure de la surface donnant l'intensité en fonction de x et y . Elle ressemble à une boîte à œufs.



2.20

- a) Voici le tracé complété.



- b) La différence de marche est, d'après la loi de Malus et en utilisant le principe de retour inverse de la lumière :

$$\delta_M(y) = -[OH] = -y \sin \theta \approx -y\theta$$

$$\text{avec } \theta \approx \tan \theta = \frac{y_M}{f'}$$

$$\text{donc } \delta_M(y) \approx -\frac{y_M y}{f'}$$

- c) Chaque pupille élémentaire est éclairée par des ondes en phase issues de la même source, elles sont donc cohérentes (on pourra ici comparer attentivement cet exercice avec le 2.10, où les bandelettes n'étaient pas cohérentes entre elles). On somme donc les fonctions d'onde complexes :

$$\underline{a}(M) = \int_{y=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \underline{a}_O e^{i\frac{2\pi y_M y}{\lambda_0 f'}} \frac{dy}{a}$$

$$\underline{a}(M) = \frac{\underline{a}_O}{a} \left[\frac{e^{i\frac{2\pi y_M y}{\lambda_0 f'}}}{i\frac{2\pi y_M}{\lambda_0 f'}} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

$$\underline{a}(M) = \frac{\underline{a}_O}{a} \cdot \frac{e^{i\frac{\pi y_M a}{\lambda_0 f'}} - e^{-i\frac{\pi y_M a}{\lambda_0 f'}}}{i\frac{2\pi y_M}{\lambda_0 f'}}$$

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_O \frac{2i \sin \frac{\pi y_M a}{\lambda_0 f'}}{i\frac{2\pi y_M a}{\lambda_0 f'}}$$

$$\text{soit } \underline{a}(M) = \underline{a}_O \sin c \frac{\pi y_M a}{\lambda_0 f'}$$

On en déduit

$$I(M) = K \underline{a}(M) \underline{a}^*(M) = K \underline{a}_O \underline{a}_O^* \sin^2 c \frac{\pi y_M a}{\lambda_0 f'}$$

- d) En posant $u = \frac{\pi y_M a}{\lambda_0 f'}$, on observe un pic de lumière de forte intensité lumineuse pour

$$u \in [-\pi, \pi] \text{ soit } y_M \in \left[-\frac{\lambda_0 f'}{a}, \frac{\lambda_0 f'}{a} \right]$$

puis des pics secondaires, deux fois moins larges, et nettement moins brillants.

CHAPITRE 3

Interféromètre de Michelson

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Interféromètre de Michelson.
- ◇ Condition d'éclairage, condition d'observation.
- ◇ Source spatialement étendue.
- ◇ Localisation des franges.
- ◇ Différence de marche.
- ◇ Ordre d'interférences.
- ◇ lame d'air.
- ◇ Franges d'égale inclinaison.
- ◇ Doublet spectral.
- ◇ Coin d'air.
- ◇ Franges d'égale épaisseur.
- ◇ Analyse de forme.
- ◇ Observations en lumière blanche.

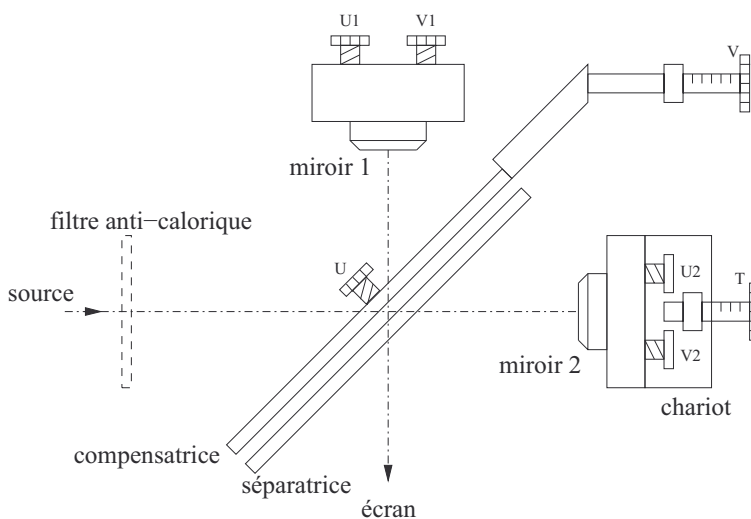
Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Modéliser un interféromètre de Michelson, effectuer le repliage.
- ◇ Déterminer δ et p dans le Michelson en lame d'air.
- ◇ Mesurer l'écart spectral d'un doublet.
- ◇ Déterminer δ et p dans le Michelson en coin d'air.
- ◇ Analyser optiquement la forme d'un objet.
- ◇ Interpréter les observations en lumière blanche.

Les méthodes à retenir

Modéliser un interféromètre de Michelson, effectuer le repliage.

Voici une vue schématique de l'**interféromètre de Michelson**.

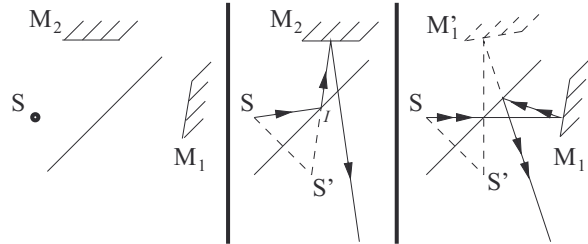


Pour alléger le propos, nous nommerons ce dispositif « le » ou « un » Michelson. Voici ses principales composantes. • La **séparatrice** est une lame semi-réfléchissante. La **compensatrice** permet de compenser la différence de marche induite par les traversées de la séparatrice. La vis U permet d'ajuster l'orientation de la compensatrice. Ni connaissances ni compétences expérimentales ne sont exigées sur ce système, et on l'assimile à une lame unique, infiniment mince, inclinée à 45° .

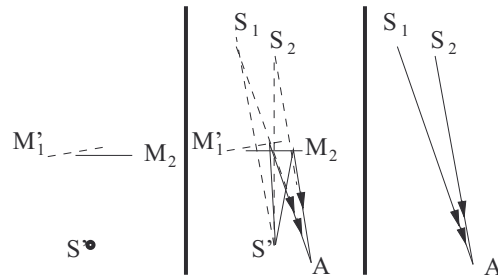
- Le miroir 1 peut être incliné grâce aux vis U1 et V1.
- Le miroir 2 peut être incliné grâce aux vis U2 et V2, et translaté grâce à la vis micrométrique T. **Charioter**, c'est translater ce miroir et mesurer le déplacement grâce aux graduations de T.
- La source de lumière est placée à gauche du dispositif, un filtre anticalorique protège les surfaces des miroirs. Cette source peut être ponctuelle ou étendue.
- L'écran est placé dans l'axe perpendiculaire à l'axe de la source. On peut intercaler une lentille convergente entre le Michelson et l'écran. Lorsqu'on éclaire le Michelson avec une source **ponctuelle** de lumière, la suite des réflexions est délicate à tracer avec des rayons lumineux. C'est pourquoi on utilise une loi fondamentale d'optique géométrique : les rayons issus d'une source ponctuelle S qui se réfléchissent sur un miroir plan sont ceux qui auraient été émis par une source ponctuelle S' symétrique de S par rapport au plan du miroir.

La suite des constructions permettant de remplacer la source ponctuelle S qui éclaire le Michelson, la séparatrice et les deux miroirs par un dispositif plus simple est appelée le **repliage**.

- a) S' est le symétrique de S par rapport à la séparatrice.
- b) M'_1 est le symétrique de M_1 par rapport à la séparatrice.



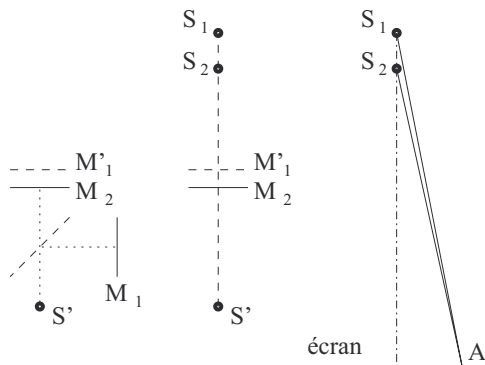
- c) À ce stade du repliage, on s'est débarrassé de la séparatrice : la source ponctuelle S' , jumelle de S , éclaire deux miroirs M_1 et M_2 assez proches l'un de l'autre. On peut les éloigner en chariotant (vis T) ou les incliner l'un par rapport à l'autre en agissant sur les vis d'inclinaison (U2 et V2 pour un réglage grossier, U1 et V1 pour un réglage fin). On peut se débarrasser des deux miroirs par les deux dernières opérations géométriques du repliage.
- d) S_1 est le symétrique de S' par rapport à M'_1 .
- e) S_2 est le symétrique de S' par rapport à M_2 .
- f) Les rayons issus de S arrivant, après réflexions multiples, en un point A sont ceux émis par les sources ponctuelles S_1 et S_2 .



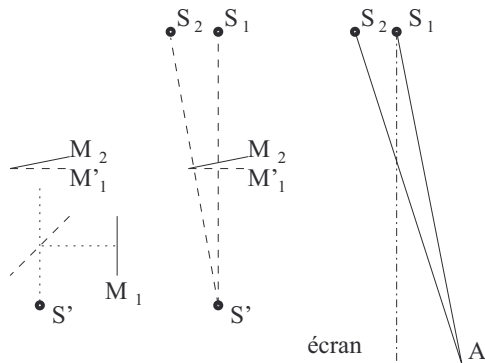
Exemple :

Le dispositif de l'interféromètre de Michelson permet de construire un système interférentiel à deux sources **cohérentes** puisque S_1 et S_2 sont les jumelles de la même source ponctuelle S . On peut en particulier créer un système de deux sources dans l'axe perpendiculaire à l'écran ou sur un axe parallèle à l'écran.

- Si les deux miroirs M_1 et M_2 sont rigoureusement perpendiculaires entre eux alors, par repliage du Michelson, M'_1 est parallèle à M_2 . Les deux sources S_1 et S_2 sont donc sur un axe perpendiculaire à ces deux miroirs et on place l'écran parallèlement à ces deux miroirs.



Ce réglage particulier du Michelson s'appelle le réglage en lame d'air et fera l'objet d'un paragraphe spécifique de ce chapitre. • Si les deux miroirs M'_1 et M_2 sont sécants et font un très petit angle entre eux, les deux sources S_1 et S_2 sont presque équidistantes de S' . Elles forment donc un segment parallèle à un écran lui-même parallèle à M'_1 .

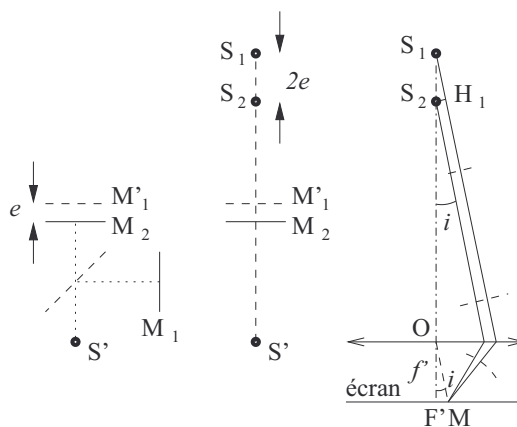


Ce réglage particulier du Michelson s'appelle le réglage en coin d'air et fera l'objet d'un paragraphe spécifique de ce chapitre. Remarquons qu'avec une source ponctuelle, la disposition des sources S_1 et S_2 et celle de l'écran est analogue au dispositif des trous d'Young (voir chapitre 2).

↪ Exercices 3.1, 3.2, 3.3.

Déterminer δ et p dans le Michelson en lame d'air.

Un Michelson est réglé en **lame d'air** si les miroirs M_1 et M_2 sont rigoureusement perpendiculaires, c'est-à-dire si les miroirs M'_1 et M_2 sont rigoureusement parallèles, délimitant ainsi une lame d'air d'épaisseur e . Après repliage du Michelson, les sources ponctuelles S_1 et S_2 jumelles sont distantes de $2e$, sur un axe perpendiculaire à l'écran.



On place l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente. Le dispositif est invariant par rotation autour de l'axe (S_1S_2OF') . Un point M de l'écran est repéré par l'angle i entre l'axe de la lentille et la droite (OM) . M est un foyer secondaire vers lequel convergent les rayons issus de S_1 et de S_2 parallèles à (OM) . Les surfaces d'onde issues de M sont marquées en pointillés sur la figure par un arc de cercle en dessous de la lentille et par des segments perpendiculaires aux rayons au dessus, selon la loi de Malus. En notant H_1 le projeté orthogonal de S_2 sur le rayon 1, (S_2H) est le plan d'onde le plus avancé. On en déduit

$$[MS_2] = [MH_1] \text{ donc } [S_2M] = [HM_1]$$

d'après le principe de retour inverse de la lumière. La différence de marche est donc

$$\delta = [S_1M] - [S_2M] = [S_1H] + [H_1M] - [S_2M] = [S_1H_1] = 2n_0e \cos i$$

On prendra, sauf mention expresse du contraire, l'indice de l'air n_0 égal à 1 et

$$\delta = 2e \cos i$$

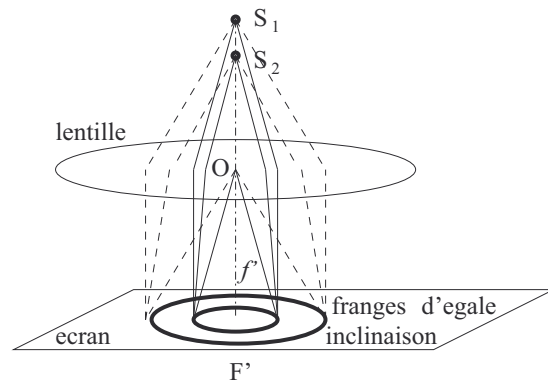
Cette démonstration doit être connue comme une question de cours. Voici les conséquences expérimentales.

a) Pour M , donc i fixé, la différence de marche ne dépend que de la distance $2e$ entre S_1 et S_2 . Il en découle que les franges ne sont pas brouillées quand la source est **étendue**. Les interférences sont **localisées** à l'infini pour la lame d'air éclairée par une source étendue.

b) Si la source S est monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0 , l'**ordre d'interférences** vaut

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2e \cos i}{\lambda_0}$$

Les franges brillantes, définies par $p \in \mathbf{Z}$, sont donc des **cercles concentriques** de centre F' appelées **franges d'égale inclinaison**.



c) Les franges ne sont pas régulièrement espacées, l'interfrange n'est pas constant.

d) La k ième frange brillante comptée à partir du centre n'est pas la frange d'ordre $p = k$. Le rayon des franges peut être déterminé en utilisant f' et les lois de la trigonométrie, mais il ne suit pas une loi simple.

e) Lorsque $e \rightarrow 0$, le rayon des franges devient très grand, et on ne distingue plus qu'une tache de teinte uniforme, la **teinte plate** lorsque $e = 0$. On est alors au **contact optique**.

Exemple :

Le Michelson en lame d'air est éclairé par une source quasi monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 640 \text{ nm}$. L'écran est placé dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale $f' = 25,0 \text{ cm}$. Déterminons l'allure de la figure d'interférences lorsque $e = 100 \text{ }\mu\text{m}$. En un point M de l'écran repéré par l'angle i , la formule de Fresnel s'écrit

$$I = 2\mathcal{I}_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi e \cos i}{\lambda_0} \right)$$

La frange brillante d'ordre d'interférences p entier est définie par

$$\frac{4\pi e \cos i}{\lambda_0} = p \cdot 2\pi \text{ soit } \cos i = p \frac{\lambda_0}{2e}$$

On se place dans les conditions de Gauss et on fait le développement limité du cosinus donc

$$1 - \frac{i^2}{2} = p \frac{\lambda_0}{2e} \text{ soit } \frac{i^2}{2} = 1 - p \frac{\lambda_0}{2e}$$

Pour $i = 0$, on calcule

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda_0} = 312,5$$

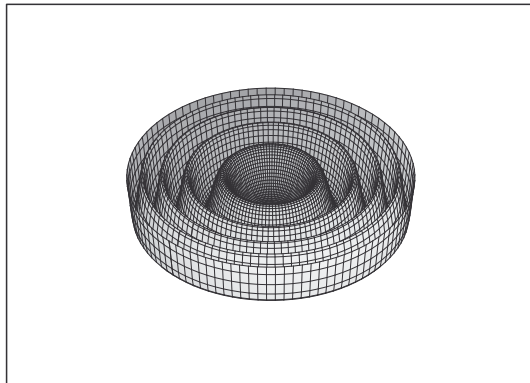
C'est un demi-entier donc on a une tache sombre au centre de l'écran. La positivité du carré entraîne qu'on ne peut observer que des franges d'ordre $p < p_0$. En notant r_p le rayon de la frange circulaire d'ordre p , on a

$$i \simeq \tan i = \frac{r_p}{f'} \text{ donc } r_p = f' i = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)}$$

Calculons les rayons des cinq premières franges brillantes en partant du centre.

numéro	1	2	3	4	5
ordre p	312	311	310	309	308
rayon r_p (cm)	1,4	2,4	3,2	3,7	4,2

Voici une vue en trois dimensions des franges observées (la surface est définie par $z = I(r, \theta)$).

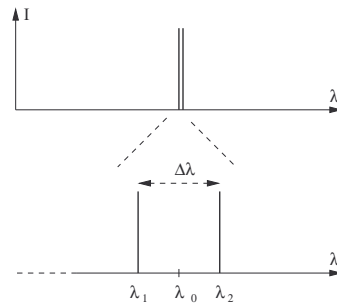


↪ Exercices 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11.

Mesurer l'écart spectral d'un doublet.

L'une de applications les plus classiques du Michelson est la mesure de largeurs spectrales par brouillage. Le cas particulier proposé par le programme officiel est le **doublet spectral** formé de deux raies spectrales très proches, très fines et d'intensités lumineuses égales $I_1 = I_2 = I_0$, de longueurs d'onde

$$\lambda_1 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \text{ et } \lambda_2 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$$



Le cas le plus connu est le doublet jaune de la lampe à vapeur atomique de sodium.

La méthode de détermination de la largeur spectrale est la suivante.

- a) On règle le Michelson en lame d'air au contact optique, on note l'abscisse x_0 du chariot.
- b) On chariote très doucement, $x = x_0 + X$ varie donc l'épaisseur de la lame d'air $e = |X|$ varie. On voit défiler des franges concentriques.
- c) Les franges circulaires d'égale inclinaison deviennent de moins en moins nettes, le contraste diminue. Pour une valeur particulière de X , le contraste s'annule, il y a **brouillage des franges** pour $X = X_1$.
- d) Par symétrie des miroirs, on peut vérifier que le brouillage apparaît aussi lorsqu'on chariote dans l'autre sens, pour $X = -X_1$.
- e) Dans le cas du doublet spectral, le contraste revient pour $X > X_1$, passe par un maximum pour $X = 2X_1$ et s'annule à nouveau pour $X = 3X_1, 5X_1$, etc.
- f) Le **critère semi quantitatif de brouillage par élargissement spectral de la source** (voir exercice 3.12), ou le calcul complet de l'intensité lumineuse (voir exercice 3.13)

$$I(X) = I_1(X) + I_2(X)$$

permet de relier X_1 à $\Delta\lambda$.

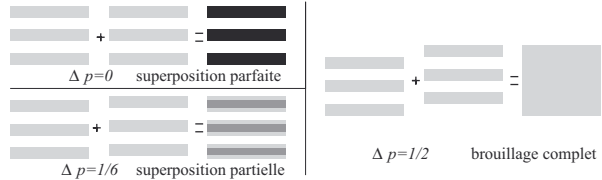
Cette méthode est généralisable à une bande spectrale large rectangulaire ou gaussienne.

Exemple :

On peut justifier qualitativement le brouillage. Les deux longueurs d'onde du doublet étant très proches, les couleurs ne peuvent pas être distinguées par l'œil. L'ordre d'interférences en un point de l'écran dépend de λ , il n'est donc pas le même pour les deux radiations. Au voisinage d'un point M de l'écran, la différence entre les ordres d'interférences est

$$|\Delta p| = |p_M(\lambda_1) - p_M(\lambda_2)|$$

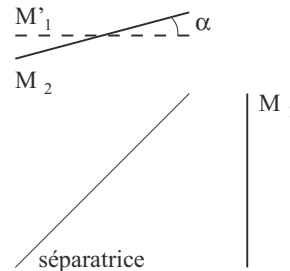
Si elle atteint $\frac{1}{2}$, alors si on a une frange sombre en M pour λ_1 ($p_M(\lambda_1)$ demi-entier), on a une frange brillante pour λ_2 ($p_M(\lambda_2)$ entier), et réciproquement. Les franges brillantes de couleur 2 s'intercalent donc dans les franges sombres de couleur 1, et réciproquement. On a donc une intensité lumineuse sensiblement constante sur tout l'écran, le contraste devient nul et il y a brouillage.



↪ Exercices 3.12, 3.13 3.14.

Déterminer δ et p dans le Michelson en coin d'air.

Le Michelson est réglé en **coin d'air** si les miroirs M_2 et M'_1 sont sécants, et inclinés l'un par rapport à l'autre d'un angle α .

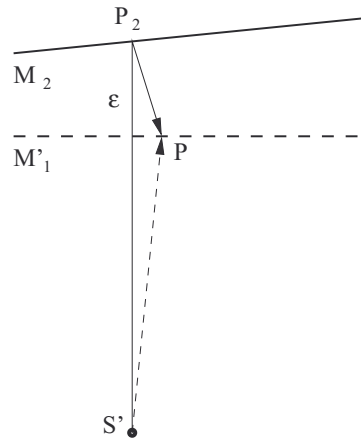


Il est inutile de faire le repliage complet du Michelson (avec la construction de S_1 et S_2) dans ce cas.

Lorsque $\alpha \ll 1$, la différence de marche en un point P de M'_1 est

$$\delta(P) = [S'P_2P] - [S'P] \simeq 2\varepsilon(P)$$

où $\varepsilon(P)$ est l'épaisseur du coin d'air en P.

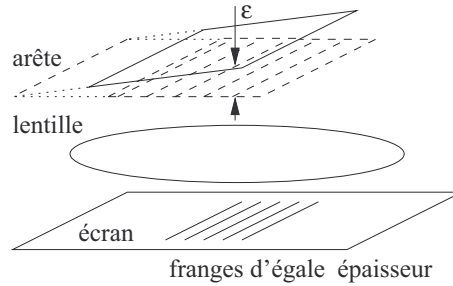


Voici les conséquences expérimentales.

- Pour P, donc ε fixé, la différence de marche ne dépend pas de la position de la source. Il en découle que les franges ne sont pas brouillées quand la source est **étendue**. Les interférences sont **localisées** sur M'_1 (ou sur M_2) pour le coin d'air éclairé par une source étendue.
- On doit donc utiliser une **lentille de projection** pour projeter l'image de M'_1 sur l'écran. Attention à la différence :
 - dans le cas de la lame d'air (voir paragraphe précédent), les franges sont localisées à l'infini donc l'écran est dans le plan focal image de la lentille convergente
 - dans le cas du coin d'air, les franges sont localisées sur M'_1 et l'écran est le plan conjugué de ce miroir par la lentille, sa position est donc définie par les lois de conjugaison de l'optique géométrique.
- Si la source S est monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0 , l'**ordre d'interférences** en P vaut

$$p(P) = \frac{\delta(P)}{\lambda_0} = \frac{2\varepsilon(P)}{\lambda_0}$$

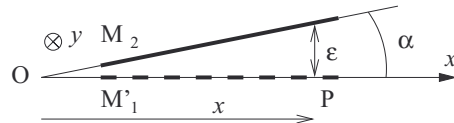
Les franges brillantes, définies par $p \in \mathbf{Z}$, sont donc des lignes d'égale épaisseur du coin d'air. On les appelle les **franges d'égale épaisseur**, ce sont donc des segments parallèles à l'arête du coin d'air, intersection entre M_2 et M'_1 . Elles sont régulièrement espacées et on peut définir un interfrange.



d) Lorsque $\alpha \rightarrow 0$, les franges s'espacent de plus en plus et deviennent très larges, on ne distingue plus qu'une tache de teinte uniforme lorsque $e = 0$. On est alors au **contact optique**

Exemple :

Avec une source quasi monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$, on éclaire un Michelson réglé en coin d'air avec un angle $\alpha = 0,30 \text{ mrad}$. Munissons le miroir M'_1 d'un repère (O, x, y) où (O, y) est confondu avec l'arête du coin.



Au point $P(x, y)$, l'épaisseur du coin d'air est

$$\epsilon = x \tan \alpha \approx x\alpha \text{ donc } \delta(x, y) = 2\alpha x \text{ et } p(x, y) = \frac{2\alpha x}{\lambda_0}$$

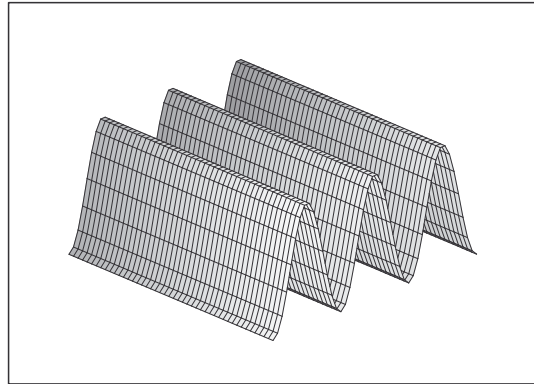
La frange brillante d'ordre $p = k$ entier a donc pour équation

$$x = x_k = \frac{k\lambda_0}{2\alpha}$$

C'est donc une frange rectiligne parallèle à l'arête. L'interfrange vaut

$$i = |x_{k+1} - x_k| = \frac{\lambda_0}{2\alpha} = 1,0 \text{ mm}$$

Voici une vue en trois dimensions des franges observées (la surface est définie par $z = I(x, y)$).



↪ Exercice 3.15

Analyser optiquement la forme d'un objet.

Le Michelson réglé en lame d'air fait apparaître des franges d'égale épaisseur, l'ordre d'interférences en un point P de M'_1 (où sont localisées les franges lorsque le Michelson est éclairé par une source large) est

$$p = \frac{2\varepsilon}{\lambda}$$

On introduit entre la séparatrice et l'un des miroirs une lame transparente à faces parallèles d'épaisseur a et d'indice n . En notant n_0 l'indice de l'air, cette lame induit une différence de marche supplémentaire $2(n - n_0)a$ là où elle est traversée. Les franges se décalent et la mesure de ce décalage permet de déterminer l'épaisseur et/ou l'indice de réfraction de la lame. Deux cas sont à considérer.

a) Si a est très supérieur à ε , le **décalage** correspond à un nombre q de franges égal à la **variation de l'ordre d'interférences** :

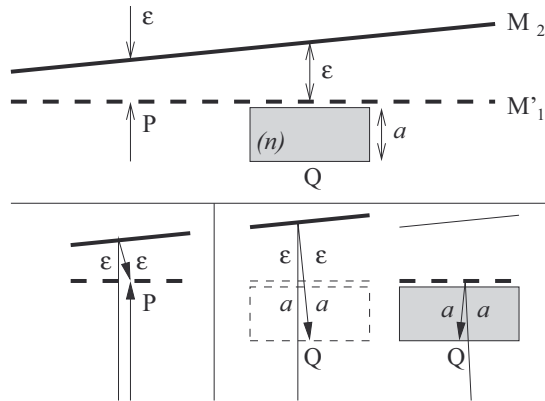
$$|\Delta p| = |p' - p| = q = \frac{2(n - n_0)a}{\lambda_0}$$

b) Si a est inférieur ou de l'ordre de grandeur de ε , le décalage correspond à moins d'une frange. On peut estimer la variation de l'ordre d'interférences par proportionnalité. Si i est l'interfrange et Δx le décalage des franges, alors

$$|\Delta p| = \frac{\Delta x}{i} = \frac{2(n - n_0)a}{\lambda_0}$$

Exemple :

Voici le détail de la détermination de la variation d'ordre d'interférences. Pour simplifier le schéma, supposons que la lame soit au contact de M'_1 . Soit P un point de la surface de M'_1 et Q un point à la surface de la lame d'indice n .



Au point P

$$\delta = \delta(P) = 2n_0\epsilon$$

Au point Q

$$\delta' = \delta(Q) = 2n_0a + 2n_0\epsilon - 2na = 2n_0\epsilon - 2(n - n_0)a$$

On en déduit la variation

$$|\Delta p| = \left| \frac{\delta'}{\lambda_0} - \frac{\delta}{\lambda_0} \right| = \frac{2(n - n_0)a}{\lambda_0}$$

↪ Exercices 3.16, 3.17, 3.18.

Interpréter les observations en lumière blanche.

Nous reprenons et résumons les lois énoncées dans le cas des trous d'Young au chapitre 2. La largeur spectrale de la lumière blanche étant très grande, le brouillage est obtenu dès que δ dépasse le micromètre. La recherche du contact optique en éclairant le Michelson directement en lumière blanche est donc quasiment impossible.

Voici les observations qu'on peut faire au voisinage de cet état.

a) Au **contact optique**, $M_2 = M_1'$, $e = 0$ en termes de lame d'air, $\alpha = 0$ en termes de coin d'air. δ est donc nul, l'ordre d'interférences est nul et il y a interférences constructives pour toute longueur d'onde, en tout point de l'écran d'observation. On obtient donc une **teinte plate**, le **blanc d'ordre supérieur**.

b) Si à partir du contact optique, on déplace M_1 en tournant la vis T d'un angle extrêmement petit, on passe en lame d'air, l'ordre d'interférences atteint $\frac{1}{2}$ pour les petites longueurs d'onde et reste proche de 0 pour les grandes longueurs d'onde, on a donc extinction du bleu et on voit une **teinte de Newton** proche du jaune.

c) Si à partir du contact optique, on fait pivoter M_2 en tournant la vis U2 ou la vis V2 d'un angle extrêmement petit, on passe en coin d'air. Au centre de la figure, on est encore au contact optique et on observe une bande de blanc d'ordre supérieur. Sur les côtés, l'ordre d'interférences atteint $\frac{1}{2}$ pour les petites longueurs d'onde et reste proche de 0 pour les grandes longueurs d'onde, on a donc extinction du bleu et on voit deux bandelettes symétriques de couleur jaunâtre.

d) On revient au cas b et on tourne un peu plus la vis T, on observe plusieurs teintes de Newton successives, puis une teinte blanchâtre qui n'évolue plus. Quand on observe avec un spectroscopie, on voit un **spectre cannelé**, chaque cannelure correspondant à une longueur d'onde éteinte, donc à un ordre d'interférences demi-entier.

e) On revient au cas c et on tourne un peu plus la vis U2 ou la vis V2. On observe alors une bande blanche centrale bordée de bandes irisées, et une teinte blanchâtre de part et d'autre.

Exemple :

Déterminons les valeurs de e en lame d'air pour lesquelles apparaissent chacun des phénomènes cités ci-dessus. Pour $e = 0$, au contact optique, on observe le blanc d'ordre supérieur, $p(\lambda) = 0$ pour toute valeur de λ . La teinte restera blanche tant que p n'atteint jamais la valeur $\frac{1}{2}$ dans le spectre, c'est-à-dire tant que

$$\forall \lambda \in [400 \text{ nm}, 800 \text{ nm}], \frac{2e}{\lambda} < \frac{1}{2}$$

Cette inégalité doit donc être vérifiée pour la plus petite valeur de λ

$$\text{donc } e < 100 \text{ nm} = 0,1 \mu\text{m}$$

On observera une teinte de Newton tant que le nombre de cannelures est inférieur ou égal à 4 environ. Cette valeur est basée sur le fait que si on supprime 5 (ou plus) bandellettes dans le spectre de la lumière blanche, on aura encore un peu de violet, un peu de bleu, un peu de vert, un peu de jaune, un peu de rouge, et l'œil verra une teinte blanchâtre. Les cannelures sont définies par

$$p(\lambda) = k + \frac{1}{2} \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{soit } \frac{2e}{\lambda} = k + \frac{1}{2} \quad \text{soit } \lambda = \frac{4e}{2k+1}$$

Dans le spectre de la lumière blanche,

$$400 \text{ nm} < \frac{4e}{2k+1} < 800 \text{ nm}$$

$$\text{soit } 1,25 \cdot 10^6 < \frac{2k+1}{4e} < 2,50 \cdot 10^6$$

$$\text{donc } 2,5 \cdot 10^6 e - \frac{1}{2} < k < 5,00 \cdot 10^6 e - \frac{1}{2}$$

Il y a au plus 4 solutions entières à cette double inéquation si la différence entre les deux bornes est inférieure à 5, soit

$$2,5 \cdot 10^6 e < 5 \quad \text{soit } e < 2 \text{ } \mu\text{m}$$

On peut estimer enfin qu'on ne peut plus observer le spectre cannelé s'il y a plus de 100 cannelures, donc si

$$2,5 \cdot 10^6 e > 100 \quad \text{soit } e < 40 \text{ } \mu\text{m}$$

Quand on considère que la vis T a un pas de 0,5 mm soit 500 μm , on comprend bien que la probabilité de trouver le contact optique en lumière blanche sans réglage initial est extrêmement faible.

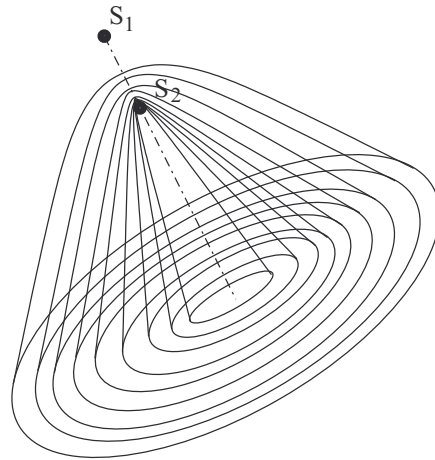
↪ **Exercices 3.19, 3.20.**

Énoncés des exercices

3.1

Forme des franges avec une source ponctuelle quasi monochromatique

L'ensemble des points M de l'espace tels que la différence des distances à deux points fixes S_1 et S_2 est une constante forme un **hyperboloïde de révolution** d'axe (S_1S_2) .



- Lorsque le Michelson, éclairé par une source ponctuelle S quasi monochromatique, est réglé en lame d'air, les sources S_1 et S_2 sont sur un axe perpendiculaire à l'écran. Quelle est la forme des franges observées ? Sont-elles localisées ?
- Lorsque le Michelson, éclairé par une source ponctuelle S quasi monochromatique, est réglé en coin d'air, les sources S_1 et S_2 sont sur un axe presque parallèle à l'écran. Quelle est la forme des franges observées ? Sont-elles localisées ?

3.2

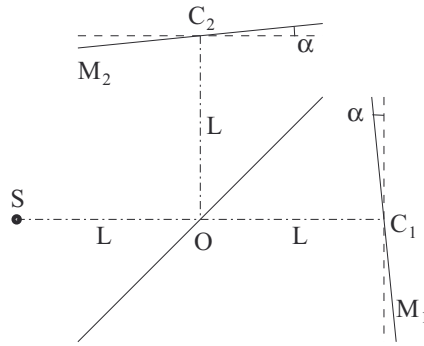
Michelson en lame d'air

Lorsque l'interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air, les miroirs M_1' et M_2 sont parallèles, distants de e . Il est éclairé par une source de lumière ponctuelle S . Quelle est la distance entre S_1 et S_2 ?

3.3

Michelson en coin d'air et trous d'Young

Un interféromètre de Michelson est réglé en coin d'air. L'angle entre les miroirs vaut $\frac{\pi}{2} + 2\alpha$. α est un petit angle. On note C_1 le centre de M_1 , C_2 celui de M_2 , O celui de la séparatrice et S la source supposée ponctuelle et quasi monochromatique. On suppose S , O et C_1 alignés, et $OS = OC_1 = OC_2 = L$.



Montrer que ce dispositif est analogue à celui des trous d'Young. Préciser l'interfrange observé si l'écran est à la distance L de O .



3.4

Calcul du rayon d'un anneau en lame d'air

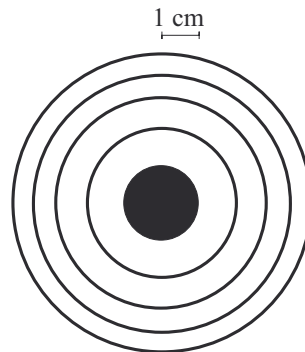
Un michelson est réglé en lame d'air d'épaisseur $e = 0,6$ mm et éclairé à l'aide d'une source large monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 628$ nm. Pour observer la figure d'interférence sur l'écran, on place celui-ci dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale $f' = 60$ cm. Calculer le rayon du troisième anneau brillant compté à partir du centre.



3.5

Exploitation d'un interférogramme

Un Michelson est réglé en lame d'air, éclairé en lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 600$ nm. L'image est formée sur un écran situé dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale $f' = 50$ cm. Voici l'image obtenue sur l'écran (les traits noirs correspondent aux maxima d'intensité de lumière).



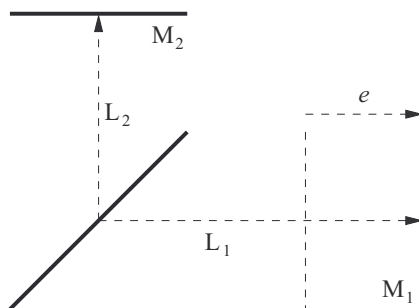
Calculer l'épaisseur e de la lame d'air.



3.6

Sens de défilement des franges

Un Michelson est réglé en lame d'air. Il est éclairé par une source de lumière quasi monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0 . On note e l'épaisseur algébrique de la lame d'air, différence entre les distances du centre de la séparatrice aux miroirs $e = L_1 - L_2$.



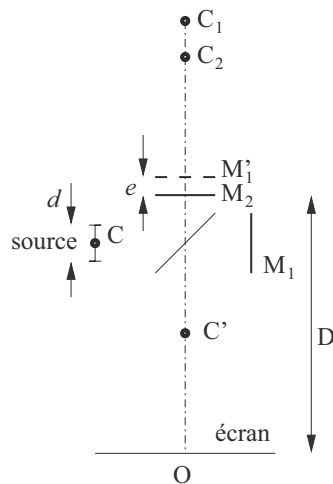
En partant d'une situation où $e > 0$, on fait diminuer régulièrement sa valeur, elle passe par la valeur zéro puis devient négative. Que voit-on sur l'écran, les franges circulaires semblent-elles se contracter puis disparaître au centre, ou au contraire germer au centre et se dilater ? En déduire une règle pour déterminer dans quel sens on doit tourner la vis T pour se rapprocher du contact optique.



3.7

Localisation des franges avec une source étendue

Un Michelson réglé en lame d'air d'épaisseur $e = 3,0$ mm est éclairé par une source, de centre C, de largeur d , quasi monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 600$ nm. On fait l'observation sur un écran placé (sans lentille) à $D = 50,0$ cm de M_2 et $D + e = 50,3$ cm de M'_1 . On note C_1 et C_2 les symétriques de C' par repliage du Michelson. Le centre O de l'écran est l'intersection de la droite $(C_1 C_2)$ avec celui-ci.



- a) Donner l'expression de l'ordre d'interférences p_C en O pour le point source C.
- b) Soit P un point à la périphérie de la source. Donner l'expression de la valeur exacte (il est inutile de faire le développement limité) de l'ordre d'interférences p_P en O pour le point source P.
- c) En utilisant le critère de brouillage par élargissement spatial de la source, déterminer la largeur maximale d permettant d'observer la figure d'interférences sur l'écran sans lentille de projection. On pourra utiliser un solveur ou un grapheur pour répondre à la question.
- d) Conclure sur la localisation des franges.

3.8

Mesure de l'épaisseur d'une lame

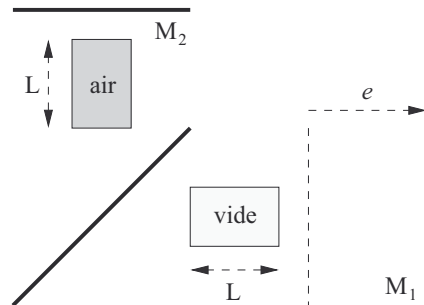
On dispose d'un Michelson réglé en lame d'air d'épaisseur e . On l'éclaire par une source ponctuelle quasi monochromatique, de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 475 \text{ nm}$, placée au foyer objet d'une lentille convergente. On place un capteur optique au foyer image d'une lentille convergente, en sortie duquel, on mesure une tension proportionnelle à l'intensité collectée en F' .

- a) Que se passe-t-il si $e = 0$? Quel est le nom de ce réglage ? Dans les questions suivantes, on part de cette situation.
- b) Combien de franges brillantes défilent lorsque e varie de $2 \mu\text{m}$?
- c) On place entre la séparatrice et l'un des miroirs une lame de verre d'indice $n = 1,50$ et d'épaisseur $h = 1,0 \text{ mm}$. Déterminer la différence de marche au niveau du capteur. Combien de franges défilent lorsqu'on chariote pour revenir à une différence de marche nulle ?

3.9

Mesure de l'indice de l'air

Un Michelson est réglé en lame d'air d'épaisseur e et éclairé par une source de lumière quasi monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 632 \text{ nm}$. Deux cuves identiques, à faces parallèles et transparentes, de longueur $L = 3,00 \text{ cm}$, sont placées entre la séparatrice et chacun des miroirs. L'écran est placé dans le plan focal image d'une lentille convergente.



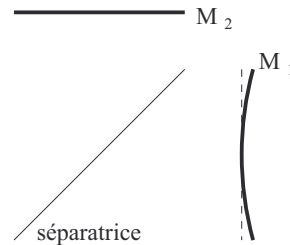
Dans la situation initiale, les deux cuves sont pleines d'air. On fait le vide dans la cuve sur le trajet 1. On voit défiler 26 franges au centre de l'écran. En déduire l'indice de l'air dans la cuve.



3.10

Analyse qualitative de l'effet de la déformation d'un miroir

Un Michelson réglé en lame d'air est au contact optique. Il est éclairé en lumière quasi monochromatique et l'écran est placé dans le plan focal image d'une lentille convergente. Le miroir M_1 subit un choc thermique et se déforme. Il prend un aspect bombé en forme de calotte sphérique (de très grand rayon de courbure).



Décrire qualitativement la figure observée sur l'écran.



3.11

Précision métrologique (agrégation 2007)

Un Michelson éclairé par un laser stabilisé de longueur d'onde dans le vide

$$\lambda_0 = 543,515\,664 \text{ nm}$$

est réglé en lame d'air. Le miroir M_2 est fixe et le miroir M_1 , initialement à la position du contact optique, est solidaire d'un objet mobile dont on veut mesurer le déplacement le plus précisément possible. Un capteur d'intensité lumineuse est placé au foyer image d'une lentille convergente. Il incrémente un compteur dès que l'intensité I passe par une valeur maximale. Le miroir M_2 s'éloigne d'une distance d .

- Le compteur indique le défilement de 36 797 franges. En déduire un encadrement d .
- Pour améliorer la précision, on considère que l'ordre d'interférences lorsque le miroir est à sa position extrême est $p = p_0 + \varepsilon$ où p_0 est la partie entière de p . Quelle est la valeur de p_0 ?
- Pour déterminer l'**excédent fractionnaire** ε , on impose un déplacement à vitesse constante V_0 du miroir et on mesure très précisément l'évolution de $I(t)$ à la date t_1 à laquelle le miroir atteint la valeur d . On obtient

$$\frac{I(t_1)}{I_{\max}} = 0,181 \text{ et } \frac{dI}{dt}(t_1) > 0$$

En déduire la valeur de ε et la valeur de d exprimée avec un nombre de chiffres significatifs cohérent avec les données.

3.12**Mesure d'un doublet spectral : utilisation du critère de brouillage**

Un interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air. L'abscisse du chariot au contact optique est notée x_0 et on pose $x = x_0 + X$. On éclaire le Michelson avec une source bichromatique de longueurs d'onde très proches et de couleurs indiscernables à l'œil

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \\ \lambda_2 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \\ \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \end{cases} \quad \text{avec } \Delta\lambda \ll \lambda_0$$

On fait l'observation à l'infini en plaçant un écran dans le plan focal image d'une lentille convergente. On chariote depuis $X = 0$, on voit défiler des franges concentriques très nettes, puis le contraste diminue et s'annule pour $X = X_b$.

- Pour $X = X_b$, donner l'expression de la différence de marche au centre de l'écran.
- Donner l'expression de la variation $|\Delta p|$ d'ordre d'interférences mesurée sur la demi-largeur spectrale de la source.
- En utilisant le critère de brouillage (voir chapitre 2), en déduire $\Delta\lambda$.
- Pour le doublet jaune du sodium, on donne $\lambda_0 = 589,3$ nm. On observe le brouillage pour $X_b = 0,14$ mm quand on chariote dans un sens et $X'_b = -0,15$ mm quand on chariote dans l'autre sens. Proposer une explication à cette dissymétrie et calculer la valeur de $\Delta\lambda$.

3.13**Mesure d'un doublet spectral : calcul algébrique de l'intensité**

Un interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air. L'abscisse du chariot au contact optique est notée x_0 et on pose $x = x_0 + X$. On éclaire le Michelson avec une source bichromatique de longueurs d'onde très proches et de couleurs indiscernables à l'œil

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \\ \lambda_2 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \\ \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \end{cases} \quad \text{avec } \Delta\lambda \ll \lambda_0$$

On fait l'observation à l'infini en plaçant un écran dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f' .

- Lorsque l'épaisseur de la lame d'air vaut e , donner l'expression de l'intensité lumineuse au centre de l'écran $I_1(e)$ créée par la radiation de longueur d'onde λ_1 et $I_2(e)$ créée par la radiation de longueur d'onde λ_2 .
- En déduire l'intensité résultante $I(e)$. On donne

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

- Pour e fixé, on observe les franges pour $i \in [0, i_{\max}]$ avec $i_{\max} \ll 1$. Déterminer l'expression du contraste $C(e)$ de la figure.
- Pour le doublet jaune du sodium, on donne $\lambda_0 = 589,3$ nm. On observe un brouillage périodique des franges pour les valeurs suivantes de X , exprimées en millimètres :

$$0,145 \quad 0,436 \quad 0,727 \quad 1,017 \quad 1,308 \quad 1,599 \quad 1,889 \quad 2,180$$

En déduire $\Delta\lambda$.



3.14

Profil spectral gaussien en nombre d'onde

Une source lumineuse non monochromatique éclaire un Michelson réglé en lame d'air. L'observation est faite au centre de l'écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente. L'inverse de la longueur d'onde est le nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$. On note $\mathcal{D}(\sigma) = \frac{dI_0}{d\sigma}$ la densité spectrale de la source, où dI_0 est l'intensité lumineuse reçue sur l'écran dans la bande spectrale $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ lorsqu'un des miroirs du Michelson est occulté. La fonction de densité lumineuse spectrale gaussienne est

$$\mathcal{D}(\sigma) = \frac{dI_0}{d\sigma} = \mathcal{D}_0 e^{-\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{b}\right)^2} \text{ avec } \sigma = \frac{1}{\lambda} \text{ et } b \ll \sigma_0$$

Un moteur fait varier l'épaisseur e de la lame d'air à vitesse constante V_0 avec $e = 0$ à $t = 0$.

- a) Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I(t)$ au niveau du capteur sous la forme d'une intégrale sur σ .
- b) On donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} \text{ et}$$

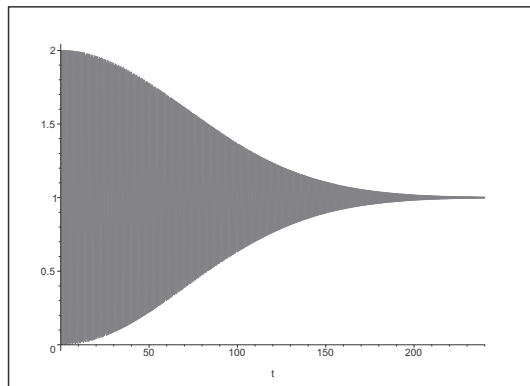
$$\int_0^{+\infty} [\cos(2\pi\sigma\delta)] e^{-\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{b}\right)^2} d\sigma \approx b\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 b^2 \delta^2} \cos(2\pi\sigma_0\delta)$$

Montrer qu'on peut écrire

$$I(t) = I_0 \left[1 + e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right) \right] \text{ avec } T_0 \ll \tau$$

en précisant les expressions de I_0 , τ et T_0 .

- c) Voici l'interférogramme obtenu.

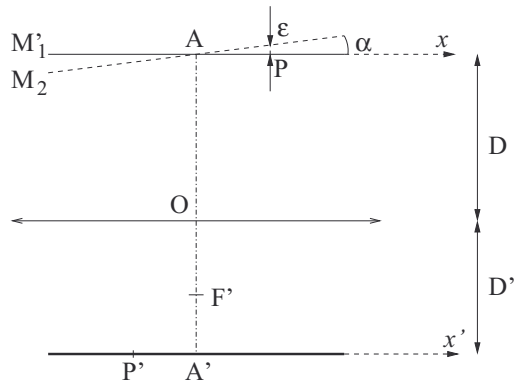


Pendant la durée de l'expérience, un compteur détecte la succession de 480 franges. Le pas de rotation de la vis micrométrique T est 0,500 mm. Le moteur impose une rotation de 1 tour en 15 minutes. Déduire du diagramme et de ces valeurs celles de σ_0 , de λ_0 et de a . Vérifier que $a \ll \sigma_0$.

3.15

Franges d'égale épaisseur

Les miroirs d'un interféromètre de Michelson font entre eux un angle $\frac{\pi}{2} + \alpha$. Ils sont éclairés par une source de lumière quasi monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0 . On observe les interférences localisées sur le miroir M_1' en plaçant, parallèlement à lui, à une distance D , une lentille convergente de distance focale f' et en formant l'image de M_1' sur un écran. Au centre de l'écran, on a l'image de la frange rectiligne d'égale épaisseur nulle ($\epsilon = 0$).



On donne les relations de conjugaison de Descartes pour une lentille de centre O donnant de l'objet \overline{BC} une image $\overline{B'C'}$.

$$\frac{1}{\overline{OB'}} - \frac{1}{\overline{OB}} = \frac{1}{f'} \text{ et } \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$$

a) Déterminer la relation entre D , D' et f' et en déduire que le grandissement vaut

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{x'}{x} = \frac{-f'}{D - f'}$$

- b) Soit P un point de M_1' repéré par $\overline{AP} = x$ et P' son image sur l'écran repérée par $\overline{A'P'} = x'$. Déterminer l'épaisseur ϵ du coin d'air en P en fonction de x et de α .
- c) En déduire ϵ en fonction de x' , α , D et f' .
- d) Exprimer la différence de marche δ en P en fonction de x' , α , D et f' .
- e) En déduire l'intensité $I(x')$, l'abscisse x'_p de la frange brillante d'ordre p entier et l'interfrange i .
- f) On prend $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$, $f' = 25 \text{ cm}$, $D = 27 \text{ cm}$, $\alpha = 0,5$ minute d'angle (une minute = un soixantième de degré). Que voit-on sur l'écran ?



3.16

Mesure de l'épaisseur d'une lame (analyse documentaire)

Un Michelson est réglé en coin d'air en lumière monoatomique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$. L'image de M_2 est formée sur un écran grâce à une lentille convergente de distance focale $f' = 50 \text{ cm}$ située à $D' = 100 \text{ cm}$ de l'écran. Un nanofeuillet transparent, d'indice $n = 1,5$ et d'épaisseur a inconnue est inséré entre la séparatrice et l'un des miroirs. Voici l'image obtenue sur l'écran :



Calculer l'angle α du coin d'air et l'épaisseur a . On donne les relations de conjugaison de Descartes pour une lentille de centre O donnant de l'objet \overline{BC} une image $\overline{B'C'}$.

$$\frac{1}{\overline{OB'}} - \frac{1}{\overline{OB}} = \frac{1}{f'} \text{ et } \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$$



3.17

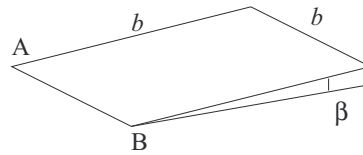
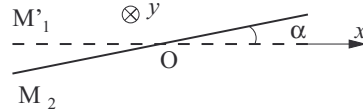
Mesure du rayon de courbure d'un miroir déformé

Le miroir M_1 d'un Michelson est parfaitement plan, le miroir M_2 ne l'est pas et présente une surface sphérique de rayon R très grand, de l'ordre de la dizaine de mètres. On se place au contact optique au centre des miroirs, on éclaire le dispositif avec une source de lumière quasi monochromatique, de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 578 \text{ nm}$. On forme l'image de M_1' sur un écran grâce à une lentille de projection, le grandissement du système optique vaut $-4,0$. On observe sur l'écran une teinte non uniforme : le centre de la figure forme une tache brillante entourée de trois franges circulaires brillantes de rayons respectifs

$$r_1 = 1,5 \text{ cm}, r_2 = 2,2 \text{ cm}, r_3 = 2,6 \text{ cm}, r_4 = 3,0 \text{ cm}$$

Déterminer la valeur de R .

3.18
Analyse d'une lame fine prismatique

 Une lame prismatique transparente, d'indice n , possède un angle au sommet $\beta \ll 1$.

 On éclaire un Michelson réglé en coin d'air, d'angle $\alpha \ll 1$ et d'arête (O, y) , par une source lumineuse quasi monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ_0 .

 On prend $\alpha = \beta = 0,30$ mrad, $n = 1,5$, $\lambda_0 = 600$ nm et $b = 5,0$ mm.

- On plaque la lame prismatique contre le miroir M_2 , l'arête AB de la lame étant confondue avec l'arête (O, y) du coin d'air, et la lame placée du côté des $x \geq 0$. Dessiner la figure d'interférences et préciser ses propriétés métriques.
- On plaque la lame prismatique contre le miroir M_2 , l'arête AB de la lame étant confondue avec l'axe (O, x) . Dessiner la figure d'interférences et préciser ses propriétés métriques.

3.19
Figure interférentielle d'un Michelson en coin d'air éclairé en lumière blanche

 Un Michelson est réglé en coin d'air d'angle $\alpha = 25$ μ rad. On forme l'image de M_1' sur un écran grâce à une lentille de projection de grandissement $\gamma = 10$. L'écran est muni d'un repère (O', x', y') . L'image de l'arête du coin d'air est confondue avec la droite (O', y') . L'oeil détecte une couleur blanche si le nombre de longueurs d'onde éteintes dans l'intervalle $[400$ nm, 800 nm] est nul ou s'il est supérieur ou égal à 5. Décrire la figure d'interférences observée sur l'écran en précisant la largeur de la bande de blanc d'ordre supérieur et celle des bandes irisées qui l'entourent (on ne cherchera pas à déterminer la succession des teintes de Newton dans ces bandes).

3.20
Spectre cannelé en lame d'air

Un étudiant en TP d'optique a effectué un réglage en lame d'air d'un Michelson.

- Quelle figure d'interférences observe-t-il sur l'écran en lumière monochromatique ?
- Quelle figure observe-t-il sur l'écran en lumière monochromatique quand il est pratiquement au contact optique ?
- À partir de cette situation, il remplace la source de lumière monochromatique par une source de lumière blanche. Il observe une teinte blanche sur l'écran. Il observe cette lumière au spectroscopie et distingue une vingtaine de cannelures. Pour savoir dans quel sens il doit tourner la vis T de chariotage pour se rapprocher du contact optique, comment doit-il procéder ?
- Le pas de la vis micrométrique T est de $0,500$ mm, c'est-à-dire que l'abscisse de M_1 varie de $0,500$ mm à chaque tour. De quel angle doit-il tourner T pour atteindre le blanc d'ordre supérieur ?

Du mal à démarrer ?

3.1

Les franges observées sont les lignes d'intersection entre les surfaces hyperboloïdes et l'écran. En plaçant celui-ci dans les deux zones géométriques définies par l'énoncé, on peut imaginer leur forme dans chaque cas.

3.2

La relation de Chasles vectorielle suffit pour conclure.

3.3

Il faut avant tout dessiner le repliage du Michelson, et en déduire les dimensions et les angles remarquables. On voit apparaître deux sources ponctuelles dont on détermine la distance et la distance à l'écran. On applique ensuite les résultats du chapitre 2 pour exprimer l'interfrange.

3.4

Une frange brillante a un ordre d'interférences p entier. On relie p à δ , puis δ à i , puis i au rayon r de la frange. On détermine la valeur de p (non entière) au centre de la figure et on en déduit celle correspondant à la troisième frange brillante. On en déduit enfin le rayon de cette frange.

3.5

Après avoir exprimé la relation entre le rayon r_p du cercle brillant d'ordre p et l'entier p , il faut exploiter le tableau de la suite des rayons R_k en déterminant la relation entre p et k . Une représentation graphique ou une régression linéaire permet de conclure.

3.6

On doit établir la relation entre le rayon r_p de la frange brillante d'ordre p , e et l'entier p . On utilise pour ça l'expression de δ pour la lame d'air et la relation $\tan i = \frac{r}{f}$. On étudie ensuite le sens de variation de r_p en fonction de e .

3.7

Le repliage du Michelson permet de déterminer les position exactes de C_1 , C_2 , P_1 , P_2 et O . En utilisant les coordonnées de ces points, on en déduit les distances, les différences de marche, les ordres d'interférences p_C et p_P , et enfin Δp . La condition de brouillage conduit à une résolution graphique.

3.8

Dans les cas (b) et (c), on détermine la différence de marche et l'ordre d'interférences correspondant qui correspond au nombre de franges qui doivent défiler pour revenir au contact optique.

3.9

Le nombre de franges qui défilent est égal à la variation de l'ordre d'interférences entre la situation où les deux cuves sont remplies d'air (la différence de marche δ' est alors égale à celle de la lame d'air) et celle où l'une des cuves est vide (la différence de marche δ'' est modifiée car quand l'un des rayons traverse une épaisseur d'air L , à l'aller et au retour, l'autre traverse la même épaisseur de vide).

3.10

On peut montrer par construction que la courbure du miroir donne d'une source ponctuelle S' une image qui n'est plus le symétrique orthogonal de S' par rapport au miroir, mais un point un peu plus proche.

3.11

Le nombre de franges qui défilent est égal à la partie entière de la variation de l'ordre d'interférences. On en déduit l'encadrement de d . Pour la détermination de l'excédent fractionnaire, on doit expliciter $I(t)$ grâce à la formule de Fresnel.

3.12

La variation d'ordre d'interférences évaluée sur la demi-largeur spectrale de la source est $\Delta p = \frac{\delta}{\lambda_1} - \frac{\delta}{\lambda_2}$. On pourra effectuer le développement limité puis écrire la condition de brouillage.

3.13

La sommation des intensités lumineuses et l'utilisation de la formule de trigonométrie conduit à une expression de $I(e)$ faisant apparaître le produit d'un cosinus qui varie avec une faible période et d'un cosinus avec une grande période, presque constant sur l'écran. Le contraste est égal à la valeur absolue de ce dernier.

3.14

L'utilisation de la formule de Fresnel donne l'élément différentiel de l'intégrale. Le calcul de celle-ci est un exercice très technique nécessitant un changement de variable d'intégration et une approximation. L'analyse du graphe donne les valeurs de T_0 et de τ . On en déduit celles de a et de σ_0 .

3.15

L'exercice est très guidé. on doit jongler entre les expressions sur le miroir et celles sur l'écran en utilisant le grandissement du dispositif de projection.

3.16

On montrera que le grandissement vaut -1 grâce aux relations de conjugaison. La mesure de l'interfrange donne α par application de la formule du cours. La mesure du décalage des franges donne accès à la variation de l'ordre d'interférences provoquée par la présence du feuillet, puis à a selon la méthode décrite dans le cours.

3.17

Contrairement à ce qu'on pourrait croire a priori, c'est une situation de coin d'air et pas de lame d'air. La différence de marche est 2ε où ε est l'épaisseur de la lame d'air sphérique entre le miroir plan et le miroir sphérique, qu'on reliera à r . Un repliage et une figure très agrandie sont indispensables. L'exploitation du tableau de valeurs nécessite un graphe ou une régression linéaire.

3.18

La différence de marche est la somme de celle provoquée par la lame prismatique et de celle habituelle du coin d'air. Elle dépend de x seulement dans le cas (a) et de x et de y dans le cas (b). Les franges sont définies par un ordre d'interférences constant, on en déduit leurs formes géométriques et on les trace. Elles présentent

souvent des discontinuités entre la zone où se trouve la lame et les zones périphériques.

3.19

Le blanc d'ordre supérieur apparaît en l'absence de cannelure, donc lorsque la valeur absolue de l'ordre d'interférences à l'abscisse x' est inférieur à $\frac{1}{2}$ quelle que soit la valeur de λ . Pour déterminer le nombre de cannelures N à l'abscisse x' , on utilise la

méthode décrite dans le cours. En résolvant $N \geq 5$, on en déduit les valeurs de x' correspondantes.

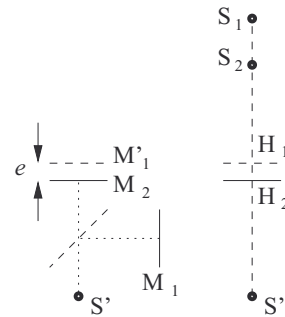
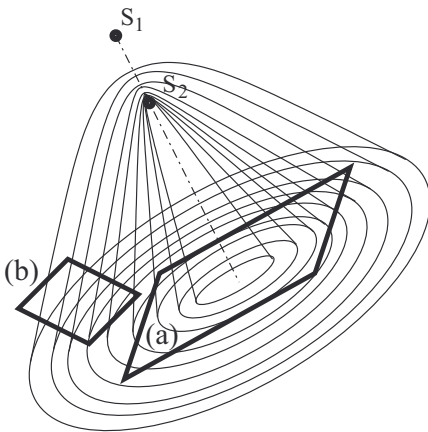
3.20

La détermination de la relation entre le nombre N de cannelures et e est faite en suivant la méthode décrite dans le cours. On en déduit e connaissant $N = 20$, puis l'angle de rotation de la vis en utilisant le pas.

Corrigés des exercices

3.1

- a) L'écran est placé selon un plan orthogonal à (S_1S_2) . L'intersection des hyperboloïdes avec celui-ci donne donc des franges circulaires concentriques. Ceci est vrai quelle que soit la position de l'écran, les franges ne sont donc pas localisées.
- b) L'écran est placé selon un plan parallèle à (S_1S_2) . L'intersection des hyperboloïdes avec celui-ci donne donc des franges presque rectilignes parallèles comme on l'a montré au chapitre 2. Ceci est vrai quelle que soit la position de l'écran, les franges ne sont donc pas localisées.



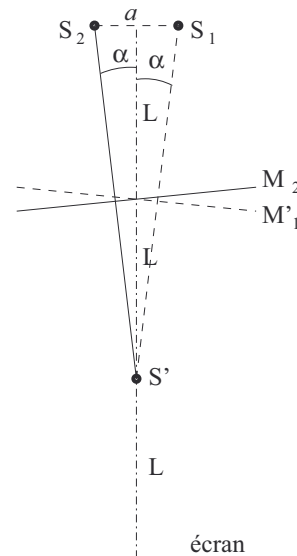
On en déduit

$$\begin{cases} \overrightarrow{S'S_2} = 2\overrightarrow{S'H_2} \\ \overrightarrow{S'S_1} = 2\overrightarrow{S'H_1} \end{cases} \text{ donc } \overrightarrow{S_2S_1} = \overrightarrow{S'S_1} - \overrightarrow{S'S_2}$$

$$\text{soit } \overrightarrow{S_2S_1} = 2(\overrightarrow{S'H_1} - \overrightarrow{S'H_2}) = 2\overrightarrow{H_2H_1} \text{ et } S_2S_1 = 2e$$

3.3

Le repliement du Michelson donne la figure suivante.



3.2

On reprend le schéma du cours.

Chapitre 3 Interféromètre de Michelson

Les sources S_1 et S_2 sont donc parallèles à l'écran. Elles sont distantes de

$$a = 4L \tan \alpha \approx 4L\alpha$$

La distance entre leur milieu et l'écran est $D = 3L$. En utilisant le résultat établi au chapitre 2, l'interfrange est

$$i = \frac{n_0 \lambda_0 D}{a} = \frac{3n_0 \lambda_0}{4\alpha}$$

3.4

Les franges brillantes circulaires sont telles que $\delta = p\lambda_0$, p entier, soit $2e \cos i = p\lambda_0$ soit $\cos i = p \frac{\lambda_0}{2e}$. Dans les conditions de Gauss, i est un petit angle donc $\cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2}$ et le rayon r_p de l'anneau d'ordre d'interférence p vérifie

$$i \approx \tan i = \frac{r_p}{f'} \text{ donc } r_p = f' \sqrt{2 \left[1 - \frac{p\lambda_0}{2e} \right]}$$

Toutes les valeurs de p ne sont donc pas admissibles. Si on suppose $e > 0$, il faut que

$$\frac{p\lambda_0}{2e} \leq 1 \text{ soit } p \leq \frac{2e}{\lambda_0}$$

L'application numérique donne $p \leq 1910,8$, c'est l'ordre d'interférences du point au centre de la figure. Le troisième anneau correspond donc à $p = 1908$ d'où $r_{1908} = 3,26$ cm.

3.5

Les rayons des quatre anneaux visibles sont mesurés sur la figure

$$R_1 = 2,0 \text{ cm}, R_2 = 2,8 \text{ cm}, R_3 = 3,45 \text{ cm}, R_4 = 4,0 \text{ cm}$$

Le rayon de l'anneau brillant d'ordre d'interférences p est

$$r_p = f' \tan i \text{ avec } \frac{2e \cos i}{\lambda_0} = p$$

En faisant l'approximation des petits angles, on peut faire les développements limités à l'ordre 2 des fonctions trigonométriques et

$$r_p = f' i \text{ avec } 1 - \frac{i^2}{2} = p \frac{\lambda_0}{2e}$$

$$\text{donc } 1 - \frac{r_p^2}{2f'^2} = p \frac{\lambda_0}{2e}$$

$$\text{soit } r_p^2 = 2f'^2 \left[1 - p \frac{\lambda_0}{2e} \right]$$

La positivité du carré entraîne que

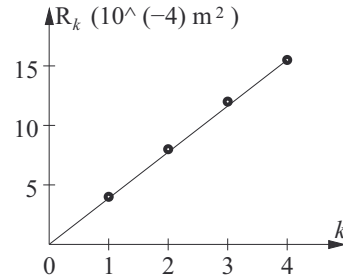
$$p \leq p_0 \text{ avec } p_0 = \frac{2e}{\lambda_0}$$

p_0 est l'ordre d'interférences au centre de la figure. La première frange brillante correspond donc à l'ordre $p_1 = E(p_0)$. On a donc

$$R_1 = r_{p_1} \text{ et } R_k = r_{p_1 - k + 1} \text{ donc}$$

$$R_k^2 = 2f'^2 \left[A + k \frac{\lambda_0}{2e} \right]$$

où A est une constante. On trace le graphe de R_k^2 en fonction de k .



L'alignement des points prouve la validité de la loi. La pente est

$$2f'^2 \cdot \frac{\lambda_0}{2e} = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ donc } e = \frac{f'^2 \lambda_0}{4,0 \cdot 10^{-4}} = 375 \text{ } \mu\text{m}$$

3.6

D'après la formule de Fresnel, en un point de l'écran de rayon r , donc repéré par l'angle d'inclinaison i , l'intensité lumineuse est

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi e \cos i}{\lambda_0} \right) \text{ avec } \tan i = \frac{r}{f'}$$

La frange brillante d'ordre d'interférences p entier relatif est définie par

$$2e \cos i = p\lambda_0 \text{ soit } \cos i = \frac{p\lambda_0}{2e}$$

Les franges visibles sont donc définies par

$$-1 \leq \frac{p\lambda_0}{2e} \leq +1 \text{ donc } -\frac{2e}{\lambda_0} \leq p \leq \frac{2e}{\lambda_0}$$

Le rayon de la frange brillante d'ordre p est

$$r_p = f' \tan i = f' \sqrt{\frac{1}{\cos^2 i} - 1} = f' \sqrt{\frac{4e^2}{p^2 \lambda_0^2} - 1}$$

Quand $e \geq 0$, quand e diminue, e^2 diminue, donc r_p diminue, donc le rayon des franges diminue quand e diminue et les cercles concentriques semblent se contracter quand on chariote dans ce sens. Au centre de l'écran, on observe la frange d'ordre maximal $\frac{2e}{\lambda_0}$ et à chaque fois que ce terme atteint et dépasse une valeur entière, la frange brillante correspondante

disparaît.

Quand $e \leq 0$, quand e diminue, e^2 augmente, donc r_p augmente, donc le rayon des franges augmente quand e diminue et les cercles concentriques semblent se dilater quand on chariote dans ce sens. Au centre de l'écran, on observe la frange d'ordre minimal $\frac{2e}{\lambda_0}$ et à chaque fois que ce terme atteint et dépasse une valeur entière, la frange brillante correspondante apparaît et semble germer.

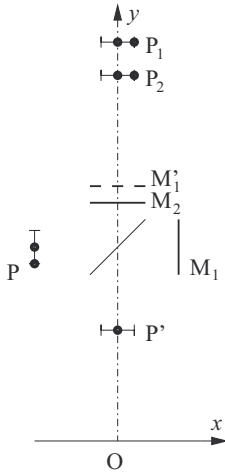
En conclusion, pour diminuer la valeur absolue de e et se rapprocher du contact optique, il faut chariote dans le sens dans lequel les anneaux semblent converger vers le centre, se contracter et disparaître.

3.7

a) La différence de marche en O est

$$[C_1O] - [C_2O] = 2e \text{ donc } p_C = \frac{2e}{\lambda_0} = 10\,000$$

b) Effectuons le repliage du Michelson avec la source large en mettant en évidence le point source P à la périphérie de la source large.



Dans le système de coordonnées (O, x, y) , les coordonnées des points symétriques sont

$$P_1 \left| \frac{d}{2} \right. \quad \text{et} \quad P_2 \left| \frac{d}{2} \right. \\ \left. \begin{array}{l} 2D+2e \\ 2D \end{array} \right.$$

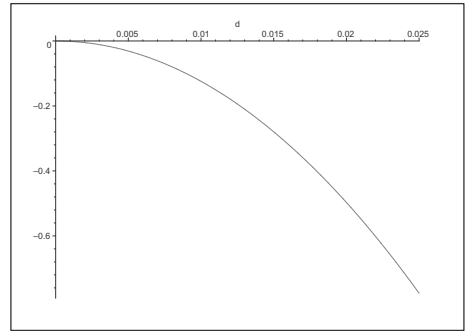
$$\text{donc } \begin{cases} P_1O = \sqrt{4D^2 + 8De + 4e^2 + \frac{d^2}{4}} \\ P_2O = \sqrt{4D^2 + \frac{d^2}{4}} \end{cases}$$

$$\text{et } p_P = \frac{P_1O - P_2O}{\lambda_0}$$

c) La variation d'ordre d'interférences sur la demi-largeur spatiale de la source est

$$\Delta p = p_P - p_C = \frac{\sqrt{1,006^2 + \frac{d^2}{4}} - \sqrt{1 + \frac{d^2}{4}}}{600 \cdot 10^{-9}} - 10\,000$$

On trace la courbe de ses variations en fonction de d grâce à un outil informatique.



On lit $\Delta p = -0,5$ pour $d = 0,020$ m et $|\Delta p| > 0,5$ pour $d > 2,0$ cm. D'après le critère semi quantitatif de brouillage des franges par élargissement spatial de la source (voir chapitre 2), on en déduit que les franges sont brouillées si $d > 2,0$ cm.

d) Si la source est presque ponctuelle, les franges sont non localisées (on peut les voir quelle que soit la position de l'écran, voir exercice 3.1). Dès que la largeur de la source dépasse 2 cm, les franges ne sont donc plus visibles sur l'écran sans lentille de projection et elles sont alors localisées à l'infini.

3.8

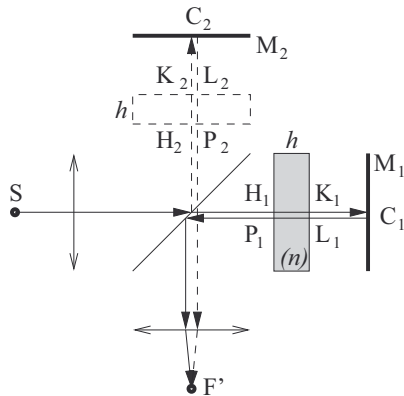
a) Quand $e = 0$, on est au contact optique, on observe la teinte plate.

b) Lorsque $e = 2 \mu\text{m}$, l'ordre d'interférences au centre de l'écran est

$$p = \frac{2e}{\lambda_0} = 8,42$$

On a donc vu défiler 8 franges.

c) Dans cette situation, les rayons étant tous parallèles, il est plus simple de ne pas faire le repliage du Michelson pour déterminer la différence de marche.



En définissant une lame d'air d'épaisseur égale à h , symétrique de la lame de verre, la différence de marche se simplifie et vaut

$$\delta = [SC_1F'] - [SC_2F'] = 2nh - 2n_0h = 2(n-1)h$$

en prenant l'indice de l'air égal à 1. L'ordre d'interférences vaut donc

$$p = \frac{2(n-1)h}{\lambda_0} = 2105,3$$

On verra donc défilier 2105 franges pour revenir au contact optique.

3.9

Au centre de l'écran, $i = 0$. Lorsque les deux cuves sont pleines d'air, la différence de marche est

$$\delta' = 2n_0e$$

Lorsqu'on fait le vide dans la cuve, la différence de marche vaut

$$\delta'' = [SM_1F'] - [SM_2F']$$

$$\delta'' = (L + n_0e + n_0e + L) - (n_{\text{air}}L - n_{\text{air}}L) = 2n_0e + 2L(1 - n_{\text{air}})$$

La variation d'ordre d'interférences est donc

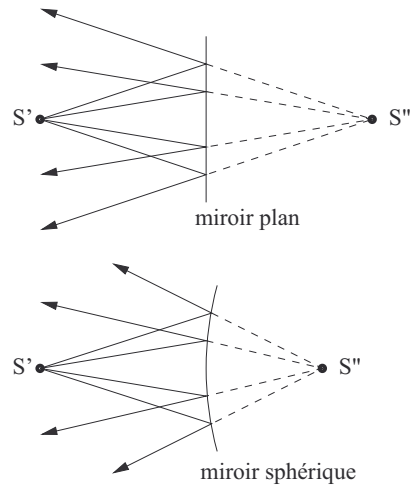
$$\Delta p = \frac{\delta''}{\lambda_0} - \frac{\delta'}{\lambda_0} = \frac{2L(1 - n_{\text{air}})}{\lambda_0}$$

Le nombre de franges qui défilent est égal, à une unité près, à la valeur absolue de Δp . Comme l'indice de l'air est supérieur à 1, on en déduit

$$\frac{2L(1 - n_{\text{air}})}{\lambda_0} = -26 \text{ soit } n_{\text{air}} = 1 + \frac{13\lambda_0}{L} = 1,00027$$

3.10

Le miroir M_1 forme un miroir sphérique. Cherchons qualitativement son effet sur les rayons issus de S' qui s'y réfléchissent.



On constate que les rayons semblent provenir d'une source S'' qui est plus proche du miroir que si le miroir était plan. Par conséquent, le repliage du Michelson donne deux sources S_1 et S_2 non confondues, mais sur l'axe de l'écran. On a donc l'équivalent du dispositif de la lame d'air, et on observera des franges circulaires.

3.11

a) À chaque fois que I passe par une valeur maximale, l'ordre d'interférences prend une valeur entière. Le nombre de franges qui défilent est donc égal à la variation de l'ordre d'interférences. Au centre de l'écran, p vaut 0 au contact optique et à la position extrême :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2e}{\lambda_0} = \frac{2d}{\lambda_0}$$

On en déduit que

$$36\,797 < \frac{2d}{\lambda_0} < 36\,798 \text{ donc } \frac{36\,797\lambda_0}{2} < d < \frac{36\,798\lambda_0}{2}$$

$$\text{soit } 0,999987294 < d < 1,00001447 \text{ cm}$$

b) L'ordre d'interférences n'est pas un entier, il est compris entre 36 797 et 36 798, sa partie entière est donc

$$p_0 = 36\,797$$

c) Par application de la formule de Fresnel :

$$I(t) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi \cdot 2V_0 t}{\lambda_0} \right) \text{ donc } I_{\text{max}} = 4I_0$$

$$\text{donc } \begin{cases} \frac{I(t)}{I_{\text{max}}} = \frac{1 + \cos \frac{2\pi \cdot 2V_0 t}{\lambda_0}}{2} \\ \frac{dI}{dt}(t) = -\frac{2\pi V_0}{\lambda_0} \sin \frac{2\pi \cdot 2V_0 t}{\lambda_0} \end{cases}$$

À la date t_1 , par définition de l'ordre d'interférences,

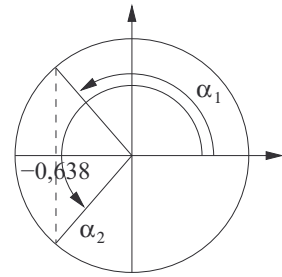
$$p_0 + \varepsilon = \frac{2V_0 t}{\lambda_0} \text{ donc}$$

$$\begin{cases} \frac{I(t_1)}{I_{\max}} = \frac{1 + \cos(2\pi p_0 + 2\pi\varepsilon)}{2} = \frac{1 + \cos(2\pi\varepsilon)}{2} \\ \frac{dI}{dt}(t_1) = -\frac{2\pi V_0}{\lambda_0} \sin(2\pi p_0 + 2\pi\varepsilon) = -\frac{2\pi V_0}{\lambda_0} \sin(2\pi\varepsilon) \end{cases}$$

par périodicité du cosinus. On doit donc résoudre le système

$$\cos(2\pi\varepsilon) = -0,638 \text{ avec } \sin(2\pi\varepsilon) < 0$$

Sur un cercle trigonométrique, on identifie les deux solutions de l'équation.



Comme $\varepsilon \in [0, 1[$, on doit donner les déterminations des angles dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, soit

$$\alpha_1 = 2,26 \text{ rad et } \alpha_2 = 2\pi - \alpha_1 = 4,02 \text{ rad}$$

La solution dont le sinus est négatif est α_2 . On en déduit que

$$2\pi\varepsilon = \alpha_2 = 4,02 \text{ rad donc } \varepsilon = 0,640$$

L'ordre d'interférences au centre quand le miroir s'est déplacé de d peut donc être exprimé avec 8 chiffres significatifs :

$$p = p_0 + \varepsilon = 36\,797,640$$

On en déduit

$$\frac{2d}{\lambda_0} = 36\,797,640 \text{ soit } d = 1,000\,004\,7 \text{ cm}$$

3.12

- a) L'épaisseur de la lame d'air est $e = X$ et au centre de l'écran $i = 0$ donc

$$\delta = 2e \cos i = 2X_b$$

- b) Par définition de l'ordre d'interférences

$$\begin{cases} p_1 = \frac{2X_b}{\lambda_1} \\ p_2 = \frac{2X_b}{\lambda_2} \end{cases} \text{ donc } \Delta p = \frac{2X_b}{\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}} - \frac{2X_b}{\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}}$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{2X_b}{\lambda_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}} - \frac{1}{1 + \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}} \right] \\ \Delta p &\approx \frac{2X_b}{\lambda_0} \left[\left(1 + \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}\right) - \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}\right) \right] \\ \text{soit } \Delta p &\approx \frac{2X_b \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \end{aligned}$$

- c) Le premier brouillage a lieu quand $|\Delta p| = \frac{1}{2}$, soit

$$\frac{2X_b \Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{1}{2} \text{ soit } \Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{4X_b}$$

- d) Le réglage exact du contact optique est difficile à faire avec précision. L'abscisse exacte x_1 du contact optique est donc légèrement différente de x_0 . Notons $X_{b,1}$ l'abscisse du brouillage en prenant l'origine en x_1 . Le brouillage apparaît donc aux abscisses

$$x_1 + X_{b,1} = x_0 + X_b \text{ et } x_1 - X_{b,1} = x_0 + X'_b$$

$$\text{donc } 2X_{b,1} = X_b - X'_b \text{ soit } X_{b,1} = \frac{X_b - X'_b}{2} = 0,145 \text{ mm}$$

On en déduit

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{4X_{b,1}} = 0,60 \text{ nm}$$

3.13

- a) Au centre de l'écran, $i = 0$ donc $\delta = 2e$ et par application de la formule de Fresnel :

$$\begin{cases} I_1(e) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi e}{\lambda_1}\right) \\ I_2(e) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi e}{\lambda_2}\right) \end{cases}$$

- b) Les deux longueurs d'onde étant distinctes, les deux radiations sont incohérentes, on somme donc les intensités lumineuses.

$$I(e) = I_1(e) + I_2(e) = 2I_0 \left[2 + \cos \frac{4\pi e}{\lambda_1} + \cos \frac{4\pi e}{\lambda_2} \right]$$

On peut appliquer la formule de trigonométrie donnée par l'énoncé en posant

$$p = \frac{4\pi e}{\lambda_1} \text{ et } q = \frac{4\pi e}{\lambda_2}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \frac{p+q}{2} = \frac{4\pi e(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\lambda_1\lambda_2} \approx \frac{4\pi e}{\lambda_0} \\ \frac{p-q}{2} = \frac{4\pi e(\lambda_2 - \lambda_1)}{2\lambda_1\lambda_2} \approx \frac{2\pi e \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \end{cases}$$

$$\text{donc } I(e) = 4I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi e \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \cos \frac{4\pi e}{\lambda_0} \right]$$

- c) Au point P de l'écran repéré par l'angle i très petit devant 1, la différence de marche $\delta = 2e \cos i$ est très proche de $2e$. On en déduit que

$$I(e, i) = 4I_0 \left[1 + \cos \frac{\pi \delta \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda_0} \right]$$

Les deux cosinus sont des fonctions périodiques de δ , leurs périodes respectives sont

$$\beta' = \frac{2\lambda_0^2}{\Delta \lambda} \text{ et } \beta'' = \lambda_0$$

Le rapport de ces deux périodes vaut donc

$$\frac{\beta'}{\beta''} = \frac{2\lambda_0}{\Delta \lambda} \ll 1$$

Lorsque i varie sur un très petit intervalle, δ varie très peu, le premier cosinus est donc presque constant et le second effectue quelques oscillations entre -1 et $+1$. L'intensité sur l'écran varie donc dans l'intervalle

$$4I_0 \left[1 - \left| \cos \frac{2\pi e \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \right| \right] \leq I(e, i) \leq 4I_0 \left[1 + \left| \cos \frac{2\pi e \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \right| \right]$$

On en déduit

$$\begin{cases} I_{\min} = 4I_0 \left[1 - \left| \cos \frac{2\pi e \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \right| \right] \\ I_{\max} = 4I_0 \left[1 + \left| \cos \frac{2\pi e \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \right| \right] \end{cases}$$

Le contraste vaut donc

$$C(e) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \cos \frac{2\pi e \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \right|$$

- d) Le contraste s'annule lorsque

$$\cos \frac{2\pi e \Delta \lambda}{\lambda_0^2} = 0 \text{ soit } \frac{2\pi e \Delta \lambda}{\lambda_0^2} = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$$

$$\text{soit } X = e = \frac{\lambda_0^2}{4\Delta \lambda} + n \frac{\lambda_0^2}{2\Delta \lambda}$$

Il y a donc bien brouillage périodique des franges, de période

$$\Delta X = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta \lambda}$$

Cette période vaut

$$\frac{2,180 - 0,145}{7} = 0,2907 \text{ mm}$$

$$\text{donc } \frac{\lambda_0^2}{2\Delta \lambda} = \Delta X \text{ soit } \Delta \lambda = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta X} = 0,60 \text{ nm}$$

3.14

- a) Les bandes spectrales de largeur élémentaire $d\sigma$ sont deux à deux incohérentes. On somme donc les intensités lumineuses données par la formule de Fresnel :

$$dI = 2\mathcal{D}_0 [1 + \cos(2\pi\sigma\delta)] e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2} d\sigma$$

$$\text{donc } I(t) = \int_{\sigma=0}^{+\infty} 2\mathcal{D}_0 [1 + \cos(2\pi\sigma\delta)] e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2} d\sigma$$

- b) Cette intégrale est la somme de deux termes :

$$I(t) = J(t) + K(t)$$

$$J(t) = 2\mathcal{D}_0 \int_{\sigma=0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2} d\sigma$$

On fait le changement de variable $y = \frac{\sigma-\sigma_0}{a}$. On en déduit que $d\sigma = a dy$ et que les bornes d'intégration sont $-\frac{\sigma_0}{a}$ et $+\infty$. Or $a \ll \sigma_0$ donc on peut assimiler l'intégrale à celle de $-\infty$ à $+\infty$:

$$J(t) = 2\mathcal{D}_0 \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} a dy = 2\mathcal{D}_0 a \sqrt{\pi}$$

d'après la relation donnée par l'énoncé.

$$K(t) = 2\mathcal{D}_0 \int_{\sigma=0}^{+\infty} \cos(2\pi\sigma\delta) e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2} d\sigma$$

$$K(t) = 2\mathcal{D}_0 a \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 a^2 \delta^2} \cos(2\pi\sigma_0\delta)$$

d'après la relation donnée par l'énoncé. On en déduit :

$$I(t) = 2\mathcal{D}_0 a \sqrt{\pi} \left[1 + e^{-\pi^2 a^2 \delta^2} \cos(2\pi\sigma_0\delta) \right]$$

Or $\delta = 2e = 2V_0 t$ donc

$$I(t) = 2\mathcal{D}_0 a \sqrt{\pi} \left[1 + e^{-4\pi^2 a^2 V_0^2 t^2} \cos(2\pi \cdot 2\sigma_0 V_0 t) \right]$$

On obtient bien la formule donnée par l'énoncé avec

$$I_0 = 2\mathcal{D}_0 a \sqrt{\pi}$$

$$\tau = \frac{1}{2\pi a V_0} \text{ et } T_0 = \frac{1}{2\sigma_0 V_0}$$

Le rapport entre ces deux durées est

$$\frac{\tau}{T_0} = \frac{2\sigma_0 V_0}{2\pi a V_0} = \frac{\sigma_0}{\pi a} \gg 1$$

donc $T_0 \ll \tau$.

- c) Le cosinus oscille donc très rapidement (avec une très petite période T_0) entre deux enveloppes :

$$I_0 \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \right] \leq I(t) \leq I_0 \left[1 + e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \right]$$

Ces deux enveloppes correspondent aux intensités maximale et minimale. Le contraste s'annule, il y a brouillage des franges lorsque l'exponentielle vaut presque 0. En prenant la valeur conventionnelle de 1%, c'est donc le cas lorsque

$$e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} = \frac{1}{100} \text{ soit } t = \tau \sqrt{\ln 100} \approx 4,605\tau$$

On identifie sur l'interférogramme

$$4,605\tau = 200 \text{ donc } \frac{1}{2\pi a V_0} = 43$$

$$\text{soit } a = \frac{1}{86\pi V_0}$$

La vitesse de déplacement du chariot est

$$V_0 = \frac{0,500 \cdot 10^{-3}}{15 \times 60} = 5,56 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{donc } a = 6,7 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$$

On compte le défilement de 480 franges, donc

$$T_0 = \frac{250}{480} = 0,521 \text{ s}$$

$$\text{soit } \frac{1}{2\sigma_0 V_0} = 0,521 \text{ et } \sigma_0 = \frac{1}{1,042 V_0} = 1,73 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$$

$$\text{et } \lambda_0 = \frac{1}{\sigma_0} = 578 \text{ nm}$$

3.15

- a) La première relation de conjugaison s'écrit $\frac{1}{OB'} = \frac{1}{OB} + \frac{1}{f'}$

donc $\frac{1}{D'} = \frac{1}{-D} + \frac{1}{f'}$ d'où $D' = \frac{f'D}{D-f'}$; on en déduit le grandissement

$$\frac{x'}{x} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB} = \frac{D'}{D} = \frac{-f'}{D-f'}$$

- b) La formule du cours donne $\varepsilon = \alpha x$.
c) Par application de la définition du grandissement :

$$x' = \frac{-f'x}{D-f'} \text{ donc } \varepsilon = -\alpha \frac{D-f'}{f'}$$

- d) La différence de marche est donc :

$$\delta = 2\varepsilon = -2\alpha \frac{D-f'}{f'} x'$$

- e) Par application de la formule de Fresnel :

$$I(x') = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi\alpha(D-f')x'}{\lambda f'} \right)$$

Les franges brillantes sont définies par

$$\frac{4\pi\alpha(D-f')x'}{\lambda f'} = p \cdot 2\pi \text{ donc } x'_p = p \frac{\lambda f'}{2\alpha(D-f')}$$

et l'interfrange est donc $i = x'_{p+1} - x'_p = \frac{\lambda f'}{2\alpha(D-f')}$.

- f) On a

$$\alpha = \frac{0,5}{60} \cdot \frac{\pi}{180} = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

et $i = 2,6 \text{ cm}$. On voit donc des franges rectilignes parallèles distantes de 2,6 cm.

3.16

L'interfrange est identique dans les deux zones et vaut $i = 1,0 \text{ cm}$ sur l'écran. Par application des relations de conjugaison, si on note D la distance entre la lentille et le miroir M'_1 , en tenant compte de l'orientation de l'axe optique

$$\frac{1}{D'} - \frac{1}{-D} = \frac{1}{f'} \text{ donc } D = \frac{f'D'}{D'-f'} = 100 \text{ cm}$$

Le grandissement vaut donc

$$\frac{D'}{-D} = -1$$

L'interfrange est donc le même sur le miroir M'_1 . Dans les notations de l'énoncé,

$$i = \frac{\lambda_0}{2\alpha} \text{ donc } \alpha = \frac{\lambda_0}{2i} = 30 \mu\text{rad}$$

La continuité des franges prouve que le décalage entre la zone centrale correspondant à la présence du nanofeuillet, et la zone périphérique est inférieure à un interfrange, la variation d'ordre d'interférences est donc inférieure à 1. On l'estime en mesurant l'écart métrique rapporté à l'interfrange

$$|\Delta p| = \frac{\Delta x}{i} = \frac{0,3 \text{ cm}}{1,0 \text{ cm}} = 0,3$$

La traversée du nano-feuillet d'épaisseur a par l'un des rayons induit une différence de marche supplémentaire

$$\Delta\delta = 2(n-1)a$$

Chapitre 3 Interféromètre de Michelson

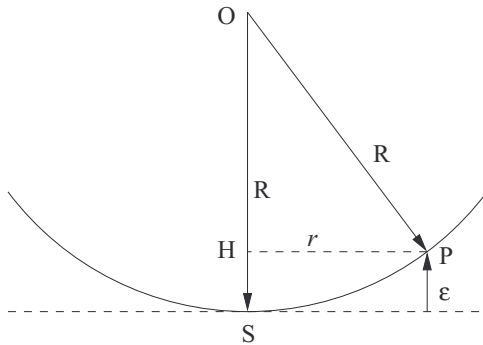
Le coefficient 2 est expliqué par l'aller et le retour du rayon après réflexion sur le miroir, le coefficient $(n-1)$ est expliqué par le fait que la lame d'indice n remplace l'air d'indice 1. On en éduit

$$|\Delta p| = \frac{\Delta \delta}{\lambda_0} = \frac{2(n-1)a}{\lambda_0}$$

donc $\frac{2(n-1)a}{\lambda_0} = 0,3$ soit $a = \frac{0,3\lambda_0}{2(n-1)} = 180 \text{ nm}$

3.17

Voici l'allure des miroirs après repliage (les proportions ne sont pas respectées).



Le système se comporte donc comme un coin d'air sphérique. Comme on fait l'observation sur M'_1 , la différence de marche est, comme dans le coin d'air $\delta = 2\epsilon$. On lit sur la figure

$$\epsilon = HS = R - OH = R - \sqrt{R^2 - r^2}$$

Comme R est de l'ordre de la dizaine de mètres et r de l'ordre de quelques centimètres, on peut faire le développement limité

$$\epsilon = R \left[1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right] \approx R \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{2R^2} \right) \right]$$

soit $\epsilon \approx \frac{r^2}{2R}$

L'ordre d'interférences vaut donc

$$p(r) = \frac{r^2}{\lambda_0 R}$$

Les franges brillantes sont observées lorsque p est un entier. Au centre de la figure, on est au contact optique d'après l'énoncé, donc $p = 0$ et on a bien une tache brillante. Le rayon mesuré sur l'écran est égal à r multiplié par 4,0 (grandissement). Pour les franges visibles, de $k = 0$ à 4, on a donc

$$k = \frac{\left(\frac{r_k}{4}\right)^2}{\lambda_0 R} \text{ soit } r_k^2 = 16\lambda_0 R k$$

Dressons le tableau des valeurs de r_k^2 en fonction de k .

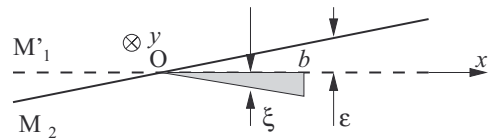
k	0	1	2	3	4
r_k^2 ($\times 10^{-4} \text{ m}^2$)	0	2,26	4,84	6,76	9,00

Le coefficient de régression linéaire vaut 0,9991 ce qui valide le modèle. Le coefficient directeur vaut

$$16\lambda_0 R = 2,251 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ donc } R = \frac{2,251 \cdot 10^{-4}}{16\lambda_0} = 24 \text{ m}$$

3.18

a) Lorsque les arêtes $[AB]$ et (O, y) sont confondues, le repliage des miroirs donne la figure suivante.



i) Pour $x < 0$ et $x > b$, on est en dehors de la lame prismatique. La différence de marche est

$$\delta(x) = 2\epsilon = 2x \tan \alpha \approx 2\alpha x$$

Les franges brillantes sont définies par

$$p = \frac{\delta(x)}{\lambda_0} = k \in \mathbf{Z} \text{ soit } x = x_k = k \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

Les franges du coin d'air sont donc rectilignes, parallèles à l'arête (O, y) , et d'interfrange

$$i = \frac{\lambda_0}{2\alpha} = 1,0 \text{ mm}$$

ii) Pour $x \in [0, b]$, en présence de la lame, la différence de marche est

$$\mu(x) = 2\epsilon - 2(n-1)\xi = 2x \tan \alpha - 2(n-1)x \tan \beta$$

$$\text{soit } \mu(x) \approx 2x(\alpha - (n-1)\beta)$$

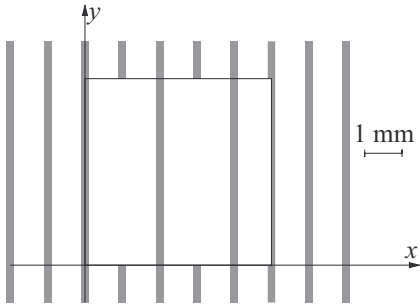
Les franges brillantes sont définies par

$$p = \frac{\mu(x)}{\lambda_0} = k \in \mathbf{Z} \text{ soit } x = x_k = k \frac{\lambda_0}{2(\alpha - (n-1)\beta)}$$

Les franges du coin d'air sont donc rectilignes, parallèles à l'arête (O, y) , et d'interfrange

$$j = \frac{\lambda_0}{2(\alpha - (n-1)\beta)} = 2,0 \text{ mm}$$

On en déduit la figure d'interférences.



b) Lorsque l'arête [AB] est confondue avec (O, x), le problème géométrique est plus difficile.

i) Pour (x, y) en dehors de [0, b] × [0, b], la différence de marche est

$$\delta(x) = 2\varepsilon = 2x \tan \alpha \approx 2\alpha x$$

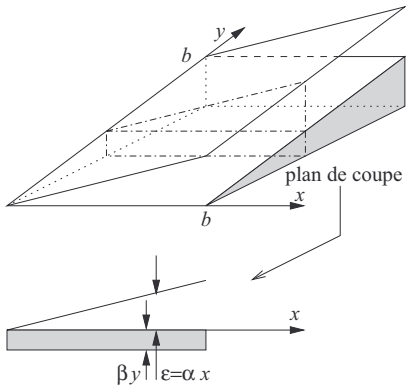
Les franges brillantes sont définies par

$$p = \frac{\delta(x)}{\lambda_0} = k \in \mathbf{Z} \text{ soit } x = x_k = k \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

Les franges du coin d'air sont donc rectilignes, parallèles à l'arête (O, y), et d'interfrange

$$i = \frac{\lambda_0}{2\alpha} = 1,0 \text{ mm}$$

ii) Pour $x \in [0, b] \times [0, b]$, en présence de la lame, effectuons une coupe dans le plan $y = \text{cste}$. L'épaisseur de la lame est constante et vaut $y \tan \beta \approx \beta y$.



La différence de marche en (x, y) vaut donc

$$\mu(x, y) = 2\varepsilon - 2(n-1)\beta y = 2x \tan \alpha - 2(n-1)y \tan \beta$$

$$\text{soit } \mu(x, y) \approx 2(\alpha x - (n-1)\beta y)$$

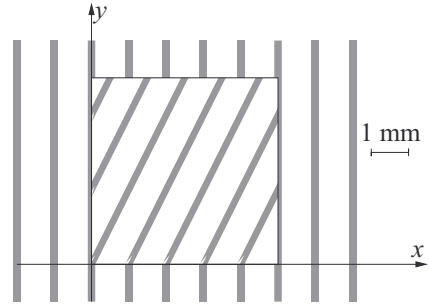
Les franges brillantes sont définies par

$$p = \frac{\mu(x, y)}{\lambda_0} = k \in \mathbf{Z} \text{ soit } \frac{2\alpha}{\lambda_0} x - \frac{2(n-1)\beta}{\lambda_0} y = k$$

$$\text{soit } 1000x - 500y = k$$

Les franges du coin d'air sont donc rectilignes, parallèles entre elles, de pente 2, elles se raccordent avec les franges en dehors de la lame sur le segment [AB].

Voici la figure d'interférences.



3.19

Le point $P'(x', y')$ de l'écran est le conjugué du point $P\left(\frac{x}{10}, \frac{y}{10}\right)$ de M'_1 où la différence de marche vaut

$$\delta = 2\varepsilon = 2\alpha x = \frac{\alpha x'}{5}$$

et où l'ordre d'interférences pour la longueur d'onde λ vaut

$$p(\lambda) = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\alpha x'}{5\lambda}$$

La zone de blanc d'ordre supérieur est celle où aucune radiation n'est éteinte, donc celle où l'ordre d'interférences reste inférieur à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue quelle que soit la longueur d'onde du spectre du visible. Il faut donc, et il suffit que ce soit vrai pour la plus petite longueur d'onde du spectre :

$$\frac{\alpha|x'|}{5 \times 400 \cdot 10^{-9}} < \frac{1}{2} \text{ soit } |x'| < 4,0 \text{ cm}$$

Pour $x' > 4,0 \text{ cm}$, déterminons le nombre de cannelures visibles. Une longueur d'onde est éteinte si p est demi-entier, soit

$$\frac{\alpha x'}{5\lambda} = k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{soit } \lambda = \frac{\alpha x'}{5\left(k + \frac{1}{2}\right)}$$

Les bornes pour la longueur d'onde imposent

$$400 \cdot 10^{-9} < \frac{\alpha x'}{5\left(k + \frac{1}{2}\right)} < 800 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{soit } 1,25 \cdot 10^6 < \frac{5\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\alpha x'} < 2,50 \cdot 10^6$$

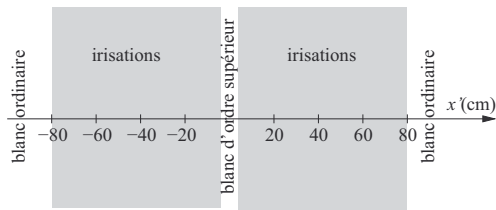
Chapitre 3 Interféromètre de Michelson

$$\text{soit } 6,25x' - 0,5 < k < 12,5x' - \frac{1}{2}$$

Le nombre de cannelures est donc le nombre d'entiers entre ces deux bornes, soit environ $6,25x'$ (à une unité près). La zone de blanc à 5 cannelures commence donc quand

$$6,25x' \geq 5 \text{ soit } x' \geq 80 \text{ cm}$$

Voici donc l'allure de la figure observée sur l'écran.



3.20

- La figure d'interférences montre les franges d'égale inclinaison avec des franges en forme de cercles concentriques.
- Au contact optique, on observe une tache uniforme, la teinte plate.
- Le contact optique n'est pas atteint car il y a des cannelures. Au contact optique, le nombre de cannelures doit être nul. Il faut donc observer l'évolution des cannelures au spectroscopie. Si en tournant T, les cannelures se resserrent et leur nombre augmente, on s'éloigne du contact optique. Il faut donc tourner, très doucement, la vis T dans le sens où les cannelures s'espacent et où leur nombre diminue.
- Déterminons la relation entre le nombre de cannelures et l'épaisseur e de la lame d'air. L'ordre d'interférences au centre de l'écran ($i = 0$) pour la longueur d'onde λ est

$$p(\lambda) = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda}$$

Il y a une cannelure noire dans le spectre pour la longueur d'onde λ si

$$p(\lambda) = k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ soit } \frac{2e}{\lambda} = k + \frac{1}{2}$$

$$\text{soit } \lambda = \frac{2e}{k + \frac{1}{2}}$$

Les bornes pour le visible sont

$$400 \cdot 10^{-9} < \frac{2e}{k + \frac{1}{2}} < 800 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{soit } 1,25 \cdot 10^6 < \frac{k + \frac{1}{2}}{2e} < 2,5 \cdot 10^6$$

$$\text{soit } 2,5 \cdot 10^6 e - \frac{1}{2} < k < 5,0 \cdot 10^6 e - \frac{1}{2}$$

Le nombre N de cannelures est égal au nombre d'entiers vérifiant cette double inégalité, donc, à une unité près :

$$N = \left(5,0 \cdot 10^6 e - \frac{1}{2} \right) - \left(2,5 \cdot 10^6 e - \frac{1}{2} \right) = 2,5 \cdot 10^6 e$$

Lorsqu'on observe une vingtaine de cannelures, l'épaisseur de la lame d'air vérifie donc

$$2,5 \cdot 10^6 e = 20 \text{ soit } e = 8 \mu\text{m}$$

On doit donc déplacer le miroir M_1 de e , il faut donc tourner de

$$\frac{8 \cdot 10^{-6}}{0,500 \cdot 10^{-3}} = 0,016 \text{ tours}$$

donc d'un angle

$$\alpha = 0,016 \times 360 \approx 6^\circ$$

On comprend donc la délicatesse avec laquelle on doit tourner la vis pour observer les teintes de Newton et le blanc d'ordre supérieur.

CHAPITRE 4

Diffraction

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Objet diffractant.
- ◇ Coefficient de transmission.
- ◇ Réseau à coefficient de transmission sinusoïdal.
- ◇ Plan de Fourier.
- ◇ Mire.
- ◇ Fréquence spatiale.
- ◇ Spectre de Fourier.
- ◇ Fente rectiligne.
- ◇ Filtrage optique.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

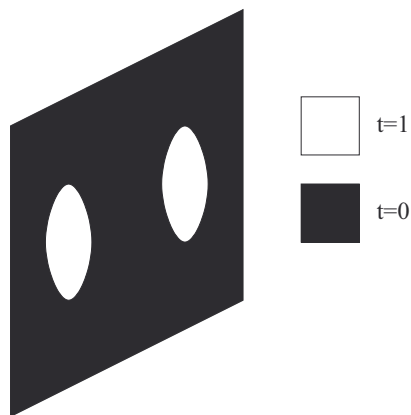
- ◇ Définir une fonction de transmission.
- ◇ Construire l'onde transmise par un réseau à coefficient de transmission sinusoïdal.
- ◇ Construire l'onde transmise par une mire unidimensionnelle.
- ◇ Interpréter les observations dans le plan de Fourier.
- ◇ Étudier la diffraction par une fente rectiligne.
- ◇ Utiliser l'analyse de Fourier pour étudier le filtrage optique.

Les méthodes à retenir

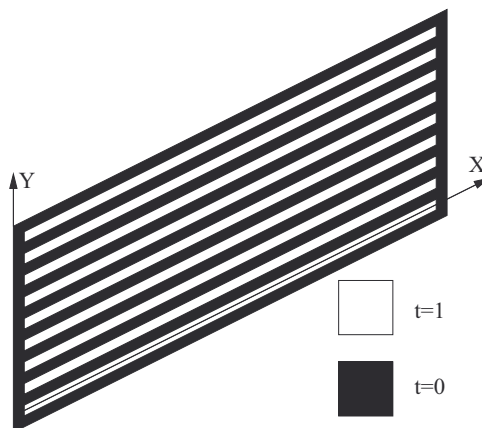
Définir une fonction de transmission.

Les trous d'Young étudiés au chapitre 2 sont définis par la **fonction de transmission** $t(P)$ suivante. Soit Π un plan, O_1 et O_2 deux points de Π distants de a , r un rayon inférieur à $\frac{a}{2}$, et P un point du plan Π .

- Pour P élément du disque \mathcal{D}_1 de centre O_1 et de rayon r , le trou d'Young T_1 laisse passer la lumière, le plan est donc **transparent** et $t(P) = 1$.
- Pour P élément du disque \mathcal{D}_2 de centre O_2 et de rayon r , le trou d'Young T_2 laisse passer la lumière, le plan est donc **transparent** et $t(P) = 1$.
- Pour $P \in \Pi - [(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2)]$, le plan est **opaque** et $t(P) = 0$.

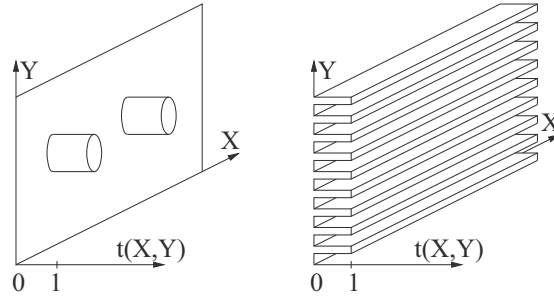


De même un réseau plan unidimensionnel peut être défini par une fonction de transmission **périodique** à profil rectangulaire.



$$t(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y \in \left[nb - \frac{c}{2}, nb + \frac{c}{2} \right], n \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{si } Y \in \left] nb + \frac{c}{2}, (n+1)b - \frac{c}{2} \right[, n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

On peut donner une représentation graphique de ces fonctions de transmission en traçant la surface $Z = t(X, Y)$. Voici leurs allures pour les trous d'Young et le réseau unidimensionnel.



La fonction de transmission $t(X, Y) = t(Y)$ du réseau unidimensionnel est une fonction périodique de Y , de période spatiale b , et de **fréquence spatiale**

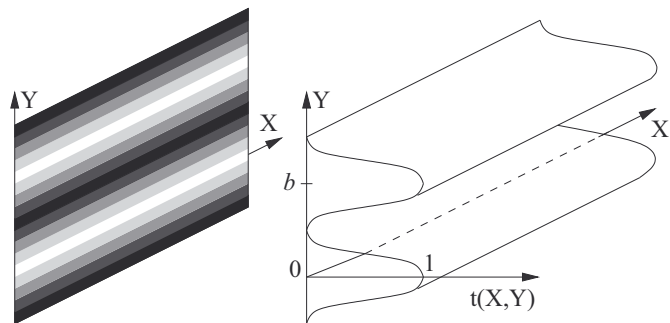
$$\sigma_1 = \frac{1}{b}$$

Le théorème de Fourier énonce que cette fonction se décompose en somme de fonction sinusoïdales de fréquences spatiales multiples entières de σ_1 .

$$t(Y) = \frac{t_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \cos(2\pi\sigma_n Y + \varphi_n) \text{ avec } \sigma_n = n\sigma_1$$

C'est pourquoi on étudiera de façon privilégiée la figure de diffraction créée par une plaque dont la transmission est une fonction sinusoïdale de Y :

$$t(X, Y) = t(Y) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi Y}{b} \right)$$



Enfin, il est possible de définir une **transmission complexe**

$$\underline{t}(X, Y) = t_0 e^{i\varphi_0}$$

- t_0 est le coefficient de transmission en amplitude, il vaut 0 si le plan est opaque et 1 si le plan est transparent
- φ_0 est le déphasage induit à la traversée du plan.

Exemple :

Le coefficient de transmission réel sinusoïdal peut être décomposé comme superposition de trois coefficients complexes :

$$\cos u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} \text{ donc}$$

$$t(X, Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{i \frac{2\pi Y}{b}} + \frac{1}{4} e^{-i \frac{2\pi Y}{b}}$$

↪ Exercices 4.1, 4.2.

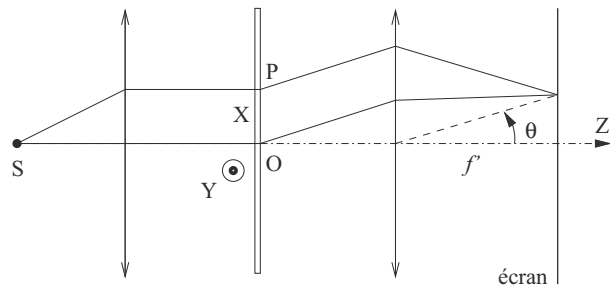
Construire l'onde transmise par un réseau à coefficient de transmission sinusoïdal.

La démonstration du résultat fondamental suivant n'est pas exigible, elle est proposée à l'exercice 4.6. Une plaque plane diffractante périodique unidimensionnelle, de période spatiale a , de fonction de transmission complexe

$$\underline{t}(X, Y) = t_0 e^{-i \frac{2\pi X}{a}}$$

est étudiée dans les conditions de Fraunhofer :

- elle est éclairée sous incidence normale par une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde λ placée au foyer objet d'une lentille convergente
- elle est observée à l'infini, sur un écran dans le plan focal image d'une lentille convergente.



On observera sur l'écran un unique point lumineux, dans le plan (O, X, Z) de la figure, dans la direction angulaire θ , si elle existe, définie par

$$a \sin \theta = \lambda \text{ ou } \sin \theta = \lambda \sigma \text{ avec } \sigma = \frac{1}{a}$$

σ est la **fréquence spatiale** du réseau. La condition d'existence est évidemment $a > \lambda$.

Dans cette direction, l'intensité lumineuse s'écrit

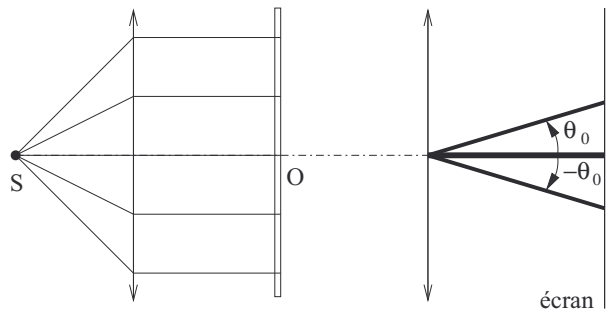
$$I(\theta) = t_0^2 I_0$$

où I_0 est une intensité lumineuse surfacique de référence. Considérons maintenant une plaque à transmission sinusoïdale de période spatiale $a > \lambda$. On a vu dans l'exemple du paragraphe suivant que la fonction de transmission se décompose en somme de trois termes

$$t(X, Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{i \frac{2\pi X}{a}} + \frac{1}{4} e^{-i \frac{2\pi X}{a}}$$

En appliquant le résultat fondamental, on en déduit que cette plaque donne trois taches de lumière sur l'écran, dans les directions

$$\begin{cases} \theta = 0 \text{ avec } I(0) = \frac{1}{4} I_0 \\ \theta = \theta_0 = \arcsin \frac{\lambda}{a} \text{ avec } I(\theta_0) = \frac{1}{16} I_0 \\ \theta = -\theta_0 = -\arcsin \frac{\lambda}{a} \text{ avec } I(-\theta_0) = \frac{1}{16} I_0 \end{cases}$$



Exemple :

On place sur le plateau d'un spectrogoniomètre un réseau unidimensionnel de coefficient de transmission $t(X)$ sinusoïdal de période spatiale, ou pas, égal à a . On l'éclaire sous incidence normale avec une lampe à vapeur atomique de mercure et on observe, entre autres

- une raie blanchâtre très intense dans la direction normale définissant $\theta = 0$
- la raie rouge du mercure, de longueur d'onde $\lambda_R = 615,0$ nm dans deux directions angulaires symétriques $\pm \theta_R = \pm 29,47^\circ$
- deux raies oranges dans des directions angulaires $\theta_1 = 27,49^\circ$ et $\theta_2 = 27,60^\circ$.

On explique la raie blanche par la superposition en $\theta = 0$ de toutes les raies du spectre du mercure, qui donne une couleur blanchâtre (légèrement bleutée). La raie rouge permet de calculer la valeur du pas :

$$a = \frac{\lambda_R}{\sin \theta_R} = 1,250 \text{ } \mu\text{m}$$

On en déduit les longueurs d'ondes du doublet orange

$$\begin{cases} \lambda_1 = a \sin \theta_1 = 577,0 \text{ nm} \\ \lambda_2 = a \sin \theta_1 = 579,1 \text{ nm} \end{cases}$$

↪ Exercices 4.3, 4.4, 4.5, 4.6.

Construire l'onde transmise par une mire unidimensionnelle.

Un **réseau** à fonction de transmission périodique est défini par son pas égal à sa période spatiale a .

$$t(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in \left[na - \frac{c}{2}, na + \frac{c}{2} \right], n \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{si } X \in \left] na + \frac{c}{2}, (n+1)a - \frac{c}{2} \right[, n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Le théorème de décomposition de Fourier permet d'exprimer cette fonction sous la forme d'une série de fonctions sinusoïdales,

$$t(X, Y) = \frac{t_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \cos \left(\frac{2n\pi X}{a} + \varphi_n \right)$$

$$\text{soit } t(X, Y) = \frac{t_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{t_n e^{i\varphi_n}}{2} e^{i \frac{2n\pi X}{a}} + \frac{t_n e^{i\varphi_n}}{2} e^{-i \frac{2n\pi X}{a}} \right]$$

$$\text{soit } t(X, Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{t_n e^{i\varphi_n}}{2} e^{i \frac{2n\pi X}{a}}$$

En appliquant le résultat fondamental du paragraphe précédent, on en déduit que le réseau diffracte la lumière exclusivement dans les directions θ_n avec

$$a \sin \theta_n = n\lambda \text{ ou } \sin \theta_n = (n\sigma_1)\lambda = \sigma_n \lambda, n \in \mathbf{Z}$$

et l'intensité lumineuse diffractée dans la direction θ_n est proportionnelle au carré du module du coefficient de Fourier

$$I_n = I_{-n} = I_0 t_n^2$$

où I_0 est une intensité lumineuse de référence. Le sinus étant compris entre -1 et $+1$, l'entier n est donc compris entre $-\frac{a}{\lambda}$ et $\frac{a}{\lambda}$.

Voici la méthode d'étude qui synthétise ces lois. Elle est illustrée dans le cas du réseau à fonction de transmission rectangulaire dans l'exemple qui suit, mais elle peut être appliquée à toute fonction de transmission périodique.

- a) On identifie la valeur du pas a ou de la fréquence fondamentale $\sigma_1 = \frac{1}{a}$ du réseau, et la longueur d'onde λ de la source lumineuse.
- b) On lit dans l'expression de la décomposition de Fourier de la fonction de transmission, ou sur le spectre fourni les valeurs des amplitudes t_n et celles des fréquences spatiales multiples entières de la fréquence fondamentale $\sigma_n = n\sigma_1$.
- c) On calcule les bornes $-N$ et N pour l'entier n en écrivant

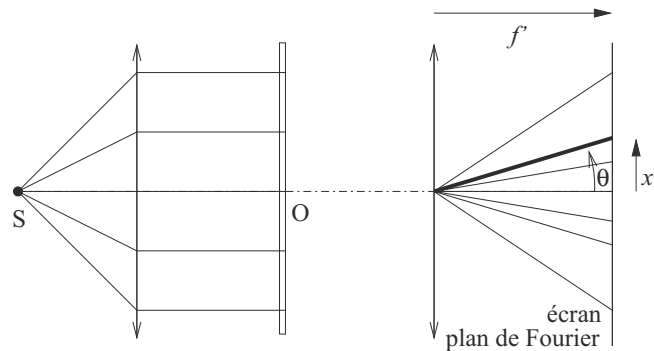
$$-\frac{a}{\lambda} \leq n \leq \frac{a}{\lambda} \text{ ou } -\frac{1}{\lambda} \leq \sigma_n \leq \frac{1}{\lambda}$$

- d) On dresse un tableau de valeurs

n	$\sigma_n = n\sigma_1$	$I_n = t_n^2 I_0$	$\theta_n = \arcsin(\sigma_n \lambda)$
-N			
...			
0	0	$t_0^2 I_0$	0
...			
N			

En restant à un niveau qualitatif, on ne calcule pas les intensités lumineuses et on repère seulement dans le plan focal image de la lentille convergente d'observation, appelé **plan de Fourier**, les positions des taches de lumière définies par

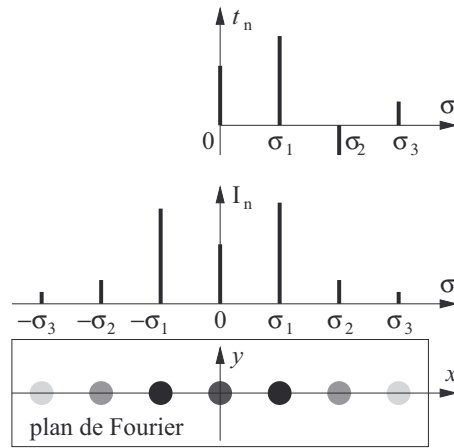
$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{a} = n\sigma_1 \lambda$$



Si θ_n est un petit angle, alors

$$\sin \theta_n \approx \theta_n \approx \tan \theta_n = \frac{x_n}{f'} \text{ donc } x_n \approx f' \theta_n = n f' \sigma_1 \lambda$$

En somme, **les abscisses des taches brillantes sur le plan de Fourier sont disposées comme les fréquences spatiales $\sigma_n = n\sigma_1$ dans le spectre spatial du réseau.**



Ce résultat est généralisable à une fonction de transmission **non périodique**, ce qui est le cas de la fente de diffraction (voir paragraphe suivant) en remplaçant le spectre discret d'une fonction périodique par un spectre continu.

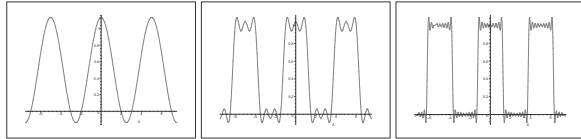
Exemple :

Considérons un réseau à fonction de transmission rectangulaire de pas $a = 5 \mu\text{m}$ et de la largeur des fentes $c = 2,5 \mu\text{m}$. On l'éclaire sous incidence normale avec une source quasi monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 730 \text{ nm}$. On donne la décomposition de Fourier de la fonction de transmission

$$t(X, Y) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(2\pi \frac{X}{5}\right) - \frac{2}{3\pi} \cos\left(6\pi \frac{X}{5}\right) + \dots +$$

$$(-1)^p \frac{2}{(2p+1)\pi} \cos\left((2p+1) \cdot 2\pi \frac{X}{5}\right) + \dots$$

où X est exprimé en micromètres. Quand on trace l'allure des sommes partielles à 1, 3, 9 termes, on voit effectivement se former la fonction de transmission rectangulaire.

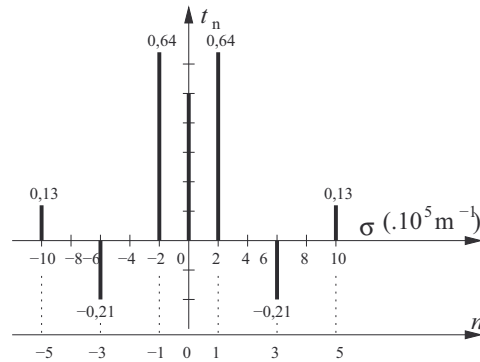


On peut donc écrire

$$t_0 = \frac{1}{2} \text{ et } t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p \frac{2}{(2p+1)\pi} & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases}$$

La fréquence spatiale fondamentale est $\sigma_1 = \frac{1}{a} = 2,0 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$. Voici donc l'allure du spectre en fréquences spatiales $\sigma_n = n\sigma_1$ qu'on limite à

$$-\frac{b}{\lambda} \leq n \leq \frac{b}{\lambda} \text{ soit } -6,8 \leq n \leq 6,8$$

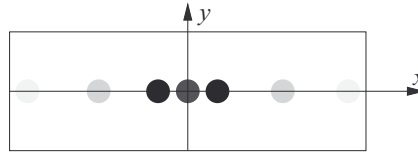


On en déduit les angles θ_n et les intensités I_n rapportées à une valeur de référence

$$\theta_n = \arcsin \frac{n\lambda}{a} = \arcsin(n\sigma_1\lambda) \text{ et } I_n = t_n^2 I_0$$

n	-5	-3	-1	0
$\sigma_n (\cdot 10^5 \text{ m}^{-1})$	-10	-6	2	0
$\theta_n (^\circ)$	-47	-26	-8	0
$I_n (\cdot I_0)$	0,017	0,044	0,400	0,250
n	0	1	3	5
$\sigma_n (\cdot 10^5 \text{ m}^{-1})$	0	2	6	10
$\theta_n (^\circ)$	0	8	26	47
$I_n (\cdot I_0)$	0,250	0,400	0,044	0,017

Voici donc l'allure de la figure de diffraction dans le plan de Fourier.

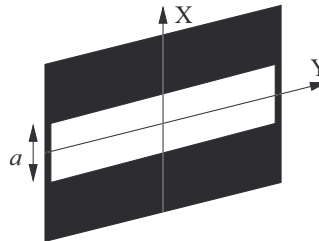


↪ Exercices 4.7, 4.8, 4.9.

Étudier la diffraction par une fente rectiligne.

La **fente rectiligne** possède une fonction de transmission non périodique :

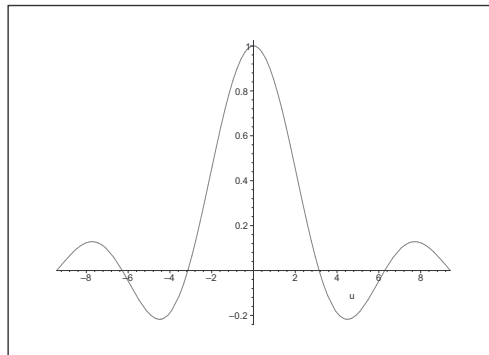
$$t(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{a}{2} \leq X \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{si } |X| > \frac{a}{2} \end{cases}$$



Cette fonction non périodique de X admet un **spectre continu** (par opposition au spectre discret des fonctions périodiques) en fréquences spatiales $\sigma = \frac{1}{\lambda}$:

$$t(\sigma) = t_0 \operatorname{sinc}(\pi a \sigma) \text{ avec } \operatorname{sinc}(u) = \frac{\sin u}{u} \text{ et } \operatorname{sinc}(0) = 1$$

Voici le graphe de la fonction sinus cardinal $\operatorname{sinc}(u)$.



La méthode d'étude est en tout point analogue à celle du paragraphe précédent pour la mire périodique.

a) Il n'y a pas de fréquence spatiale fondamentale dans ce cas.

b) On identifie en revanche des fréquences pour lesquelles $t(\sigma)$ s'annule :

$$\sin c(\pi a \sigma) = 0 \text{ si } \pi a \sigma = k\pi \text{ avec } k \in \mathbf{Z}^*$$

$$\text{soit } \sigma = k \cdot \frac{1}{a}$$

c) Les directions θ de diffraction sont définies par

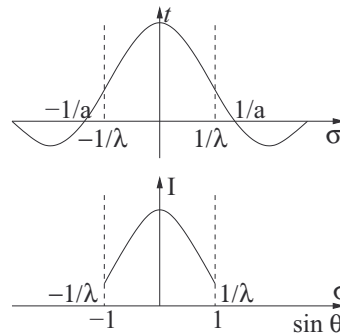
$$\sin \theta = \lambda \sigma \text{ donc } \sigma \in \left[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} \right]$$

d) Deux cas sont possibles.

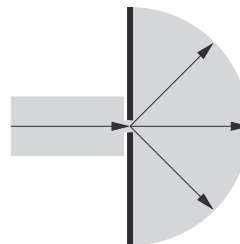
d.1) Si la fente est **très fine**, en l'occurrence si $\frac{1}{a} > \frac{1}{\lambda}$ soit $a < \lambda$, alors $t(\sigma)$ ne s'annule jamais pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Voici l'allure du spectre en fréquences spatiales $t(\sigma)$ restreint à l'intervalle d'étude et celle de l'intensité lumineuse en fréquences spatiales

$$I(\sigma) = t^2(\sigma)I_0$$

d'où on déduit, en utilisant la relation $\sin \theta = \sigma \lambda$, celui en $\sin \theta$.



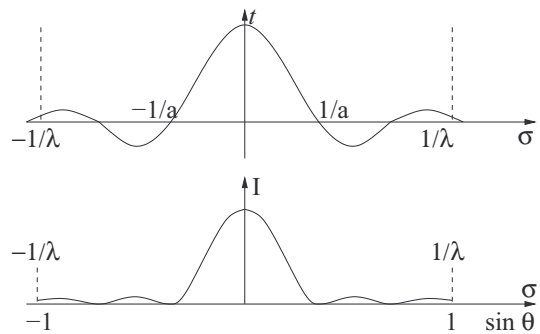
La fente diffracte donc la lumière dans toutes les directions du demi-espace $Z > 0$.



d.2) Si la fente est **large**, en l'occurrence si $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{\lambda}$ soit $a \geq \lambda$, alors $t(\sigma)$ présente un lobe central pour $\sigma \in [-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$, puis des lobes secondaires dans lesquels sa valeur est nettement inférieure à 1. Voici l'allure du spectre en fréquences spatiales $t(\sigma)$ restreint à l'intervalle d'étude et celle de l'intensité lumineuse en fréquences spatiales

$$I(\sigma) = t^2(\sigma)I_0$$

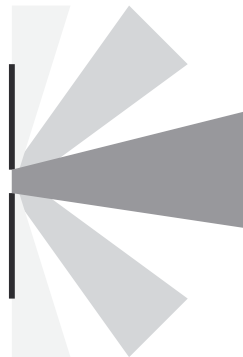
d'où on déduit, en utilisant la relation $\sin \theta = \sigma \lambda$, celui en $\sin \theta$.



La lumière est donc diffractée dans un **lobe principal**

$$\sin \theta \in \left[-\frac{\lambda}{a}, \frac{\lambda}{a} \right]$$

puis dans des lobes secondaires dont l'intensité lumineuse ne dépasse pas environ 5% de celle au centre du lobe principal.



On retrouve ainsi le résultat admis sans démonstration en première année. Si la largeur de la fente est de l'ordre de grandeur ou supérieure à la longueur d'onde, l'ordre de grandeur de la demi-largeur angulaire du faisceau principal diffracté est θ_d avec $\sin \theta_d = \frac{\lambda}{a}$.

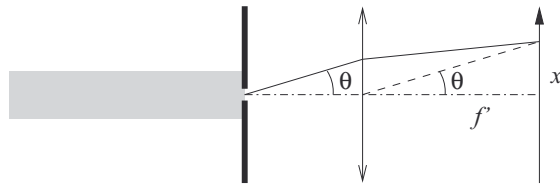
Exemple :

Prenons $a = 20\lambda$. La demi-largeur angulaire du faisceau principal diffracté est

$$\theta_d = \arcsin \frac{\lambda}{a} = \arcsin 0,05 \approx 0,05 \text{ rad}$$

avec l'hypothèse des petits angles. On place un écran d'observation dans le plan de Fourier, c'est-à-dire dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale $f' = 1,0$ m. Un rayon diffracté dans la direction θ frappe l'écran en un point d'abscisse

$$x = f' \tan \theta \approx f' \theta \approx f' \sin \theta$$

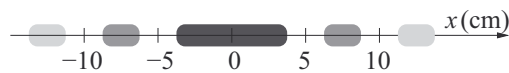


On en déduit les abscisses qui délimitent les taches correspondant aux lobes de diffraction

$$\sin \theta_k = \lambda \sigma_k = k \frac{\lambda}{a} \text{ avec } k \in \mathbf{Z}^*$$

$$\text{donc } x_k = k \frac{\lambda f'}{a} = k \cdot 0,050 \text{ m, } k \in \mathbf{Z}^*$$

Voici donc l'allure de la figure de diffraction, en se limitant aux cinq principales taches brillantes.



↪ Exercices 4.10, 4.11

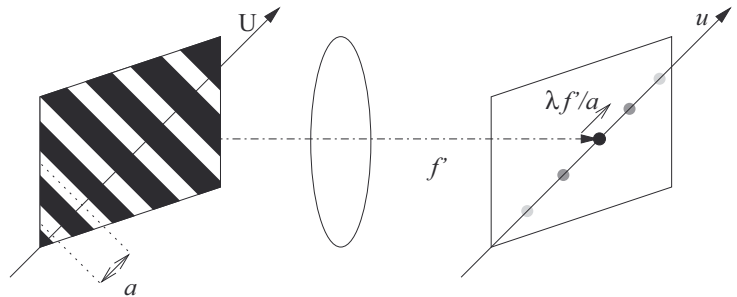
Utiliser l'analyse de Fourier pour étudier le filtrage optique.

Résumons les acquis du paragraphe précédent : lorsqu'une mire est éclairée sous incidence normale par une lumière quasi monochromatique de longueur d'onde λ on observe dans le plan de Fourier un ensemble de taches dont les positions et les intensités forment le spectre en fréquence spatiale σ de la mire.

Plus généralement, si la mire est remplacée par une **diapositive** d'un motif ou d'une image plus complexe dans laquelle on distingue des éléments périodiques, comme des grilles, des barreaux parallèles, ou des effets de **trame**, les taches dans le plan de Fourier révèlent les fréquences spatiales caractéristiques de cette image. Si f' désigne la distance focale de la lentille convergente, à tout motif de période a , ou de fréquence spatiale $\sigma = \frac{1}{a}$, selon X , avec $a \gg \lambda$ correspond sur l'écran une tache à l'abscisse

$$x = \frac{\lambda f'}{a} = \lambda \sigma f'$$

Cette loi est évidemment généralisable à toute direction U du plan.



Plus la transmission associée au motif dans la direction U est proche d'une fonction sinusoïdale, plus on se rapproche d'un spectre à trois taches en

$$u = -\frac{\lambda f'}{a} = -\lambda \sigma f', \quad u = 0 \quad \text{et} \quad u = \frac{\lambda f'}{a} = \lambda \sigma f'$$

Le principe du **filtrage optique** est le suivant.

a) On place la diapositive à une distance D d'une lentille convergente de distance focale $f' < D$. En l'absence de tout filtrage, son image se forme sur un écran à la distance D' de la lentille donnée par la relation de conjugaison

$$\frac{1}{D'} - \frac{1}{-D} = \frac{1}{f'}$$

On choisit souvent $D = 2f'$ et donc $D' = 2f'$.

b) Dans le plan de Fourier situé entre la lentille et l'écran se forme le spectre spatial de la diapositive sous la forme de taches lumineuses.

c) On place dans le plan de Fourier une plaque transparente, opacifiée au niveau d'une (ou plusieurs) tache(s) en P défini par $\vec{OP} = \sigma \vec{u}$. On **élimine** ainsi cette tache, en interdisant le passage de la lumière.

d) L'image obtenue sur l'écran est ainsi filtrée, avec l'**élimination** du motif de période spatiale a avec $a = \frac{1}{\sigma}$

On distingue deux filtrages particuliers fondamentaux.

- Le **filtrage optique passe-bas** dans la direction X (par exemple) obtenu en plaçant dans le plan de Fourier une plaque ne laissant transparente qu'une languette $x \in [-x_0, x_0]$. On sélectionne ainsi les motifs dont les fréquences spatiales σ vérifient

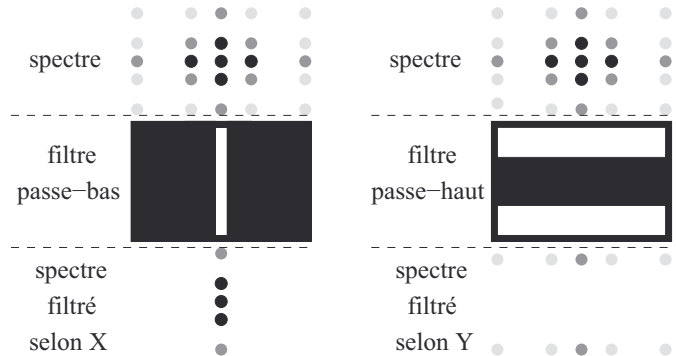
$$-x_0 \leq \lambda \sigma f' \leq x_0 \text{ soit } -\frac{x_0}{\lambda f'} \leq \sigma \leq \frac{x_0}{\lambda f'}$$

et on élimine tout motif de fréquence spatiale supérieure en valeur absolue à $\frac{x_0}{\lambda f'}$.

- Le **filtrage optique passe-haut** dans la direction Y (par exemple) obtenu en plaçant dans le plan de Fourier une plaque dont la partie centrale est opaque $y \in [-y_0, y_0]$. On élimine ainsi les motifs dont les fréquences spatiales σ vérifient

$$-y_0 \leq \lambda \sigma f' \leq y_0 \text{ soit } -\frac{y_0}{\lambda f'} \leq \sigma \leq \frac{y_0}{\lambda f'}$$

et on sélectionne donc tout motif de fréquence spatiale supérieure en valeur absolue à $\frac{y_0}{\lambda f'}$.



En utilisant la relation $\sigma = \frac{1}{a}$, on peut dresser le tableau de synthèse des deux types de filtrage. En posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = \frac{x_0}{\lambda f'} \\ \nu_0 = \frac{y_0}{\lambda f'} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{\lambda f'}{x_0} \\ b_0 = \frac{\lambda f'}{y_0} \end{array} \right.$$

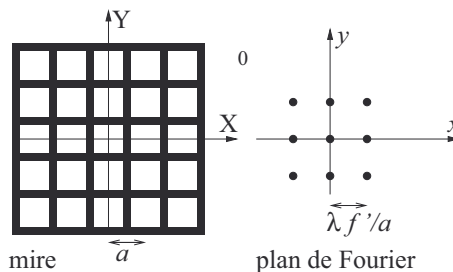
filtre	élimine les motifs	sélectionne les motifs
passe-bas ($\sigma < \mu_0$)	de période $a < a_0$	de période $a > a_0$
passe-haut ($\sigma > \nu_0$)	de période $b > b_0$	de période $b < b_0$

Exemple :

Une mire en forme de quadrillage de pas a est modélisée par la fonction de transmission

$$t(X, Y) = \frac{1}{4} \left(1 + \cos \frac{2\pi X}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi Y}{a} \right)$$

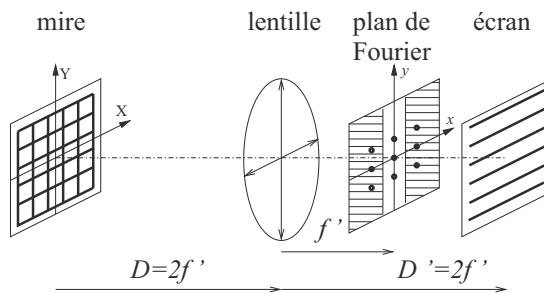
La fonction étant sinusoïdale selon X et selon Y, le spectre fait apparaître $3 \times 3 = 9$ taches.



Pour éliminer les barres verticales, il faut éliminer les détails selon X dont la période spatiale est inférieure à a , donc dont la fréquence spatiale selon X est supérieure à $\frac{1}{a}$. On utilise donc un filtre optique passe-bas de fréquence de coupure μ_0 inférieure à $\sigma = \frac{1}{a}$. Prenons donc $\mu_0 = \frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2a}$. On place donc dans le plan de Fourier une plaque ne laissant transparente qu'une languette

$$x \in [-x_0, x_0] \text{ avec } \mu_0 = \frac{x_0}{\lambda f'} \text{ soit } x_0 = \frac{\lambda f'}{2a}$$

Voici le montage complet.



Cette suppression d'un motif périodique dans une direction d'une image est connue sous le nom d'**expérience d'Abbe**.

↔ Exercices 4.12, 4.13, 4.14.

Énoncés des exercices

4.1

Réseau à fenêtres, réseau à pastilles

Pour fabriquer une plaque à transmission périodique bidimensionnelle, on colle sur une lame de verre transparente des languettes d'adhésif opaque. On étudie ici deux situations différentes :

(RF) le réseau à fenêtres est réalisé en collant des lignes noires épaisses perpendiculaires

(RP) le réseau à pastilles est réalisé en collant des carrés noirs en lignes et colonnes. Voici (pas forcément dans le même ordre) les deux plaques réalisées.

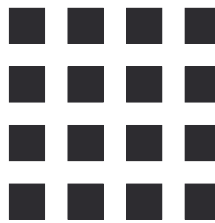


figure A

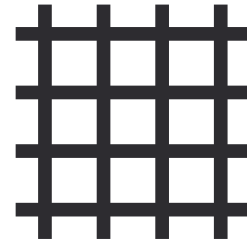
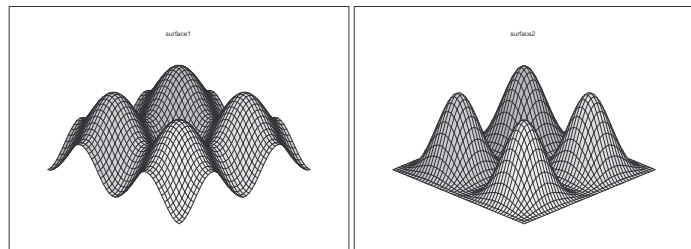


figure B

On propose deux fonctions de transmission bidimensionnelles

$$\begin{cases} f(X, Y) = \cos^2 \frac{2\pi X}{a} \cdot \cos^2 \frac{2\pi Y}{a} \\ g(X, Y) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{2\pi X}{a} + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{2\pi Y}{a} \end{cases}$$

On donne enfin les surfaces de transmission (pas forcément dans le même ordre) suivantes.



Associer le type de réseau (RF ou RP), la figure (A ou B), la fonction de transmission (f ou g) et la surface (1 ou 2).



4.2

Réalisation d'un réseau unidimensionnel sinusoïdal grâce à un Michelson (résolution de problème)

On dispose d'un interféromètre de Michelson, d'une source de lumière quasi monochromatique de longueur d'onde λ et d'une lentille convergente de distance focale f' . On utilise une plaque photosensible dont les caractéristiques sont les suivantes. Lorsqu'une surface élémentaire dS est soumise à une intensité lumineuse I , après un processus chimique de révélation et de fixation, cette surface s'opacifie. Elle reste parfaitement transparente si $I = 0$, elle devient parfaitement opaque si $I = 4I_0$ et présente une transmission fonction affine de I . Comment régler le Michelson et comment procéder pour fabriquer un réseau unidimensionnel sinusoïdal de fréquence spatiale σ donné ?



4.3

Analyse d'un réseau grâce à un laser

Un laser de longueur d'onde $\lambda = 632,8$ nm éclaire sous incidence normale un réseau sinusoïdal de pas a inconnu. On observe sur un spectrogoniomètre trois faisceaux secondaires. On prend comme référence des mesures d'angles la tache la plus brillante. On mesure par rapport à celle-ci les angles des deux autres faisceaux, soit $\alpha_1 = 28,55^\circ$ et $\alpha_2 = -28,55^\circ$. En déduire la valeur de a .



4.4

Séparation des composantes spectrales d'un doublet

Un réseau sinusoïdal de pas $a = 2,7$ μm est éclairé par une lampe à vapeur spectrale qui comporte un doublet de longueur d'onde moyenne $\lambda_0 = 571,6$ nm et de largeur spectrale $\Delta\lambda$:

$$\lambda_1 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \text{ et } \lambda_2 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$$

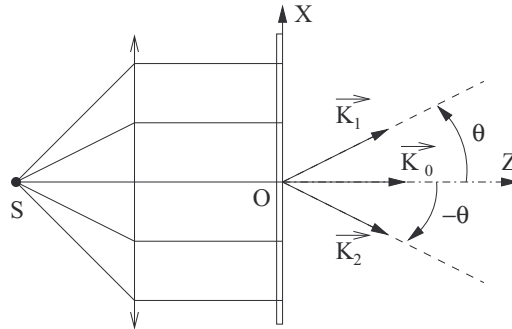
Le dispositif de mesure d'angles permet une précision maximale de 1 minute d'angle, soit 0,29 mrad. Déterminer la valeur minimale $\Delta\lambda$ que ce dispositif permet de mesurer.

4.5

Démonstration simplifiée de la formule des réseaux à transmission sinusoïdale

Un réseau à transmission sinusoïdale de pas a selon X , éclairé sous incidence normale par un faisceau de lumière quasi monochromatique de longueur d'onde λ , fait apparaître trois pics secondaires dans la direction $\theta = 0$ et $\theta = \pm\theta_0$. La théorie des ondes planes progressives harmoniques (voir chapitre 17) permet de définir les vecteurs d'onde associés

$$\vec{K}_0 = k\vec{u}_Z, \vec{K}_1 = \begin{pmatrix} k \sin \theta \\ 0 \\ k \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{K}_2 = \begin{pmatrix} -k \sin \theta \\ 0 \\ k \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



La fonction de transmission est

$$t(X, Y) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi X}{a} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{i \frac{2\pi X}{a}} + \frac{1}{4} e^{-i \frac{2\pi X}{a}}$$

L'onde complexe incidente, en un point M dans le demi-plan $Z \leq 0$ est

$$\vec{a}_-(M, t) = \underline{a}_0 e^{i(\omega t - \vec{K}_0 \cdot \vec{OM})}$$

L'onde complexe émergente, en un point M dans le demi-plan $Z \geq 0$ est la superposition des trois ondes

$$\vec{a}_+(M, t) = \underline{A}_0 e^{i(\omega t - \vec{K}_0 \cdot \vec{OM})} + \underline{A}_1 e^{i(\omega t - \vec{K}_1 \cdot \vec{OM})} + \underline{A}_2 e^{i(\omega t - \vec{K}_2 \cdot \vec{OM})}$$

- Justifier sommairement la symétrie des vecteurs \vec{K}_1 et \vec{K}_2 par rapport à l'axe (O, Z) .
- Donner l'expression complète des fonctions d'onde complexes en coordonnées cartésiennes $\underline{a}_-(X, Y, Z, t)$ et $\underline{a}_+(X, Y, Z, t)$.
- Donner la relation entre

$$\underline{a}_-(X, Y, 0, t), \underline{a}_+(X, Y, 0, t) \text{ et } t(X, Y)$$

- En déduire la relation fondamentale des réseaux sinusoïdaux.



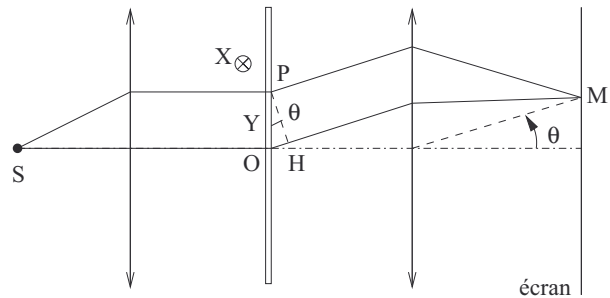
4.6

Démonstration de l'unicité de la direction de diffraction par une fonction de transmission $t_0 e^{-i\frac{2\pi Y}{b}}$

Dans le dispositif suivant, le rectangle fin est une plaque dont la fonction de transmission complexe est

$$\underline{t}(X, Y) = t_0 e^{-i\frac{2\pi Y}{b}} \text{ avec } (X, Y) \in \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right] \times \left[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right]$$

avec $A \gg B$. On cherche l'expression de l'intensité lumineuse en un point M de l'écran repéré par l'angle θ .



- Donner l'expression de la différence de marche δ entre le rayon passant par O et celui passant par P en fonction de θ et de Y.
- Justifier sommairement que la contribution à la fonction d'onde complexe de la languette $\left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right] \times [Y, Y + dY]$ est

$$d\underline{a}(Y) = K \underline{t}(X, Y) \underline{a}_O A dY e^{-i\frac{2\pi\delta}{\lambda}}$$

- En déduire la fonction d'onde complexe \underline{a} en fonction de θ .
- En déduire l'intensité lumineuse

$$I(\theta) = K' \underline{a} \underline{a}^*$$

On posera $I_0 = K' K^2 (AB)^2 \underline{a}_O \underline{a}_O^*$.

- Quand B est très grand devant b , en déduire le résultat énoncé dans le cours.

4.7
Profil de transmission triangulaire

Une plaque possède une fonction de transmission triangulaire, c'est-à-dire affine par morceaux, continue, de coefficient directeur alternativement $\pm\beta$, variant entre 0 et 1, et de période spatiale a selon X .

- Tracer l'allure du profil de la fonction de transmission.
- Exprimer la relation entre β et a .
- On donne la décomposition de Fourier de cette fonction de transmission

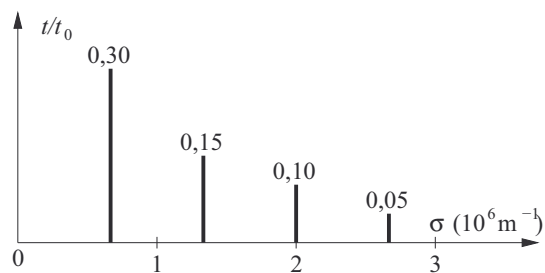
$$t(X) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2p+1) \cdot 2\pi X}{a}$$

On éclaire la plaque sous incidence normale avec une lumière quasi monochromatique de longueur d'onde λ et on fait l'observation dans le plan de Fourier. À quelle condition observe-t-on une tache unique ?

- À quelle condition observe-t-on exactement trois taches ?
- On prend $\lambda = \frac{a}{6}$. Combien de taches observe-t-on ? Quel est le rapport entre les intensités lumineuses des deux taches les moins brillantes ?

4.8
Diffraction d'une lumière bichromatique par un réseau

Une source de lumière bichromatique possède un spectre réduit à deux pics, de longueurs d'onde respectives $\lambda_1 = 450$ nm (bleu) et $\lambda_2 = 675$ nm (rouge), d'intensités respectives sensiblement identiques. On éclaire avec cette source, sous incidence normale, un réseau dont la fonction de transmission est périodique selon X et dont voici le spectre en fréquences spatiales.



L'écran est placé dans le plan de Fourier.

- Calculer la période spatiale a du réseau.
- Le réseau est-il sinusoïdal ?
- Combien de taches distinctes observe-t-on sur l'écran ? Préciser leurs couleurs.
- La couleur de la tache centrale est-elle exactement la même que celle des deux taches les plus éloignées du centre ?



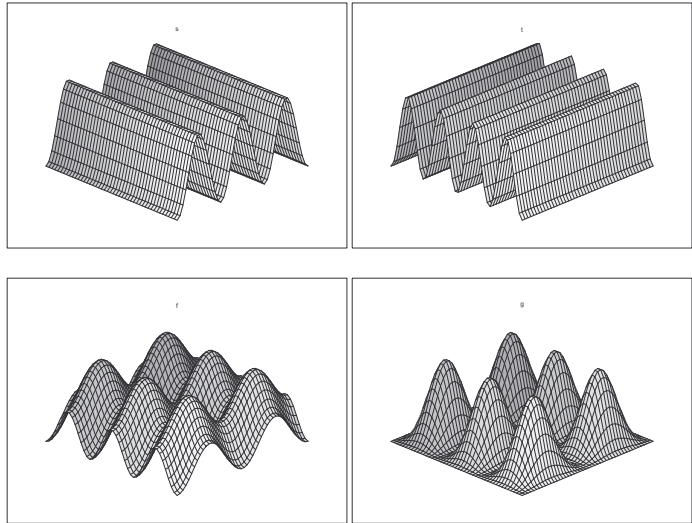
4.9

Mire bidimensionnelle

Une **mire bidimensionnelle** est une plaque possédant une fonction de transmission à double périodicité. On considère les quatre fonctions de transmission

$$\begin{aligned} s(X, Y) &= \cos^2 \frac{\pi X}{a} & t(X, Y) &= \cos^2 \frac{\pi Y}{b} \\ f(X, Y) &= \cos^2 \frac{\pi X}{a} \cdot \cos^2 \frac{\pi Y}{b} & g(X, Y) &= \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi X}{a} + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi Y}{a} \end{aligned}$$

Voici les surfaces de transmission $Z = u(X, Y)$ avec $u = s, t, f, g$.



On éclaire la plaque sous incidence normale avec une source de lumière quasi monochromatique de longueur d'onde λ avec

$$a = 30\lambda \text{ et } b = 20\lambda$$

On place un écran dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f' . Dans chacun des quatre cas, dessiner côte à côte l'allure de la mire et la figure de diffraction observée.

4.10

Diffraction par des pupilles de formes variées

Une pupille diffractante est définie par une fonction de transmission valant 1 pour $(X, Y) \in \mathcal{D}$ et 0 partout ailleurs. Elle est éclairée sous incidence normale par une lumière quasi monochromatique de longueur d'onde λ . On place l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f' .

a) La pupille est rectangulaire, c'est-à-dire que le domaine de transparence est

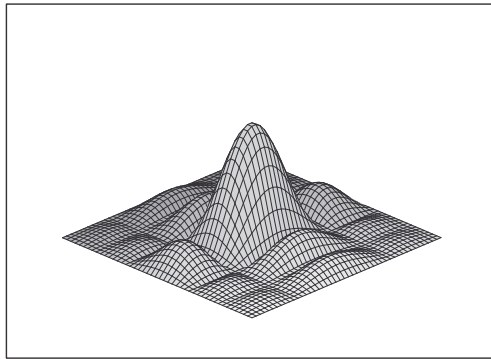
$$\mathcal{D} = \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right] \times \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right]$$

On suppose que a et b sont de l'ordre de grandeur de 10λ .

i) Justifier que l'intensité lumineuse en un point de l'écran $M(x, y)$ s'écrit

$$I(x, y) = I_0 \sin^2 \frac{\pi ax}{\lambda f'} \cdot \sin^2 \frac{\pi by}{\lambda f'}$$

ii) Voici la surface d'intensité lumineuse $z = I(x, y)$, les échelles étant identiques en x et en y .



Tracer l'allure de la figure observée sur l'écran.

iii) En admettant que $a > b$, déterminer le rapport $\frac{a}{b}$.

b) La pupille est circulaire, le domaine de transmission est le cercle de centre O et de rayon R. Si $R > \lambda$, la figure observée sur l'écran est un disque brillant appelé **tache d'Airy** de rayon

$$R_A = 0,61 \frac{f'\lambda}{R}$$

entouré d'anneaux concentriques beaucoup moins brillants. Expliquer pourquoi la valeur finie du diamètre des télescopes empêche de distinguer des étoiles d'écart angulaire $\delta\alpha$ faible. Déterminer un ordre de grandeur de $\delta\alpha$ si $R = 8,0$ m, $f' = 30$ m et $\lambda = 600$ nm.

4.11

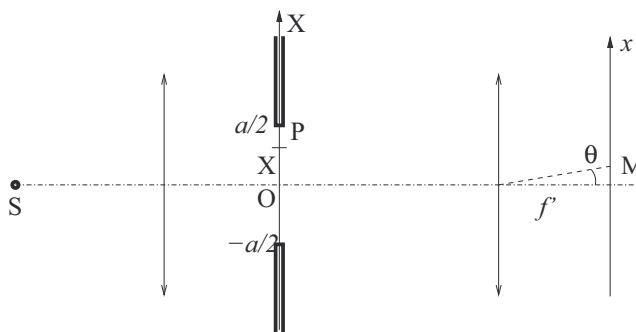
Apodisation

Une pupille rectangulaire diffractante a pour largeur $b \gg \lambda$ et pour longueur $a \simeq \lambda$. On se place dans les conditions d'observation de Fraunhofer, la source ponctuelle étant au foyer objet de la lentille convergente de gauche, l'écran se trouvant dans le plan focal image de la lentille convergente de droite, sa distance focale étant notée f' . La transparence de la pupille n'est pas uniforme

$$t(X) = K_0 \left(1 - \frac{|X|}{a/2} \right)$$

Un point M de l'écran dans le plan de la figure est repéré par son abscisse x . On donne

$$\int_{-1}^1 (1 - |\eta|) e^{i w \eta} d\eta = \left[\frac{\sin \frac{w}{2}}{\frac{w}{2}} \right]^2$$



- Tracer les rayons SOM et SPM.
- Déterminer la différence de marche $\delta = (SPM) - (SOM)$ en fonction de X , f' et x .
- La contribution de la pupille élémentaire de surface $dS = b \cdot dX$ autour de P à la fonction d'onde en M s'écrit

$$d\underline{a}_P(M, t) = t(X) \underline{a}_O e^{i \frac{2\pi x}{\lambda f'} X} b \cdot dX$$

Exprimer la fonction d'onde $\underline{a}(M, t)$ sous la forme d'une intégrale sur la variable $X \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ et calculer cette intégrale.

- En déduire l'intensité lumineuse $I(x)$.
- Tracer l'allure de $I(x)$. Comparer à la fonction qu'on aurait obtenue avec une transparence uniforme. Pourquoi parle-t-on d'apodisation ?
- On donne $f' = 1,0$ m, $\lambda = 600$ nm et $a = 0,05$ mm. Dessiner la figure obtenue sur l'écran.



4.12

Tramage d'une image

Une image numérique est réduite avec un facteur 0,20, enregistrée, et cette image est agrandie d'un facteur 5,0. Voic l'image initiale et l'image finale.



- a) Proposer une explication à la dégradation de l'image, qu'on qualifie de **tramage**.
- b) Décrire comment on peut, par filtrage optique, restaurer la qualité de l'image en effectuant un détramage.



4.13

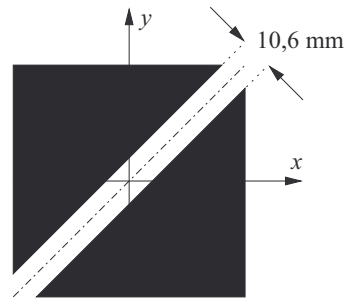
Filtrage par fente oblique

On considère deux mires distinctes de fonctions de transmission bidimensionnelles

$$\begin{cases} f(X, Y) = \cos^2 \frac{\pi X}{a} \cdot \cos^2 \frac{\pi Y}{a} \\ g(X, Y) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi X}{a} + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi Y}{a} \end{cases}$$

(on pourra se reporter aux exercices 4.1 et 4.9 pour la forme des mires et les figures de diffraction dans le plan de Fourier) avec $a = 0,100$ mm. Chacune d'elles est éclairée sous incidence normale par une source de lumière de longueur d'onde $\lambda = 600$ nm, et placée à la distance $D = 2f'$ d'une lentille de distance focale $f' = 2,50$ m,

- a) Déterminer pour chaque mire le spectre spatial observé dans le plan de Fourier et tracer les taches observées en précisant l'échelle.
- b) On place dans le plan de Fourier une plaque transparente selon une bande diagonale de largeur 10,6 mm et opaque partout ailleurs.

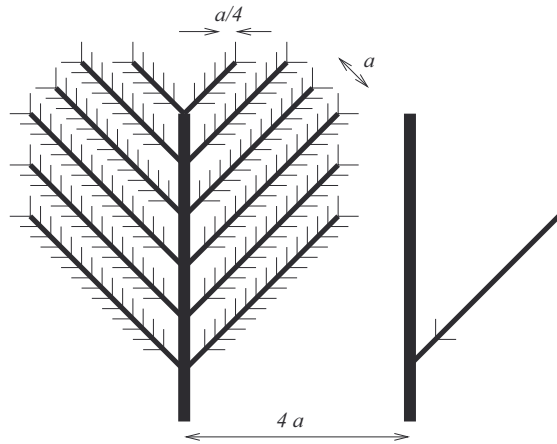


Décrire pour chaque mire la figure observée sur l'écran placé à la distance f' du plan de Fourier.

4.14

Éléments de striescopie (résolution de problème)

Une plume possède une propriété intéressante en termes de périodicité spatiale. Les ramifications permettent de l'assimiler à un assemblage à trois niveaux de finesse, correspondant à des périodes spatiales $4a$, a , $\frac{a}{4}$.



Décrire un procédé expérimental de filtrage optique et de grandissement géométrique permettant une observation privilégiée des fibres les plus fines de la plume.

Du mal à démarrer ?

4.1 La correspondance entre les fonctions et les graphiques peut être trouvée en cherchant les zones de transparence nulle.

4.2 On pourra se reporter au chapitre 3 pour justifier que les franges du coin d'air sont rectilignes, parallèles et d'interfrange constant.

4.3 Application directe de la relation fondamentale des réseaux à fonction de transmission sinusoïdale.

4.4 La relation fondamentale $a \sin \theta = \lambda$ permet de calculer l'angle moyen θ_0 . On détermine $\Delta \lambda$ en fonction de $\Delta \theta$ en faisant le développement limité de la relation fondamentale au voisinage de θ_0 .

4.5 En exprimant $\vec{OM} = X\vec{u}_X + Y\vec{u}_Y + Z\vec{u}_Z$, et en développant les produits scalaires $\vec{K} \cdot \vec{OM}$, on obtient les expressions des fonctions d'onde complexes. Le coefficient de transmission est le rapport entre l'onde en $Z = 0^+$ et $Z = 0^-$. En $Z = 0$, on obtient une relation fonctionnelle (valable pour tout X) entre fonctions exponentielles complexes, on en déduit les relations cherchées par identification.

4.6 a) On utilise la loi de Malus pour simplifier δ . b) La justification de l'expression proposée utilise la définition de la fonction de transmission et la formule clé vue au chapitre 1. c) Le calcul de l'intégrale est différent selon que $b \sin \theta = \lambda$ ou $b \sin \theta \neq \lambda$. d) On pourra utiliser la fonction sinus cardinal $\text{sinc}(u) = \frac{\sin u}{u}$. e) On justifiera que l'intensité est presque nulle si $b \sin \theta \neq \lambda$.

4.7 Cet exercice est en tout point analogue à celui traité en exemple. La détermination du nombre de taches visibles doit tenir compte du fait que le spectre de la fonction triangulaire ne comporte que la composante constante ($n = 0$) et les harmoniques impaires ($n = 2p + 1$).

4.8 On suit la méthode décrite dans le cours pour déterminer les valeurs de $\sin \theta$ et les intensités lumineuses des taches pour chaque longueur d'onde. Comme il y a superposition de certaines taches des deux couleurs, on en déduit le nombre et la couleur des taches observables.

4.9 On peut exprimer $\cos^2 u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2u)$ pour mettre en évidence le caractère sinusoïdal des mires dans les directions X et/ou Y. Dans le cas de la mire f , on pourra mettre en évidence une périodicité selon des directions diagonales. On en déduit les triplets de taches dans chaque cas.

4.10 La justification de l'expression de $I(x, y)$ peut se limiter au passage du cas unidimensionnel de la fente (voir cours) au cas bidimensionnel étudié ici. Les taches réparties sur un axe dans le cas de la fente deviennent des taches quasi rectangulaires, leurs dimensions sont déterminées par les annulations de la fonction sinus cardinal.

4.11 Cet exercice est très guidé et nécessite des calculs très techniques, avec en particulier un changement de variable dans l'intégrale. On pourra se concentrer sur le tracé de la courbe d'intensité

(avec l'aide éventuelle d'un outil graphique), sa comparaison avec la courbe du cours (pour la fente à transparence constante) et l'explication du terme apodisation.

4.12 Un filtrage passe-bas adapté permet de supprimer les détails de période spatiale égale à la taille des pavés rectangulaires.

4.13 On utilisera les résultats établis à l'exercice 4.9 pour tracer

les spectres dans le plan de Fourier. Un tracé méticuleux à l'échelle met en évidence que la fente élimine un certain nombre de taches. En utilisant la réciproque du passage de la mire au spectre, on déterminera les images obtenues sur l'écran à partir des spectres filtrés.

4.14 La mise en évidence des détails les plus fins, donc de plus faible période spatiale, nécessite un filtrage du type passe-haut.

Corrigés des exercices

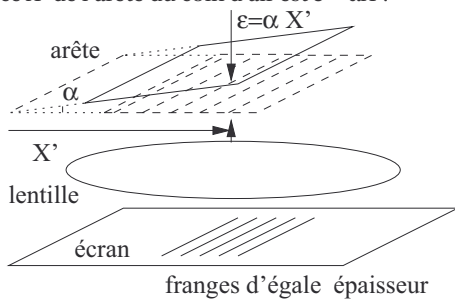
4.1

Le réseau à fenêtres (RF) possède des lignes noires complètes selon X et selon Y, où l'opacité est totale, où la transparence est donc nulle. Il correspond donc à la figure B. Seule la fonction f , qui est le produit de deux cosinus carrés, est nulle lorsque l'un des termes est nul. On voit bien les lignes perpendiculaires de nullité de la fonction de transparence sur la surface 2.

Les pastilles du réseau (RP) sont bien visibles sur la figure A. La fonction g ne s'annule que ponctuellement quand les deux cosinus sont nuls simultanément (on remarque ici que les fonctions de transparence ne représentent pas rigoureusement les réseaux). On voit de même le profil de « boîte à œufs » de la surface 1 et les cuvettes d'annulation de transparence correspondant aux pastilles noires.

4.2

On a montré au chapitre 3 que le Michelson réglé en coin d'air donne des franges d'égale épaisseur, rectilignes, parallèles et d'interfrange constant. En reprenant les résultats de ce chapitre, elles sont localisées sur le miroir M_1' (ou M_2) et on peut former leur image sur un écran grâce à la lentille de projection proposée. On peut, en jouant sur sa position, régler le grandissement γ à loisir. En notant α l'inclinaison des miroirs, l'épaisseur du coin d'air à la distance X' de l'arête du coin d'air est $\varepsilon = \alpha X'$.



La différence de marche en un point de l'écran d'abscisse $X = \gamma X'$ est

$$\delta(X) = 2\varepsilon = 2\alpha \frac{X}{\gamma}$$

et d'après la formule de Fresnel

$$I(X) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi\alpha X}{\gamma\lambda_0} \right)$$

On définit l'opacité par le complémentaire de la transparence : $o = 1 - t$. D'après l'énoncé, l'opacité vaut 1 pour les franges brillantes où $I(X) = 4I_0$ et 0 pour les franges sombres où $I(X) = 0$. La transparence vaut donc

$$t(X, Y) = 1 - \frac{I(X)}{4I_0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi\alpha X}{\gamma\lambda_0}$$

C'est donc bien une fonction de transparence sinusoïdale, de période spatiale

$$b = \frac{2\pi}{\frac{4\pi\alpha}{\gamma\lambda_0}} = \frac{\lambda_0 \gamma}{2\alpha}$$

4.3

Les trois directions où on observe des pics de lumière sont $\theta = 0$, $\theta = \arcsin \frac{\lambda}{a}$ et $\theta = -\arcsin \frac{\lambda}{a}$. On en déduit

$$a = \frac{\lambda}{\sin \alpha_1} = 1,324 \mu\text{m}$$

4.4

La valeur moyenne de l'angle d'observation du doublet est θ_0 avec

$$a \sin \theta_0 = \lambda_0 \text{ donc } \theta_0 = 0,2133 \text{ rad}$$

Notons $\Delta\theta = 0,29 \text{ mrad}$ et posons

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_0 - \frac{\Delta\theta}{2} \\ \theta_2 = \theta_0 + \frac{\Delta\theta}{2} \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} a \sin \theta_1 = \lambda_1 \\ a \sin \theta_2 = \lambda_2 \end{cases}$$

Le développement limité donne

$$\begin{cases} \sin \theta_1 \approx \sin \theta_0 - \frac{\Delta\theta}{2} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_2 \approx \sin \theta_0 + \frac{\Delta\theta}{2} \cos \theta_0 \end{cases}$$

Chapitre 4 Diffraction

On en déduit le système

$$\begin{cases} a \sin \theta_0 - \frac{a\Delta\theta}{2} \cos \theta_0 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \\ a \sin \theta_0 + \frac{a\Delta\theta}{2} \cos \theta_0 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \end{cases}$$

$$\text{donc } \Delta\lambda = a\Delta\theta \cos \theta_0 = 0,77 \text{ nm}$$

4.5

a) La symétrie du dispositif physique par rapport au plan (O, Y, Z) entraîne celle des ondes lumineuses.

b) Le vecteur position est $\vec{OM} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. On en déduit les produits scalaires

$$\begin{cases} \vec{K}_0 \cdot \vec{OM} = kZ \\ \vec{K}_1 \cdot \vec{OM} = kX \sin \theta + kZ \cos \theta \\ \vec{K}_2 \cdot \vec{OM} = -kX \sin \theta + kZ \cos \theta \end{cases}$$

On en déduit les ondes complexes

$$\underline{a}_-(X, Y, Z, t) = \underline{a}_0 e^{i\omega t} e^{-ikZ}$$

$$\underline{a}_+(X, Y, Z, t) = e^{i\omega t} \left[\underline{A}_0 e^{-ikZ} + \underline{A}_1 e^{-ikX \sin \theta} e^{-ikZ \cos \theta} + \underline{A}_2 e^{ikX \sin \theta} e^{-ikZ \cos \theta} \right]$$

c) Par définition du coefficient de transmission,

$$\underline{a}_+(X, Y, 0, t) = t(X, Y) \underline{a}_-(X, Y, 0, t)$$

d) Traduisons cette condition aux limites grâce aux expressions cartésiennes.

$$\forall X, \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{i\frac{2\pi X}{a}} + \frac{1}{4} e^{-i\frac{2\pi X}{a}} \right] \cdot \underline{a}_0 e^{i\omega t} =$$

$$e^{i\omega t} \left[\underline{A}_0 + \underline{A}_1 e^{-ikX \sin \theta} + \underline{A}_2 e^{ikX \sin \theta} \right]$$

$$\text{soit } \forall X, 2\underline{a}_0 + \underline{a}_0 e^{i\frac{2\pi X}{a}} + \underline{a}_0 e^{-i\frac{2\pi X}{a}} =$$

$$4\underline{A}_0 + 4\underline{A}_1 e^{-ikX \sin \theta} + 4\underline{A}_2 e^{ikX \sin \theta}$$

Cette identité de fonctions exponentielles complexes implique, par indépendance linéaire de ces fonctions, l'identification

$$\begin{cases} 2\underline{a}_0 = 4\underline{A}_0 \\ \underline{a}_0 = 4\underline{A}_1 \\ \underline{a}_0 = 4\underline{A}_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{2\pi}{a} = k \sin \theta \\ -\frac{2\pi}{a} = -k \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{donc } \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \text{ soit } a \sin \theta = \lambda$$

4.6

a) Pour les rayons issus de S, (OP) est un plan d'onde d'après la loi de Malus. Pour les rayons issus de M, (PH) est un plan d'onde d'après la loi de Malus. On en déduit, en utilisant le principe de retour inverse de la lumière :

$$\delta = [\text{SPM}] - [\text{SOM}] = [\text{SP}] + [\text{PM}] - [\text{SO}] - [\text{OH}] - [\text{HM}]$$

$$\text{soit } \delta = -[\text{OH}] = -Y \sin \theta$$

b) Par application de la formule clé (voir chapitre 1), la fonction d'onde \underline{a}_P issue de P est la même que celle \underline{a}_O issue de O, multipliée par un terme de déphasage $e^{-i\frac{2\pi\delta}{\lambda}}$. Ici, on multiplie en plus par le coefficient de transparence $t(X, Y)$. Pour former la contribution infinitésimale de la languette, on multiplie par son aire $A dY$. On multiplie enfin par un terme d'homogénéité K. D'où

$$d\underline{a}(Y) = K \cdot \underline{a}_O \cdot e^{-i\frac{2\pi\delta}{\lambda}} \cdot t(X, Y) \cdot A dY$$

c) Les ondes issues de S sont cohérentes et on somme donc les fonctions d'onde complexes.

$$\underline{a} = \int_{Y=-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} K A t_0 \underline{a}_O e^{i2\pi\left(\frac{\sin \theta}{\lambda} - \frac{1}{b}\right)Y} dY$$

Posons

$$\beta = \frac{b \sin \theta}{\lambda} - 1$$

Deux cas sont à considérer.

i) Si $\beta \neq 0$, la fonction exponentielle complexe s'intègre comme une fonction réelle :

$$\underline{a} = K A t_0 \underline{a}_O \left[\frac{e^{i\frac{2\pi\beta}{b}Y}}{i\frac{2\pi\beta}{b}} \right]_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}$$

$$\underline{a} = K A t_0 \underline{a}_O \frac{e^{i\pi\beta\frac{B}{b}} - e^{-i\pi\beta\frac{B}{b}}}{i\frac{2\pi\beta}{b}}$$

$$\underline{a} = K A t_0 \underline{a}_O \frac{2i \sin(\pi\beta\frac{B}{b})}{2i\frac{\pi\beta}{b}} = K A B t_0 \underline{a}_O \sin c \left(\pi\beta\frac{B}{b} \right)$$

$$\text{avec } \sin c(u) = \frac{\sin u}{u}$$

ii) Si $\beta = 0$, c'est-à-dire si

$$b \sin \theta = \lambda$$

alors on intègre une fonction constante et

$$\underline{a} = K A B t_0 \underline{a}_O$$

- d) On en déduit l'intensité lumineuse $I(\theta) = K' \underline{aa}^*$ dans les deux cas.

$$I(\theta) = \begin{cases} t_0^2 K' K^2 \underline{a_0} \underline{a_0}^* A^2 B^2 \operatorname{sinc}^2\left(\pi\beta \frac{B}{b}\right) & \text{si } b \sin\theta \neq \lambda \\ t_0^2 K' K^2 \underline{a_0} \underline{a_0}^* A^2 B^2 & \text{si } b \sin\theta = \lambda \end{cases}$$

$$\text{soit } I(\theta) = \begin{cases} t_0^2 I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\pi\beta \frac{B}{b}\right) & \text{si } b \sin\theta \neq \lambda \\ t_0^2 I_0 & \text{si } b \sin\theta = \lambda \end{cases}$$

- e) Si $B \gg b$, l'argument du sinus cardinal carré

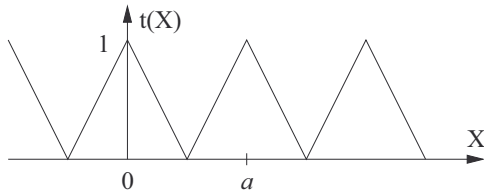
$$\pi\beta \frac{B}{b} \gg \pi$$

et le sinus cardinal carré est presque nul. On a donc bien prouvé que le dispositif donne sur l'écran une tache unique, dont l'intensité est le produit du carré du module de la transparence par une intensité lumineuse de référence. Cette direction est définie par la relation fondamentale

$$b \sin\theta = \lambda$$

4.7

- a) Le profil de la fonction de transmission est le suivant.



- b) Dans la rampe de pente positive,

$$\beta = \frac{2}{a}$$

- c) Les taches observées sont la tache centrale en $\theta = 0$ correspondant à la composante constante du spectre (ici $\frac{f_0}{2} = \frac{1}{2}$), et les taches correspondant aux harmoniques de fréquences spatiales $\sigma_n = n\sigma_1$. On observe une tache unique si la fréquence spatiale fondamentale $\sigma_1 = \frac{1}{a}$, obtenue pour $p = 0$, est incompatible avec la relation fondamentale des réseaux

$$\sin\theta = \lambda\sigma_1 \text{ soit } a \sin\theta = \lambda$$

Le sinus étant compris entre -1 et 1 , on observe donc une tache unique (la tache centrale) si

$$\frac{\lambda}{a} > 1 \text{ soit } a < \lambda$$

- d) On observe 3 taches si l'équation

$$-\frac{a}{\lambda} \leq n \leq \frac{a}{\lambda}$$

a exactement trois solutions dans le spectre de la fonction de transmission. Or celui-ci ne comporte que les fréquences spatiales $\sigma_n = n\sigma_1$ avec $n = 0$ ou $n = 2p + 1$, entier impair. On observera donc exactement trois taches si

$$1 \leq \frac{a}{\lambda} < 3 \text{ soit } \lambda \leq a < 3\lambda$$

- e) Utilisons la méthode décrite dans le cours. Le spectre est limité à

$$-6 \leq n \leq 6 \text{ donc } n \in \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$$

On observe donc 7 taches lumineuses. Les deux taches les moins lumineuses sont celles de rang $n = 3$ (donc $p = 1$) et $n = 5$ (donc $p = 2$). Leurs intensités lumineuses sont

$$\begin{cases} I_3 = t_3^2 I_0 = \left[\frac{4}{9\pi^2}\right]^2 I_0 & \text{donc } \frac{I_3}{I_5} = \frac{25^2}{9^2} = 7,7 \\ I_5 = t_5^2 I_0 = \left[\frac{4}{25\pi^2}\right]^2 I_0 \end{cases}$$

4.8

- a) Le spectre en fréquences spatiales est discret, les fréquences sont les multiples entiers de

$$\sigma_1 = \frac{2}{3} \cdot 10^6 \text{ donc } a = \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot 10^6} = 1,5 \mu\text{m}$$

- b) Le réseau n'est pas sinusoïdal, sinon, il n'y aurait qu'une fondamentale, et pas d'harmoniques dans le spectre.

- c) Le spectre est limité différemment pour les deux longueurs d'onde.

- i) Pour le bleu,

$$-\frac{a}{\lambda_1} \leq n_1 \leq \frac{a}{\lambda_1} \text{ soit } -3,33 \leq n_1 \leq 3,33$$

$$\text{donc } n_1 \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

donc on voit 7 taches.

n_1	0	± 1	± 2	± 3
$\sin\theta$	0	$\pm 0,30$	$\pm 0,60$	$\pm 0,90$
I/I_0	1	0,090	0,022	0,010

- ii) Pour le rouge,

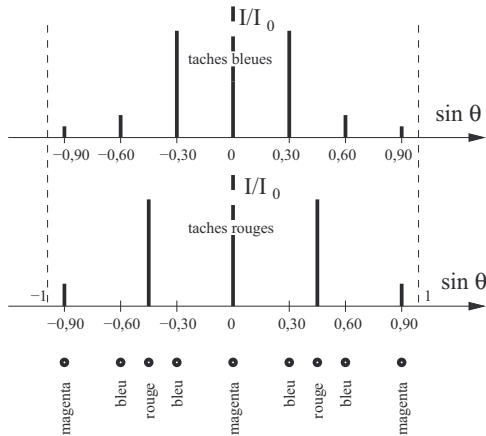
$$-\frac{a}{\lambda_2} \leq n_2 \leq \frac{a}{\lambda_2} \text{ soit } -2,22 \leq n_2 \leq 2,22$$

$$\text{donc } n_2 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

donc on voit 5 taches.

n_2	0	± 1	± 2
$\sin\theta$	0	$\pm 0,45$	$\pm 0,90$
I/I_0	1	0,090	0,022

On peut donc tracer les deux spectres en intensités et on en déduit leur superposition.



On observe donc au total 9 taches.

- d) La tache centrale est magenta avec une superposition des deux taches centrales de même intensité. Les taches périphériques sont magenta, mais l'intensité de la tache rouge est plus importante que celle de la tache bleue, c'est donc un magenta qui tire plus sur le rouge que sur le bleu (une teinte cramoisie).

4.9

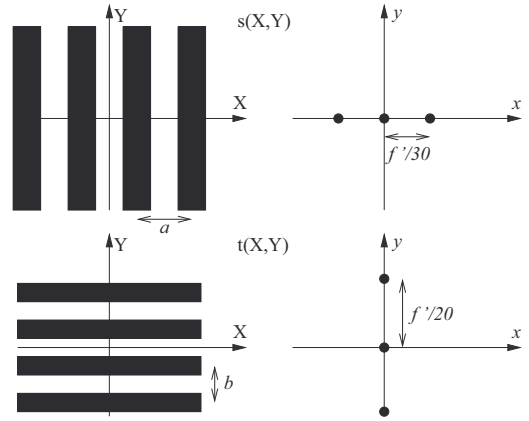
Les deux mires de fonctions de transmission s et t forment des réseaux de fonction de transmission sinusoïdale :

$$\begin{cases} \cos^2 \frac{\pi X}{a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi X}{a} \\ \cos^2 \frac{\pi Y}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi Y}{b} \end{cases}$$

Les figures dans le plan de transmission présentent donc trois taches, respectivement

$$\begin{cases} x = -\frac{\lambda f'}{a} = -\frac{f'}{30}, x = 0 \text{ et } x = \frac{\lambda f'}{a} = \frac{f'}{30} \\ y = -\frac{\lambda f'}{b} = -\frac{f'}{20}, x = 0 \text{ et } x = \frac{\lambda f'}{a} = \frac{f'}{20} \end{cases}$$

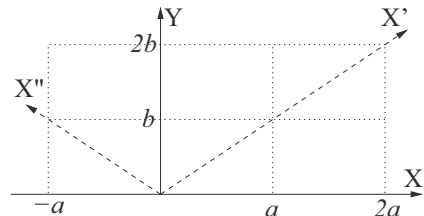
Voici côte à côte les allures des mires et des figures de diffraction.



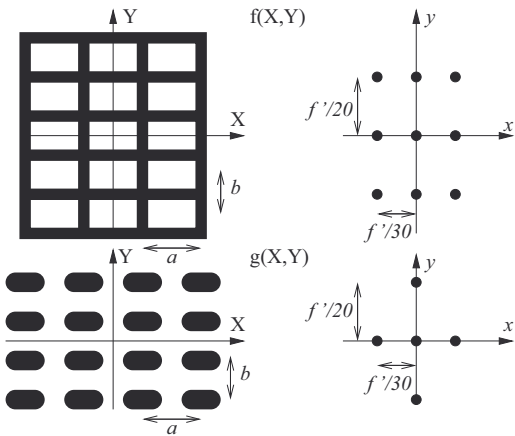
Les mires de fonctions de transmission f et g possèdent toutes deux une périodicité spatiale selon \vec{u}_X , selon \vec{u}_Y . La fréquence spatiale sur l'axe X est, dans les deux cas $\sigma_X = \frac{1}{a}$, celle sur l'axe Y est $\sigma_Y = \frac{1}{b}$.

$$\begin{cases} f(X, Y) = \frac{1}{4} \left(1 + \cos \frac{2\pi X}{a} \right) \cdot \left(1 + \cos \frac{2\pi Y}{b} \right) \\ g(X, Y) = \frac{1}{4} \left(1 + \cos \frac{2\pi X}{a} \right) + \frac{1}{4} \left(1 + \cos \frac{2\pi Y}{b} \right) \end{cases}$$

Une particularité de la mire définie par la fonction f est que sa structure en « boîte à œufs » lui confère deux autres périodicités quasi sinusoïdales dans les deux directions obliques X' et X'' .



On observera donc dans le plan de Fourier 3 taches selon X et 3 taches selon Y dans les deux cas, et dans le cas de f , on observera aussi 3 taches selon X' et 3 taches selon X'' . Les taches centrales sont évidemment toutes confondues.



4.10

a) Pupille rectangulaire.

i) La pupille rectangulaire est le produit cartésien de deux intervalles de largeur a selon X et de largeur b selon Y . On peut donc admettre que le spectre en fréquences spatiales est lui-même le produit des spectres en sinus cardinal, comme on l'a admis dans le cours :

$$t(\sigma_X, \sigma_Y) = t_0 \text{sinc}(\pi a \sigma_X) \text{sinc}(\pi b \sigma_Y)$$

Le lobe principal de diffraction est délimité par

$$\begin{cases} -\frac{1}{a} \leq \sigma_X \leq \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{b} \leq \sigma_Y \leq \frac{1}{b} \end{cases}$$

La direction de diffraction θ est liée à la fréquence spatiale σ par la relation

$$\sin \theta = \lambda \sigma$$

Le lobe principal de diffraction est donc délimité par

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{a} \leq \sin \theta_X \leq \frac{\lambda}{a} \\ -\frac{\lambda}{b} \leq \sin \theta_Y \leq \frac{\lambda}{b} \end{cases}$$

Comme a et b sont de l'ordre de $\frac{\lambda}{10}$, θ est un petit angle. On en déduit

$$\begin{cases} \theta_X \approx \sin \theta_X = \lambda \sigma_X \text{ donc } \sigma_X \approx \frac{\theta_X}{\lambda} \\ \theta_Y \approx \sin \theta_Y = \lambda \sigma_Y \text{ donc } \sigma_Y \approx \frac{\theta_Y}{\lambda} \end{cases}$$

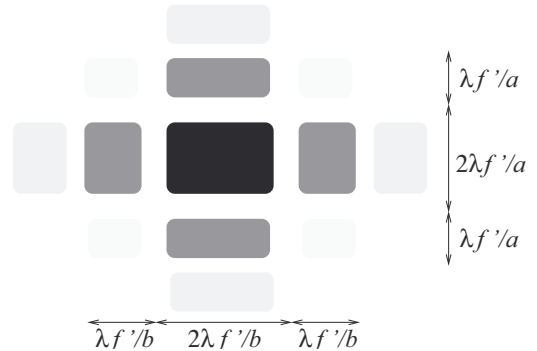
$$\text{et } \begin{cases} \theta_X \approx \tan \theta_X = \frac{x}{f'} \\ \theta_Y \approx \tan \theta_Y = \frac{y}{f'} \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \sigma_X = \frac{x}{\lambda f'} \\ \sigma_Y = \frac{y}{\lambda f'} \end{cases}$$

En un point de l'écran de coordonnées (x, y) , l'intensité lumineuse est proportionnelle au carré de la fonction de transmission donc

$$I(x, y) = I_0 \text{sinc}^2 \frac{\pi a x}{\lambda f'} \cdot \text{sinc}^2 \frac{\pi b y}{\lambda f'}$$

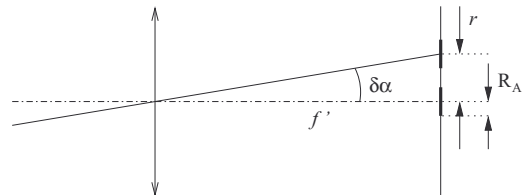
ii) On observe une tache centrale rectangulaire très brillante séparée par des taches secondaires rectangulaires moins brillantes. Comme pour les taches de diffraction par une fente, la largeur de la tache centrale est double de celle des taches secondaires. Elles sont définies par les annulations du sinus cardinal.



iii) On distingue sur la figure un lobe principal et quatre lobes secondaires dans une direction, un lobe principal et deux lobes secondaires dans la direction orthogonale. On en déduit

$$\frac{6\lambda f'}{a} = \frac{4\lambda f'}{b} \text{ donc } \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$

b) La lumière reçue d'une étoile forme un faisceau de lumière qui frappe la pupille circulaire d'entrée du télescope. Cette pupille diffracte la lumière et donne dans le plan de Fourier une tache dont le diamètre est R_A . L'étoile étant pratiquement à l'infini, son image est dans le plan focal image de la lentille, donc dans le plan de Fourier, elle n'est donc pas ponctuelle. Deux étoiles d'écart angulaire très faible forment deux taches d'Airy qui, si elles se chevauchent, ne permettent pas de les séparer.



Les centres des taches sont distants de

$$r = f' \tan \delta\alpha \approx f' \delta\alpha$$

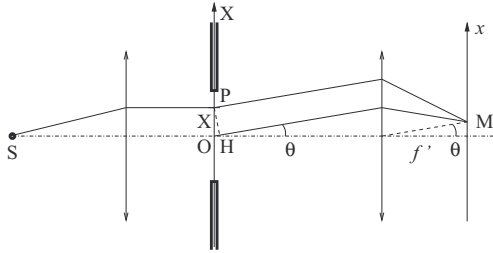
Chapitre 4 Diffraction

La condition de non-chevauchement est

$$r > 2R_A \text{ soit } \delta\alpha > \frac{1,22\lambda}{R} = 9 \cdot 10^{-8} \text{ rad}$$

4.11

a) Voici l'allure des rayons.



b) D'après la loi de Malus,

$$\delta = [\text{SPM}] - [\text{SOM}] = [\text{SP}] + [\text{PM}] - [\text{SO}] - [\text{OH}] - [\text{HM}]$$

$$\delta = -[\text{OH}] = -X \sin \theta \approx -X\theta \approx -X \tan \theta$$

$$\text{soit } \delta = -\frac{x}{f'} X$$

c) On intègre sur la largeur de la fente.

$$\underline{a}(M, t) = \int_{X=-a/2}^{a/2} K_0 \left(1 - \frac{|X|}{a/2}\right) \underline{a}_O(M, t) e^{i \frac{2\pi x}{\lambda f'} X} b \cdot dX$$

d) On fait le changement de variable

$$\eta = \frac{X}{a/2} \text{ donc } dX = \frac{a}{2} d\eta$$

et on pose $w = \frac{\pi x}{\lambda f'} a$. Il vient :

$$\underline{a}(M, t) = K_0 \frac{ab}{2} \underline{a}_O(M, t) \int_{-1}^1 (1 - |\eta|) e^{i w \eta} d\eta$$

$$\underline{a}(M, t) = K_0 \frac{ab}{2} \underline{a}_O(M, t) \sin^2 \left(\frac{w}{2}\right)$$

En remplaçant w par son expression, on en déduit

$$I(x) = K \underline{a}(M, t) \underline{a}^*(M, t)$$

$$I(x) = K K_0^2 \frac{a^2 b^2}{4} \underline{a}_O(M, t) \underline{a}_O^*(M, t) \sin^4 \frac{\pi a x}{2 \lambda f'}$$

e) $I(x)$ a donc l'allure d'un sinus cardinal à la puissance 4. $\sin^4 u$ vaut 1 quand $u = 0$ (soit $x = 0$), puis s'annule quand

$$u = \pm \pi \text{ soit } x = \pm \frac{2 \lambda f'}{a}$$

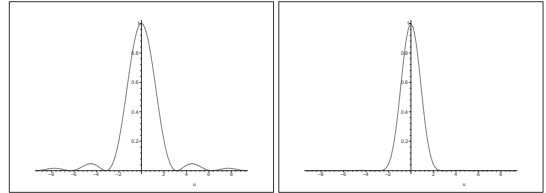
et retrouve un lobe secondaire quand

$$u \approx \pm \frac{3\pi}{2} \text{ soit } x = \pm \frac{3 \lambda f'}{a}$$

pour lequel l'intensité vaut

$$I_0 \sin^4 \frac{3\pi}{2} = \frac{16 I_0}{81 \pi^4} \approx 0,002 I_0$$

et est donc quasiment nulle. La figure de diffraction avec la transparence uniforme laisse apparaître des taches secondaires, tertiaires de diffraction, alors qu'avec la transparence non uniforme, ces taches ont pratiquement disparu : on appelle parfois ces taches les « pieds » de la tache, et l'effacement de ces pieds s'appelle l'*apodisation*. Voici côté à côté les fonctions sinus cardinal puissance 2 (avec fente à transparence uniforme) et sinus cardinal puissance 4, on voit nettement l'apodisation.



f) La tache centrale a la forme d'un trait de largeur

$$\frac{4 \lambda f'}{a} = 4,8 \text{ cm}$$

On ne voit pratiquement aucune tache secondaire.

4.12

a) Lors de la réduction de l'image, le nombre de pixels est réduit, donc la résolution de l'image diminue. Lorsqu'on la réagrandit, les pixels forment des taches rectangulaires.

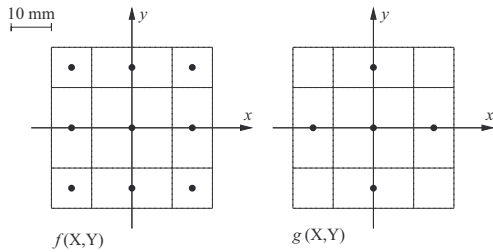
b) On doit éliminer les détails de période spatiale égale à la taille b des taches rectangulaires selon Y . En utilisant le tableau de synthèse du cours, on en déduit qu'il faut faire un filtrage passe-bas selon y . On place donc dans le plan de Fourier une fente horizontale transparente dans l'intervalle $[-y_0, y_0]$ avec

$$\frac{\lambda f'}{y_0} = 2b \text{ soit } y_0 = \frac{\lambda f'}{2b}$$

4.13

a) Ces fonctions sont des cas particuliers de celles étudiées à l'exercice 4.9 avec $b = a$. On en déduit les spectres à 9 taches pour la mire f , à 5 taches pour la mire g . La période spatiale vaut $a = 100 \mu\text{m}$ donc l'écart entre les taches sur chaque axe est

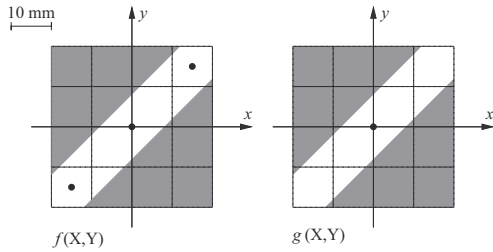
$$\frac{\lambda f'}{a} = 15 \text{ mm}$$



b) La plaque est un filtre passe-bas qui occulte certaines taches, donc certaines fréquences spatiales. On peut remarquer que la distance entre deux taches sur la même diagonale est

$$15 \cdot \sqrt{2} = 21,2 \text{ mm}$$

donc la largeur choisie pour la bande transparente est exactement égale à la moitié de cette distance. Voici les taches qui subsistent après filtrage dans les deux cas.

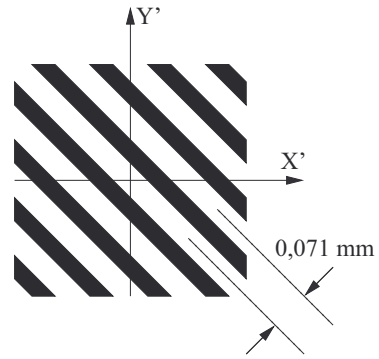


Dans le cas de la mire f , le spectre filtré dans le plan de Fourier est celui d'un réseau à fonction de transmission sinusoïdale, selon la première diagonale du repère, et de pas a' avec

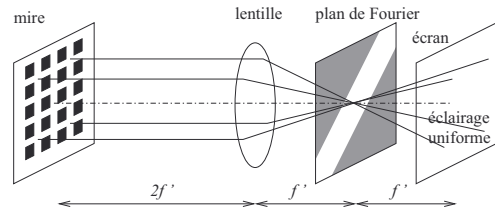
$$\frac{\lambda f'}{a'} = 15 \cdot \sqrt{2} = 21,2 \text{ mm}$$

$$\text{donc } a' = 0,071 \text{ mm}$$

On obtient donc sur l'écran la figure suivante.



Dans le cas de la mire g , la tache unique au centre du plan de Fourier, donc au foyer image de la lentille convergente, est l'image d'une plaque éclairée uniformément sous incidence normale. L'écran est donc éclairé uniformément. On a filtré les détails dans les directions X et Y .



4.14

On doit opérer un filtrage passe-haut. Comme on ne sait pas a priori dans quelle direction les fibres les plus fines se trouvent, on occulte la partie centrale du plan de Fourier avec une pastille opaque en forme de disque de rayon R . En utilisant le tableau de synthèse donné dans le cours, on choisit R ainsi :

$$\frac{a}{4} < \frac{a}{2} = b_0 = \frac{\lambda f'}{R} \text{ soit } R = \frac{2\lambda f'}{a}$$

Deuxième partie

Thermodynamique

CHAPITRE 5

Transferts thermiques

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique.
- ◇ Différents modes de transfert thermique.
- ◇ Vecteur densité de flux thermique.
- ◇ Loi de Fourier.
- ◇ Équation de la diffusion thermique.
- ◇ Modèle des résistances thermiques.
- ◇ Rayonnement thermique.
- ◇ Corps noir.
- ◇ Loi de Wien.
- ◇ Loi de Stefan.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Utiliser le premier principe sous forme différentielle.
- ◇ Utiliser le second principe sous forme différentielle.
- ◇ Faire un bilan thermodynamique local sans ou avec terme de source.
- ◇ Établir une équation aux dérivées partielles en T .
- ◇ Exploiter les lois du rayonnement thermique.
- ◇ Traduire et exploiter les conditions aux limites.
- ◇ Définir et utiliser le modèle des résistances thermiques.

Les méthodes à retenir

Utiliser le premier principe sous forme différentielle.

Entre un état initial et un état final d'équilibre,

- la variation d'une **variable ou fonction d'état** X (pression P, température T, volume V, énergie interne U, enthalpie $H = U + PV$, entropie S) ne dépend que de ces deux états, et pas du chemin suivi : elle s'écrit ΔX pour une transformation macroscopique et dX pour une transformation infinitésimale ;
- la quantité d'énergie échangée Y (travail W, énergie thermique Q) dépend du chemin suivi et s'écrit Y pour une transformation macroscopique et δY pour une transformation infinitésimale.

Le **premier principe** s'écrit sous forme différentielle

$$dU + dE_{c_{\text{macro}}} = \delta W + \delta Q$$

et pour un système macroscopiquement au repos

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Exemple :

- Pour un système formé de n moles de gaz parfait, de rapport de capacités thermiques γ , $dU = C_V dT = \frac{nR}{\gamma-1} dT$ et $dH = C_P dT = \frac{\gamma nR}{\gamma-1} dT$.
- Pour une phase condensée liquide ou solide incompressible indilatable, $dU = dH = C dT = mcdT$.
- Pour un fluide ne recevant du travail que par des forces de pression, $\delta W = -P_{\text{ext}} dV$.

↔ **Exercice 5.1.**

Utiliser le second principe sous forme différentielle.

Pour **calculer** la variation d'entropie subie par un système lors d'une transformation d'un état d'équilibre initial à un état d'équilibre final, on utilise la formule donnée par l'énoncé (c'est ce qu'on fait en première année) ou on intègre l'une des identités thermodynamiques

$$(IT1) : dU = -PdV + TdS \text{ ou } (IT2) : dH = VdP + TdS$$

entre l'état initial (P_1, V_1, T_1) et l'état final (P_2, V_2, T_2) . Le **second principe** est appliqué en second lieu pour calculer l'entropie créée qui mesure l'irréversibilité de la transformation :

$$dS = \delta S_{\text{échangée}} + \delta S_{\text{créée}}$$

avec $\delta S_{\text{échangée}} = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$ et $\delta S_{\text{créée}} \geq 0$, irréversible si $\delta S_{\text{créée}} > 0$, réversible si $\delta S_{\text{créée}} = 0$. On peut retenir que c'est l'hétérogénéité des grandeurs intensives qui crée l'irréversibilité.

Exemple :

On place deux blocs solides de même capacité thermique C aux températures initiales T_{10} et T_{20} au contact l'une de l'autre dans une enceinte adiabatique. Dans l'état d'équilibre final, ils sont à la même température T_f . Le système $\{1,2\}$ n'échange ni travail ni énergie thermique avec l'extérieur. On lui applique le premier principe et on utilise l'extensivité de U :

$$dU = dU_1 + dU_2 = 0 \Rightarrow CdT_1 + CdT_2 = 0$$

et en intégrant entre l'état initial et l'état final

$$C(T_f - T_{10}) + C(T_f - T_{20}) = 0 \text{ donc } T_f = \frac{T_{10} + T_{20}}{2}$$

L'entropie est extensive, donc $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$ et on calcule chacune d'elles grâce à la première identité thermodynamique :

$$\begin{cases} CdT_1 = 0 + T_1 dS_1 \\ CdT_2 = 0 + T_2 dS_2 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} dS_1 = C \frac{dT_1}{T_1} \\ dS_2 = C \frac{dT_2}{T_2} \end{cases}$$

et en intégrant

$$\Delta S = C \ln \frac{T_f}{T_{10}} + C \ln \frac{T_f}{T_{20}} = C \ln \frac{(T_{10} + T_{20})^2}{4T_{10}T_{20}}$$

La transformation étant adiabatique pour le système $\{1,2\}$, $S_e = 0$ donc

$$S_c = \Delta S = C \ln \frac{(T_{10} + T_{20})^2}{4T_{10}T_{20}}$$

Une étude algébrique élémentaire permet de prouver que cette quantité est nulle si $T_{10} = T_{20}$ auquel cas il n'y a pas de transformation et la réversibilité est immédiate, et qu'elle est strictement positive si $T_{10} \neq T_{20}$ auquel cas l'évolution d'un état initial d'hétérogénéité de température vers un état final d'homogénéité est bien irréversible.

↪ **Exercices 5.2, 5.3.**

Faire un bilan thermodynamique local sans ou avec terme de source.

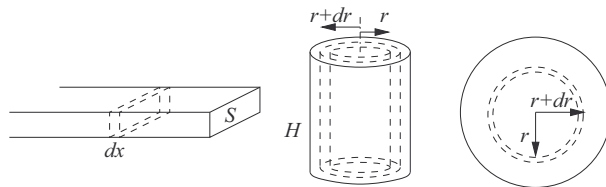
Pour une évolution à volume constant, un bilan thermodynamique est l'application du premier principe $dU = \delta Q_{ech} + \delta Q_{int}$ pendant un intervalle de temps dt pour un élément infinitésimal de volume $d\tau$ défini autour du point M :

- $dU = \mu d\tau c (T(M, t + dt) - T(M, t))$ où μ est la masse volumique et c la capacité thermique massique
- δQ_{ech} est l'énergie thermique échangée par $d\tau$ avec l'extérieur ; dans le cas de la conduction thermique, celle qui traverse une paroi \vec{dS} délimitant $d\tau$ est $\vec{j}_{th} \cdot \vec{dS}$;
- δQ_{int} est l'énergie thermique générée au sein de $d\tau$ par création interne, par réaction chimique ou nucléaire ; dans le cas d'une source interne de puissance volumique \mathcal{P} , elle vaut $\mathcal{P} d\tau dt$.

On obtient ainsi une équation aux dérivées partielles reliant $T(M, t)$ et les termes de transfert et de création d'énergie thermique.

Exemple :

On se limite au cas unidimensionnel. Les trois éléments fondamentaux de volume correspondent alors aux trois systèmes habituels de coordonnées : • cartésien (tranche prismatique de section S comprise entre x et $x + dx$ de volume $d\tau = S dx$) • cylindrique (espace compris entre les cylindres de hauteur H et de rayons r et $r + dr$ de volume $d\tau = 2\pi r H dr$) • sphérique (espace situé entre les sphères de rayons r et $r + dr$ de volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$).



↪ Exercice 5.4.

Établir une équation aux dérivées partielles en T.

La **loi de Fourier** $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$, où λ est la **conductivité thermique** combinée au bilan local thermodynamique conduit à une équation aux dérivées partielles en T. Sa résolution, difficile dans le cas général, est guidée par l'énoncé.

Exemple :

L'équation de la chaleur est celle vérifiée par T dans un matériau indéformable de masse volumique μ , de capacité thermique massique c , de conductivité thermique λ et sans terme de source. Les deux équations reliant $T(M, t)$ et $\vec{j}_{th}(M, t)$ sont le bilan local thermodynamique (voir exercice 5.4) et la loi de Fourier :

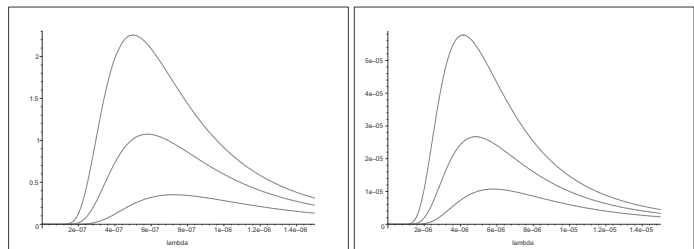
$$\begin{cases} \mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{th} = 0 \\ \vec{j}_{th} = -\lambda \operatorname{grad} T \end{cases} \quad \text{donc} \quad \mu c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = 0$$

où $\Delta T = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} T$ est le Laplacien scalaire de T .

↔ Exercices 5.5, 5.6, 5.7.

Exploiter les lois du rayonnement thermique.

Le **rayonnement du corps noir** est une émission d'énergie sous la forme de photons par tout corps chaud. Elle est régie par la **loi de Planck** : la densité spectrale du rayonnement du corps noir est une fonction de la longueur d'onde λ du rayonnement, paramétrée par la température de surface T du corps. Voici les allures de la courbe représentative pour différentes températures. Sur le graphe de gauche, les trois courbes sont tracées pour $T = 5800 \text{ K}$, $T = 5000 \text{ K}$, $T = 4000 \text{ K}$; sur le graphe de droite, les trois courbes sont tracées pour $T = 700 \text{ K}$, $T = 600 \text{ K}$, $T = 500 \text{ K}$.



On constate que plus le corps est chaud, plus la courbe est haute, et plus son pic est déplacé vers les basses longueurs d'onde. En particulier, les corps dont la température est de quelques milliers de kelvin émettent dans le domaine visible, ceux dont la température est de quelques centaines de kelvin émettent dans le domaine infrarouge.

Les deux lois citées par le programme officiel sont des corollaires de la loi de Planck (les exercices 5.12 et 5.13 donnent des éléments de démonstration).

• La **loi de Wien** indique que la longueur d'onde λ_m correspondant au maximum de la densité spectrale et la température T du corps vérifient la relation

$$\lambda_m \cdot T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

• La **loi de Stefan** indique que la puissance surfacique totale (intégrée sur toutes les valeurs possibles de pulsation) rayonnée par le corps noir est

$$\mathcal{P}_s = \frac{d\mathcal{P}_{\text{ray}}}{dS} = \sigma T^4$$

où $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ est la constante de Stefan-Boltzmann. L'exploitation de ces lois s'articule autour des axes suivants.

- La loi de Wien permet d'expliquer la dissymétrie entre les longueurs d'onde du maximum de rayonnement de deux corps de températures distinctes. On peut ainsi expliquer qualitativement l'effet de serre.
- L'étendue spectrale couvre globalement l'intervalle $\left[\frac{\lambda_m}{2}, 8\lambda_m \right]$. On peut en déduire le domaine radiatif de rayonnement des corps chauds.
- La loi de Stefan donne l'expression de la puissance surfacique rayonnée, c'est-à-dire du flux thermique sortant du corps. Cette loi donne donc une condition aux limites utile pour la résolution complète de l'équation de diffusion thermique au sein du corps (voir paragraphe suivant).
- Lorsqu'un corps A est au contact radiatif d'un autre corps B, on peut déterminer par des considérations géométriques l'énergie thermique incidente sur un élément de surface de A de la part de B. On doit ensuite déterminer l'énergie thermique absorbée par A en utilisant le coefficient d'absorption a .

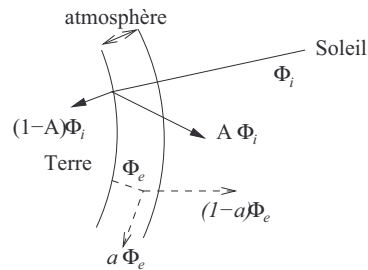
Exemple :

L'atmosphère terrestre est pratiquement transparente pour le rayonnement solaire incident, centré sur la longueur d'onde $\lambda \simeq 600 \text{ nm}$. Une partie de ce rayonnement est absorbé par la Terre et une partie est réfléchi par la surface terrestre. Le coefficient de réflexion est A qu'on nomme l'albedo, (terme dans lequel on trouve la racine *alba*, blanc, car les surfaces blanches, la neige et les banquises en particulier, réfléchissent bien la lumière).

La température moyenne de la surface de la Terre est environ $T = 288 \text{ K}$. Elle se comporte donc comme un corps noir dont la longueur d'onde moyenne est donnée par la loi de Wien

$$\lambda_m = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{288} = 10 \text{ } \mu\text{m}$$

Elle est située dans l'infrarouge et les molécules de l'atmosphère, particulièrement le gaz carbonique et le méthane absorbent une fraction a de l'énergie de ce rayonnement. Le bilan thermique pour la surface terrestre prend donc la forme suivante.



À l'équilibre thermique, le flux thermique incident venant du Soleil est égal au flux sortant du système {Terre, atmosphère}, soit

$$\Phi_i = A\Phi_i + (1 - a)\Phi_e$$

où Φ_e est le flux émis par la surface terrestre, lié à la température de surface par la loi de Stefan. L'exercice 5.11 donne le détail numérique du calcul.

↪ **Exercices 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14.**

Traduire et exploiter les conditions aux limites.

Au sein d'un objet solide indéformable, les seuls transferts thermiques sont conductifs. Les **conditions aux limites** sont écrites sur les parois extérieures de l'objet étudié. On note M un point de la paroi et \vec{n} le vecteur unitaire normal en M à la paroi dirigé vers l'extérieur.

- Au contact d'un thermostat, $T(M \in \text{paroi}, t) = T_{\text{thermostat}}$.
- Au contact d'un fluide dont la température loin de la paroi est T_∞ , le flux **convectif** est donné par la **loi de Newton**

$$\vec{j}_{cv}(M, t) = h(T(M, t) - T_\infty) \vec{n}$$

où h le coefficient de convection ; par application de la loi de Fourier, la loi de Newton impose une condition aux limites sur la dérivée spatiale de la température.

- Un transfert **radiatif** est aussi possible et donné par la **loi de Stefan**. La paroi rayonne vers l'extérieur :

$$\vec{j}_{\text{rad émis}}(M, t) = \sigma T^4(M, t) \vec{n}$$

où $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ est la constante de Stefan-Boltzmann. La paroi reçoit aussi l'énergie thermique rayonnée par l'environnement extérieur à la température T_0 :

$$\vec{j}_{\text{rad absorbé}}(M, t) = -\sigma T_0^4 \vec{n}$$

Exemple :

Au contact d'un fluide à la température $T_\infty \approx T_0$ proche de $T(M)$, on peut regrouper les transferts convectifs et radiatifs. En effet, le vecteur densité de courant thermique s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{j}_{th}(M, t) &= \vec{j}_{cv}(M, t) + \vec{j}_{\text{rad émis}}(M, t) + \vec{j}_{\text{rad absorbé}}(M, t) \\ &= [h(T(M, t) - T_0) + \sigma(T^4(M, t) - T_0^4)] \vec{n} \end{aligned}$$

En posant $T = T_0 + \delta T$ et en considérant que $\delta T \ll T_0$, le développement limité au premier ordre donne

$$T^4(M, t) - T_0^4 \approx T_0^4 + 4T_0^3 \delta T(M, t) - T_0^4 = 4T_0^3 (T(M, t) - T_0)$$

$$\text{donc } \vec{j}_{th}(M, t) = [h + 4\sigma T_0^3] (T(M, t) - T_0) \vec{n}$$

qui est analogue à la loi de Newton en notant $h' = h + 4\sigma T_0^3$, coefficient convecto-radiatif.

↔ Exercices 5.15, 5.16, 5.17, 5.18.

Définir et utiliser le modèle des résistances thermiques.

En régime stationnaire ou quasi stationnaire, pour un objet de longueur L , de section S et de conductivité λ , siège d'une conduction thermique unidirectionnelle, avec les températures T_1 et T_2 à ses extrémités, le flux thermique conductif Φ dirigé de T_1 vers T_2 et la différence thermique $T_1 - T_2$ vérifient la **loi d'Ohm thermique**

$$T_1 - T_2 = R_{th} \Phi \text{ avec } R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

Ce modèle permet de modéliser les échanges thermiques d'un système en régime permanent en associant en série ou en parallèle les résistances thermiques des cloisons qui le séparent de l'extérieur.

- Si l'énergie thermique doit traverser une paroi puis une autre, les résistances sont en série.
- Si l'énergie thermique peut traverser une cloison ou une autre entre deux enceintes, les résistances sont en parallèle.
- Les lois d'associations des résistances thermiques sont les mêmes que celles des résistances électriques.
- La présence d'un thermostat se modélise par un générateur de tension imposant une température constante.
- La présence d'un système de chauffage (ou de climatisation) dans une enceinte se traduit par un générateur de flux apporté égal à la puissance du système.

Exemple :

Un appartement au dernier étage est séparé

- de l'appartement inférieur à la température $T_i = 290 \text{ K}$ par une dalle de béton d'épaisseur $e = 10 \text{ cm}$, de surface $S = 25 \text{ m}^2$ et de conductivité thermique

$$\lambda = 0,92 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

- de l'air extérieur à la température $T_e = 270 \text{ K}$ par un plafond formé d'une couche d'isolant d'épaisseur $e' = 5,0 \text{ cm}$, de surface S et de conductivité thermique

$$\lambda' = 0,040 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

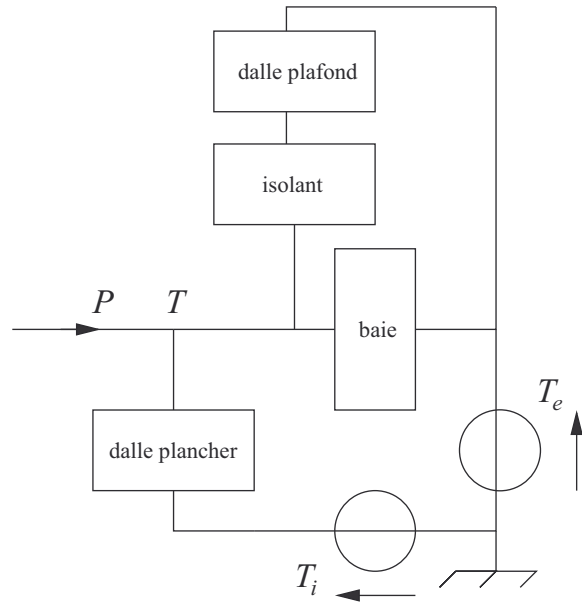
et d'une dalle de béton d'épaisseur e de surface S et de conductivité thermique λ

- et de l'air extérieur par une baie vitrée de résistance thermique

$$R_b = 0,020 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

On veut maintenir constante la température $T = 292 \text{ K}$ à l'intérieur de l'appartement grâce à une source d'énergie thermique de puissance \mathcal{P} ; les appartements voisins sont à la même température T .

Voici le schéma équivalent du système.



La résistance thermique équivalente de l'association série isolant-dalle plafond est

$$R_p = \frac{e'}{\lambda'S} + \frac{e}{\lambda S} = 54,35 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

La résistance thermique équivalente de l'association parallèle plafond-baie est

$$R_e = \frac{R_p \cdot R_b}{R_p + R_b} = 14,62 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

La loi des nœuds s'écrit

$$\mathcal{P} = \Phi_e + \Phi_i = \frac{T - T_i}{\frac{e}{\lambda S}} + \frac{T - T_e}{R_e} = 2,0 \text{ kW}$$

↔ Exercices 5.19, 5.20, 5.21, 5.22.

Énoncés des exercices

5.1

Démonstration de la loi de Laplace

Un système formé de n moles de gaz parfait, dont le rapport des capacités thermiques γ est constant, subit une transformation adiabatique et réversible entre l'état initial (P_1, V_1, T_1) et l'état final (P_2, V_2, T_2) . Établir la loi de Laplace $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$ et les deux autres lois entre les deux autres couples de grandeurs. On rappelle que la réversibilité de la transformation implique son caractère quasi statique, par succession d'états d'équilibre.

5.2

Démonstration des identités thermodynamiques.

Un système thermodynamique ne recevant du travail que par l'intermédiaire des forces de pression subit une transformation infinitésimale entre un état d'équilibre initial et un état d'équilibre final très proche.

- Pourquoi les variations élémentaires dU et dS peuvent-elles être calculées en supposant la transformation réversible ?
- Sous cette hypothèse, justifier que $P_{\text{ext}} = P$ et $T_{\text{ext}} = T$.
- En combinant le premier et le second principe, en déduire la première identité thermodynamique.
- En déduire la deuxième identité thermodynamique.

5.3

Irréversibilité créée par une hétérogénéité de pression.

Dans un cylindre calorifugé, on place n moles de gaz parfait monoatomique de rapport de capacités thermiques $\gamma = \frac{5}{3}$, à la température T_0 et à la pression P_0 , et on ferme l'enceinte par un piston lui-aussi calorifugé, se déplaçant sans frottement, mais initialement bloqué. De l'autre côté du piston l'atmosphère forme un pressostat à la pression constante $P_1 = \frac{3}{2}P_0$.

- Donner l'expression de la température initiale T_0 dans le gaz en fonction des données.
- On libère le piston et on attend l'équilibre mécanique. Déterminer la pression finale P_f , le volume final V_f et la température finale T_f du gaz.
- Calculer la variation d'entropie du gaz et justifier que la transformation est irréversible.

5.4

Équation de diffusion thermique dans un solide sans terme de source

Un solide de masse volumique μ , de capacité thermique massique c et de température $T(x, y, z, t)$ est le siège de transferts thermiques purement conductifs en tout point M intérieur à l'objet. On note $\vec{j}(x, y, z, t)$ le vecteur densité de courant thermique conductif. En faisant le bilan thermique sur l'élément de volume

$$[x, x + dx] \times [y, y + dy] \times [z, z + dz]$$

établir l'équation aux dérivées partielles reliant T et \vec{j} .



5.5

Ailette cylindrique siège d'une conduction axiale et d'une perte latérale.

Une ailette cylindrique d'axe (O, z) et de rayon a est formée d'un matériau indéformable de masse volumique μ , de capacité thermique massique c et de température $T(z, t)$ est le siège de transferts thermiques purement conductifs en tout point M intérieur à l'objet. On note $j(z, t)\vec{u}_z$ le vecteur densité de courant thermique conductif. Sur sa paroi latérale, on observe un transfert thermique convecto-radiatif latéral dirigé de l'ailette vers l'extérieur : son flux élémentaire à travers un élément de surface dS est

$$d\Phi = \beta(T(z, t) - T_0) \cdot dS$$

En faisant le bilan thermique sur la tranche comprise entre z et $z + dz$, établir l'équation aux dérivées partielles reliant $T(z, t)$ et $j(z, t)$.



5.6

Prise en compte du métabolisme dans un tissu biologique

Un animal à sang chaud est modélisé par une bille sphérique de rayon R , solide de masse volumique μ , de capacité thermique massique c et de température $T(r, t)$ en coordonnées sphériques. On note $j(r, t)\vec{u}_r$ le vecteur densité de courant thermique conductif. Le métabolisme cellulaire produit une énergie thermique dont la puissance volumique est \mathcal{P} . En faisant le bilan thermique sur l'espace situé entre les sphères de rayon r et $r + dr$, établir l'équation aux dérivées partielles reliant $T(r, t)$ et $j(r, t)$.



5.7

Conducteur ohmique cylindrique calorifugé à ses deux extrémités (E3A PSI(2) 2012)

Un conducteur ohmique cylindrique indéformable, d'axe (O, z) de longueur L et de rayon a possède une masse volumique μ , une capacité thermique massique c , une conductivité thermique λ et une conductivité électrique γ (on rappelle que la résistance électrique d'un conducteur prismatique de longueur ℓ et de section S est $R = \frac{\ell}{\gamma S}$). Il est parcouru par un courant d'intensité i constante. Il est calorifugé à ses deux extrémités planes. Sur sa paroi latérale, on observe un transfert thermique convecto-radiatif dirigé vers l'extérieur : son flux élémentaire à travers un élément de surface dS est $d\Phi = \beta(T(z, t) - T_0) \cdot dS$.

a) Grâce à un bilan thermodynamique sur une tranche située entre z et $z + dz$, établir l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\mu c \pi a^2 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \pi a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - 2\beta \pi a (T - T_0) + \frac{i^2}{\gamma \pi a^2}$$

b) On note $T_m(t) = \frac{1}{L} \int_0^L T(z, t) dz$ et $\theta(t) = T_m(t) - T_0$. Commenter ces notations, montrer qu'on peut écrire

$$\tau \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_\infty$$

en précisant les expressions de τ et de θ_∞ . En déduire $T_m(t)$.



5.8

Rayonnement fossile

Le bruit de fond du rayonnement cosmique, découvert par hasard par des radio-astronomes, a une longueur d'onde $\lambda_m = 1,063$ nm. Quelle est la température du cosmos assimilé à un corps noir ?

**5.9****Couleur vraie des corps chauds**

La couleur usuelle des corps est celle observée par notre œil lorsque ces corps sont éclairés par la lumière blanche. En l'absence de source extérieure d'éclairage, la couleur vraie d'un corps est celle associée au spectre d'émission de ce corps assimilé à un corps noir à l'équilibre thermique. Par application de la loi de Wien, quelle est la couleur vraie du corps humain ? Comment évolue la couleur vraie d'un morceau de métal avec sa température ?

**5.10****Température d'équilibre du sol lunaire**

La température de surface du Soleil vaut $T_S = 5\,778\text{ K}$ et son rayon $R_S = 6,957 \cdot 10^8\text{ m}$. La distance Soleil-Terre est $r = 1,496 \cdot 10^{11}\text{ m}$ et la distance Terre-Lune $r_L = 3,85 \cdot 10^5\text{ m}$. On assimile la surface de la Lune à deux hémisphères aux températures homogènes respectives T_j (jour) et T_n (nuit). Lorsqu'elle est éclairée par le Soleil, on néglige la puissance réfléchie par la surface de la Lune devant la puissance absorbée. On suppose $T_n \ll T_j$. Déterminer la puissance radiative totale émise par le Soleil et donner une estimation de la température d'équilibre T_j .

**5.11****Effet de serre**

La température de surface du Soleil vaut $T_S = 5\,778\text{ K}$ et son rayon $R_S = 6,957 \cdot 10^8\text{ m}$. La distance Soleil-Terre est $r = 1,496 \cdot 10^{11}\text{ m}$. On modélise l'atmosphère terrestre par une couche gazeuse transparente dans le visible (correspondant à l'essentiel du rayonnement solaire) mais opaque dans l'infrarouge. Le coefficient d'absorption correspondant vaut $a = 0,45$. On note $A = 0,34$ l'albedo terrestre (albedo de Bond, tenant compte de la position polaire des glaces), coefficient de réflexion de l'énergie solaire incidente par le sol. On suppose $T_{\text{jour}} \approx T_{\text{nuit}}$.

- Déterminer la température moyenne du sol terrestre.
- On suppose que la quantité de gaz carbonique dans l'atmosphère diminue beaucoup. Quelle grandeur serait modifiée ? Quelle serait la conséquence sur la température de l'atmosphère puis sur celle du sol ? Quelle serait la conséquence sur les océans ? Quelle serait la conséquence sur l'albedo ? Le phénomène climatique irait-il alors en s'amplifiant ou en s'atténuant ?
- On suppose que la quantité de gaz carbonique dans l'atmosphère augmente beaucoup. Quelle grandeur serait modifiée ? Quelle serait la conséquence sur la température de l'atmosphère puis sur celle du sol ? Quelle serait la conséquence sur les banquises ? Quelle serait la conséquence sur l'albedo ? On estime qu'un réchauffement des sols gelés favoriserait le relargage dans l'atmosphère de grosses quantités de méthane emprisonné dans le sol. Le phénomène climatique irait-il alors en s'amplifiant ou en s'atténuant ?

**5.12****De la loi de Planck à la loi de Wien (Mines-Ponts MP 2009)**

Voici l'énoncé de la loi statistique de Planck. La densité spectrale, rapport entre l'énergie volumique du rayonnée par un corps noir à l'équilibre thermique, dans un intervalle de pulsation $[\omega, \omega + d\omega]$, et la largeur $d\omega$ de cet intervalle, s'écrit

$$\mathcal{D}(\omega) = \frac{du}{d\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\exp \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1}$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$ est la constante de Planck, $c = 3,00 \cdot 10^8\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ la célérité de la lumière et $k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A} = 1,38 \cdot 10^{-23}\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ la constante de Boltzmann.

- a) En utilisant la relation $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, établir l'expression de la densité en longueur d'onde

$$\mathcal{D}(\lambda) = \left| \frac{du}{d\lambda} \right| = \left| \frac{du}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\lambda} \right|$$

- b) On donne : l'unique solution de l'équation $e^{-x} + 0,2x - 1$ est $x = 4,9651$. En déduire la relation de Wien.

5.13

De la loi de Planck à la loi de Stefan

Voici l'énoncé de la loi statistique de Planck. La densité spectrale, rapport entre l'énergie volumique rayonnée par un corps noir à l'équilibre thermique, dans un intervalle de pulsation $[\omega, \omega + d\omega]$ et la largeur $d\omega$ de cet intervalle, s'écrit

$$\mathcal{D}(\omega) = \frac{du}{d\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\exp \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1}$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J·s est la constante de Planck, $c = 3,00 \cdot 10^8$ m·s⁻¹ la célérité de la lumière et $k_B = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J·K⁻¹ la constante de Boltzmann. Un corps noir, par définition, ne réfléchit aucun photon : un photon incident est absorbé, mais ce corps rayonne de l'énergie et il émet donc des photons.

- a) L'énergie d'un photon dont la pulsation est dans l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$ est $e = \hbar\omega$. Au voisinage d'un élément dS de surface d'un corps noir, à une distance cdt de cette surface, on trouve dN photons dont la pulsation est dans cet intervalle. Justifier que

$$dN = \frac{du \cdot cdt \cdot dS}{\hbar\omega}$$

- b) On prend un modèle simple dans lequel les photons émis et les photons absorbés se déplacent exclusivement perpendiculairement à dS , avec une vitesse $+c\vec{u}_z$ (pour ceux qui s'éloignent) ou $-c\vec{u}_z$ (pour ceux qui se rapprochent). Combien de photons dN_e peuvent être considérés comme ayant été émis par la surface dS de ce corps noir ?
- c) On passe du modèle unidimensionnel ($\vec{v} = \pm c\vec{u}_z$) au modèle tridimensionnel en prenant le nombre de photons émis corrigé d'un facteur 2 : $dN'_e = \frac{dN_e}{2}$. En déduire l'expression de l'énergie $d\mathcal{E}$ des photons émis par dS pendant dt et dont la pulsation est dans l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$ et vérifier que la puissance surfacique correspondante est

$$d\mathcal{P}_S = \frac{d\mathcal{E}}{dt \cdot dS} = \frac{c}{4} \cdot \mathcal{D}(\omega) d\omega$$

- d) On donne

$$\int_{x=0}^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

En déduire la loi de Stefan en calculant la puissance surfacique totale (intégrée sur toutes les valeurs possibles de pulsation)

$$\mathcal{P}_S = \int_{\omega=0}^{+\infty} \frac{c}{4} \cdot \mathcal{D}(\omega) d\omega$$

5.14**Modèle d'expansion de l'univers**

Un ensemble de N photons est piégé dans une cavité cubique de côté a , dont les parois sont constituées de miroirs parfaits. Ces photons ont tous même fréquence f , même longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{f}$ et même énergie $e = hf$, c désignant la célérité de la lumière dans le vide et h la constante de Planck. On assimile dans un premier temps le gaz de photons à un ensemble de photons homocinétiques se déplaçant à la vitesse c dans la seule direction horizontale x de l'espace, et rebondissant sur les deux miroirs verticaux de même aire $S = a^2$. Le vecteur quantité de mouvement d'un photon quelconque est donc

$$\vec{p} = \pm \frac{hf}{c} \vec{u}_x$$

- On assimile l'énergie totale \mathcal{E}_t à l'énergie interne U du gaz de photons. Donner l'expression littérale du nombre total N de photons dans l'enceinte en fonction de U , h et f . En déduire celle du nombre $\nu = \frac{N}{a^3}$ de photons par unité de volume dans l'enceinte.
- Pendant une durée infinitésimale dt , un certain nombre dN de photons va frapper le miroir de droite : justifier que ce sont la moitié de ceux situés à une distance maximale $c \cdot dt$ du miroir. Exprimer dN en fonction de U , c , dt , a , h et f .
- Chaque photon qui frappe le miroir de droite arrive avec une quantité de mouvement incidente $\vec{p}_i = \frac{hf}{c} \vec{u}_x$ et repart avec une quantité de mouvement réfléchie $\vec{p}_f = -\frac{hf}{c} \vec{u}_x$. Donner l'expression de la variation de quantité de mouvement pour un photon unique

$$\delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

En déduire celle $d\vec{p}$ pour les dN photons

- En déduire la force exercée par la paroi sur les photons

$$\vec{f}_{\text{miroir} \rightarrow \text{photons}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- En déduire l'expression de la pression P_r , appelée **pression de radiation** exercée par le gaz de photons sur le miroir en fonction de U et a . La pression P_r s'exerce sur les miroirs de gauche et de droite, d'aire totale $2a^2$. La surface réelle totale des 6 miroirs de l'enceinte est $6a^2$. Quand on abandonne le modèle unidimensionnel, pour un gaz de photons homocinétiques en norme, mais sans direction de déplacement privilégiée, on admet donc que l'expression de la pression est $P = \frac{P_r}{3}$.
- Le volume de l'enceinte est V . Déduire de ce qui précède l'équation d'état du gaz de photons

$$P = \frac{u}{3} \text{ avec } u = \frac{U}{V}$$

- L'univers est assimilé à une sphère de rayon R remplie d'un gaz de photons de pression P , à la température T et d'énergie volumique u . En assimilant le système à un corps noir à l'équilibre, un corollaire de la loi de Stefan permet d'écrire $u = aT^4$, où a est une constante. Lors de l'expansion de l'univers, ce gaz subit une détente quasi statique et adiabatique. Montrer que le produit $R \cdot T$ est constant.

5.15

Résolution de l'équation de la chaleur en régime permanent dans un barreau cylindrique.

Un barreau solide indéformable de conductivité thermique λ a la forme d'un cylindre de longueur L et de section S . Il est calorifugé sur sa paroi latérale et au contact d'un thermostat à la température T_0 en $x = 0$. On se place en régime permanent et on cherche l'expression de la température sous la forme $T(x)$.

- a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ et en déduire son expression en fonction de deux constantes d'intégration A et B .
- b) En $x = L$, on impose successivement plusieurs contraintes thermiques. Déterminer dans chaque cas les constantes A et B , en déduire le flux thermique Φ traversant le barreau.
 - i) Le bout du barreau est au contact d'un thermostat à la température

$$T(L) = T_1$$

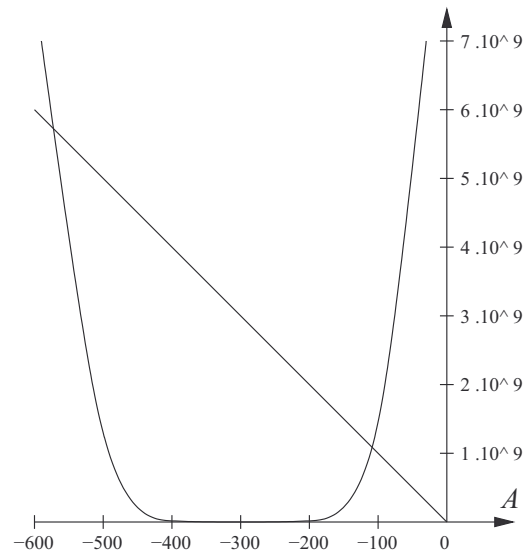
- ii) Le bout du barreau est au contact d'un fluide à la température $T_\infty = T_1$ et on note h' le coefficient convecto-radiatif de la loi de Newton :

$$\Phi_{\text{barreau} \rightarrow \text{fluide}} = h' (T(L) - T_1) S$$

- iii) Le bout du barreau est dans le vide spatial à une température proche du zéro absolu, il émet un flux thermique radiatif donné par la loi de Stefan

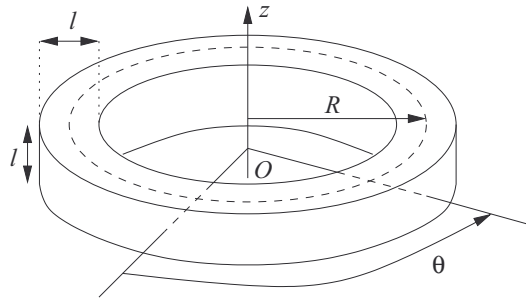
$$\Phi_{\text{rad}} = \sigma T^4(L) S$$

où $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ est la constante de Stefan-Boltzmann. On donne $L = 1,0 \text{ m}$, $\lambda = 0,567 \text{ W}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, $T_0 = 300 \text{ K}$, $S = 1,0 \text{ m}^2$ et les graphes de $A \rightarrow -10^7 \cdot A$ et de $A \rightarrow (A + 300)^4$:



5.16
Transfert thermique dans un anneau (Fourier, 1806)

Un anneau torique de rayon moyen R et de section carrée de côté $\ell \ll R$ est constitué d'un matériau solide indéformable de masse volumique μ , de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ .



Un point M de l'anneau est donc repéré par

$$r \in \left[R - \frac{\ell}{2}, R + \frac{\ell}{2} \right], z \in [0, \ell] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[$$

Partie 1 : étude avec pertes latérales. L'anneau est soumis à une perte latérale convective au contact de l'air de température loin de l'anneau T_e selon la loi de Newton : sur une surface dS centrée sur un point M de la paroi, le flux thermique sortant du matériau est $d\Phi_{cv} = h(T(M, t) - T_e)dS$. On suppose que la température s'écrit $T(\theta, t)$.

- a) En faisant un bilan thermique sur la tranche $[\theta, \theta + d\theta]$, établir l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{4h}{\lambda \ell} (T_e - T)$$

- b) On se place en régime stationnaire. On pose $a = \sqrt{\frac{\lambda \ell}{4h}}$ et on utilise un système de chauffage en $\theta = 0$ qui impose $T(\theta = 0) = T_c$. Déterminer complètement $T(\theta)$. Tracer l'allure du graphe de cette fonction pour $\theta \in [0, 2\pi[$.
- c) En déduire le flux $\Phi(\theta)$ traversant la section carrée en θ et tracer l'allure du graphe de cette fonction pour $\theta \in [0, 2\pi[$. Commenter la valeur de $\Phi(\pi)$.
- d) Dans le domaine $[0, \pi]$, on pose $\delta T(\theta) = T(\theta) - T_e$, on choisit un angle θ_0 quelconque et un écart angulaire $\delta\theta > 0$. Montrer que la quantité

$$q = \frac{\delta T(\theta_0 - \delta\theta) + \delta T(\theta_0 + \delta\theta)}{\delta T(\theta_0)}$$

ne dépend que de $\delta\theta$, R et a . Comparer aux résultats expérimentaux obtenus par Fourier : $R = 16,0$ cm, $\ell = 3,30$ cm, $\lambda = 81 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ et il a mesuré

$$T_e = 17,67^\circ \text{C}, T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 66,00^\circ \text{C}, T\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 50,67^\circ \text{C}, T(\pi) = 44,00^\circ \text{C}$$

Partie 2 : étude en régime variable. On place l'anneau dans du sable, excellent isolant thermique.

- a) Donner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(\theta, t)$ dans ce cas.
- b) On cherche une solution sous la forme $T(\theta, t) = K + f(\theta) \cdot g(t)$. Montrer que l'équation aux dérivées partielles s'écrit sous la forme

$$\frac{\mu c}{\lambda} \cdot \frac{1}{g(t)} \cdot \frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{f(\theta)} \cdot \frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2}$$

En déduire que ces deux membres sont égaux à une même constante réelle qu'on notera Ω .

- c) Justifier que $\Omega < 0$. On note désormais $\Omega = -\frac{1}{d^2}$. En déduire $g(t)$ et $f(\theta)$ en supposant que c' est une fonction paire.
- d) Déduire de ce qui précède que d est quantifié : $d = \frac{R}{n}$ où n est un entier naturel non nul et qu'on peut écrire

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

Cette étude est à la base de la théorie mathématique des séries de Fourier.



5.17

Modèle des ondes thermiques

L'onde thermique est une solution particulière de l'équation de la chaleur unidirectionnelle

$$\mu c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

lorsque le matériau est soumis à une excitation sinusoïdale du type

$$T(x = 0, t) = T_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

On passe en formalisme complexe et on cherche une solution complexe sous la forme

$$\underline{T}(x, t) = \underline{T}_a e^{i(\omega t - \underline{k}x)} = T_a e^{i(\omega t - \underline{k}x + \theta)}$$

$\underline{T}_a = T_a e^{i\theta}$ est l'amplitude complexe, ω est la pulsation imposée par l'excitation (on est en régime sinusoïdal forcé) et $\underline{\vec{k}} = \underline{k} \vec{u}_x$ est le vecteur d'onde complexe. La partie réelle k' de \underline{k} correspond à la propagation de l'onde thermique, la partie imaginaire k'' correspond à l'atténuation de l'onde.

- a) Établir l'équation de dispersion, vérifiée par le nombre complexe \underline{k} .
 b) En utilisant la relation

$$\left(\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = re^{i\theta}$$

déterminer la solution \underline{k} dont la partie réelle est positive.

- c) Définir une distance caractéristique d'atténuation est δ .
 d) Application numérique. On donne $\mu = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c = 4200 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\lambda = 0,500 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- i) L'excitation thermique journalière pendant l'été a pour valeur moyenne 25°C et une amplitude de 10°C . Donner les valeurs de T_m , T_0 , ω , δ et la profondeur à laquelle on peut considérer que la température reste pratiquement constante pendant la journée.
- ii) L'excitation thermique annuelle, corrigée des variations journalières, a pour valeur moyenne 15°C et une amplitude de 10°C . Donner les valeurs de T_m , T_0 , ω , δ et la profondeur à laquelle on peut considérer que la température reste pratiquement constante pendant la journée. Pourquoi parle-t-on dans ce cas de « théorie des caves » ?

5.18

Onde thermique progressive, stationnaire

Un matériau est le siège de réactions chimiques dont la vitesse de réaction, conformément à la loi d'Arrhénius, augmente avec la température. Ces réactions sont exothermiques, et on modélise leur action par l'existence d'une puissance thermique volumique proportionnelle à la température, soit $\mathcal{P}_V = \beta T$. On étudie la propagation d'une onde thermique unidirectionnelle selon l'axe y . On note μ la masse volumique, c la capacité thermique massique et λ la conductivité thermique du matériau.

- a) En faisant un bilan thermique sur la couche de surface S comprise entre y et $y + dy$, établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(y, t)$.
 b) On cherche une solution progressive qui s'écrit, en grandeurs complexes $\underline{T}(y, t) = \underline{T}_a e^{i(\omega t - \underline{k}y)}$. Établir l'équation de dispersion vérifiée par \underline{k} et montrer que l'onde qui se propage dans le sens des y croissants (la partie réelle de \underline{k} est positive) se propage en s'atténuant quelle que soit la valeur de β .
 c) On cherche une solution stationnaire qui s'écrit, en grandeurs réelles

$$T(y, t) = T_a e^{\alpha t} \sin(ky)$$

avec $k > 0$. L'objet étudié est une plaque d'épaisseur L et on impose $T(y = 0, t) = T(y = L, t) = 0$. Montrer que $k = \frac{\pi}{L}$ et que selon la valeur de β , il est possible d'observer une atténuation ou une amplification dans le temps de la température.



5.19

Isolation extérieure ou intérieure ? (CCP MP (2) 2016)

Un mur de surface $S = 10 \text{ m}^2$, d'épaisseur $E = 30 \text{ cm}$, de conductivité thermique $\Lambda = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, de capacité thermique massique $C = 500 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et de masse volumique $M = 2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, est isolé avec un isolant thermique de même surface S , d'épaisseur $e = \frac{E}{3}$, de conductivité thermique $\lambda = \frac{\Lambda}{10}$, de capacité thermique massique $c = \frac{C}{2}$ et de masse volumique $\mu = \frac{M}{10}$. La température intérieure à la maison est $T_i = 290 \text{ K}$, la température extérieure est $T_e = 270 \text{ K}$.

- Calculer les résistances thermiques R du mur et r de l'isolant.
- Justifier qu'en régime permanent, la position de l'isolant, sur la face intérieure ou sur la face extérieure du mur, ne change pas la valeur du flux thermique allant de l'intérieur vers l'extérieur. Calculer sa valeur.
- Calculer la température T_I au point d'interface entre le mur et l'isolant dans chaque cas.
- À $t = 0$, la température du mur et de l'isolant est uniforme égale à T_e . Donner l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. Calculer l'énergie thermique reçue par le mur et par l'isolant entre l'état initial et le régime permanent dans les deux cas. Conclure sur la différence entre les deux cas.



5.20

Circuit RC thermique

Un aliment assimilé à un solide de température homogène à tout instant $T(t)$, de température initiale $T(0) = T_0$ et de capacité thermique C , est placé dans un récipient de capacité thermique négligeable par rapport à C , et formant, entre l'intérieur et l'extérieur, une résistance thermique R . Le récipient est placé dans une pièce formant un thermostat à la température $T_1 = T_0(1 + \varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon \ll 1$. On effectuera les développements limités à l'ordre 2 en ε .

- Donner le schéma électrique équivalent du dispositif, comportant un résistor, un générateur de tension et un condensateur. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$ et la résoudre.
- Déterminer la variation d'entropie de l'aliment, celle du thermostat et montrer que la transformation est irréversible.



5.21

Résistance thermique cylindrique

Une tour cylindrique est délimitée par un mur d'enceinte de rayon intérieur a_1 et de rayon extérieur a_2 . Un appartement dans la tour est de hauteur H , la température sur la paroi intérieure est T_1 , celle sur la paroi extérieure T_2 . Les appartements aux étages supérieur et inférieur sont à la même température et le transfert thermique est purement radial. On se place en régime permanent et pour un point M du mur repéré par son rayon $r \in [a_1, a_2]$, on pose $T(M) = T(r)$ et $\vec{j}_{\text{th}} = j(r)\vec{u}_r$.

- Par un bilan thermique entre r et $r + dr$, établir l'équation différentielle vérifiée par $T(r)$.
- Résoudre cette équation et en déduire $T(r)$ et $\vec{j}(r)$.
- En déduire que le flux à travers un cylindre de rayon r et de hauteur H est indépendant de r et exprimer la résistance thermique cylindrique du mur d'enceinte de l'appartement.
- On suppose que $a_2 = a_1 + \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon \ll a_1$. En effectuant un développement limité, montrer qu'on retrouve l'expression de la résistance thermique unidirectionnelle.

5.22**Gel de l'eau d'un puits (résolution de problème)**

Un puits cylindrique contient $B = 1,50$ m d'eau. Celle-ci atteint 0°C à l'instant $t = 0$. La température de l'air extérieur est supposé constante et vaut -10°C . Une couche de glace commence à se former. À l'instant t , son épaisseur est $b(t)$. Déterminer la durée totale τ pour que l'eau gèle complètement. On donne la masse volumique de l'eau $\mu_e = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, la conductivité thermique de la glace $\lambda_g = 2,1 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ et l'enthalpie massique de fusion de la glace $h_{\text{fus}} = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Du mal à démarrer ?

5.1 Le premier principe développé en utilisant les hypothèses et la loi des gaz parfaits conduit à une équation différentielle à variables séparables entre V et T qu'on intègre entre l'état initial et l'état final.

5.2 Les deux principes se simplifient quand on identifie les grandeurs intensives extérieures et celles au sein du système, et conduisent à la première identité. La deuxième s'obtient à partir de la première en écrivant $H = U + PV$.

5.3 La loi de Laplace n'est pas adaptée ici car au moment où on libère le piston, le piston n'est pas à l'équilibre, la transformation n'est donc pas quasi statique et donc pas réversible. Il faut revenir au premier principe pour calculer l'état final. Le calcul de la variation d'entropie se ramène à un calcul d'intégrale grâce à la première identité thermodynamique.

5.4 Un bilan sur chacune des facettes, et une association deux à deux des flux (devant-derrrière, dessus-dessous, gauche-droite) conduit à l'expression de la divergence de \vec{j} en coordonnées cartésiennes.

5.5 L'élément considéré est délimité par trois parois : un disque en z et un disque en $z + dz$ de surface égale πa^2 à travers lesquelles on observe des flux conductifs régis par \vec{j} et une paroi latérale cylindrique de surface $2\pi a dz$ à travers laquelle on observe un flux convecto-radiatif. La variation d'énergie interne de la tranche est égale à la somme des trois énergies thermiques correspondantes.

5.6 La variation d'énergie interne de l'espace intersphérique considéré est égale à la somme des énergies thermiques transférées par conduction à travers les sphères interne de surface $4\pi r^2$ et externe de surface $4\pi(r + dr)^2$ et de l'énergie thermique produite par métabolisme dans cet espace dont le volume est $4\pi r^2 dr$ (par un développement limité à l'ordre 1).

5.7 Le bilan fait apparaître les deux termes de conduction à travers les disques de surface πa^2 , le terme de convection sur la paroi latérale de surface $2\pi a dz$ et l'énergie thermique créée par effet Joule dans la tranche de longueur $\ell = dz$ et de surface πa^2 . L'équation de la deuxième question est le résultat de l'intégration de celle de la première question entre $z = 0$ et en $z = L$ où le flux, donc le courant thermique, donc la dérivée $\frac{\partial T}{\partial z}$ est nulle.

5.8 C'est une application immédiate de la loi de Wien.

5.9 La loi de Wien permet de déterminer la longueur d'onde du maximum d'émission radiative et d'en déduire la couleur vraie du corps.

5.10 La loi de Stefan donne les expressions des puissances rayonnées par la sphère solaire et par la demi-sphère lunaire plus chaude. La principale difficulté est le calcul de la puissance solaire reçue par la face de la Lune qui est exposée. On pourra considérer que la Lune prélève une fraction de la puissance solaire totale, rapport entre l'aire d'un disque de rayon R_L et celle d'une sphère de rayon r . À l'équilibre thermique, la puissance reçue est égale à la puissance émise.

5.11 La loi de Stefan donne les expressions des puissances rayonnées par la sphère solaire et par la sphère terrestre. La principale difficulté est le calcul de la puissance solaire reçue par la face de la Terre qui est exposée. On pourra considérer que la Terre prélève une fraction de la puissance solaire totale, rapport entre l'aire d'un disque de rayon R_T et celle d'une sphère de rayon r . À l'équilibre thermique, on utilisera le schéma donné dans l'exemple du cours pour écrire la relation entre les flux.

5.12 Cet exercice est un pur exercice de calcul de dérivées. On pourra poser $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$.

5.13 Les questions a) à d) sont parfaitement guidées. le calcul de l'intégrale nécessite le changement de variable $x = \frac{hc}{k_B T}$. Il faut quelques efforts pour aller au bout des calculs, et en déduire l'expression théorique de la constante de Stefan-Boltzmann.

5.14 Les questions a) à f) sont parfaitement guidées et s'apparentent à la théorie cinétique des gaz parfaits éventuellement vue en première année. La question g) est beaucoup plus difficile et nécessite l'écriture du premier principe en traduisant les deux hypothèses, quasi statique donc $P_e = P$, et adiabatique donc $\delta Q = 0$.

5.15 L'équation différentielle est la forme simplifiée de l'équation de la chaleur en régime permanent et en diffusion unidirectionnelle selon x . Sa résolution est immédiate. La prise en compte des conditions aux limites conduit à deux relations entre A et B , avec un niveau de difficulté croissant entre les trois questions.

5.16 L'établissement de l'équation aux dérivées partielles nécessite beaucoup de précision pour estimer la surface latérale de l'élément étudié, à travers laquelle se déploient les transferts convectifs. En régime permanent, la solution peut être exprimée avec des

fonctions exponentielles, mais il est plus élégant et plus efficace pour les calculs de l'exprimer grâce aux fonctions hyperboliques (ch et/ou sh) ; la quatrième question nécessite beaucoup d'habileté algébrique, on rappelle que $\text{ch}(a+b) = \text{ch}a\text{ch}b + \text{sh}a\text{sh}b$. En régime variable, le recours à une solution stationnaire conduit à deux équations différentielles distinctes, du premier ordre pour $g(t)$ et du second ordre du type oscillateur harmonique pour $f(\theta)$. La quantification résulte de la condition aux limites $T(0, t) = T(2\pi, t)$.

5.17 Les opérations de dérivation en grandeurs complexes se ramènent à des opérations de multiplication par $i\omega$ pour la dérivation par rapport à t , par $-ik$ pour la dérivation par rapport à x . La période de l'excitation thermique est de un jour dans la première question de un an dans la deuxième. Les valeurs de δ sont calculées à partir de la formule du cours.

5.18 L'équation aux dérivées partielles est une équation de la chaleur modifiée par le terme de source associé à \mathcal{A}_y . Dans la deuxième question, l'équation de dispersion est obtenue comme dans le cas du cours, et c'est une analyse fine de cette équation en nombres complexes qui donne le signe de la partie imaginaire de \underline{k} et qui permet de conclure. Dans la troisième question, la valeur de k est calculée à partir des conditions aux limites et de la positivité de la température ; le comportement dans le temps dépend du signe de α , obtenu à partir de l'équation aux dérivées partielles.

5.19 Les calculs de flux et de température d'interface sont de simples applications des lois du cours. Pour la quatrième question, les durées sont obtenues à partir de la traduction de l'équation de la chaleur en ordres de grandeur, et les énergies thermiques par calcul d'intégrale sur x en évaluant celle reçue par chaque tranche $[x, x+dx]$.

5.20 Le premier principe appliqué à l'aliment conduit à une équation analogue à celle d'un condensateur et à assimiler la capacité thermique C à la capacité du condensateur. Le circuit électrique obtenu est alors d'étude très classique. La variation d'entropie est calculée grâce à la seconde identité thermodynamique.

5.21 Le bilan traduit l'égalité des flux entrant en r avec une densité $\vec{j}(r)$ à travers une surface $2\pi rH$ et sortant en $r+dr$ avec une densité $\vec{j}(r+dr)$ à travers une surface $2\pi(r+dr)H$. La résolution de l'équation du second ordre obtenue nécessite une double primitivation, les deux constantes d'intégration sont calculées grâce aux deux conditions aux limites en a_1 et en a_2 .

5.22 La couche de glace forme une résistance thermique à travers laquelle l'énergie thermique $\delta = \Phi_{cd} dt$ est perdue par l'eau pendant dt . L'équation différentielle en $b(t)$ est obtenue en considérant que la perte de δQ correspond au changement d'état (gel) d'une couche d'eau d'épaisseur db .

Corrigés des exercices

5.1

La transformation est adiabatique donc $\delta Q = 0$. Elle est quasi statique, le piston par lequel on agit sur le système est donc à tout instant en équilibre sous l'action de la pression extérieure et de la pression intérieure, elles sont donc égales et $\delta W = -PdV$. Le gaz étant macroscopiquement au repos, le premier principe s'écrit donc

$$\frac{nR}{\gamma-1} dT = -PdV = -nRT \frac{dV}{V}$$

Cette équation différentielle est à variables séparables :

$$\frac{dT}{T} = (1-\gamma) \frac{dV}{V}$$

on l'intègre entre l'état initial et l'état final :

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = (1-\gamma) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\text{soit } \ln \frac{T_2}{T_1} = (1-\gamma) \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\text{soit } \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2^{1-\gamma}}{V_1^{1-\gamma}}$$

$$\text{donc } T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

La loi des gaz parfaits donne

$$\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_1 V_1}{T_1}$$

et en multipliant les deux égalités on obtient loi de Laplace

$$P_2 V_2^\gamma = P_1 V_1^\gamma$$

puis la troisième relation en divisant cette dernière égalité par la précédente élevée à la puissance γ :

$$T_2^\gamma P_2^{1-\gamma} = T_1^\gamma P_1^{1-\gamma}$$

5.2

a) U et S sont des fonctions d'état, leurs variations ne dépendent donc pas du chemin suivi, et on peut faire le calcul en supposant que la transformation est réversible.

b) La transformation est quasi statique, elle se fait donc en quasi-équilibre mécanique et thermique avec l'extérieur, donc $P_{\text{ext}} = P$ et $T_{\text{ext}} = T$.

c) Le premier principe s'écrit donc

$$dU = -PdV + \delta Q$$

et la transformation étant réversible, $\delta S_c = 0$ donc le second principe s'écrit

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + 0$$

donc $\delta Q = TdS$ et en remplaçant dans le premier principe, on obtient bien (IT1) : $dU = -PdV + TdS$.

d) Par définition, $H = U + PV$ donc

$$dH = dU + PdV + VdP = -PdV + TdS + PdV + VdP$$

soit (IT2) : $dH = VdP + TdS$.

5.3

a) Par application de la loi des gaz parfaits :

$$T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR}$$

b) Il y a 3 inconnues, il faut donc écrire 3 équations. La loi des gaz parfaits donne

$$(1) P_f V_f = nRT_f$$

Dans l'état final, le piston est en équilibre mécanique donc

$$(2) P_f = P_1$$

La pression de l'autre côté du piston qui bouge est P_1 et la transformation est adiabatique ; le premier principe sous forme différentielle s'écrit donc

$$\frac{nR}{\frac{5}{3}-1} dT = -P_1 dV + 0$$

En intégrant entre l'état initial et l'état final, on en déduit

$$(3) \frac{3}{2} nR(T_f - T_0) = -P_1(V_f - V_0)$$

Dans le second membre de cette équation, en utilisant (1) et (2), on remplace

$$P_1 V_f = nRT_f \text{ et } P_1 V_0 = \frac{3}{2} P_0 V_0 = \frac{3}{2} nRT_0$$

$$\text{donc } \frac{3}{2} nR(T_f - T_0) = -nRT_f + \frac{3}{2} nRT_0$$

d'où après simplification par nR et réduction $T_f = \frac{6}{5} T_0$. On en déduit, d'après (1) :

$$\frac{3}{2} P_0 V_f = nR \frac{6}{5} T_0 \text{ donc } V_f = \frac{4}{5} V_0$$

c) La première identité thermodynamique $dU = -PdV + TdS$ donne, pour ce système :

$$\frac{3}{2} nRdT = -nRT \frac{dV}{V} + TdS \text{ donc } dS = nR \left(\frac{3}{2} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right)$$

En intégrant entre l'état initial et l'état final, on en déduit

$$\begin{aligned} \Delta S &= nR \left(\frac{3}{2} \ln \frac{T_f}{T_0} + \ln \frac{V_f}{V_0} \right) \\ &= nR \left(\frac{3}{2} \ln \frac{6}{5} + \ln \frac{4}{5} \right) = 0,050nR \end{aligned}$$

Le second principe s'écrit $\Delta S = S_{cr} + 0$ car la transformation est adiabatique donc $S_{cr} = 0,050nR > 0$. La transformation est donc irréversible : c'est l'hétérogénéité de pression dans le gaz à l'instant où on libère le piston qui a créé de l'irréversibilité.

5.4

À travers la paroi x , l'élément de surface sortant de l'élément de volume est $d\vec{S} = -dydz\vec{u}_x$ donc le flux entrant est

$$d\Phi_x = -\vec{j}(x, y, z, t) \cdot (-dydz\vec{u}_x) = j_x(x, y, z, t) dydz$$

De même à travers la paroi $x + dx$, le flux entrant est

$$d\Phi_{x+dx} = -j_x(x + dx, y, z, t) dydz$$

En raisonnant de même pour les parois y , $y + dy$, z et $z + dz$, le bilan thermique s'écrit

$$dU = \left[d\Phi_x + d\Phi_{x+dx} + d\Phi_y + d\Phi_{y+dy} + d\Phi_z + d\Phi_{z+dz} \right] dt$$

Le terme de gauche s'écrit

$$dU = \mu dx dy dz c (T(x, y, z, t + dt) - T(x, y, z, t))$$

En divisant l'identité par $dx dy dz dt$ et en faisant les développements limités aux premiers ordres en x , y , z , t , on obtient

$$\mu c \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_x(x, y, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial j_y(x, y, z, t)}{\partial y} - \frac{\partial j_z(x, y, z, t)}{\partial z}$$

$$\text{soit } \mu c \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}(x, y, z, t) = 0.$$

5.5

La tranche possède trois parois : en z un disque de vecteur surface sortant $-\pi a^2 \vec{u}_z$, en $z + dz$ un disque de vecteur surface sortant $\pi a^2 \vec{u}_z$, et une paroi latérale formant une languette de surface $dS = 2\pi a dz$. À travers les deux disques, le flux total entrant est

$$d\Phi_z + d\Phi_{z+dz} = j(z, t) \pi a^2 - j(z + dz, t) \pi a^2$$

Le flux convecto-radiatif sortant par la paroi latérale est

$$d\Phi = \beta(T(z, t) - T_0) \cdot 2\pi a dz$$

Le bilan thermique s'écrit donc

$$\mu\pi a^2 dzc(T(z, t + dt) - T(z, t)) = j(z, t)\pi a^2 dt - j(z + dz, t)\pi a^2 dt - \beta(T(z, t) - T_0) \cdot 2\pi adzdt$$

En divisant cette égalité par $\pi a^2 dzdt$ et en effectuant les développements limités aux premiers ordres en z et t , on obtient

$$\mu c \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(z, t)}{\partial z} - \frac{2\beta}{a}(T(z, t) - T_0)$$

5.6 L'élément de volume entre les deux sphères possède une paroi sphérique interne de rayon r et une paroi sphérique externe de rayon $r + dr$ à travers lesquelles on observe deux flux conductifs radiaux, de flux total entrant

$$d\Phi_r + d\Phi_{r+dr} = j(r, t) \cdot 4\pi r^2 - j(r + dr, t) \cdot 4\pi(r + dr)^2$$

L'énergie thermique interne créée par le métabolisme est

$$\delta Q_{\text{int}} = \mathcal{P} \cdot 4\pi r^2 dr dt$$

Le bilan thermique s'écrit donc

$$\mu 4\pi r^2 dr c(T(r, t + dt) - T(r, t)) =$$

$$j(r, t) \cdot 4\pi r^2 dt - j(r + dr, t) \cdot 4\pi(r + dr)^2 dt + \mathcal{P} \cdot 4\pi r^2 dr dt$$

En divisant cette égalité par $4\pi r^2 dr dt$, les deux premiers termes du membre de droite deviennent

$$-\frac{[(r + dr)^2 j(r + dr, t)] - [r^2 j(r, t)]}{dr} = -\frac{\partial [r^2 j(r, t)]}{\partial r}$$

L'équation complète est donc

$$\mu r^2 c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = -\frac{\partial [r^2 j(r, t)]}{\partial r} + r^2 \mathcal{P}$$

5.7

a) La tranche $[z, z + dz]$ échange de l'énergie thermique par conduction sur ses deux faces planes d'aire πa^2 en z et en $z + dz$, de l'énergie thermique par convection et radiation sur sa face latérale d'aire $2\pi adz$, et est le siège d'une création d'énergie thermique par effet Joule de puissance $\mathcal{P}_j = \frac{dz}{\gamma\pi a^2} i^2$. Le bilan thermique s'écrit donc

$$\begin{aligned} \mu c \pi a^2 dz (T(z, t + dt) - T(z, t)) = \\ \pi a^2 j(z, t) dt - \pi a^2 j(z + dz, t) dt \\ -\beta(T(z, t) - T_0) 2\pi adzdt + \frac{dzdt}{\gamma\pi a^2} i^2 \end{aligned}$$

En divisant par $dzdt$ et en effectuant les développements limités au premier ordre, on en déduit

$$\mu c \pi a^2 \frac{\partial T}{\partial t} = -\pi a^2 \frac{\partial j}{\partial z} - 2\beta\pi a(T(z, t) - T_0) + \frac{i^2}{\gamma\pi a^2}$$

La loi de Fourier en projection sur l'axe donne $j(z, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$ et en remplaçant dans l'équation précédente, on obtient l'équation donnée par l'énoncé.

b) $T_m(t)$ est la température moyenne (spatiale) du conducteur à la date t . $\theta(t)$ est l'écart entre $T_m(t)$, température moyenne du conducteur et T_0 , température de l'air extérieur. On intègre l'équation différentielle entre $z = 0$ et $z = L$. Pour le membre de gauche, d'après le théorème de Schwartz, on peut permuter l'intégration sur z et la dérivation temporelle :

$$\int_{z=0}^L \frac{\partial T}{\partial t} dz = \frac{d}{dt} \int_{z=0}^L T(z, t) dz = L \frac{d\theta}{dt}$$

Pour le premier terme du membre de droite, on a

$$\int_{z=0}^L \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz = \left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]_0^L = \frac{\partial T}{\partial z}(L, t) - \frac{\partial T}{\partial z}(0, t)$$

Or les deux faces extrêmes du conducteur étant calorifugées, le flux thermique par conduction y est nul, donc par application de la loi de Fourier :

$$\forall t, \vec{j}(0, t) = \vec{j}(L, t) = \vec{0} \text{ donc } \frac{\partial T}{\partial z}(0, t) = \frac{\partial T}{\partial z}(L, t) = 0$$

Le deuxième terme du membre de droite s'intègre en

$$\begin{aligned} -2\beta\pi a \int_{z=0}^L (T(z, t) - T_0) dz &= -2\beta\pi a L(T_m(t) - T_0) \\ &= -2\beta\pi a L\theta \end{aligned}$$

Le troisième terme du membre de droite s'intègre en

$$\int_{z=0}^L \frac{i^2}{\gamma\pi a^2} dz = \frac{i^2 L}{\gamma\pi a^2}$$

L'équation intégrée devient donc

$$\begin{aligned} \mu c \pi a^2 L \frac{d\theta}{dt} &= 0 - 2\beta\pi a L\theta + \frac{i^2 L}{\gamma\pi a^2} \\ \frac{d\theta}{dt} + \frac{2\beta}{\mu c a} \theta &= \frac{i^2}{\gamma\mu c \pi^2 a^4} \end{aligned}$$

En régime permanent, quand $t \rightarrow +\infty$,

$$\theta = \theta_\infty = \frac{i^2}{2\beta\gamma\pi^2 a^3}$$

et en posant $\tau = \frac{\mu c a}{2\beta}$, on obtient l'équation donnée par l'énoncé, qui se résout aisément en

$$\theta = \theta_{\infty} + (\theta_0 - \theta_{\infty})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

où θ_0 est l'écart entre la valeur moyenne de la température du conducteur à l'instant initial et T_0 . On en déduit $T_m(t) = T_0 + \theta(t)$

5.8

Par application directe de la loi de Wien

$$T = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{1,063 \cdot 10^{-3}} = 2,73 \text{ K}$$

5.9

La température du corps humain est $T = 273 + 37 = 310 \text{ K}$. La loi de Wien donne la valeur de la longueur d'onde du maximum de rayonnement :

$$\lambda_m = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{310} = 9,35 \text{ } \mu\text{m}$$

On est donc dans le domaine des infrarouges. Pour notre œil, le corps humain est noir, mais un capteur sensible aux infrarouges peut convertir ces radiations en fausses couleurs ; c'est le principe des caméras thermiques. Lorsqu'on chauffe un morceau de métal, il rayonne d'abord dans l'infrarouge à température ambiante $T_0 = 310 \text{ K}$. Le rayonnement a une dominante rouge lorsque

$$\frac{\lambda_m}{2} \approx 800 \text{ nm soit } T_1 = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{1600 \cdot 10^{-9}} \approx 1800 \text{ K}$$

On dit dans ce cas que le métal est chauffé au rouge. Le rayonnement couvre tout le spectre du visible et paraît blanc lorsque

$$\lambda_m \approx 600 \text{ nm soit } T_1 = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{600 \cdot 10^{-9}} \approx 4800 \text{ K}$$

On dit dans ce cas que le métal est chauffé à blanc. Remarquons que dans le cas du fer, cette température est supérieure à la température de fusion (1811 K). Dans ce cas, le modèle d'émission par incandescence est plus adapté que celui du corps noir.

5.10

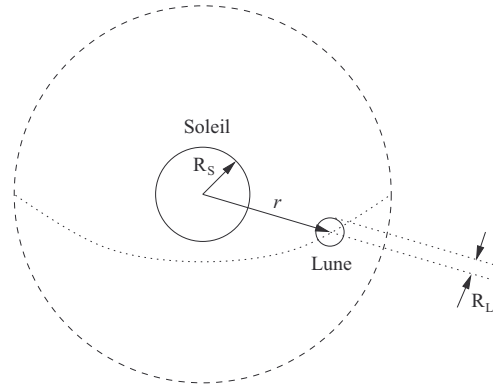
La puissance totale rayonnée par la surface du Soleil est donnée par la loi de Stefan, intégrée sur la surface sphérique du Soleil :

$$\mathcal{P}_{\text{Soleil}} = \sigma T_S^4 \cdot 4\pi R_S^2 = 3,84 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

La distance Terre-Lune est négligeable devant la distance Soleil-Terre donc la distance Soleil-Lune vaut

$$r = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Depuis le centre du Soleil, la Lune est vue sous la forme d'un disque de rayon R_L à la distance r .



La puissance solaire incidente à la surface de la Lune est une fraction de la puissance solaire totale

$$\mathcal{P}_i = \beta \mathcal{P}_{\text{Soleil}}$$

où β est le rapport entre l'aire du disque lunaire et celle de la sphère sur laquelle se dilue la puissance solaire :

$$\beta = \frac{\pi R_L^2}{4\pi r^2}$$

L'énoncé propose de négliger la puissance solaire réfléchiée par la surface éclairée de la Lune. La puissance absorbée est donc

$$\mathcal{P}_{\text{abs}} = \mathcal{P}_i = \frac{\pi R_L^2}{4\pi r^2} \cdot \sigma T_S^4 \cdot 4\pi R_S^2$$

Les puissances rayonnées par chaque hémisphère sont données par la formule de Stefan intégrée sur une demi-sphère :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_j = \sigma T_j^4 \cdot 2\pi R_L^2 \\ \mathcal{P}_n = \sigma T_n^4 \cdot 2\pi R_L^2 \end{cases}$$

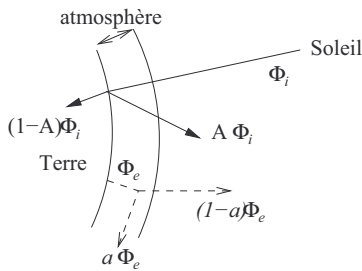
L'hypothèse $T_n \ll T_j$ donne $\mathcal{P}_n \ll \mathcal{P}_j$. À l'équilibre thermique, la puissance rayonnée est égale à la puissance absorbée, donc

$$\frac{\pi R_L^2}{4\pi r^2} \cdot \sigma T_S^4 \cdot 4\pi R_S^2 = \sigma T_j^4 \cdot 2\pi R_L^2$$

$$\text{donc } T_j = T_S \sqrt[4]{\frac{R_S^2}{2r^2}} = 279 \text{ K}$$

5.11

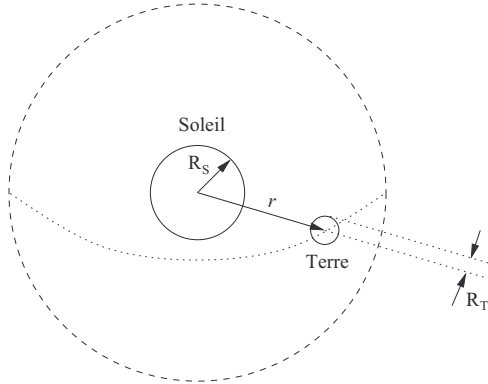
a) Adoptons les notations du cours, rappelées par le schéma suivant.



La puissance totale rayonnée par la surface du Soleil est donnée par la loi de Stefan, intégrée sur la surface sphérique du Soleil :

$$\mathcal{P}_{\text{Soleil}} = \sigma T_S^4 \cdot 4\pi R_S^2 = 3,84 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Depuis le centre du Soleil, la Terre est vue sous la forme d'un disque de rayon R_T à la distance r .



Le flux solaire incident est une fraction de la puissance solaire totale

$$\Phi_i = \beta \mathcal{P}_{\text{Soleil}}$$

où β est le rapport entre l'aire du disque terrestre et celle de la sphère sur laquelle se dilue la puissance solaire :

$$\beta = \frac{\pi R_T^2}{4\pi r^2} \text{ donc}$$

$$\Phi_i = \frac{\pi R_T^2}{4\pi r^2} \cdot \sigma T_S^4 \cdot 4\pi R_S^2$$

Le flux radiatif émis par la Terre est donnée par la formule de Stefan intégrée sur la sphère :

$$\Phi_e = \sigma T_T^4 \cdot 4\pi R_T^2$$

À l'équilibre thermique, le flux thermique incident venant du Soleil est égal au flux sortant du système {Terre, atmosphère}, soit

$$\Phi_i = A\Phi_i + (1-a)\Phi_e \text{ soit } (1-A)\Phi_i = (1-a)\Phi_e$$

$$\text{soit } (1-A) \frac{\pi R_T^2}{4\pi r^2} \cdot \sigma T_S^4 \cdot 4\pi R_S^2 = (1-a)\sigma T_T^4 \cdot 4\pi R_T^2$$

$$\text{soit } T_T = T_S \sqrt[4]{\frac{(1-A)R_S^2}{4(1-a)r^2}} = 292 \text{ K}$$

soit 19°C. Cette valeur est légèrement surestimée, il faudrait prendre en compte la réflectivité des nuages, mais elle donne quand même une excellente estimation de la valeur réelle, proche de 15°C.

- b) Si la quantité de gaz carbonique diminue, le coefficient a d'absorption du rayonnement infrarouge par l'atmosphère diminue, donc T diminuerait. Une partie des océans gèlerait, devenant blanche. Donc l'albedo A augmenterait, ce qui ferait encore diminuer T . Le phénomène climatique s'amplifierait.
- c) Si la quantité de gaz carbonique augmente, le coefficient a d'absorption du rayonnement infrarouge par l'atmosphère augmente, donc T augmenterait. Une partie des banquises, blanches, fondrait. Donc l'albedo A diminuerait, donc T augmenterait encore plus. Le relargage du méthane augmenterait encore plus la valeur de a . Le phénomène climatique s'amplifierait donc dangereusement. Notons que ce modèle simplifié ne prend pas en compte l'augmentation des pluies, donc celui des nuages, blancs, qui augmentent l'albedo (avec un effet modérateur), et les effets secondaires provoqués par l'augmentation de l'acidité de l'océan (acidifié par le gaz carbonique) ou le développement plus rapide des forêts, capteurs importants de gaz carbonique.

5.12

- a) On calcule la dérivée

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}$$

et on substitue λ à ω dans la loi de Planck, d'où

$$\mathcal{D}(\lambda) = \frac{2\pi c \cdot \frac{h}{2\pi} (2\pi)^3 c^3}{\lambda^2 \cdot \frac{h^3 \pi^2 c^3}{\exp \frac{hc}{\lambda k_B T} - 1}}$$

$$\mathcal{D}(\lambda) = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp \frac{hc}{\lambda k_B T} - 1}$$

- b) La fonction $\mathcal{D}(\lambda)$ passe par un maximum lorsque

$$Q(\lambda) = \lambda^5 \left(\exp \frac{hc}{\lambda k_B T} - 1 \right)$$

est minimal, donc lorsque sa dérivée est nulle, soit

$$5\lambda^4 \left(\exp \frac{hc}{\lambda k_B T} - 1 \right) + \lambda^5 \cdot \frac{-hc}{\lambda^2 k_B T} \exp \frac{hc}{\lambda k_B T} = 0$$

soit, en divisant par $5\lambda^4 \exp \frac{hc}{\lambda k_B T}$:

$$1 - \exp \frac{-hc}{\lambda k_B T} - \frac{hc}{5\lambda k_B T} = 0$$

et en posant $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$:

$$1 - e^{-x} - 0,2x = 0 \text{ soit } e^{-x} + 0,2x - 1 = 0$$

D'après l'énoncé, l'unique solution de cette équation est

$$x = 4,9651 \text{ soit } \frac{hc}{\lambda k_B T} = 4,9651 \text{ donc } \lambda_m \cdot T = \frac{hc}{4,9651 k_B}$$

$$\text{soit } \lambda_m \cdot T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

qui est bien la loi de Wien.

5.13

- a) Par définition, du est l'énergie volumique dans l'intervalle de pulsation considéré. Le volume considéré est un cylindre de base dS et de hauteur cdt , donc de volume

$$d\tau = cdt \cdot dS$$

L'énergie dans l'intervalle de pulsations $[\omega, \omega + d\omega]$ est donc

$$dE = du \cdot d\tau = du \cdot cdt \cdot dS$$

Le nombre de photons correspondant est donc

$$dN = \frac{dE}{e} = \frac{du \cdot cdt \cdot dS}{\hbar\omega}$$

- b) En moyenne, un photon sur deux se déplace vers la surface (il va la frapper dans l'intervalle de temps dt à venir), un photon sur deux vient d'être émis. On en déduit

$$dN_e = \frac{dN}{2} = \frac{du \cdot cdt \cdot dS}{2\hbar\omega}$$

- c) On a

$$d\mathcal{E} = dN_e' \cdot \hbar\omega = \frac{du \cdot cdt \cdot dS}{4}$$

La puissance surfacique est donc

$$d\mathcal{P}_S = \frac{d\mathcal{E}}{dt \cdot dS} = \frac{cdu}{4}$$

Or, par définition de la densité spectrale

$$du = \mathcal{D}(\omega)d\omega \text{ donc } d\mathcal{P}_S = \frac{c}{4} \cdot \mathcal{D}(\omega)d\omega$$

- d) L'intégrale s'écrit

$$\mathcal{P}_S = \int_{\omega=0}^{+\infty} \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{\exp \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1} d\omega$$

On fait le changement de variable

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \text{ donc } d\omega = \frac{k_B T}{\hbar} dx$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_S &= \frac{k_B^4 T^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_{x=0}^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\ \text{soit } \mathcal{P}_S &= \frac{2k_B^4 \pi^5}{15c^2 \hbar^3} \cdot T^4 \end{aligned}$$

On obtient donc bien la loi de Stefan et on exprime la constante de Stefan-Boltzmann

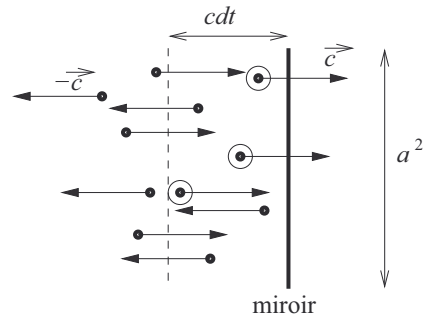
$$\sigma = \frac{2k_B^4 \pi^5}{15c^2 \hbar^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

5.14

- a) Le nombre de photons est le rapport

$$N = \frac{U}{e} \text{ donc } v = \frac{N}{a^3} = \frac{U}{hfa^3}$$

- b) Les photons qui vont frapper la surface pendant dt sont situés à une distance inférieure à cdt de cette surface, et se déplacent vers la droite. Sur la figure suivante, on a entouré les photons qui sont dans ce cas.



C'est donc la moitié des photons situés dans le volume $d\tau = cdt \cdot a^2$. Par définition de v , il y en a donc

$$dN = \frac{1}{2} v \cdot d\tau = \frac{Ucdt}{2hfa}$$

- c) La variation de quantité de mouvement pour un photon est

$$\delta\vec{p} = -\frac{2hf}{c} \vec{u}_x \text{ donc}$$

$$d\vec{p} = dN \cdot \delta\vec{p} = -\frac{Udt}{a} \vec{u}_x$$

Chapitre 5 Transferts thermiques

d) La force est donc

$$\vec{f}_{\text{miroir} \rightarrow \text{photons}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{U}{a} \vec{u}_x$$

e) On en déduit, par application de la troisième loi de Newton

$$\vec{f}_{\text{photons} \rightarrow \text{miroir}} = -\vec{f}_{\text{miroir} \rightarrow \text{photons}} = \frac{U}{a} \vec{u}_x$$

et par définition de la pression

$$P_r = \frac{f}{a^2} = \frac{U}{a^3}$$

f) La pression est

$$P = \frac{P_r}{3} = \frac{U}{3a^3} = \frac{U}{3V} = \frac{u}{3}$$

g) Le premier principe s'écrit

$$dU = -P_e dV + \delta Q$$

La transformation étant quasi statique, $P_e = P$ et adiabatique, $\delta Q = 0$, donc

$$dU = -P dV \text{ donc } \frac{dU}{dR} = -P \frac{dV}{dR}$$

L'univers étant assimilé à une sphère, et en utilisant l'équation d'état du gaz de photons,

$$\begin{cases} U = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot u \\ V = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{cases} \text{ donc}$$

$$4\pi R^2 u + \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{du}{dR} = -\frac{u}{3} \cdot 4\pi R^2 \text{ soit } \frac{du}{dR} = -\frac{4u}{R}$$

Or $u = aT^4$ donc

$$a \cdot 4T^3 \cdot \frac{dT}{dR} = -\frac{4aT^4}{R} \text{ donc } \frac{dT}{dR} = -\frac{T}{R}$$

$$\text{soit } R dT = -T dR \text{ soit } R dT + T dR = 0 \text{ soit } d(R \cdot T) = 0$$

$$\text{donc } R \cdot T = \text{cste}$$

5.15

a) On est dans les conditions d'application de l'équation de la chaleur ; en régime permanent, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ et dans cette géométrie unidirectionnelle, $\Delta T = \frac{d^2 T}{dx^2}$, l'équation est donc $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ qui se primitive en $\frac{dT}{dx} = A$ puis $T(x) = Ax + B$.

b) La condition aux limites en $x = 0$ donne à chaque fois $B = T_0$.

i) La condition aux limites $T(L) = T_1$ se traduit par $AL + B = T_1$ soit $AL = T_1 - T_0$ donc $A = \frac{T_1 - T_0}{L}$ et

$$T(x) = \frac{T_1 - T_0}{L} x + T_0 \text{ donc } j(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{L} (T_0 - T_1)$$

On en déduit le flux

$$\Phi = jS = \frac{\lambda S}{L} (T_0 - T_1)$$

Remarque : c'est le modèle des résistances thermiques.

ii) Le flux dans le barreau dans le sens des x croissants est uniforme :

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} = -\lambda SA$$

D'autre part $T(L) = AL + B = AL + T_0$ donc la condition aux limites donnée par l'énoncé s'écrit

$$-\lambda SA = h'(AL + T_0 - T_1)S \text{ donc } A = \frac{T_1 - T_0}{L + \frac{\lambda}{h'}}$$

On en déduit le flux

$$\Phi = \frac{\lambda S}{L + \frac{\lambda}{h'}} (T_0 - T_1)$$

iii) Le flux et la température $T(L)$ s'expriment comme à la question précédente et la condition aux limites s'écrit

$$-\lambda SA = \sigma (AL + T_0)^4 S \text{ soit } -\lambda A = \sigma (AL + T_0)^4$$

Avec les valeurs numériques fournies, cette équation s'écrit $-10^7 \cdot A = (A + 300)^4$. Les deux solutions sont donc les abscisses d'intersection des deux graphes, soient $A_1 = -575 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ et $A_2 = -115 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$. La température à l'extrémité du barreau vaut $T(L) = AL + T_0$. Avec A_1 , on obtiendrait $T(L) = -275 \text{ K}$, valeur négative absurde. La seule solution acceptable est donc $A_2 = -115$, elle donne $T(L) = 185 \text{ K}$ et on vérifie la validité de cette valeur en vérifiant que le flux conductif à l'extrémité du barreau est bien égal au flux radiatif :

$$-\lambda SA_2 \approx \sigma T^4(L)S = 66 \text{ W}$$

5.16 Partie 1.

a) La tranche étudiée possède six faces. Sur les deux faces carrées en θ et $\theta + d\theta$, le transfert est conductif :

$$d\Phi_{cd} = +j(\theta, t) \cdot \ell^2 - j(\theta + d\theta, t) \cdot \ell^2$$

Les quatre autres faces sont assimilées à des rectangles de surface totale

$$dS = 2 \times \ell R d\theta + \ell \left(R - \frac{\ell}{2} \right) d\theta + \ell \left(R + \frac{\ell}{2} \right) d\theta = 4\ell R d\theta$$

Le flux convectif sortant est donc

$$d\Phi_{cv} = h(T(\theta, t) - T_e) \cdot 4\ell R d\theta$$

Le bilan thermique s'écrit donc

$$\mu c \ell^2 R d\theta (T(\theta, t + dt) - T(\theta, t)) = d\Phi_{cd} dt - d\Phi_{cv} dt$$

En divisant par $dt d\theta$ et en effectuant les développements limités à l'ordre 1 en θ et en t , on en déduit

$$\mu c \ell^2 R \frac{\partial T}{\partial t} = -\ell^2 \frac{\partial j}{\partial \theta} - 4R\ell h(T - T_e)$$

Or la loi de Fourier $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ se traduit dans cette géométrie cylindrique en $j = -\lambda \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta}$ donc

$$\mu c \ell^2 R \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \ell^2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - 4R\ell h(T - T_e)$$

et en divisant par $\lambda \ell^2 R$ on obtient bien l'équation proposée.

- b) En régime permanent, la dérivée par rapport au temps est nulle, l'équation s'écrit donc

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2} - \left(\frac{R}{a}\right)^2 T = -\left(\frac{R}{a}\right)^2 T_e$$

La solution particulière est T_e et l'équation homogène se résout en résolvant l'équation caractéristique

$$z^2 - \left(\frac{R}{a}\right)^2 = 0$$

dont les racines sont $z_1 = -\frac{R}{a}$ et $z_2 = \frac{R}{a}$. La solution générale est donc

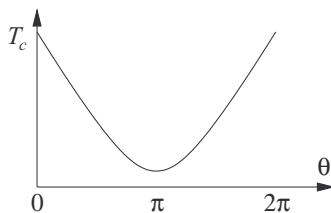
$$T(\theta) = A e^{\frac{R}{a}\theta} + B e^{-\frac{R}{a}\theta} + T_e$$

Les conditions aux limites sont $T(0) = T_c$ et $T(2\pi) = T_c$. On en déduit A et B en résolvant le système et on obtient

$$T(\theta) = T_e + \frac{e^{\frac{R}{a}\theta} + e^{\frac{2\pi R}{a}} e^{-\frac{R}{a}\theta}}{1 + e^{\frac{2\pi R}{a}}} (T_c - T_e)$$

$$T(\theta) = T_e + \frac{\text{ch}\left((\pi - \theta)\frac{R}{a}\right)}{\text{ch}\left(\pi\frac{R}{a}\right)} (T_c - T_e)$$

Cette fonction présente un minimum en $\theta = \pi$ et voici l'allure du graphe :

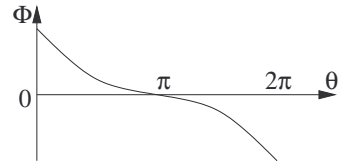


- c) Le flux vaut

$$\Phi(\theta) = -\lambda \ell^2 \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\Phi(\theta) = \frac{\lambda \ell^2 R}{a} (T_c - T_e) \frac{\text{sh}\left((\pi - \theta)\frac{R}{a}\right)}{\text{ch}\left(\pi\frac{R}{a}\right)}$$

Voici l'allure du graphe :



- d) On déduit de ce qui précède que

$$\delta T(\theta) = K \text{ch}\left((\pi - \theta)\frac{R}{a}\right)$$

avec $K = \frac{T_c - T_e}{\text{ch}\left(\pi\frac{R}{a}\right)}$. En utilisant les lois de la trigonométrie hyperbolique :

$$\delta T(\theta_0 - \delta\theta) = K \text{ch}\left((\pi - \theta_0)\frac{R}{a}\right) \text{ch}\left(\frac{R}{a}\delta\theta\right) -$$

$$K \text{sh}\left((\pi - \theta_0)\frac{R}{a}\right) \text{sh}\left(\frac{R}{a}\delta\theta\right)$$

$$\delta T(\theta_0 + \delta\theta) = K \text{ch}\left((\pi - \theta_0)\frac{R}{a}\right) \text{ch}\left(\frac{R}{a}\delta\theta\right) +$$

$$K \text{sh}\left((\pi - \theta_0)\frac{R}{a}\right) \text{sh}\left(\frac{R}{a}\delta\theta\right)$$

On en déduit après simplifications que

$$q = 2 \text{ch}\left(\frac{R}{a}\delta\theta\right)$$

L'application numérique donne $a = 0,2585$ m, $q_{\text{théo}} = 2,24$ et $q_{\text{exp}} = 2,26$, ce qui est en très bon accord.

Partie 2.

- a) Il suffit de prendre $h = 0$ dans l'équation initiale :

$$\frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

- b) On a $\frac{\partial T}{\partial t} = f(\theta) \cdot \frac{dg(t)}{dt}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} \cdot g(t)$. En injectant ces expressions dans l'équation, puis en divisant par $f(\theta) \cdot g(t)$, on obtient l'équation de l'énoncé. Le membre de gauche ne dépend que de t , celui de droite ne dépend que de θ , ils sont donc égaux à une même constante notée Ω .

c) L'équation en $g(t)$ s'écrit

$$\frac{dg(t)}{dt} - \frac{\lambda\Omega}{\mu c} g(t) = 0$$

dont la solution générale est

$$g(t) = A' e^{\frac{\lambda\Omega}{\mu c} t}$$

Si Ω était positif, $g(t)$ tendrait vers l'infini quand $t \rightarrow +\infty$, ce qui est physiquement impossible (nécessité d'une énergie infinie). $\Omega = 0$ conduirait à une solution constante dans le temps, ce qui est aussi rejeté. On en déduit que $\Omega < 0$. Le second membre est homogène à $\frac{1}{R^2}$, donc Ω est l'opposé de l'inverse d'une longueur caractéristique $d : \Omega = -\frac{1}{d^2}$. On écrit donc

$$g(t) = A' e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } \tau = \frac{\mu c d^2}{\lambda}$$

L'équation en $f(\theta)$ s'écrit

$$\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} + \frac{R^2}{d^2} f(\theta) = 0$$

C'est une équation du type oscillateur harmonique et comme l'énoncé indique que f est paire,

$$f(\theta) = A'' \cos\left(\frac{R}{d}\theta\right)$$

On peut fusionner les deux constantes A' et A'' en posant $A = A'A''$ et

$$T(\theta, t) = K + A e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{R}{d}\theta\right)$$

d) On peut écrire la condition aux limites $\forall t, T(0, t) = T(2\pi, t)$ donc

$$\cos 0 = \cos\left(\frac{2\pi R}{d}\right)$$

donc $\frac{2\pi R}{d} = n \cdot 2\pi$ où n est un entier naturel non nul, soit $d = \frac{R}{n}$ et la solution stationnaire associée est

$$T_n(\theta, t) = K_n + A_n e^{-\frac{t}{\tau_n}} \cos(n\theta) \text{ avec } \tau_n = \frac{\mu c R^2}{\lambda n^2}$$

L'équation aux dérivées partielles étant linéaire, toute somme de solutions est elle-même solution (principe de superposition) donc en sommant sur n , la solution proposée par l'énoncé convient, en notant

$$T_m = \sum_{n=1}^{\infty} K_n$$

la température moyenne.

5.17

a) Dériver par rapport au temps la fonction complexe spatio-temporelle revient à la multiplier par $i\omega$, la dériver par rapport à x revient à la multiplier par $-ik$. L'équation de la chaleur unidirectionnelle s'écrit donc

$$i\omega\mu c T - (-ik)^2 \lambda T = 0$$

d'où l'équation de dispersion

$$\underline{k}^2 = -i \frac{\mu c \omega}{\lambda}$$

b) On peut écrire

$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2$$

$$\text{et } e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$\text{donc } \underline{k} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \sqrt{\frac{\mu c \omega}{\lambda}} \text{ soit}$$

$$\underline{k} = \sqrt{\frac{\mu c \omega}{2\lambda}} - i \sqrt{\frac{\mu c \omega}{2\lambda}}$$

c) En injectant la valeur de \underline{k} de partie réelle positive et en prenant la partie réelle, on en déduit la solution onde thermique progressive dans le sens des x croissants et atténuée :

$$T(x, t) = \Re e(T) = T_a e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - k'x + \theta)$$

avec $k' = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu c \omega}{2\lambda}}$. La pseudo-période spatiale (longueur d'onde) est $\frac{2\pi}{k'} = 2\pi\delta$ et la distance caractéristique d'atténuation est δ .

d) Application numérique.

i) On identifie la température moyenne $T_m = 298$ K et l'amplitude thermique $T_0 = 10$ K. L'excitation thermique journalière est périodique, de période 24 heures, soit $T = 86\,400$ s, donc $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. D'après la formule du cours,

$$\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}} = 5,7 \text{ cm}$$

À une profondeur de l'ordre de $5\delta \approx 30$ cm, le facteur exponentiel $e^{-\frac{x}{\delta}}$ vaut moins de 1% et la fluctuation thermique journalière est donc inférieure à 0,1 K.

ii) De même, $T_m = 288$ K, $T_0 = 10$ K. L'excitation thermique journalière est périodique, de période 1 an = 365,25 jours, soit $T = 31,56 \cdot 10^6$ s, donc $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. D'après la formule du cours,

$$\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}} = 1,1 \text{ m}$$

À une profondeur de l'ordre de $5\delta \approx 4$ m, le facteur exponentiel $e^{-\frac{z}{\delta}}$ vaut moins de 1% et la fluctuation thermique annuelle est donc inférieure à 0,1 K. Dans une cave à 4 mètres de profondeur, la fluctuation thermique entre les saisons est donc négligeable.

5.18

a) Le bilan thermique s'écrit

$$\mu S dy c (T(y, t + dt) - T(y, t)) = j(y, t) S dt - j(y + dy, t) S dt + \beta T \cdot S dy \cdot dt$$

En divisant par $S dy dt$ et en faisant les développements limités au premier ordre, on en déduit :

$$\mu c \frac{\partial T(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(y, t)}{\partial y} + \beta T(y, t)$$

La loi de Fourier donne $j(y, t) = -\lambda \frac{\partial T(y, t)}{\partial y}$ et en injectant cette relation dans l'équation précédente, on en déduit l'équation aux dérivées partielles :

$$\mu c \frac{\partial T(y, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(y, t)}{\partial y^2} + \beta T(y, t)$$

b) Dériver par rapport au temps revient à multiplier par $i\omega$, dériver par rapport à y à multiplier par $-ik$. L'équation devient donc

$$i\mu c \omega \underline{T} = \lambda (-ik)^2 \underline{T} + \beta \underline{T}$$

et en simplifiant par \underline{T} on obtient l'équation de dispersion

$$\underline{k}^2 = -i \frac{\mu c \omega}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda}$$

Sous forme exponentielle, le second membre, de partie réelle positive et de partie imaginaire négative, peut être écrit $r e^{i\psi}$ avec $r > 0$ (module) et $\psi \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$. On a alors

$$\left[\sqrt{r} e^{i\frac{\psi}{2}} \right]^2 = r e^{i\psi}$$

et $\frac{\psi}{2} \in]-\frac{\pi}{4}, 0[$. Le complexe $\sqrt{r} e^{i\frac{\psi}{2}}$ a donc une partie réelle positive et une partie imaginaire négative, et c'est la solution qui convient :

$$\underline{k} = \sqrt{r} e^{i\frac{\psi}{2}} = k' + ik''$$

On en déduit

$$\underline{T}(y, t) = \underline{T}_a e^{i(\omega t - k'y - ik''y)} = T_a e^{k''y} e^{i(\omega t - k'y + \theta)}$$

et en passant à la partie réelle

$$T(y, t) = T_a e^{k''y} \cos(\omega t - k'y + \theta)$$

qui est l'équation spatio-temporelle d'une onde qui se propage dans le sens des y croissants ($k' > 0$) en s'atténuant ($k'' < 0$).

c) En remplaçant dans l'équation aux dérivées partielles, on obtient

$$\mu c \alpha e^{\alpha t} \sin(ky) = -\lambda k^2 e^{\alpha t} \sin(ky) + \beta e^{\alpha t} \sin(ky)$$

donc la solution proposée convient si

$$\mu c \alpha = -\lambda k^2 + \beta$$

Les conditions aux limites imposent

$$\begin{cases} \sin(0) = 0 \\ \sin(kL) = 0 \end{cases} \text{ donc } kL = n\pi$$

où n est un entier naturel non nul. On en déduit que

$$T(y, t) = T_a e^{\alpha t} \sin \frac{n\pi y}{L}$$

Cette fonction s'annule bien en $y = 0$ et $y = L$ mais si $n \geq 2$, elle s'annule au moins une fois en changeant de signe entre ces deux valeurs ; la température pourrait alors prendre des valeurs négatives, ce qui est absurde. On en déduit que $n = 1$ et $k = \frac{\pi}{L}$ puis en remplaçant dans la relation précédente on en déduit α :

$$\alpha = \frac{\beta - \lambda \frac{\pi^2}{L^2}}{\mu c}$$

Si $\beta = \lambda \frac{\pi^2}{L^2}$, $\alpha = 0$ et le profil de température est constant dans le temps. Si $\beta < \lambda \frac{\pi^2}{L^2}$, $\alpha < 0$ et $\forall y \in [0, L]$, $T(y, t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$: il y a décroissance exponentielle de température. Si $\beta > \lambda \frac{\pi^2}{L^2}$, $\alpha > 0$ et $\forall y \in [0, L]$, $T(y, t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$: il y a croissance exponentielle de température.

5.19

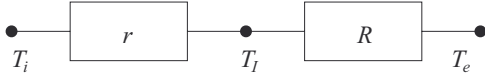
a) Par application des formules du cours :

$$R = \frac{E}{\Lambda S} = 0,03 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}, \quad r = \frac{\frac{E}{3}}{\frac{\Lambda}{10} S} = 0,10 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

b) Les résistances sont associées en série, la résistance équivalente est donc $R + r = 0,13 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ quelle que soit la position relative du mur et de l'isolant. Par application de la loi d'Ohm thermique :

$$\Phi = \frac{T_i - T_e}{R + r} = 154 \text{ W}$$

- c) Si l'isolant est sur la face intérieure du mur, le dispositif est modélisé ainsi :



On peut appliquer la loi du diviseur de tension :

$$T_1 - T_e = \frac{R}{r + R} \cdot (T_i - T_e)$$

$$\text{donc } T_1 = T_e + \frac{R}{r + R} \cdot (T_i - T_e) = 274,6 \text{ K}$$

De même, si l'isolant est à l'extérieur :

$$T_1 = T_e + \frac{r}{r + R} \cdot (T_i - T_e) = 285,4 \text{ K}$$

- d) En traitant l'équation de la chaleur en ordres de grandeur, en notant L la distance caractéristique de diffusion thermique et τ le temps caractéristique :

$$\mu c \frac{T}{\tau} \approx \lambda \frac{T}{L^2}$$

$$\text{donc } \tau \approx \frac{L^2 \mu c}{\lambda}$$

Pour le mur ou pour l'isolant, L s'identifie à l'épaisseur et l'ordre de grandeur du temps d'établissement du régime permanent est 5τ . On en déduit les durées

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{\text{mur}} \approx \frac{5E^2 MC}{\lambda} = 5,2 \text{ jours} \\ t_{\text{isolant}} \approx \frac{5e^2 \mu c}{\lambda} = 7 \text{ heures} \end{array} \right.$$

L'ordre de grandeur est le plus grand des deux, soit environ 5 jours. En régime permanent, la température dans le mur ou dans l'isolant est une fonction affine de x , abscisse mesurée perpendiculairement à la paroi : en notant les températures T_1 en $x = 0$ et T_2 en $x = L$,

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L}$$

La tranche $[x, x + dx]$, de capacité thermique $\mu S c dx$ subit donc un échauffement $(T(x) - T_e)$, il reçoit donc une énergie thermique

$$\delta Q = \mu S c \left((T_1 - T_e) + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} \right) dx$$

En intégrant sur la largeur totale du mur, on obtient

$$Q = \mu S L c \frac{T_1 + T_2 - 2T_e}{2}$$

Dans le cas de l'isolant intérieur :

$$Q_{\text{isolant}} = \mu S e c \frac{290 + 274,6 - 2 \cdot 270}{2} = 615 \text{ kJ}$$

$$Q_{\text{mur}} = \text{MSEC} \frac{274,6 + 270 - 2 \cdot 270}{2} = 6,90 \text{ MJ}$$

$$\text{donc } Q = Q_{\text{isolant}} + Q_{\text{mur}} = 7,515 \text{ MJ}$$

Dans le cas de l'isolant extérieur :

$$Q_{\text{isolant}} = \mu S e c \frac{285,4 + 270 - 2 \cdot 270}{2} = 385 \text{ kJ}$$

$$Q_{\text{mur}} = \text{MSEC} \frac{290 + 285,4 - 2 \cdot 270}{2} = 53,1 \text{ MJ}$$

$$\text{donc } Q = Q_{\text{isolant}} + Q_{\text{mur}} = 53,485 \text{ MJ}$$

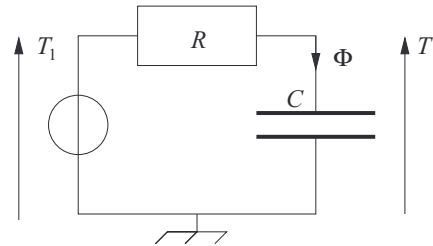
On dépense donc beaucoup plus d'énergie quand l'isolant est extérieur car il faut chauffer le mur à une température proche de celle de l'air intérieur. Mais une fois que ce mur est chaud, il offre une inertie thermique nettement plus importante, et les fluctuations de température à l'intérieur de la pièce à vivre seront nettement plus faibles que si l'isolant est à l'intérieur. De plus, sur une année complète de fonctionnement, le mur en hiver garde l'énergie thermique qu'il a accumulée pendant l'été, et il est très peu probable que les murs aient pu atteindre une température aussi froide (-2°C) que celle initiale de l'énoncé. C'est pourquoi la tendance actuelle est l'isolation intérieure plutôt qu'extérieure (l'étude est analogue et révèle un effet climatiser en été).

5.20

- a) Le bilan thermique pour l'aliment s'écrit

$$C dT = \Phi \cdot dt \text{ soit } \Phi = C \frac{dT}{dt}$$

qui est l'exact analogue de la loi d'un condensateur en électricité. Le thermostat est l'équivalent d'un générateur de tension qui charge un condensateur à travers la résistance :



L'équation différentielle s'écrit donc

$$T_1 = R\Phi + T = RC \frac{dT}{dt} + T$$

En posant $\tau = RC$, cette équation différentielle du premier ordre s'intègre sans difficulté en

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- b) Appliquons la première identité thermodynamique à l'aliment : $dU = -PdV + TdS$ donc $CdT = 0 + TdS$ et $dS = C \frac{dT}{T}$ qu'on intègre entre $T(0) = T_0$ et $T(\infty) = T_1$:

$$\Delta S_{al} = \int_{T_0}^{T_1} C \frac{dT}{T} = C \ln \frac{T_1}{T_0}$$

Or $\frac{T_1}{T_0} = 1 + \varepsilon$ donc on peut faire le développement limité $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}$ et

$$\Delta S_{al} \approx C \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} \right)$$

Le thermostat a une capacité thermique infinie et une variation de température nulle, on doit donc calculer sa variation d'énergie interne en appliquant le premier principe :

$$dU_{th} = \delta Q_{th} + \delta W_{th} = -\delta Q_{al} = -CdT$$

La première identité thermodynamique appliquée au thermostat donne donc

$$-CdT = T_1 dS_{th} \text{ donc } dS_{th} = -C \frac{dT}{T_1}$$

$$\text{donc } \Delta S_{th} = -C \frac{T_1 - T_0}{T_1}$$

$$\text{soit } \Delta S_{th} = C \left[\frac{1}{1 + \varepsilon} - 1 \right]$$

Le développement limité donne $\frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon + \varepsilon^2$ donc

$$\Delta S_{th} \approx C \left(-\varepsilon + \varepsilon^2 \right)$$

L'entropie est extensive donc pour le système tout entier :

$$\Delta S = \Delta S_{th} + \Delta S_{al} = \frac{C\varepsilon^2}{2}$$

Le système ne recevant pas d'énergie thermique de l'extérieur, le second principe s'écrit

$$\Delta S = 0 + S_{cr} \text{ donc } S_{cr} = \frac{C\varepsilon^2}{2} > 0$$

La transformation est donc irréversible.

5.21

- a) En régime permanent, l'énergie thermique entrant en r est égale à celle sortant en $r + dr$, soit

$$2\pi r H j(r) = 2\pi(r + dr) H j(r + dr)$$

$$\text{donc } \frac{(r + dr)j(r + dr) - rj(r)}{dr} = 0$$

donc $\frac{d(rj(r))}{dr} = 0$. Par application de la loi de Fourier, $j(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}$ donc $T(r)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{dT}{dr} \right] = 0$$

- b) En primitivant deux fois, on en déduit :

$$r \frac{dT}{dr} = A \text{ donc } \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r}$$

$$\text{donc } T(r) = A \ln r + B$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} A \ln a_1 + B = T_1 \\ A \ln a_2 + B = T_2 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} A = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{a_2}{a_1}} \\ B = \frac{T_1 \ln a_2 - T_2 \ln a_1}{\ln a_2 - \ln a_1} \end{cases}$$

On en déduit $j(r) = -\lambda \frac{A}{r} = (T_1 - T_2) \frac{\lambda}{r \ln \frac{a_2}{a_1}}$.

- c) Le flux thermique à travers le cylindre de rayon r est

$$\Phi(r) = 2\pi r H j(r) = (T_1 - T_2) \frac{2\pi H \lambda}{\ln \frac{a_2}{a_1}}$$

Il est bien indépendant de r et on peut écrire la loi d'Ohm thermique :

$$T_1 - T_2 = \frac{\ln \frac{a_2}{a_1}}{2\pi H \lambda} \Phi$$

et la résistance thermique cylindrique est donc $R_{cyl} = \frac{\ln \frac{a_2}{a_1}}{2\pi H \lambda}$.

- d) Le développement limité du logarithme donne

$$\ln \frac{a_2}{a_1} = \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{a_1} \right) \approx \frac{\varepsilon}{a_1}$$

$$\text{donc } R_{cyl} \approx \frac{\varepsilon}{2\pi a_1 H \lambda}$$

On reconnaît au numérateur l'épaisseur ε de la paroi et au dénominateur la surface intérieure $S_1 = 2\pi a_1 H$ donc on retrouve l'expression unidirectionnelle $R_{cyl} \approx \frac{\varepsilon}{\lambda S_1}$.

5.22

À l'instant t , le système est formé d'une couche de glace d'épaisseur $b(t)$ et de surface S surmontant une colonne d'eau liquide à 0°C de hauteur $B - b(t)$. Le processus est certainement lent (on le vérifiera à la fin) et on peut considérer qu'on est en régime quasi stationnaire, on peut donc appliquer le modèle des résistances thermiques pour la couche de glace. Sa résistance est

$$R_{th} = \frac{b(t)}{\lambda_g S}$$

Le flux thermique traversant cette couche est dirigé de l'eau vers l'air extérieur, l'écart thermique est de 10°C donc de 10 K et $\Phi = \frac{10}{R_{\text{th}}}$. Pendant une durée dt , la quantité d'énergie thermique $\delta Q = \Phi \cdot dt$ quitte donc l'eau liquide, ce qui provoque le gel d'une couche supplémentaire de glace (à l'interface eau-glace) d'épaisseur db . On suppose que la transformation se fait à pression constante et le premier principe enthalpique appliqué à cette couche d'eau qui gèle s'écrit $dH = -\delta Q$ soit

$$\mu_e S db \cdot h_{\text{gel}} = -10 \frac{\lambda_g S}{b(t)} dt$$

Or $h_{\text{gel}} = -h_{\text{fus}}$ donc b vérifie l'équation différentielle

$$b \cdot db = \frac{10\lambda_g}{\mu_e h_{\text{fus}}} dt$$

On intègre cette équation à variables séparables entre $t = 0$ et $t = \tau$ à droite et entre $b = 0$ et $b = B$ à gauche :

$$\left[\frac{b^2}{2} \right]_0^B = \frac{10\lambda_g}{\mu_e h_{\text{fus}}} [t]_0^\tau$$

$$\text{donc } \frac{B^2}{2} = \frac{10\lambda_g}{\mu_e h_{\text{fus}}} \tau$$

et $\tau = \frac{\mu_e h_{\text{fus}} B^2}{20\lambda_g} = 17,9 \cdot 10^6$ s soient environ 200 jours. Il est donc impossible de constater le gel complet de l'eau d'un puits dans un pays tempéré, où 200 jours de gel à -10°C ne sont jamais observés.

CHAPITRE 6

Diffusion de particules

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Modes de transfert de particules : diffusion et convection.
- ◇ Densité de particules et vecteur densité de courant de particules.
- ◇ Loi de Fick.
- ◇ Bilan de particules.
- ◇ Équation de diffusion particulaire.
- ◇ Irréversibilité du phénomène.
- ◇ Approche microscopique du phénomène de diffusion.
- ◇ Marche au hasard.
- ◇ Libre parcours moyen.
- ◇ Vitesse quadratique moyenne.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Connaître les grandeurs caractéristiques de la diffusion et les relier aux grandeurs courantes.
- ◇ Savoir faire un bilan de nombre de particules.
- ◇ Savoir combiner bilan particulaire et équation de Fick pour établir une équation aux dérivées partielles.
- ◇ Prouver l'irréversibilité d'un phénomène de diffusion de particules.
- ◇ Évaluer le coefficient de diffusion par un modèle probabiliste.

Les méthodes à retenir

Connaître les grandeurs caractéristiques de la diffusion et les relier aux grandeurs courantes.

On peut identifier 7 grandeurs distinctes dans les phénomènes de diffusion et 11 au total par le jeu des opérateurs de dérivation. D'une part, une faute sur une seule suffit à rendre un raisonnement de diffusion faux ; d'autre part, dès qu'on identifie l'unité (la dimension) des grandeurs en présence, il est assez facile d'établir l'équation attendue. C'est pourquoi il est indispensable de toujours garder à l'esprit, ou placer dans un tableau, les noms, sens physiques et unités de ces termes et de leurs dérivées. Voici une liste presque exhaustive, on peut ajouter mentalement le terme *particules* (sans unité) en préfixe aux unités données : par exemple, le vecteur \vec{j}_p peut être exprimé en « particules par mètre carré et par seconde ».

notation	nom	unité
N	nombre de particules	\emptyset
n	densité particulaire	m^{-3}
Φ	flux particulaire	s^{-1}
\vec{j}_p	densité de courant particulaire	$\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$
$\text{div } \vec{j}_p$	divergence de \vec{j}_p	$\text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$
Γ	densité de création particulaire	$\text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$
λ	taux de création	s^{-1}
$\frac{\partial n}{\partial t}$	dérivée temporelle de la densité	$\text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$
$\text{grad } n$	gradient de la densité	m^{-4}
D	coefficient de diffusion	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Δn	Laplacien de la densité	m^{-5}

Exemple :

En notant $dN(t)$ le nombre de particules à la date t dans un volume $d\tau$ possédant en M une paroi ou facette de vecteur sortant \vec{dS} , pendant une durée dt , pour un système siège d'une destruction permanente de particules de densité volumique Γ et d'une création proportionnelle de coefficient λ • la densité particulaire est $n(t) = \frac{dN(t)}{d\tau}$ • le nombre de particules entrantes par la facette est $\delta N_e = -\vec{j}(M, t) \cdot \vec{dS}$ • le nombre de particules détruites par processus permanent est $\delta N_d = \Gamma d\tau dt$ • le nombre de particules créées est $\delta N_c = \lambda \cdot N(t) \cdot dt$.

↪ Exercice 6.1.

Savoir faire un bilan de nombre de particules.

Le **bilan de particules** est un bilan comptable : la variation pendant dt du nombre de particules dans un volume élémentaire $d\tau$ est égale à la somme algébrique des particules entrantes et sortantes par les facettes qui délimitent $d\tau$, des particules créées (ou détruites) de façon permanente ou proportionnelle pendant dt . Une bonne connaissance en géométrie des pavés parallélépipédiques, des cylindres, des sphères est indispensable pour évaluer les surfaces des facettes et les volumes. Enfin, la division par les éléments différentiels ($dt, dx, dy, dz, dr, d\theta, d\varphi$) conduit à une équation aux dérivées partielles en $n(M, t)$. Si un de ces éléments semble ne pas se simplifier, c'est un message d'alerte qui indique une faute d'homogénéité.

Exemple :

Un système possède une densité particulaire $n(x, t)$ et un vecteur densité de courant particulaire $\vec{j}_p = j_p(x, t)\vec{u}_x$. Il est le siège d'une destruction permanente de particules de densité volumique Γ et d'une création proportionnelle de coefficient λ . Le bilan particulaire pendant dt pour l'élément de volume cylindrique de section S situé entre x et $x + dx$ s'écrit :

$$N(t + dt) - N(t) = \Phi(x, t)dt - \Phi(x + dx, t)dt - \delta N_d + \delta N_c$$

$$\text{soit } Sdxn(x, t + dt) - Sdxn(x, t) =$$

$$j(x, t)Sdt - j(x + dx, t)Sdt - \Gamma Sdxdt + \lambda n(x, t)Sdxdt$$

En divisant par $Sdxdt$:

$$\frac{n(x, t + dt) - n(x, t)}{dt} = -\frac{j(x + dx, t) - j(x, t)}{dx} - \Gamma + \lambda n(x, t)$$

et en faisant les développements limités à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} - \Gamma + \lambda n(x, t)$$

↪ **Exercice 6.2.**

Savoir combiner bilan particulaire et équation de Fick pour établir une équation aux dérivées partielles.

La loi de Fick

$$\vec{j}_p = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$$

permet d'éliminer \vec{j}_p dans le bilan local de particules détaillé dans la fiche précédente. On obtient ainsi une équation aux dérivées partielles en $n(M, t)$ appelée **équation de diffusion**. On la résout en utilisant les conditions aux limites et/ou les conditions initiales. On doit retenir que l'équation de diffusion est difficile à résoudre dans le cas général, et il est conseillé, exercice après exercice, de se constituer un catalogue de solutions de l'équation avec les hypothèses associées et le type de phénomène qu'elles expriment. Parallèlement à la résolution exacte, on doit impérativement retenir la relation en ordres de grandeur $D \approx \frac{L^2}{\tau}$ où L est une distance caractéristique et τ un temps caractéristique de diffusion : on en déduit une estimation rapide des termes de l'équation, et on peut ainsi justifier que certains peuvent être négligés devant les autres.

Exemple :

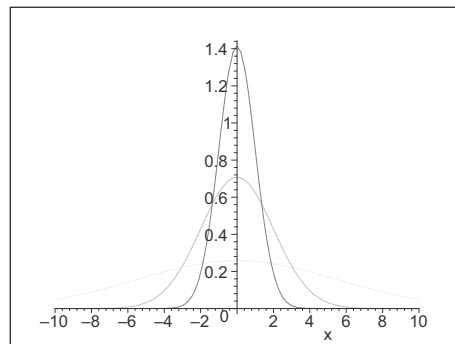
L'équation de diffusion (EDD) simple unidirectionnelle ($n(x, t)$ et $\vec{j} = j(x, t)\vec{u}_x$) est la conjonction du bilan de particules sans terme de création et de la loi de Fick :

$$\begin{cases} \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} \\ j(x, t) = -D \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \text{(EDD)} : \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

La solution considérée comme la plus simple est la suivante :

$$n(x, t) = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

comme il apparaît quand on calcule la dérivée première par rapport à t et seconde par rapport à x . À $t = 0$, C 'est une distribution de Dirac, infinie en $x = 0$ et nulle partout ailleurs. Voici l'allure de $n(x)$ à trois dates successives :



Cette solution décrit la diffusion de particules dans un matériau cylindrique infini à partir d'une situation initiale de saturation en particules au voisinage de $x = 0$, et aucune ailleurs.

↪ **Exercices 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9.**

Prouver l'irréversibilité d'un phénomène de diffusion de particules.

La loi de Fick indique que le courant de diffusion particulaire est dirigé des zones de forte population vers celles de faible population. Elle tend donc à faire évoluer le système d'un état d'hétérogénéité de concentration particulaire vers un état d'homogénéité : cette évolution est irréversible comme on l'a énoncé au chapitre 5.

Exemple :

Un cylindre calorifugé contient deux chambres 1 et 2 séparées par une cloison, de volumes respectifs $V_1 = \frac{V_0}{5}$ et $V_2 = \frac{4V_0}{5}$. Dans la chambre 1, on place $n_1 = \frac{n_0}{5}$ moles de dioxygène assimilé à un gaz parfait à la température T_0 ; dans la chambre 2, on place $n_2 = \frac{4n_0}{5}$ moles de diazote assimilé à un gaz parfait à la température T_0 . La cloison n'est pas parfaitement étanche et laisse diffuser les gaz sans gain ni perte énergétique. Conformément à la loi de Fick, le dioxygène diffuse de 1 vers 2 et le diazote de 2 vers 1, jusqu'à l'état final d'équilibre en termes de densité particulaire, où les deux chambres contiennent toutes les deux un mélange constitué de 1/5 de dioxygène et de 4/5 de diazote (c'est de l'air !). Les quantités de matière sont $n_{1f} = n_1$ et $n_{2f} = n_2$, les températures $T_1 = T_2 = T_0$ et les pressions sont donc $P_1 = P_2 = P_0$; c'est donc aussi un état final d'équilibre thermique et mécanique.

On peut calculer la variation d'entropie de cette transformation en l'assimilant à la superposition de deux détente isoénergétiques de Joule Gay-Lussac (2 est initialement vide de dioxygène et 1 de diazote). Par application de la première identité thermodynamique :

$$\left\{ \begin{array}{l} dU_1 = 0 = -P_1 dV_1 + T_1 dS_1 \\ dU_2 = 0 = -P_2 dV_2 + T_2 dS_2 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} dS_1 = \frac{P_1 dV_1}{T_1} = n_1 R \frac{dV_1}{V_1} \\ dS_2 = \frac{P_2 dV_2}{T_2} = n_2 R \frac{dV_2}{V_2} \end{array} \right.$$

En intégrant et en utilisant l'extensivité de l'entropie :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{n_0}{5} R \ln \frac{V_0}{\frac{V_0}{5}} + \frac{4n_0}{5} R \ln \frac{V_0}{\frac{4V_0}{5}}$$

soit $\Delta S = n_0 R \left[\frac{1}{5} \ln 5 + \frac{4}{5} \ln \frac{5}{4} \right] = 0,50 n_0 R$. La transformation étant adiabatique, l'entropie échangée est nulle et d'après le second principe $S_{cr} = \Delta S = 0,50 n_0 R > 0$ ce qui prouve l'irréversibilité de cette double diffusion de particules.

↪ Exercices 6.10, 6.11.

Évaluer le coefficient de diffusion par un modèle probabiliste.

Le but de la démarche est d'établir une loi phénoménologique de diffusion par un raisonnement probabiliste à l'échelle de la particule. Voici les trois étapes clés de cette démarche.

a) **Du macroscopique au microscopique.** Soit L le **libre parcours moyen** des particules. On découpe le milieu étudié en cases mésoscopiques de centre M_k et de volume L^3 comportant $n(M_k, t) \cdot L^3$ particules. On note $p(M_k, t)$ la probabilité qu'une particule se trouve dans la k ième case à la date t . On admet que cette probabilité ne dépend pas de la particule considérée. Si on note N le nombre total de particules alors

$$n(M_k, t) \simeq N \cdot p(M_k, t)$$

b) **Loi statistique de répartition microscopique.** La **vitesse quadratique moyenne** des particules est notée u . Le temps caractéristique de changement de case est donc

$$\tau = \frac{L}{u}$$

Toutes les τ secondes, chaque particule est susceptible de changer de case selon une loi probabiliste qui est le cœur du modèle utilisé, décrit par l'énoncé. C'est dans la traduction mathématique de cette loi que réside la difficulté. On effectue les **développements limités** temporels et spatiaux au voisinage de M_k et de t , avec les variations respectives L et τ . On en déduit une équation aux dérivées partielles en $p(M, t)$.

c) **Du microscopique au macroscopique.** Grâce à la relation entre $n(M, t)$, N et $p(M, t)$ énoncée ci-dessus, on en déduit l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(M_k, t)$. On en déduit en particulier une expression du coefficient de diffusion.

Exemple :

Étudions la diffusion unidirectionnelle selon x de particules toutes identiques et sans interaction.

a) **Du macroscopique au microscopique.** On subdivise l'axe x en sites de largeur L . L'abscisse du k ième site est $x_k = kL$ et on suppose que toutes les τ secondes, chaque particule passe aléatoirement à un site voisin. On note $p(x_k, t)$ la probabilité pour une particule donnée de se trouver dans le k ième site à la date t .

b) **Loi statistique de répartition microscopique.** Si la particule se trouve à la date $t + \tau$ dans le k ième site, c'est qu'elle se trouvait à la date t dans l'un des deux sites voisins avec une égale probabilité. On en déduit la relation

$$p(x_k, t + \tau) = \frac{1}{2}p(x_{k-1}, t) + \frac{1}{2}p(x_{k+1}, t)$$

$$\text{soit } p(kL, t + \tau) = \frac{1}{2} [p(kL - L, t) + p(kL + L, t)]$$

On écrit les développements limités au deuxième ordre par rapport à la variable d'espace, au premier ordre par rapport à la variable de temps.

$$\begin{cases} p(kL + L, t) = p(kL, t) + \frac{\partial p}{\partial x}(kL, t) \cdot L + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(kL, t) \cdot L^2 \\ p(kL - L, t) = p(kL, t) - \frac{\partial p}{\partial x}(kL, t) \cdot L + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(kL, t) \cdot L^2 \\ p(kL, t + \tau) = p(kL, t) + \frac{\partial p}{\partial t}(kL, t) \cdot \tau \end{cases}$$

$$\text{donc } \frac{\partial p}{\partial t}(kL, t) \cdot \tau = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(kL, t) \cdot L^2$$

c) **Du microscopique au macroscopique.** En multipliant par le nombre total N de particules, on en déduit

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{L^2}{2\tau} \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2}$$

Or $u = \frac{L}{\tau}$ donc

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} - \frac{Lu}{2} \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

On reconnaît ici l'équation de diffusion unidirectionnelle sans terme de source, conséquence de la loi de Fick et de la loi de conservation des particules

$$\begin{cases} j(x, t) = -D \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

Par identification, on en déduit

$$D = \frac{Lu}{2}$$

↪ Exercices 6.12, 6.13, 6.14.

Énoncés des exercices

6.1

Applications numériques

On donne $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

- La pression de vapeur saturante de l'eau à 30°C est $P_s = 42,4 \cdot 10^3 \text{ Pa}$. Calculer la densité particulaire en molécules d'eau au dessus d'une flaque d'eau à cette température.
- Une goutte d'éther, composé volatile moléculaire de masse molaire $M = 74 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ est posée sur le sol. Elle se vaporise de façon isotrope avec un débit massique $D_m = 1,0 \text{ mg} \cdot \text{s}^{-1}$. Déterminer le vecteur densité de courant particulaire en un point M situé à $r = 1,0 \text{ m}$ de la goutte.
- La masse volumique du cuivre est $\mu = 8960 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et sa masse molaire $M = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. On interprète sa conductivité en supposant que chaque atome libère un électron de conduction. Calculer la densité particulaire en électrons de conduction.
- Un fil cylindrique conducteur d'axe (O, x) de section $S = 10 \text{ mm}^2$ est parcouru dans le sens des x croissants par un courant d'intensité $i = 50 \text{ mA}$. Donner l'expression du vecteur densité de courant électrique volumique \vec{j} et celle du vecteur densité de courant particulaire électronique \vec{j}_p .
- Estimer la vitesse moyenne des électrons dans le fil de la question (d) s'il est en cuivre avec les hypothèses de la question (c).

6.2

Diffusion avec fuite latérale

Un gaz diffuse le long d'un cylindre de rayon R , d'axe (O, x) et de longueur $L \gg R$, entouré sur sa paroi latérale d'une gaine, fine couche d'épaisseur $e \ll R$, faite d'un matériau différent. La zone extérieure $r > R + e$ est vide. On note D et D' les coefficients de diffusion du cylindre central (l'âme) et de la gaine ; on suppose que $D' \ll D$.

- Justifier qu'on peut considérer que $n(x, r, t) = n(x, t)$.
- En travaillant en ordres de grandeur, justifier que le flux radial de fuite de particules à travers la gaine sur la tranche $[x, x + dx]$ vaut

$$d\Phi_f \simeq \frac{D' n(x, t)}{e} \cdot 2\pi R dx$$

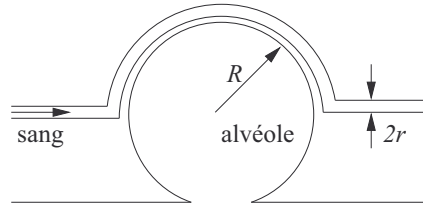
- Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x, t)$.
- Déterminer la solution stationnaire de cette équation en prenant comme conditions aux limites $n(0, t) = n_0$ et $n(L, t) = 0$. Étudier le cas particulier $D' \rightarrow 0$.



6.3

Diffusion et oxygénation du sang (Mines ponts PSI (1) 2004)

Le coefficient de diffusion du dioxygène dans l'air est $D = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et dans le sang $D' = 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; le sang se charge en dioxygène en passant à la vitesse $v = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans un très petit vaisseau (un capillaire) de diamètre $2r = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ au contact d'une alvéole pulmonaire sphérique de rayon $R = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.



- En traduisant l'équation de diffusion en ordre de grandeur, montrer que si on note τ l'ordre de grandeur du temps de diffusion, L la distance caractéristique de diffusion et D le coefficient de diffusion, alors $\frac{L^2}{\tau} \simeq D$
- Justifier que le sang a le temps de se charger en dioxygène.



6.4

Solution stationnaire de l'EDD : modèle des résistances diffusives

On étudie la diffusion le long d'un cylindre de section S et de longueur L , d'axe (O, x) avec $x \in [0, L]$, de coefficient de diffusion D .

- On se place en régime permanent, on note donc $n(x)$ la densité particulaire et $\vec{j} = j(x)\vec{u}_x$ la densité de courant. On impose $n(0) = n_1$ et $n(L) = n_2$. Établir l'équation différentielle vérifiée par $n(x)$, la résoudre grâce aux conditions aux limites, en exprimer le flux particulaire Φ à travers le barreau. En déduire la loi d'Ohm particulaire :

$$n_1 - n_2 = R_p \Phi$$

où R_p est la résistance particulaire qu'on exprimera en fonction de S , L et D .

- Le cylindre précédent relie deux cuves de même volume V_0 très supérieur à celui du cylindre. À $t = 0$, le cylindre de gauche, relié à l'extrémité $x = 0$ du barreau, contient N_0 particules et le cylindre de droite, relié à l'extrémité $x = L$ du barreau, n'en contient aucune. À la date t , on note $n_1(t)$ la densité particulaire du cylindre de gauche et $n_2(t)$ celle du cylindre de droite. On est en régime quasi stationnaire et on admet la généralisation du résultat de la première question au cas présent. Exprimer le flux $\Phi(t)$ de particules à travers le cylindre à la date t . En déduire le système d'équations différentielles vérifiées par $n_1(t)$ et $n_2(t)$ et le résoudre. À quelle condition l'hypothèse de régime quasi stationnaire est-elle justifiée ?

6.5**Solution exponentielle de l'EDD**

On considère la solution suivante de l'équation de diffusion simple unidirectionnelle, définie le long d'un barreau infini de section S et d'axe (O, x) :

$$n(x, t) = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

- Vérifier que $n(x, t = 0) = 0$ pour toute abscisse $x \neq 0$.
- Pour une abscisse $x \neq 0$, à quelle date t_x la densité passera-t-elle par une valeur maximale (on parle de pic) ?
- En déduire que la relation en ordre de grandeur $D \simeq \frac{l^2}{\tau}$ établie à l'exercice 6.3 est vérifiée.
- Vérifier que le nombre total de particules N_0 est constant au cours du temps et exprimer la constante A en fonction de N_0 .

6.6**Solution saturante de l'EDD**

On pose $\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv$. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- Montrer que la solution

$$n(x, t) = n_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{x^2}{4Dt}} \right) \right]$$

vérifie l'équation de diffusion lorsque $t > 0$.

- Quelle est la condition aux limites imposée ? Quelle est la condition initiale ?
- Vérifier que pour $x \neq 0$ fixé, $n(x, t)$ est une fonction croissante de t et que $n(x, t) \rightarrow n_0$ quand $t \rightarrow +\infty$.
- Tracer l'allure de n en fonction de x à diverses dates et expliquer le titre de cet exercice.



6.7

Diffusion et explosion

Dans un barreau de longueur L et de section S , un processus de création de particules est modélisé ainsi : le nombre de particules créées pendant dt dans un élément de volume $d\tau$ est proportionnel à la densité particulaire :

$$\delta N_c = \lambda \cdot n \cdot d\tau dt$$

On se place en régime unidirectionnel selon l'axe (O, x) avec $x \in [0, L]$, on note $n(x, t)$ la densité particulaire et $\vec{j} = j(x, t)\vec{u}_x$ la densité de courant particulaire. On suppose qu'un processus d'élimination aux extrémités impose $n(0, t) = n(L, t) = 0$. On note D le coefficient de diffusion.

a) Par un bilan sur la tranche $[x, x + dx]$, établir l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} + \lambda \cdot n(x, t)$$

b) On cherche une solution stationnaire sous la forme $n(x, t) = v(x)e^{\beta t}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par v et préciser les conditions aux limites en $x = 0$ et en $x = L$.

c) Montrer que si $\lambda = \beta$, ou si $\lambda < \beta$, la solution est uniformément nulle. On suppose maintenant que $\lambda > \beta$ et on pose $\frac{1}{\delta^2} = \frac{\lambda - \beta}{D}$.

d) Montrer $L = \pi\delta$ et exprimer $v(x)$.

e) En déduire l'expression de β et en déduire l'existence d'une valeur critique pour L au dessus de laquelle le barreau se comporte comme une bombe.



6.8

Diffusion et sédimentation : une formule due à Albert Einstein

On assimile des poussières à des sphères de rayon r de masse volumique μ en suspension dans l'air de masse volumique μ_0 . Elles subissent une force de frottement donnée par la loi de Stokes $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$ où η est la viscosité de l'air. Au bout d'un temps très bref τ , les molécules acquièrent une vitesse de chute constante v . On note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur.

a) Exprimer la vitesse limite \vec{v} de chute des particules.

b) Montrer l'existence d'un flux de particules \vec{j}_S de sédimentation (associé à la chute gravitationnelle des particules) qu'on exprimera en fonction de la densité particulaire $n(z)$.

c) Cette densité particulaire provoque un flux diffusif de particules \vec{j}_D de coefficient D ; donner son expression.

d) En régime permanent, justifier que $\vec{j}_S + \vec{j}_D = \vec{0}$. En déduire qu'on peut écrire $n(z) = n_0 e^{-\frac{z}{h}}$ où on donnera l'expression de h .

e) Cette expression s'identifie à la loi statistique de Boltzmann $n(z) = n_0 e^{-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}}$ où \mathcal{E} est une énergie caractéristique des objets considérés et $k_B T$ l'ordre de grandeur de l'énergie thermique. En déduire la formule d'Einstein : $D = \frac{k_B T}{6\pi r \eta}$.

6.9**Évaporation d'un parfum (résolution de problème)**

Au fond d'un tube à essais de section S et de hauteur H , on verse une hauteur h_0 d'un liquide très volatile. En justifiant les hypothèses et approximations effectuées, et en introduisant toutes valeurs utiles relatives aux propriétés physiques du liquide, déterminer l'équation d'évolution $h(t)$ de la hauteur de liquide dans le tube et la durée au bout de laquelle le tube sera vide.

6.10**Irréversibilité de la diffusion et convexité**

Une enceinte calorifugée, de volume V constant est cloisonnée en n chambres ($n \geq 2$) contenant chacune des particules de natures deux-à-deux différentes, formant des gaz parfaits, sans interaction chimique deux-à-deux, à la même température et à la même pression. En s'inspirant de l'exemple donné dans la fiche relative à l'irréversibilité, justifier que l'homogénéisation de la composition par diffusion des particules dans toute l'enceinte à travers les cloisons est irréversible. On justifiera et on utilisera la concavité de la fonction logarithme.

6.11**Osmose et pression osmotique (résolution de problème)**

Une enceinte calorifugée de volume $2V_0$ est séparée par une cloison en deux chambres 1 et 2 de même volume V_0 . Dans 1, on place n_0 moles d'hélium, gaz parfait à la température initiale T_0 . Dans 2, on place n_0 moles de diazote, gaz parfait à la température T_0 . La différence importante de taille entre les deux types de particules, He et N_2 , a pour conséquence que la cloison est perméable aux atomes d'hélium et imperméable aux molécules de diazote.

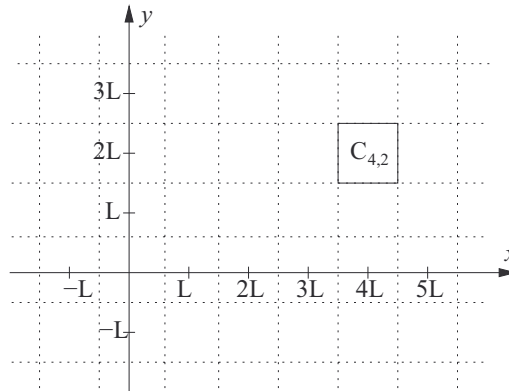
- Pourquoi peut-on considérer que l'hélium subit une détente de Joule Gay-Lussac ?
- Déterminer la température finale du système et les pressions finales P_1 et P_2 et la pression osmotique différentielle $P_2 - P_1$ en fonction de la pression initiale P_0 .
- Montrer que la transformation est irréversible.
- Toute irréversibilité d'un processus indique qu'il est possible de le modifier pour récupérer de l'énergie. Comment est-il possible de récupérer du travail ici ? Comment récupérer du travail au niveau d'un estuaire où un fleuve d'eau douce se jette dans la mer salée (il existe des membranes perméables aux molécules d'eau et imperméables aux ions).

6.12

Étude probabiliste de la diffusion à deux dimensions

Une plaque fine, munie d'un repère (O, x, y) , est le siège d'un phénomène de diffusion de particules indiscernables et sans interactions mutuelles. On la subdivise en carrés $C_{j,k}$ de côté L :

$$C_{j,k} = \left[jL - \frac{L}{2}, jL + \frac{L}{2} \right] \times \left[kL - \frac{L}{2}, kL + \frac{L}{2} \right]$$



La probabilité qu'une particule quelconque se trouve dans $C_{j,k}$ à la date t est $p(jL, kL, t)$. L est le libre parcours moyen, u est la vitesse quadratique moyenne et $\tau = \frac{L}{u}$ un temps caractéristique. Toutes les τ secondes, chaque particule passe aléatoirement dans l'une des quatre cases contiguës.

- a) Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x, y, t) = N \cdot p(x, y, t)$.
- b) La généralisation à deux dimensions de l'équation de diffusion s'écrit

$$\frac{\partial n(x, y, t)}{\partial t} - D\Delta n(x, y, t) = 0$$

où Δ est l'opérateur Laplacien

$$\Delta n(x, y, t) = \frac{\partial^2 n(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n(x, y, t)}{\partial y^2}$$

Donner le coefficient de diffusion D en fonction de u et L .

- c) En coordonnées cylindriques, l'équation de diffusion précédente s'écrit

$$\frac{\partial n(r, \theta, t)}{\partial t} - D\Delta n(r, \theta, t) = 0$$

$$\text{avec } \Delta n(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n(r, \theta, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n(r, \theta, t)}{\partial \theta^2}$$

À $t = 0$, les particules sont toutes dans la case centrale $C(0,0)$. Justifier qu'on peut considérer que

$$n(r, t, \theta) = n(r, t)$$

et déterminer l'ordre de grandeur du rayon du disque de diffusion à la date T .

6.13**Étude probabiliste d'une diffusion anisotrope**

Un barreau filiforme $(0, x)$ est le siège de la diffusion de particules indiscernables susceptibles d'interagir avec le matériau. On subdivise l'axe x en sites de largeur L . L'abscisse du k ième site est $x_k = kL$ et on suppose que toutes les τ secondes, chaque particule passe aléatoirement à un site voisin, avec une préférence double pour le voisin d'abscisse supérieure par rapport au voisin d'abscisse inférieure. Établir l'équation de diffusion vérifiée par la densité particulaire $n(x, t)$.

6.14**Étude probabiliste d'une diffusion avec terme d'annihilation ou de création**

Un barreau filiforme $(0, x)$ est le siège de la diffusion de particules indiscernables susceptibles d'interagir avec le matériau. On subdivise l'axe x en sites de largeur L . L'abscisse du k ième site est $x_k = kL$ et on suppose que toutes les τ secondes, chaque particule passe aléatoirement à un site voisin, mais dans son déplacement, la probabilité qu'elle soit absorbée par le matériau (et donc qu'elle disparaisse) est $\frac{k}{L}$.

- Établir l'équation de diffusion vérifiée par la densité particulaire $n(x, t)$.
- Comment modifier ce modèle pour remplacer l'annihilation éventuelle de la particule qui se déplace par la création d'une nouvelle particule, stimulée par la particule qui se déplace, dans un matériau dopé ?

Du mal à démarrer ?

6.1 (a) La loi des gaz parfaits permet de conclure. (b) Le flux sortant de la goutte est aussi celui traversant la demi-sphère de rayon r . (c) La densité particulaire en électrons de conduction est égale au nombre d'atomes de cuivre par mètre cube. (d) La charge dq porte $\frac{dq}{e}$ électrons. (e) On pourra supposer que les électrons ont tous une vitesse égale à la vitesse moyenne et exprimer le flux en fonction de celle-ci.

6.2 On peut comparer les durées caractéristiques de diffusion radiale et longitudinale pour la première question. Pour la deuxième question, l'ordre de grandeur du gradient radial de densité particulaire dans la gaine est $\frac{n(x, t) - 0}{\ell}$, la loi de Fick permet de conclure. Le bilan qui suit et la résolution de l'équation différentielle sont très classiques.

6.3 Le sang a le temps de s'oxygéner si sa durée de séjour au contact de l'alvéole est supérieure au temps total de diffusion de l'oxygène dans l'alvéole puis dans le capillaire.

6.4 Le raisonnement qui conduit à la résistance particulaire est en tout point analogue à celui du chapitre 5 pour les résistances thermiques. La résolution du système obtenu à la deuxième question est facilitée par le recours aux inconnues auxiliaires $S(t) = n_1(t) + n_2(t)$ et $D(t) = n_1(t) - n_2(t)$.

6.5 Il n'est question ici que de calculs mathématiques : limite pour (a), annulation de la dérivée temporelle pour (b), changement de variable d'intégration pour (d).

6.6 La difficulté mathématique préliminaire est la dérivée de la fonction erf : celle-ci est une intégrale fonction de sa borne supérieure donc $\text{erf}'(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$. Les dérivées de $n(x, t)$ par rapport

à t et à x sont ensuite obtenues par application de la formule de dérivation composée.

6.7 L'établissement de l'équation aux dérivées partielles est classique. Pour la résolution, une bonne connaissance des équations différentielles du second ordre est requise. Une relation de quantification (faisant apparaître un entier n) résulte des conditions aux limites appliquées à une solution sinusoïdale, et le fait que $n = 1$ résulte de l'impossibilité pour une densité particulaire de prendre des valeurs négatives.

6.8 La vitesse limite est la conséquence de la loi de la quantité de mouvement en régime permanent où l'on n'oublie pas la poussée d'Archimède. Le flux de sédimentation est donné par un bilan, le flux diffusif par la loi de Fick. L'énergie caractéristique est l'énergie potentielle de pesanteur modifiée par la poussée d'Archimède.

6.9 On pourra supposer que la diffusion du parfum dans le tube entre l'interface et le haut est quasi stationnaire, en déduire le flux de parfum qui s'évapore et rapporter la quantité évaporée pendant dt à la diminution de la hauteur $-dh$ de la colonne de liquide.

6.10 On pourra poser $V_k = \alpha_k \cdot V$ avec $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ puis calculer ΔS par la même méthode que dans la fiche. L'inégalité de convexité appliquée à la fonction $-\ln$ permet de conclure.

6.11 Le calcul est analogue à celui proposé dans l'exemple de la fiche correspondante. La récupération d'énergie peut être envisagée en canalisant le mouvement des liquides poussés par la pression osmotique différentielle et en plaçant une turbine dans le canal.

6.12 Le raisonnement détaillé dans l'exemple du cours est repris en prenant en compte les quatre cases voisines immédiates. Les développements limités font apparaître les dérivées partielles de p par rapport à x , y et t .

6.13 Les coefficients $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ de l'exemple du cours deviennent $\frac{2}{3}$

et $\frac{1}{3}$.

6.14 Si la particule est dans un site à la date $t + \tau$, c'est qu'elle n'a pas été absorbée (avec une probabilité $1 - \frac{\ell}{L}$) et qu'elle était avec une probabilité égale dans l'un des deux sites voisins.

Corrigés des exercices

6.1

a) Au dessus de la flaque d'eau, on peut considérer que la phase liquide est en équilibre avec la phase gazeuse. La loi des gaz parfaits permet de calculer la quantité de matière d'eau n_0 dans un volume V , on en déduit le nombre de molécules N grâce à la constante d'Avogadro :

$$n = \frac{N}{V} = \frac{n_0 \mathcal{N}_A}{V} = \frac{P_S \mathcal{N}_A}{RT} = 1,0 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

b) La vaporisation étant isotrope, le flux du vecteur \vec{j}_p à travers la demi-sphère Σ de rayon r donne le flux particulaire

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{j}_p \cdot \vec{dS} = j_p \cdot 2\pi r^2$$

Ce flux est égal à celui quittant la goutte : pendant dt , une masse $dm = D_m dt$ se vaporise, soient $dn_0 = \frac{dm}{M}$ moles, soient $dN = dn_0 \cdot \mathcal{N}_A$ molécules, donc

$$\Phi = \frac{dN}{dt} = \frac{D_m \mathcal{N}_A dt}{M dt} = \frac{D_m \mathcal{N}_A}{M}$$

Par identification :

$$j_p \cdot 2\pi r^2 = \frac{D_m \mathcal{N}_A}{M} \text{ donc}$$

$$j_p = \frac{D_m \mathcal{N}_A}{2\pi r^2 M} = 1,30 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Dans un volume V , il y a $n_{Cu} = \frac{\mu V}{M}$ moles donc

$$N_{Cu} = \frac{\mu V \mathcal{N}_A}{M}$$

atomes, donc autant d'électrons de conduction et

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{\mu \mathcal{N}_A}{M} = 8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

d) Le vecteur densité de courant électrique volumique est

$$\vec{j} = j \vec{u}_x \text{ avec } j = \frac{i}{S} = 5000 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

Pendant dt à travers S passe une charge $dq = i \cdot dt$ représentant $dN = \frac{dq}{e}$ électrons, circulant dans le sens opposé à celui du courant. On en déduit

$$\vec{j}_p = -j_p \vec{u}_x \text{ avec } j_p = \frac{dN}{S dt} = \frac{i}{eS} = 3,12 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

e) Supposons que les électrons de conduction se déplacent tous à la vitesse $-v_m \vec{u}_x$. Les électrons traversant une section droite du cylindre pendant dt sont ceux situés à une distance maximale $v_m dt$ de cette section, ce qui délimite un volume $S v_m dt$. On y trouve donc $n_e S v_m dt$ électrons où n_e a été calculé à la question (c). Le flux d'électrons est donc $\Phi_e = n_e S v_m$. Or $\Phi_e = j_p S$ où j_p a été calculé à la question (d). Par identification :

$$n_e S v_m = j_p S \text{ donc } v_m = \frac{j_p}{n_e} = 3,7 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette valeur peut surprendre, c'est une vitesse moyenne, les électrons ont individuellement des vitesses beaucoup plus grandes, et les incessants chocs qu'ils subissent (dans un modèle classique) donnent une distribution presque aléatoire à la direction des vecteurs vitesse.

6.2

a) La diffusion à travers la gaine crée une hétérogénéité radiale de concentration. Mais $D \gg D'$ et $R \ll L$ donc la diffusion radiale est a priori rapide, avec une constante de temps $\tau_R \approx \frac{R^2}{D}$ très faible et très petite devant celle de la diffusion longitudinale $\tau_L \approx \frac{L^2}{D}$. L'homogénéisation radiale de n est donc rapide et on peut considérer que $n(x, t) = n(x, t)$.

b) Le courant radial particulaire à travers la gaine vérifie la loi de Fick qu'on traduit en ordres de grandeur en assimilant le gradient au taux de variation mesuré sur l'épaisseur :

$$\vec{j}' = -D' \overrightarrow{\text{grad}} n \text{ donc } j' \approx D' \frac{n(x, t) - 0}{\ell}$$

Le flux est donc $d\Phi_f = j' \cdot dS$ où dS est l'aire de la bandelette de largeur dx et de longueur $2\pi R$, d'où

$$d\Phi_f \approx \frac{D' n(x, t)}{e} \cdot 2\pi R dx$$

- c) La tranche de l'âme située entre x et $x + dx$ reçoit un flux entrant en x , un flux sortant en $x + dx$ et un flux de fuite sur sa paroi latérale. Le bilan de particules pendant dt s'écrit donc

$$\pi R^2 dx n(x, t + dt) - \pi R^2 dx n(x, t) = j_p(x, t) \pi R^2 dt - j_p(x + dx, t) \pi R^2 dt - \frac{D' n(x, t)}{e} \cdot 2\pi R dx dt$$

En divisant par $\pi R^2 dx dt$ et en effectuant les développements limités à l'ordre 1 en dx et en dt , on en déduit

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_p(x, t)}{\partial x} - \frac{2D'}{eR} n(x, t)$$

La loi de Fick s'écrit ici $j_p(x, t) = -D \frac{\partial n(x, t)}{\partial x}$ et en injectant dans l'équation précédente, on en déduit

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} - \frac{2D'}{eR} n(x, t)$$

- d) En régime stationnaire, la dérivée temporelle est nulle et l'équation s'écrit

$$\frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} n(x) = 0 \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{eRD}{2D'}}$$

L'équation caractéristique a pour solutions les réels $\pm \frac{1}{\delta}$ donc la solution générale est

$$n(x) = A e^{-\frac{x}{\delta}} + B e^{\frac{x}{\delta}}$$

Les conditions aux limites donnent le système

$$\begin{cases} A + B = n_0 \\ A e^{-\frac{L}{\delta}} + B e^{\frac{L}{\delta}} = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} B = -n_0 \frac{e^{-\frac{L}{\delta}}}{e^{\frac{L}{\delta}} - e^{-\frac{L}{\delta}}} \\ A = n_0 \frac{e^{\frac{L}{\delta}}}{e^{\frac{L}{\delta}} - e^{-\frac{L}{\delta}}} \end{cases}$$

$$\text{donc } n(x) = n_0 \frac{\text{sh}\left(\frac{L-x}{\delta}\right)}{\text{sh}\frac{L}{\delta}}$$

Si $D' \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow \infty$ et en utilisant le développement limité $\text{sh } \epsilon \approx \epsilon$ pour $\epsilon \ll 1$, on en déduit que $n(x) \approx n_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$. La gaine est étanche et on obtient un profil de répartition affine des particules, solution de l'équation de Laplace $\Delta n = 0$.

6.3

- a) L'équation de diffusion sans terme de source s'écrit

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$$

En ordres de grandeur, le Laplacien étant un opérateur de dérivée deuxième par rapport aux variables d'espace :

$$\frac{n}{\tau} \approx D \frac{n}{L^2}$$

d'où la relation de l'énoncé.

- b) Le dioxygène diffuse du centre de l'alvéole jusqu'à la périphérie avec un temps caractéristique

$$\tau_1 = \frac{R^2}{D} = 0,56 \text{ ms}$$

Il diffuse dans le capillaire avec un temps caractéristique

$$\tau_2 = \frac{r^2}{D'} = 100 \text{ ms}$$

Le temps total de diffusion est donc de l'ordre de

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 \approx 100 \text{ ms}$$

La durée de séjour du sang au contact de l'alvéole est

$$T = \frac{\pi(R+r)}{v} = 346 \text{ ms}$$

donc $T = 3\tau$ ce qui prouve que le sang a le temps de se charger en dioxygène.

6.4

- a) En régime permanent, le flux de particules entrant en x est égal à celui sortant en $x + dx$, soit

$$S j(x) dt - S j(x + dx) dt = 0 \text{ donc } \frac{dj(x)}{dx} = 0$$

Or $j(x) = -D \frac{dn(x)}{dx}$ donc $\frac{d^2 n(x)}{dx^2} = 0$. On en déduit que $n(x)$ est une fonction affine $n(x) = Ax + B$. Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} n_1 = B \\ n_2 = AL + B \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} B = n_1 \\ A = \frac{n_2 - n_1}{L} \end{cases}$$

donc $n(x) = \frac{n_2 - n_1}{L} x + n_1$, $j(x) = -D \frac{dn(x)}{dx} = \frac{D(n_1 - n_2)}{L}$. Le flux est donc indépendant de x et vaut

$$\Phi = j(x) \cdot S = \frac{DS(n_1 - n_2)}{L} \text{ donc } n_1 - n_2 = \frac{L}{DS} \Phi$$

La résistance particulière est donc $R_p = \frac{L}{DS}$.

- b) Le flux vaut $\Phi(t) = \frac{n_1(t) - n_2(t)}{R_p}$. Pendant dt , $\Phi(t)dt$ particules quittent donc la cuve de gauche et entrent dans celle de droite. On en déduit :

$$\begin{cases} V_0 n_1(t+dt) - V_0 n_1(t) = -\frac{n_1(t) - n_2(t)}{R_p} dt \\ V_0 n_2(t+dt) - V_0 n_2(t) = \frac{n_1(t) - n_2(t)}{R_p} dt \end{cases}$$

En divisant par $V_0 dt$ et en effectuant le développement limité à l'ordre 1 en dt , on en déduit le système

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = -\frac{1}{\tau} (n_1(t) - n_2(t)) \\ \frac{dn_2}{dt} = \frac{1}{\tau} (n_1(t) - n_2(t)) \end{cases} \text{ avec } \tau = R_p V_0 = \frac{LV_0}{DS}$$

En sommant ces deux équations, il vient :

$$\frac{dn_1}{dt} + \frac{dn_2}{dt} = 0 \text{ soit } \frac{d(n_1 + n_2)}{dt} = 0$$

donc $n_1(t) + n_2(t)$ est constante et en utilisant la condition initiale

$$n_1(t) + n_2(t) = \frac{N_0}{V_0} + 0$$

En soustrayant les deux équations, il vient

$$\frac{d(n_1 - n_2)}{dt} = -\frac{2}{\tau} (n_1 - n_2) \text{ donc } n_1(t) - n_2(t) = A e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

avec $A = \frac{N_0}{V_0}$ d'après les conditions initiales. On en déduit enfin

$$\begin{cases} n_1(t) = \frac{(n_1(t) + n_2(t)) + (n_1(t) - n_2(t))}{2} = \frac{N_0}{2V_0} \left[1 + e^{-\frac{2t}{\tau}} \right] \\ n_2(t) = \frac{(n_1(t) + n_2(t)) - (n_1(t) - n_2(t))}{2} = \frac{N_0}{2V_0} \left[1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right] \end{cases}$$

Le régime est quasi stationnaire si le temps caractéristique de propagation t_p des perturbations est très petit devant le temps caractéristique de variation T . Ici, t_p est le temps caractéristique de diffusion dans le cylindre, soit $t_p = \frac{L^2}{D}$, et T est la constante de temps de l'exponentielle soit $T = \frac{\tau}{2} = \frac{LV_0}{2DS}$. On a donc $t_p \ll T$ si $\frac{4L}{\tau} \ll 1$ soit $\frac{2LS}{V_0} \ll 1$, soit $2LS \ll V_0$. On retrouve donc l'hypothèse de l'énoncé : le volume du cylindre est très petit devant celui des cuves.

6.5

- a) La limite quand $t \rightarrow 0$ est celle d'une forme indéterminée classique, elle est nulle.
b) À x fixé,

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = A \left[-\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{4Dt^2\sqrt{t}} \right] e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Elle est nulle pour

$$\frac{1}{2t\sqrt{t}} = \frac{x^2}{4Dt^2\sqrt{t}} \text{ soit } t_x = \frac{x^2}{2D}$$

- c) En considérant $t_L = \tau$ comme le temps caractéristique de diffusion entre $x = 0$ et $x = L$, on a donc $D = \frac{L^2}{2\tau}$ ce qui est analogue en ordres de grandeur à la relation habituelle.
d) Dans la tranche $[x, x + dx]$, le nombre de particules à la date t est $dN = n(x, t) \cdot S dx$. Le nombre total de particules est donc la quantité intégrale

$$N(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx$$

On effectue le changement de variable $u = \frac{x}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}$ donc $du = \frac{dx}{2\sqrt{D}\sqrt{t}}$. On en déduit

$$N(t) = 2A\sqrt{D} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = 2A\sqrt{D}\pi$$

Le nombre total de particules est donc effectivement constant et par identification $N_0 = 2A\sqrt{D}\pi$ donc $A = \frac{N_0}{2\sqrt{D}\pi}$.

6.6

- a) On doit dériver n par rapport à t et deux fois par rapport à x . La fonction est paire par rapport à x , plaçons nous pour $x > 0$ où $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -n_0 \operatorname{erf}' \left(\sqrt{\frac{x^2}{4Dt}} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{x^2}{4D}} \right)$$

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{n_0 x}{\sqrt{4\pi D}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial x} = -n_0 \operatorname{erf}' \left(\sqrt{\frac{x^2}{4Dt}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{4Dt}} \right)$$

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial x} = -\frac{2n_0}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

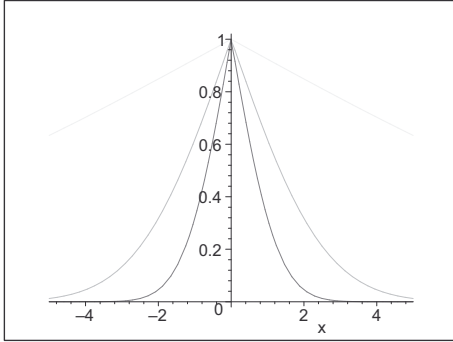
$$\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{2n_0}{\sqrt{4\pi D t}} \cdot \frac{-2x}{4Dt} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

$$\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = \frac{n_0 x}{D\sqrt{4\pi D}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} = \frac{1}{D} \frac{\partial n(x,t)}{\partial t}$$

ce qui prouve que $n(x, t)$ vérifie l'équation de diffusion simple unidirectionnelle.

- b) On remarque que $\operatorname{erf}(0) = 0$ et donc que $\forall t > 0$, $n(0, t) = n_0$ qui est la condition aux limites imposée. Pour $x \neq 0$, on remarque que $\lim_{u \rightarrow +\infty} \operatorname{erf}(u) = 1$, $\sqrt{\frac{x^2}{4Dt}}$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0. On a donc $n(x, 0) = 0$ à l'instant initial.

- c) On vérifie ci-dessus que pour tout $x \neq 0$, $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} > 0$. Quand $t \rightarrow +\infty$, $\sqrt{\frac{x^2}{4Dt}} \rightarrow 0$ donc $n(x,t) \rightarrow n_0$.
- d) En tout point, n initialement nul augmente au cours du temps et tend vers n_0 , on a donc une saturation progressive de tout l'espace. Voici l'allure de $n(x,t)$ à différentes dates :



6.7

- a) La variation du nombre de particules dans la tranche de volume Sdx pendant dt est égale au nombre de particules entrant en x moins le nombre sortant en $x + dx$ plus le nombre de particules créées dans la tranche :

$$Sdx \cdot n(x, t + dt) - Sdx \cdot n(x, t) = j_p(x, t)Sdt - j_p(x + dx, t)Sdt + \lambda n(x, t)Sdxdt$$

En divisant par $Sdxdt$ et en effectuant les développements limités à l'ordre 1 en dx et en dt , on en déduit

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_p(x, t)}{\partial x} + \lambda \cdot n(x, t)$$

et en utilisant la loi de Fick $j_p(x, t) = -D \frac{\partial n(x, t)}{\partial x}$, on obtient l'équation donnée par l'énoncé.

- b) En remplaçant dans l'équation :

$$v(x)\beta e^{\beta t} = Dv''(x)e^{\beta t} + \lambda v(x)e^{\beta t}$$

$$\text{donc } v''(x) + \frac{\lambda - \beta}{D}v(x) = 0$$

Les conditions aux limites pour $n(x, t)$ donnent immédiatement $v(0) = v(L) = 0$.

- c) Si $\lambda = \beta$, $v(x) = Ax + B$ et les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} B = 0 \\ AL = 0 \end{cases} \text{ donc } A = B = 0 \text{ et } \forall x, v(x) = 0$$

Si $\lambda < \beta$, en posant $\frac{\lambda - \beta}{D} = \frac{\lambda - \beta}{D}$, alors $v(x) = A^{-\frac{x}{\delta}} + Be^{\frac{x}{\delta}}$. Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{-\frac{L}{\delta}} + Be^{\frac{L}{\delta}} = 0 \end{cases} \text{ donc } A = B = 0 \text{ et } \forall x, v(x) = 0$$

La solution est donc triviale dans ces deux cas qu'on rejette. On suppose donc que $\lambda > \beta$.

- d) Avec les notations de l'énoncé, l'équation est du type oscillateur harmonique et se résout donc en

$$v(x) = A \cos\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \sin\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} A = 0 \\ B \sin \frac{L}{\delta} = 0 \end{cases}$$

donc $A = 0$ et B ne peut être non nul que si $\sin \frac{L}{\delta} = 0$ donc si $\frac{L}{\delta} = n\pi$ où n est un entier naturel non nul. Mais si n est supérieur à 1, alors $v(x)$ prendrait des valeurs négatives, ce qui est absurde (une densité particulière est positive), donc $n = 1$, $L = \pi\delta$ soit $L^2 = \frac{D}{\lambda - \beta}$ et

$$v(x) = B \sin \frac{x}{\delta}$$

- e) Il reste à déterminer β , grâce à la relation précédente :

$$\beta = \lambda - \frac{D}{L^2}$$

- i) Si $\lambda < \frac{D}{L^2}$ alors $\beta < 0$ et il y a décroissance exponentielle.
- ii) Si $\lambda = \frac{D}{L^2}$ alors $\beta = 0$ et on est en régime permanent.
- iii) Si $\lambda > \frac{D}{L^2}$ alors $\beta > 0$ et il y a croissance exponentielle du nombre de particules : c'est une bombe.

La valeur critique est donc $L_c = \sqrt{\frac{D}{\lambda}}$.

6.8

- a) La loi de la quantité de mouvement appliquée à une poussière soumise à son poids, à la poussée d'Archimède et à la force de frottement dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit

$$\mu \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{d\vec{v}}{dt} = \mu \frac{4}{3} \pi r^3 \vec{g} - \mu_0 \frac{4}{3} \pi r^3 \vec{g} - 6\pi\eta r \vec{v}$$

En régime permanent, la vitesse est constante donc sa dérivée est nulle et la vitesse limite vaut

$$\vec{v} = -\frac{2r^2(\mu - \mu_0)g}{9\eta} \vec{u}_z$$

- b) Pendant dt , les particules qui traversent par sédimentation une surface horizontale dS située à l'altitude z sont celles situées à une distance maximale $vd t$ au dessus de dS . Ce sont donc celles situées dans un cylindre de volume $d\tau = dS \cdot vd t$. Par définition de la densité particulière, il y a en a donc $\delta N_S = n(z) \cdot d\tau$. On en déduit

$$\vec{j}_S = -\frac{\delta N_S}{dS dt} \vec{u}_z = n(z) \vec{v}$$

- c) Le flux diffusif est donné par la loi de Fick

$$\vec{j}_D = -D \text{grad } n = -D \frac{dn(z)}{dz} \vec{u}_z$$

- d) La relation donne

$$-n(z) \frac{2r^2(\mu - \mu_0)g}{9\eta} - D \frac{dn(z)}{dz} = 0 \text{ donc}$$

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{z}{h}} \text{ avec } h = \frac{9\eta D}{2r^2(\mu - \mu_0)g}$$

- e) L'énergie caractéristique est l'énergie potentielle de pesanteur corrigée de la poussée d'Archimède. Le poids apparent d'une poussière est

$$\vec{P}_{\text{app}} = m\vec{g} + \vec{\Pi} = -(\mu - \mu_0) \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{u}_z$$

Il dérive de l'énergie potentielle

$$\mathcal{E} = (\mu - \mu_0) \frac{4}{3} \pi r^3 g z$$

En identifiant les expressions des questions (d) et (e), on en déduit $\frac{z}{h} = \frac{\mathcal{E}}{k_B T}$ donc

$$\frac{2r^2(\mu - \mu_0)gz}{9\eta D} = \frac{(\mu - \mu_0) \frac{4}{3} \pi r^3 gz}{k_B T}$$

$$\text{donc } D = \frac{k_B T}{6\pi r \eta}$$

6.9

La colonne de parfum est surmontée d'une colonne d'air de hauteur $H - h(t)$. Tant qu'il y a du parfum liquide dans le tube, on peut considérer que la pression partielle en parfum P_e au niveau de l'interface est égale à la pression de vapeur saturante P_S . On peut supposer que la température reste constante, l'énergie de vaporisation étant apportée par l'atmosphère. Sous ces hypothèses, on a diffusion verticale du parfum dans le tube, avec les conditions aux limites : $P_e(h) = P_S$ et $P_e(H) = 0$ si on admet que le parfum est évacué en haut du tube. On applique la loi des gaz parfaits pour déterminer la

densité particulaire correspondante : si on note n_m le nombre de moles, N le nombre de particules et n la densité :

$$P_S V = n_m RT \text{ soit } P_S V = \frac{N}{\mathcal{N}_A} RT \text{ soit } P_S \mathcal{N}_A = n RT$$

donc $n(h) = n_0 = \frac{P_S \mathcal{N}_A}{RT}$ et $n(H) = 0$. Si on se place en régime quasi stationnaire, alors n vérifie l'équation de diffusion sous sa forme simplifiée $\Delta n = 0$ et si on suppose dans le tube cylindrique que n ne dépend que de z alors $\frac{d^2 n}{dz^2} = 0$ donc $n(z) = Az + B$. La prise en compte des conditions aux limites donne $n(z) = n_0 \frac{H-z}{H-h}$. Par suite, en notant D le coefficient de diffusion du parfum dans l'air, le vecteur densité de courant de particules vaut, d'après la loi de Fick :

$$\vec{j}_p = -D \text{grad } n = -D \frac{dn}{dz} \vec{u}_z = \frac{D n_0}{H-h} \vec{u}_z$$

Or, par définition, le nombre de particules de parfum qui quitte le tube, donc qui s'évapore par seconde est $\Phi = \frac{\delta N}{dt} = j_p S = \frac{D n_0 S}{H-h}$. Si on note M_e la masse molaire du parfum et μ_e sa masse volumique à l'état liquide, l'évaporation de δN particules correspond à une masse $dm = \frac{M_e \delta N}{\mathcal{N}_A}$ donc à un volume $dV = \frac{dm}{\mu_e} = \frac{M_e \delta N}{\mu_e \mathcal{N}_A}$ donc à une hauteur $-dh = \frac{dV}{S} = \frac{M_e dN}{S \mu_e \mathcal{N}_A}$. Par suite, h vérifie l'équation différentielle :

$$-dh = \frac{M_e D n_0}{\mu_e \mathcal{N}_A (H-h)} dt \text{ soit } (h-H) dh = \frac{M_e D n_0}{\mu_e \mathcal{N}_A} dt$$

dont la solution est

$$\left[\frac{h^2}{2} - Hh - \frac{h_0^2}{2} + Hh_0 \right] = \frac{M_e D n_0}{\mu_e \mathcal{N}_A} t$$

Le tube sera vide de liquide quand $h = 0$ donc

$$t_f = \frac{\mu_e \mathcal{N}_A Z_0 (2H - h_0)}{2M_e D n_0}$$

6.10

Notons $V_k = \alpha_k \cdot V$ le volume de la k ème chambre pour $k \in \{1, \dots, n\}$. On a donc $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. À l'équilibre, la densité des particules X_k initialement dans la k ème chambre est la même dans toutes les chambres, donc ce gaz a subi l'équivalent d'une détente de Joule Gay-Lussac donc $dU_k = 0$. Sa quantité de matière est donnée par la loi des gaz parfaits

$$n_k = \frac{PV_k}{RT} = \alpha_k \cdot \frac{PV}{RT}$$

Posons $n = \frac{PV}{RT}$: c'est la quantité de matière totale dans l'enclainte et $n_k = \alpha_k n$. Le volume passe de αV à V . La première identité thermodynamique $dU_k = -P_k dV_k + T_k dS_k$ donne

$$dS_k = \frac{P_k}{T_k} dV_k = n_k R \frac{dV_k}{V_k}$$

et en intégrant

$$\Delta S_k = n_k R \ln \frac{V}{V_k} = -\alpha_k n R \ln \alpha_k$$

L'entropie est extensive. Les gaz étant supposés parfaits, et sans interaction chimique deux-à-deux, on en déduit

$$\Delta S = \sum_{k=1}^n \Delta S_k = -nR \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln \alpha_k$$

La fonction $f(x) = -\ln x$ pour $x > 0$ a pour dérivée seconde $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ donc elle est convexe. En lui appliquant l'inégalité de convexité (inégalité de Jensen) :

$$-\ln \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right) \leq -\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln \alpha_k$$

Comme il y a au moins deux chambres, $0 < \alpha_k < 1$ pour tout k donc

$$\alpha_k^2 - \alpha_k = \alpha_k(\alpha_k - 1) < 0$$

$$\text{donc } \alpha_k^2 < \alpha_k$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 < \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$$

$$\text{donc } -\ln \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right) > -\ln 1 = 0$$

$$\text{donc } 0 < -\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln \alpha_k$$

c'est-à-dire que $\Delta S > 0$. L'enceinte étant calorifugée, l'entropie échangée est nulle donc $S_{cr} = \Delta S > 0$ ce qui prouve l'irréversibilité de la transformation.

6.11

- a) La transformation est adiabatique et la chambre 2 a une pression partielle en hélium initialement nulle.
- b) La détente de Joule Gay-Lussac est isoénergétique ; pour un gaz parfait elle est donc aussi isotherme donc la température finale dans chaque chambre est égale à la température initiale T_0 . Les volumes sont inchangés $V_{1f} = V_{2f} = V_0$. L'équilibre de diffusion est atteint quand la densité en atomes d'hélium est la même dans chaque chambre, et comme leurs volumes sont égaux, on a donc $\frac{n_0}{2}$ moles d'hélium dans chacune. Le diazote, lui, est resté dans la chambre 2. Il y a donc au total $n_{1f} = \frac{n_0}{2}$ moles de gaz parfait dans 1 et $n_{2f} = n_0 + \frac{n_0}{2} = \frac{3n_0}{2}$ dans 2. Par application de la loi des gaz parfaits

$$\begin{cases} P_1 = \frac{n_{1f} R T_0}{V_0} = \frac{P_0}{2} \\ P_2 = \frac{n_{2f} R T_0}{V_0} = \frac{3P_0}{2} \end{cases} \text{ et } P_2 - P_1 = P_0$$

Le diazote ne subit pas de transformation et la variation d'entropie de l'hélium est calculée grâce à l'identité thermodynamique

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dV = n_0 R \frac{dV}{V}$$

donc $\Delta S = n_0 R \ln \frac{2V_0}{V_0} = n_0 R \ln 2$. La transformation est adiabatique donc l'entropie échangée est nulle et

$$S_{cr} = \Delta S = n_0 R \ln 2 > 0$$

donc la transformation est irréversible.

- c) On recueille l'eau douce du fleuve dans une cuve indéformable avant qu'elle ne se jette dans la mer jusqu'à remplissage complet. On remplit complètement une seconde cuve indéformable avec de l'eau de mer. Les deux cuves sont séparées par une membrane semi-perméable. La densité en sel est différente entre les deux cuves. Conformément au second principe, le système évolue spontanément dans le sens de l'homogénéisation des salinités, donc l'eau migre de la cuve d'eau douce vers la cuve d'eau salée. Comme les volumes restent constants, la pression devient plus grande dans la cuve d'eau salée que dans celle d'eau douce. Lorsque la pression osmotique différentielle est assez grande, on ouvre la vanne d'un tuyau de communication entre les deux cuves au milieu duquel on a placé une turbine ; l'eau salée passe dans ce tuyau poussée par la différence de pressions, la turbine tourne et un alternateur permet de convertir cette rotation en énergie électrique.

6.12

- a) Si la particule se trouve dans la case $C_{j,k}$ à la date $t + \tau$, c'est qu'elle se trouvait à la date t dans l'une des quatre cases

$$C_{j-1,k}, C_{j+1,k}, C_{j,k-1} \text{ ou } C_{j,k+1}$$

On en déduit

$$p(jL, kL, t + \tau) = \frac{1}{4} [p(jL - L, kL, t) + p(jL + L, kL, t) + p(jL, kL - L, t) + p(jL, kL + L, t)]$$

On écrit les développements limités au deuxième ordre par rapport à la variable d'espace, au premier ordre par rapport à la variable de temps.

$$p(jL \pm L, kL, t) = p(jL, kL, t) \pm \frac{\partial p}{\partial x}(jL, kL, t) \cdot L +$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(jL, kL, t) \cdot L^2$$

$$p(jL, kL \pm L, t) = p(jL, kL, t) \pm \frac{\partial p}{\partial y}(jL, kL, t) \cdot L +$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(jL, kL, t) \cdot L^2$$

$$p(jL, kL, t + \tau) = p(jL, kL, t) + \frac{\partial p}{\partial t}(jL, kL, t) \cdot \tau$$

On en déduit

$$\tau \frac{\partial p}{\partial t}(jL, kL, t) = \frac{L^2}{4} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(jL, kL, t) + \frac{L^2}{4} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(jL, kL, t)$$

En multipliant par N, on en déduit

$$\frac{\partial n(x, y, t)}{\partial t} = \frac{L^2}{4\tau} \left[\frac{\partial^2 n(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n(x, y, t)}{\partial y^2} \right]$$

b) On identifie avec l'équation donnée par l'énoncé d'où

$$D = \frac{L^2}{4\tau} = \frac{Lu}{4}$$

c) Il y a isotropie de la diffusion autour de l'origine du repère, donc n ne dépend pas de θ . L'équation de diffusion s'écrit donc

$$\frac{\partial n(x, y, t)}{\partial t} = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n(r, \theta, t)}{\partial r} \right)$$

Traduisons cette équation en ordre de grandeur en notant R le rayon caractéristique du disque de diffusion :

$$\frac{n}{T} \simeq \frac{D}{R} \cdot \frac{Rn}{R^2} \text{ soit } R \simeq \sqrt{DT}$$

$$\text{ou } R \simeq \frac{L}{2} \sqrt{\frac{T}{\tau}}$$

Dans cette expression, $\frac{T}{\tau}$ est le nombre de pas de longueur L effectués par une particule à la date T . On obtient donc qu'un ordre de grandeur de la distance parcourue par la particule est la racine carrée du nombre de pas multipliée par la longueur d'un pas. C'est une réponse physique à un problème mathématique célèbre.

6.13

Si la particule est dans le k ième site à la date $t + \tau$, c'est qu'elle se trouvait dans le $(k - 1)$ ième site avec une probabilité $\frac{2}{3}$ ou dans le $(k + 1)$ ième site avec une probabilité $\frac{1}{3}$. On en déduit la relation

$$p(x_k, t + \tau) = \frac{2}{3} p(x_{k-1}, t) + \frac{1}{3} p(x_{k+1}, t)$$

$$\text{soit } 3p(kL, t + \tau) = 2p(kL - L, t) + p(kL + L, t)$$

On écrit les développements limités au deuxième ordre par rapport à la variable d'espace, au premier ordre par rapport à la variable de temps.

$$\begin{cases} p(kL + L, t) = p(kL, t) + \frac{\partial p}{\partial x}(kL, t) \cdot L + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(kL, t) \cdot L^2 \\ p(kL - L, t) = p(kL, t) - \frac{\partial p}{\partial x}(kL, t) \cdot L + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(kL, t) \cdot L^2 \\ p(kL, t + \tau) = p(kL, t) + \frac{\partial p}{\partial t}(kL, t) \cdot \tau \end{cases}$$

$$\text{donc } 3\tau \frac{\partial p}{\partial t}(kL, t) = -L \frac{\partial p}{\partial x}(kL, t) + \frac{3L^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(kL, t)$$

En multipliant par le nombre total N de particules, on en déduit

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} + \frac{L}{3\tau} \cdot \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} - \frac{L^2}{2\tau} \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

6.14

a) Si la particule est dans le k ième site à la date $t + \tau$, c'est qu'elle n'a pas été absorbée et qu'elle était avec une probabilité égale dans l'un des deux sites voisins. La probabilité qu'elle soit absorbée vaut $\frac{\ell}{L}$ donc celle qu'elle ne le soit pas est $1 - \frac{\ell}{L}$. On en déduit la relation

$$p(x_k, t + \tau) = \left(1 - \frac{\ell}{L}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} p(x_{k-1}, t) + \frac{1}{2} p(x_{k+1}, t)\right]$$

$$\text{soit } p(kL, t + \tau) = \frac{1 - \ell}{2} p(kL - L, t) + \frac{1 - \ell}{2} p(kL + L, t)$$

On écrit les développements limités au deuxième ordre par rapport à la variable d'espace, au premier ordre par rapport à la variable de temps.

$$\begin{cases} p(kL + L, t) = p(kL, t) + \frac{\partial p}{\partial x}(kL, t) \cdot L + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(kL, t) \cdot L^2 \\ p(kL - L, t) = p(kL, t) - \frac{\partial p}{\partial x}(kL, t) \cdot L + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(kL, t) \cdot L^2 \\ p(kL, t + \tau) = p(kL, t) + \frac{\partial p}{\partial t}(kL, t) \cdot \tau \end{cases}$$

$$\text{donc } \tau \frac{\partial p}{\partial t}(kL, t) = \frac{L(L - \ell)}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(kL, t)$$

En multipliant par le nombre total N de particules, on en déduit

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} - \frac{L(L - \ell)}{2\tau} \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

b) Il suffit de remplacer $\frac{\ell}{L}$ par $-\frac{\ell}{L}$.

Troisième partie

Mécanique

CHAPITRE 7

Référentiels non galiléens

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Référentiel galiléen.
- ◇ Composition des vitesses et des accélérations.
- ◇ Point coïncident.
- ◇ Vitesse d'entraînement, vitesse relative.
- ◇ Accélération d'entraînement, accélération relative, accélération de Coriolis.
- ◇ Loi de la quantité de mouvement en référentiel non galiléen.
- ◇ Force d'inertie d'entraînement (référentiel en translation).
- ◇ Force d'inertie d'entraînement (référentiel en rotation uniforme).
- ◇ Force d'inertie de Coriolis.
- ◇ Champ de pesanteur.
- ◇ Équilibre d'un fluide dans un référentiel non galiléen.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Exprimer et exploiter les lois de composition des vitesses et des accélérations.
- ◇ Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en translation.
- ◇ Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en rotation uniforme.
- ◇ Étudier le mouvement d'un point dans le référentiel terrestre.
- ◇ Traduire les lois de la statique des fluides dans un référentiel non galiléen.

Les méthodes à retenir

Exprimer et exploiter les lois de composition des vitesses et des accélérations.

Soit \mathcal{R}_0 un référentiel muni d'un point fixe O_0 (il sera galiléen dans l'étude mécanique des paragraphes suivants), \mathcal{R} un référentiel en mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 muni d'un point fixe O et M un point matériel. La **loi de composition des vitesses** donne la relation entre la vitesse absolue de M dans \mathcal{R}_0 et sa vitesse relative dans \mathcal{R}

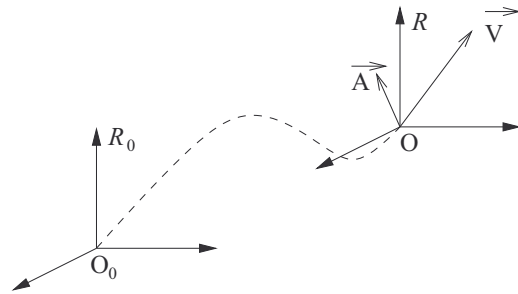
$$\vec{v}_a = \vec{v}_{\mathcal{R}_0}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} \quad \text{et} \quad \vec{v}_r = \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

La **loi de composition des accélérations** donne la relation entre l'accélération absolue de M dans \mathcal{R}_0 et son accélération relative dans \mathcal{R}

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{\mathcal{R}_0}(M) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_0M}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}_0} \quad \text{et} \quad \vec{a}_r = \vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}$$

Seuls deux cas précis sont au programme.

a) \mathcal{R} est en **translation** par rapport à \mathcal{R}_0 à la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e = \vec{V}$, vitesse de O dans \mathcal{R}_0 et d'accélération d'entraînement $\vec{a}_e = \vec{A}$, accélération de O dans \mathcal{R}_0 .

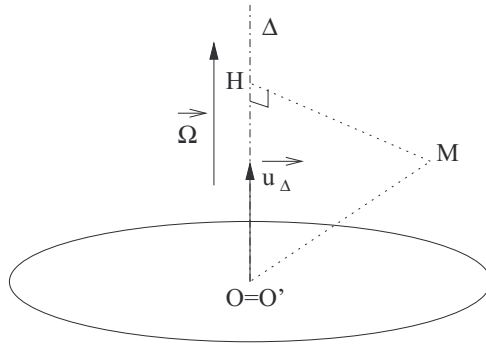


Les lois de composition s'écrivent alors

$$\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \\ \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \vec{v}_{\mathcal{R}_0}(M) = \vec{V} + \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) \\ \vec{a}_{\mathcal{R}_0}(M) = \vec{A} + \vec{a}_{\mathcal{R}}(M) \end{cases}$$

Le sens physique de ces lois est assez simple. Quand on se déplace dans un train en translation, notre vitesse dans le référentiel terrestre est la somme de la vitesse du point du train où nous posons le pied, c'est-à-dire la vitesse du train car il est en translation, et de notre vitesse par rapport au train. Il en est de même pour les accélérations.

b) \mathcal{R} est en **rotation uniforme autour d'un axe fixe Δ de \mathcal{R}_0** , à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_\Delta$. Le **point coïncident** de M à la date t est le point fixe P de \mathcal{R} par lequel passe M . On note H le projeté orthogonal de M sur Δ .



$$\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_{\mathcal{R}_0}(P) + \vec{v}_r \\ \vec{a}_a = \vec{a}_{\mathcal{R}_0}(P) + \vec{a}_C + \vec{a}_r \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \vec{v}_{\mathcal{R}_0}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{O}\vec{M} + \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) \\ \vec{a}_{\mathcal{R}_0}(M) = -\Omega^2 \vec{H}\vec{M} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{H}\vec{M} + \vec{a}_{\mathcal{R}}(M) \end{cases}$$

Le terme

$$\vec{a}_e = -\Omega^2 \vec{H}\vec{M}$$

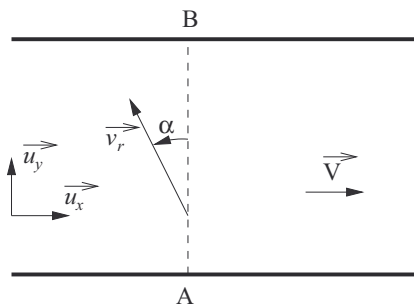
est l'accélération d'entraînement centripète de P, cohérente avec son mouvement circulaire uniforme autour de H. Le terme

$$\vec{a}_C = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{H}\vec{M}$$

est l'**accélération de Coriolis**, son sens physique est assez complexe et dans une approche pragmatique, on peut dire qu'il n'a pas d'intérêt immédiat pour la réussite aux concours.

Exemple :

Une rivière forme un référentiel \mathcal{R} en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_x$ dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_0 . Un bateau à moteur M de vitesse maximale v_{\max} veut traverser la rivière selon l'axe \vec{u}_y perpendiculaire à la rivière dans le référentiel terrestre. Pour cela, il doit naviguer à une vitesse \vec{v}_r dans le référentiel de la rivière faisant un angle α avec \vec{u}_y .



La loi de composition des vitesses donne

$$\vec{v}_a = \vec{V} + \vec{v}_r \text{ soit } v_a \vec{u}_y = V \vec{u}_x - v_r \sin \alpha \vec{u}_x + v_r \cos \alpha \vec{u}_y$$

$$\text{donc } \begin{cases} v_r \sin \alpha = V \\ v_a = v_r \cos \alpha \end{cases}$$

Le problème n'est donc possible que si $v_r > V$, donc $v_{\max} > V$. En effet, dans le cas contraire, même à pleine vitesse, le bateau ne peut remonter le courant et dérive par rapport à [AB]. Si cette condition est vérifiée, alors

$$v_r = \frac{V}{\sin \alpha} \text{ et } v_a = \frac{V}{\tan \alpha}$$

↪ Exercice 7.1.

Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en translation.

Soit \mathcal{R}_0 un référentiel galiléen et \mathcal{R} un référentiel en translation par rapport à \mathcal{R}_0 à la vitesse d'entraînement \vec{V} et avec l'accélération d'entraînement \vec{A} par rapport à \mathcal{R}_0 . O est un point fixe de \mathcal{R} . Un point matériel M de masse m est étudié dans le référentiel \mathcal{R} , ses vecteurs position, vitesse relative et accélération relative sont

$$\vec{OM}, \vec{v}_r = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \text{ et } \vec{a}_r = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}$$

La loi de la quantité de mouvement dans le référentiel non galiléen \mathcal{R} est analogue à celle énoncée dans un référentiel galiléen, à condition d'ajouter aux forces la **force d'inertie d'entraînement**

$$\sum \vec{f} + \vec{f}_{ie} = m \vec{a}_r \text{ avec } \vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e = -m \vec{A}$$

La confusion entre l'accélération du référentiel \vec{A} et celle de M dans le référentiel est une faute réhhibitoire. Nous préconisons la méthode suivante pour l'étude rigoureuse d'un problème de mécanique du point dans un référentiel non galiléen en translation.

- On définit le référentiel d'étude et on précise qu'il est « non galiléen en translation ».
- On fait un schéma.
- On définit le repère de projection cartésien ou cylindrique.
- On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs de cinématique

$$\vec{OM}, \vec{v}_r, \vec{a}_r \text{ et } \vec{A}$$

et on identifie les conditions initiales sur ces vecteurs.

e) On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs forces réelles et de la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f} \text{ et } \vec{f}_{ie} = -m\vec{A}$$

f) On en déduit par projections sur les axes du repère un ensemble d'équations différentielles dont la résolution est un problème de mathématiques.

La **loi du moment cinétique** est elle-aussi inchangée, le moment en O de la force d'inertie d'entraînement est le même que pour toute autre force

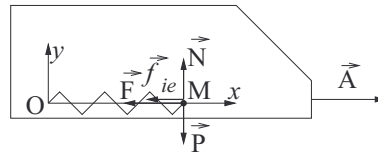
$$\mathcal{M}_O(\vec{f}_{ie}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ie}$$

La **loi de l'énergie mécanique** peut être appliquée en définissant l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement (voir exercice 7.3) mais celle-ci n'est pas au programme.

Exemple :

Un pendule élastique est formé d'un ressort de constante de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 et d'un point matériel M de masse m coulissant sur un axe (O, x) horizontal en étant soumis à un frottement visqueux $\vec{f}_v = -h\vec{v}$. Ce dispositif est embarqué dans un train en accélération uniforme horizontale constante $\vec{A} = A\vec{u}_x$. On note $x(t)$ l'abscisse de M.

- a) Le référentiel d'étude est le référentiel non galiléen du train en translation.
 b) Voici le schéma du dispositif et des forces (à l'exception de la force de frottement).



- c) Le repère de projection est $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.
 d) Les vecteurs cinématiques sont

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right., \vec{v}_r \left| \begin{array}{c} \dot{x} \\ 0 \end{array} \right., \vec{a}_r \left| \begin{array}{c} \ddot{x} \\ 0 \end{array} \right. \text{ et } \vec{A} \left| \begin{array}{c} A \\ 0 \end{array} \right.$$

- e) Les vecteurs forces sont

$$\vec{F} \left| \begin{array}{c} -k(x - \ell_0) \\ 0 \end{array} \right. \quad \vec{f}_f \left| \begin{array}{c} -h\dot{x} \\ 0 \end{array} \right. \quad \vec{f}_{ie} \left| \begin{array}{c} -mA \\ 0 \end{array} \right. \quad \vec{P} \left| \begin{array}{c} 0 \\ -mg \end{array} \right. \quad \vec{N} \left| \begin{array}{c} 0 \\ N \end{array} \right.$$

f) Voici les projections sur les deux axes

$$\begin{cases} -k(x - \ell_0) - h\dot{x} - mA = m\ddot{x} \\ -mg + N = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = k(\ell_0 - \frac{m\Delta}{k}) \\ N = mg \end{cases}$$

L'équation différentielle vérifiée par x est celle d'un oscillateur amorti, l'abscisse d'équilibre est $x_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{m\Delta}{k}$, le régime (pseudo-périodique, critique, apériodique) dépend du signe du discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation homogène $\Delta = h^2 - 4km$.

↪ Exercices 7.2, 7.3, 7.4, 7.5.

Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en rotation uniforme.

Soit \mathcal{R}_0 un référentiel galiléen et \mathcal{R} un référentiel en rotation uniforme par rapport à un axe Δ fixe de \mathcal{R}_0 passant par O , à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_\Delta$. Un point matériel M de masse m est étudié dans le référentiel \mathcal{R} , ses vecteurs position, vitesse relative et accélération relative sont

$$\vec{OM}, \vec{v}_r = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \vec{a}_r = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe Δ . La loi de la quantité de mouvement dans le référentiel non galiléen \mathcal{R} est analogue à celle énoncée dans un référentiel galiléen, à condition d'ajouter aux forces la **force d'inertie d'entraînement** et la **force d'inertie de Coriolis**

$$\sum \vec{f} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m\vec{a}_r \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\Omega^2 \vec{HM} \\ \vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_C = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r \end{cases}$$

La force d'inertie d'entraînement est dite **axifuge** (ce terme est préférable au terme usuel « centriguge ») car elle tend à faire fuir M de l'axe (et non pas du centre O). Nous préconisons la méthode suivante pour l'étude rigoureuse d'un problème de mécanique du point dans un référentiel non galiléen en rotation.

- On définit le référentiel d'étude et on précise qu'il est « non galiléen en rotation ».
- On fait un schéma.
- On définit le repère de projection cartésien ou cylindrique.
- On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs de cinématique \vec{OM} , \vec{HM} , \vec{v}_r , \vec{a}_r et $\vec{\Omega}$ et on identifie les conditions initiales sur ces vecteurs.
- On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs forces réelles, de la force d'inertie d'entraînement et de la force d'inertie de Coriolis.

$$\vec{f}, \vec{f}_{ie} = m\Omega^2 \vec{HM}, \vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

f) On en déduit par projections sur les axes du repère un ensemble d'équations différentielles dont la résolution est un problème de mathématiques.

La **loi du moment cinétique** est elle-aussi inchangée, le moment en O des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont les mêmes que pour toute autre force

$$\mathcal{M}_O(\vec{f}_{ie}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ie} \text{ et } \mathcal{M}_O(\vec{f}_{ic}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ic}$$

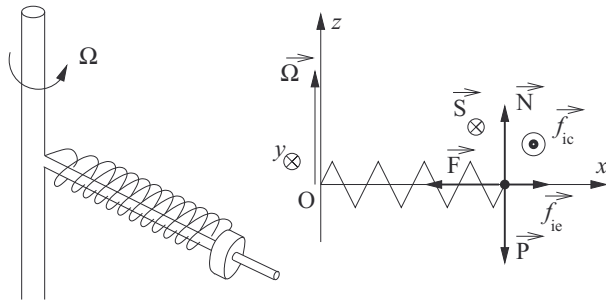
La **loi de l'énergie mécanique** peut être appliquée en remarquant que la force d'inertie de Coriolis, orthogonale au vecteur vitesse relative, ne travaille pas et en définissant l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement (voir exercice 7.7) mais celle-ci n'est pas au programme.

Exemple :

Un point matériel coulisse sans frottement sur une tige horizontale (O, x) animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe vertical (O, z) à la vitesse angulaire Ω . Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k a une extrémité fixe en O et son autre extrémité reliée à M. On note $x(t)$ l'abscisse de M sur l'axe.

a) On travaille dans le référentiel non galiléen en rotation de la tige. Dans celui-ci, la masse a un mouvement rectiligne.

b) Voici le schéma du dispositif.



c) On travaille dans le repère cartésien (O, x, y, z).

d) Voici les composantes des vecteurs cinématiques.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{HM} = \begin{vmatrix} x & \dot{x} & \ddot{x} & 0 \\ 0 & \vec{v}_r & 0 & \vec{\Omega} \\ 0 & 0 & 0 & \Omega \end{vmatrix}$$

e) Voici les composantes du poids et de la force de rappel du ressort.

$$\vec{P} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -mg \end{array} \right. \quad \vec{F} \left| \begin{array}{l} -k(x - \ell_0) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

En l'absence de frottements, l'action de la tige sur M est orthogonale à la tige, c'est donc la somme d'une force normale verticale \vec{N} qui compense le poids et d'une force normale horizontale \vec{S} qui compense la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{N} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ N \end{array} \right. \quad \vec{S} \left| \begin{array}{l} 0 \\ S \\ 0 \end{array} \right.$$

Les forces d'inertie s'écrivent

$$\vec{f}_{ie} = m\Omega^2 \overrightarrow{HM} = m\Omega^2 x \vec{u}_x \text{ et}$$

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = \left| \begin{array}{l} 0 \\ -2m\Omega \dot{x} \\ 0 \end{array} \right.$$

f) La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{S} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m\vec{a}_r \text{ donc}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -k(x - \ell_0) + m\Omega^2 x = m\ddot{x} \\ S - 2m\Omega \dot{x} = 0 \\ N - mg = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right) x = \omega_0^2 \ell_0 \\ S = 2m\Omega \dot{x} \\ N = mg \end{array} \right.$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, pulsation propre de l'oscillateur élastique en référentiel galiléen. Deux cas sont possibles.

- Si $\Omega < \omega_0$, le coefficient de x est positif et l'équation différentielle en x est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}$$

- Si $\Omega > \omega_0$, le coefficient de x est négatif et l'équation différentielle en x est celle d'un oscillateur hyperbolique, dont la solution diverge quand $t \rightarrow \infty$. La force d'inertie axifuge est trop forte pour être compensée par la force de rappel du ressort et la masse s'éloigne indéfiniment, jusqu'à la limite élastique du ressort.

↔ Exercices 7.6, 7.7, 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12, 7.13.

Étudier le mouvement d'un point dans le référentiel terrestre.

Le **référentiel géocentrique** est galiléen en bonne approximation. Le **référentiel terrestre** est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles, à la vitesse angulaire

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_s} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$T_s = 86\,164$ s est le jour sidéral. Le référentiel terrestre n'est donc pas galiléen. On doit donc prendre en compte la force d'inertie d'entraînement axifuge et la force d'inertie de Coriolis pour les points matériels évoluant à proximité de la surface terrestre.

a) Le **poïds** est la somme de la force de gravitation dirigée vers le centre de la Terre et de la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{P} = \vec{f}_g + \vec{f}_{ie} = -\frac{\mathcal{G}m_T m}{R_T^2} \vec{u}_r + m\Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$$\text{soit } \vec{P} = m\vec{g} \text{ avec } \vec{g} = -\frac{\mathcal{G}m_T}{R_T^2} \vec{u}_r + \Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

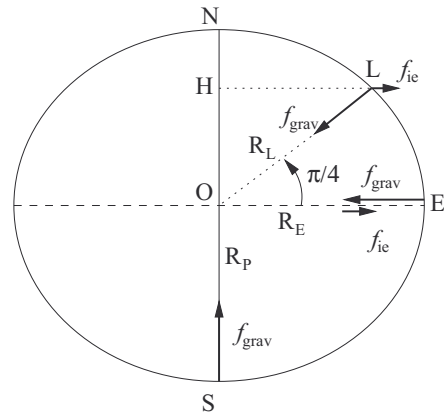
b) La force d'inertie de Coriolis n'a d'effet significatif que pour les objets dont la vitesse est grande (plus de 50 ou 100 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) ou sur des durées importantes (plus d'une heure)

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

où \vec{v}_r est la vitesse relative, donc mesurée dans le référentiel terrestre. Comme les axes du repère d'étude sont en général définis par rapport à l'horizontale et à la verticale du lieu du laboratoire, il faut au préalable projeter le vecteur $\vec{\Omega}$ (qui est selon l'axe sud-nord des pôles) dans ce repère, en utilisant l'angle λ appelé latitude.

Exemple :

Le rayon terrestre au pôle sud est $R_p = 6\,357$ km et en un point de l'équateur $R_E = 6\,378$ km. La constante de gravitation est $\mathcal{G} = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ et la masse de la Terre est $m_T = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. La ville de Limoges est presque sur le 45ième parallèle et le rayon terrestre y vaut $R_L = 6\,371$ km. Évaluons le champ de pesanteur en ces trois points.



- Au pôle sud, on est sur l'axe de rotation, donc la force d'inertie d'entraînement axifuge est nulle et le poids est égal à la force de gravitation, soit

$$g_s = \frac{\mathcal{G}m_T}{R_p^2} = 9,863 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

- Sur l'équateur, la force d'inertie d'entraînement axifuge est verticale vers le haut donc

$$g_E = \frac{\mathcal{G}m_T}{R_E^2} - \Omega^2 R_E = 9,798 - 0,034 = 9,755 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

- À Limoges, la force de gravitation est dirigée vers le centre de la Terre et a pour norme $f_{\text{grav}} = \frac{\mathcal{G}m_T m}{R_L^2} = 9,8195 \cdot m$. Le rayon du cercle décrit par Limoges lorsque la Terre tourne est $HL = R_L \cos \frac{\pi}{4} = 4\,504 \text{ km}$. La force d'inertie d'entraînement axifuge a donc pour norme

$$f_{ie} = m\Omega^2 HL = 0,024 \cdot m$$

La somme vectorielle des deux vecteurs donne un vecteur qui est dirigé vers un point de l'axe des pôles un peu plus au sud que le centre de la Terre. On en déduit la norme

$$g_L = \sqrt{\left(9,8195 - 0,024 \cos \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(0,024 \sin \frac{\pi}{4}\right)^2} = 9,803 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

↪ Exercices 7.14, 7.15, 7.16, 7.17, 7.18, 7.19, 7.20.

Traduire les lois de la statique des fluides dans un référentiel non galiléen.

La particule de fluide, de volume mésoscopique $d\tau$, de masse volumique μ , immobile dans un référentiel non galiléen subit une force d'inertie d'entraînement élémentaire, $d\vec{f}_{ie}$, d'équivalent volumique $\vec{f}_{V,ie}$:

$$d\vec{f}_{ie} = -\mu d\tau \vec{a}_e \text{ et } \vec{f}_{V,ie} = \frac{d\vec{f}_{ie}}{d\tau} = -\mu \vec{a}_e$$

En l'absence de forces électromagnétiques, la seule force à distance subie par la particule de fluide, au voisinage de la surface de la Terre, est le poids

$$d\vec{P} = \mu d\tau \vec{g} \text{ donc } \frac{d\vec{P}}{d\tau} = \mu \vec{g}$$

Enfin, les forces de contact, en statique des fluides, sont les forces de pression dont la résultante volumique est

$$\frac{d\vec{F}_{\text{pression}}}{d\tau} = -\overrightarrow{\text{grad}} P$$

La **loi de la statique des fluides** en référentiel non galiléen prend donc deux formes distinctes selon le type de référentiel.

- Dans un référentiel en translation d'accélération \vec{A} par rapport à un référentiel galiléen

$$-\mu \vec{A} + \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{0}$$

- Dans un référentiel en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω autour d'un axe fixe Δ d'un référentiel galiléen

$$\mu \Omega^2 \vec{HM} + \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{0}$$

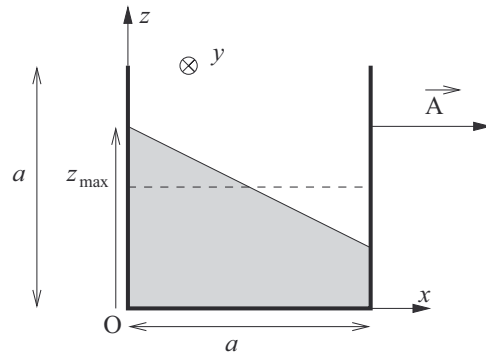
Deux axes de travail se dessinent dans l'étude de la statique des fluides en référentiel non galiléen.

a) Détermination du **champ de pression** en intégrant le gradient dans les différentes directions de l'espace et en tenant compte des conditions aux limites, puis calcul de la résultante de ces forces de pression sur une surface donnée par calcul d'une intégrale double.

b) Détermination de la surface libre d'un liquide en cherchant la forme définie par $P = P_0$, pression dans l'air.

Exemple :

Un aquarium cubique de côté a est rempli à moitié d'eau, liquide incompressible de masse volumique μ . Il est posé sur un chariot qui glisse sur un plan horizontal avec une accélération constante $\vec{A} = A\vec{u}_x$. On cherche la forme de la surface libre. La pression dans l'air extérieur est uniforme et vaut P_0 .



La loi de la statique des fluides s'écrit en projection sur les axes

$$\begin{cases} -\mu A - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ -\mu g - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

La pression ne dépend pas de y . On primitive successivement.

$$\frac{\partial P(x, z)}{\partial x} = -\mu A \text{ donc } P(x, z) = -\mu A x + K(z)$$

$$\text{donc } \frac{\partial P(x, z)}{\partial z} = K'(z) = -\mu g$$

$$\text{donc } K(z) = -\mu g z + K_0 \text{ et } P(x, y, z) = -\mu A x - \mu g z + K_0$$

La condition aux limites à la surface libre du liquide s'écrit

$$-\mu A x - \mu g z + K_0 = P_0 \text{ soit } A x + g z = K_1$$

Par conservation du volume d'eau dans le récipient, ce plan doit passer par le point milieu, soit

$$A \frac{a}{2} + g \frac{a}{2} = K_1 \text{ donc } K_0 = P_0 + \mu a \frac{A + g}{2}$$

On en déduit le champ des pressions en $x = 0$

$$P(0, y, z) = P_0 + \mu a \frac{A + g}{2} - \mu g z$$

Le point haut atteint par l'eau est l'endroit où la pression vaut P_0 , soit $z_{\max} = a \frac{A + g}{2g}$.

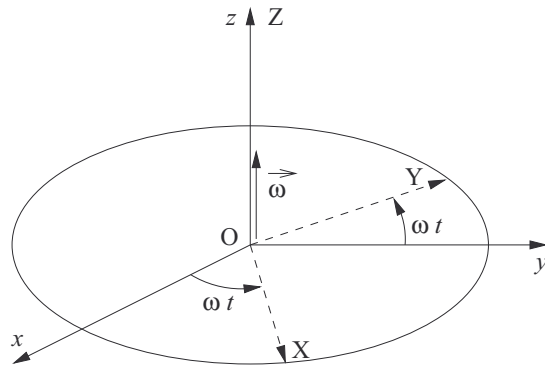
↔ Exercices 7.21, 7.22, 7.23, 7.24.

Énoncés des exercices

7.1

Composition des vitesses, des accélérations

Un manège est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$. À la date $t = 0$, $\theta = 0$ et l'axe (O, X) dessiné sur le plateau coïncide avec l'axe (O, x) du sol, l'axe (O, Y) dessiné sur le plateau coïncide avec l'axe (O, y) du sol, et les axes verticaux (O, Z) et (O, z) sont confondus.



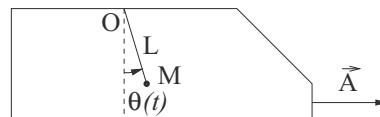
Un promeneur, initialement en O, marche sur le plateau du manège à la vitesse relative constante $\vec{v}_r = v_0 \vec{u}_X$ dans le référentiel du manège. On exprimera tous les vecteurs dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

- Déterminer les coordonnées de ses vecteurs vitesse relative et d'entraînement à la date t . En déduire celles du vecteur vitesse absolue.
- Déterminer les coordonnées de ses vecteurs accélération relative, d'entraînement et de Coriolis à la date t .
- Établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement du promeneur.
- Vérifier les lois cinématiques de composition des vitesses et des accélérations en retrouvant les coordonnées de \vec{v}_a et \vec{a}_a .

7.2

Étude d'un pendule simple dans un référentiel en translation

Un pendule simple est formé d'un fil inextensible de masse nulle et de longueur L , et d'un point matériel M de masse m . Son extrémité O est accrochée au plafond d'un train en accélération uniforme horizontale constante $\vec{A} = A \vec{u}_x$. L'angle d'inclinaison du fil est notée $\theta(t)$.



- Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant la loi de la quantité de mouvement.
- Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant la loi du moment cinétique en O.
- Déterminer l'angle d'équilibre θ_{eq} .
- On étudie les petites oscillations autour de la position d'équilibre en posant

$$\theta(t) = \theta_{eq} + \varepsilon(t) \text{ avec } \varepsilon(t) \ll 1$$

Établir l'équation différentielle vérifiée par $\varepsilon(t)$ et en déduire la période T des petites oscillations.



7.3

Introduction à l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement

Un référentiel \mathcal{R} est en translation rectiligne d'accélération constante $\vec{A} = A\vec{u}_x$ par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R}_0 . Un point matériel de masse m est réperé par

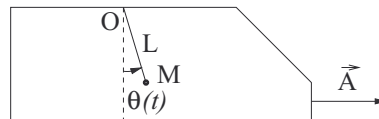
$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{R}.$$

- Donner l'expression de la force d'inertie d'entraînement \vec{f}_{ie} subie par M dans \mathcal{R} .
- Cette force dérive de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement Ep_{ie} avec

$$\vec{f}_{ie} = -\vec{\text{grad}} Ep_{ie} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial Ep_{ie}}{\partial x} \\ \frac{\partial Ep_{ie}}{\partial y} \\ \frac{\partial Ep_{ie}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de Ep_{ie} en prenant la référence en $x = 0$.

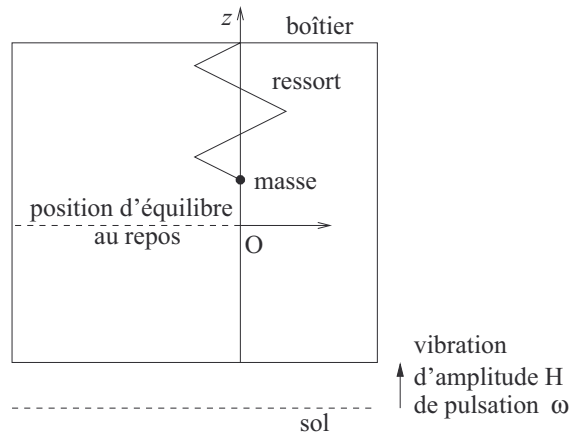
- Un pendule simple est formé d'un fil inextensible de masse nulle et de longueur L , et d'un point matériel M de masse m . Son extrémité O est accrochée au plafond d'un train en accélération uniforme horizontale constante $\vec{A} = A\vec{u}_x$. L'angle d'inclinaison du fil est notée $\theta(t)$.



- Donner l'expression de l'énergie potentielle résultante des différentes forces conservatives en fonction de θ .
- Déterminer la valeur de l'angle d'équilibre θ_{eq} grâce à l'étude de l'énergie potentielle.
- Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en écrivant la conservation de l'énergie mécanique.

7.4
Sismographe

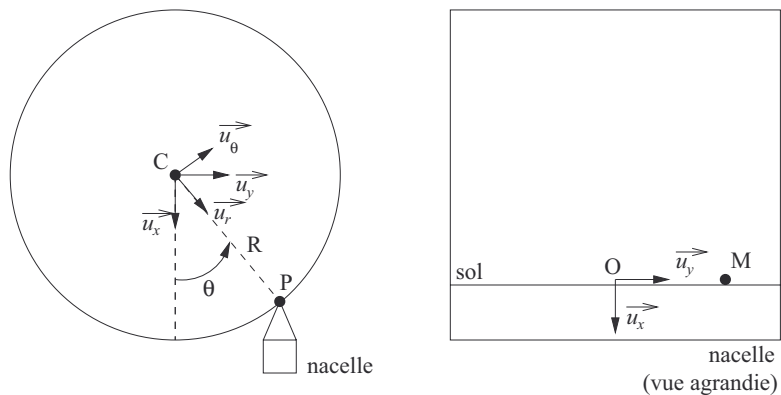
Un sismographe est constitué d'un boîtier parallélépipédique posé à même le sol, et qui bouge avec lui. Un ressort de masse négligeable, de longueur à vide ℓ_0 , de constante de raideur k , est accroché au couvercle supérieur. Un mobile ponctuel M , de masse m , y est accroché et coulisse sur un axe vertical en subissant une force de frottement fluide linéaire, de coefficient λ . On repère la position de M par sa cote mesurée sur un axe vertical (O, z) dirigé vers le haut, l'origine O étant un point fixe du boîtier correspondant à la position d'équilibre au repos du mobile. Lors d'un séisme, le sol a un mouvement d'oscillation verticale dans le référentiel terrestre supposé galiléen : le boîtier a un mouvement sinusoïdal d'amplitude H et de pulsation ω .



Établir l'équation différentielle vérifiée par z et en déduire l'amplitude des oscillations de la masse en fonction de ω . Conclure sur la fonction du sismographe.

7.5
Mouvement dans une nacelle de grande roue

Une nacelle dans une grande roue est une cabine restant toujours horizontale, dont l'extrémité supérieure P est animée d'un mouvement circulaire uniforme de centre C , de rayon R à la vitesse angulaire Ω . On repère la position de la capsule par l'angle $\theta = \Omega t$ entre la verticale et \vec{CP} .



On travaillera successivement dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et (\vec{u}_x, \vec{u}_y) et on donne

$$\vec{u}_r = \cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y \text{ et } \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y$$

- Le vecteur position de P dans le référentiel terrestre galiléen \mathcal{R}_0 est \overrightarrow{CP} . Déterminer son vecteur vitesse \vec{V} et son vecteur accélération \vec{A} dans \mathcal{R}_0 dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ puis dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) en fonction de t (on rappelle que $\theta = \Omega t$ où Ω est une constante).
- Le référentiel \mathcal{R} de la nacelle est-il galiléen ou pas ?
- Est-il en rotation ou en translation ?
- Un mobile M de masse m est posé sur le sol de la nacelle où il glisse. Sa position est donc repérée par $\overrightarrow{OM} = y\vec{u}_y$. Écrire la loi de la quantité de mouvement appliquée à M dans le référentiel \mathcal{R} en supposant qu'en plus des forces réelles et d'inertie, il subit une force de frottement $-\alpha\vec{v}$.
- À quelle condition sur R , Ω et g M ne décolle-t-il jamais ?
- Écrire dans ce cas l'équation différentielle vérifiée par y .
- Donner l'expression de l'amplitude Y_0 des oscillations de M en régime sinusoïdal forcé.

7.6

Expulsion centrifuge

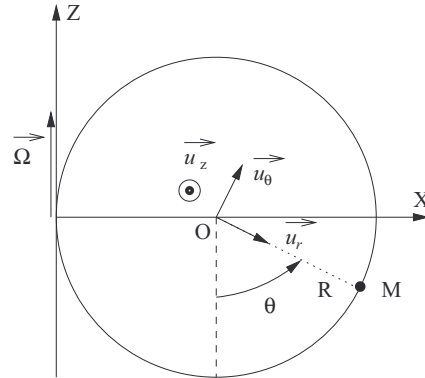
Sur une tige rectiligne horizontale OE de longueur L, définissant l'axe (O, x) , un point matériel M de masse m coulisse sans frottement. Cette tige est reliée à un arbre vertical (O, z) qui l'entraîne dans un mouvement de rotation uniforme de vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$.

- Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
- Résoudre cette équation en prenant comme condition initiale à $t = 0$: $x = 0$ et $\dot{x} = v_0$.
- En déduire la date t_f à laquelle M quitte la tige en $x = L$ (on pourra utiliser l'inconnue auxiliaire $E = e^{\Omega t}$) et la vitesse \dot{x} à cette date.

7.7
Bague coulissant sur un cerceau en rotation

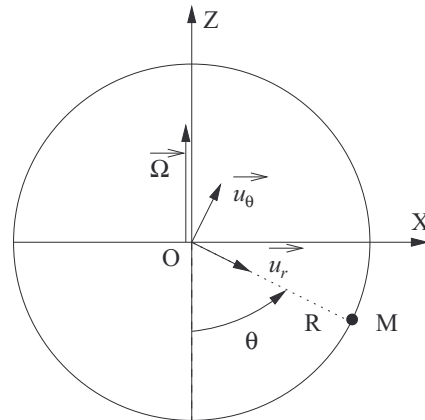
Un point matériel M de masse m s'apparente à une bague qui coulisse sans frottement sur le pourtour d'un cerceau de centre O et de rayon R.

- a) Le cerceau tourne autour d'une de ses tangentes verticales formant l'axe Z, à la vitesse angulaire Ω . On pose $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$ et on travaille dans le référentiel non galiléen en rotation du cerceau.



Établir l'équation différentielle vérifiée par θ : $R\ddot{\theta} = -g \sin \theta + R\Omega^2(1 + \sin \theta) \cos \theta$. Décrire comment on pourrait déterminer la ou les position(s) d'équilibre puis étudier les petites oscillations autour de celle(s)-ci.

- b) Le cerceau tourne autour d'un de ses diamètres verticaux formant l'axe (O,Z), à la vitesse angulaire Ω . On pose $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$ et on travaille dans le référentiel non galiléen en rotation du cerceau.

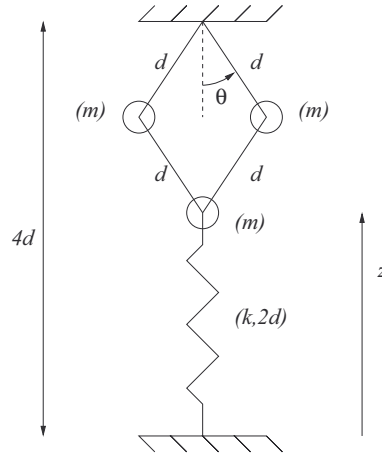


- i) Dans le référentiel en rotation, on note H le projeté orthogonal de M et on pose $\overrightarrow{HM} = \rho\vec{u}_\rho$. Donner l'expression de la force d'inertie d'entraînement subie par M.
- ii) Cette force dérive de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement $E_{p_{ie}}$ avec $\vec{f}_{ie} = -\frac{dE_{p_{ie}}}{d\rho}\vec{u}_\rho$. En déduire $E_{p_{ie}}$ en prenant la référence sur l'axe en $\rho = 0$.
- iii) Déterminer les angles correspondant à l'équilibre et discuter leur stabilité selon la valeur de Ω .

7.8

Régulateur à boules

Dans le dispositif suivant, les diverses tiges ont une longueur d et une masse négligeable. Les trois billes ont une masse m . Le ressort a une constante de raideur k et une longueur à vide $2d$. Le système tourne à vitesse angulaire constante Ω .



On admet l'expression de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement :

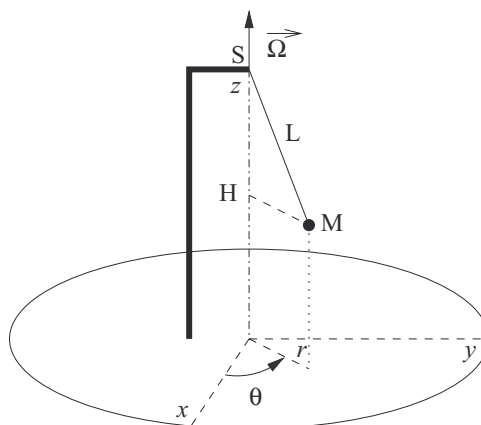
$$E_{p_{ie}} = -\frac{1}{2} m \Omega^2 H M^2$$

où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe. Déterminer la ou les valeurs de θ à l'équilibre.

7.9

Oscillations en étoile

Un mobile M de masse m est accroché au bout d'un fil inextensible de longueur L et dont l'extrémité supérieure est fixe en haut d'un mât, lui-même solidaire d'un plateau tournant à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$. Les oscillations du pendule sont de très petite amplitude et on peut supposer que M reste dans le plan horizontal (H, x, y) ; on travaillera donc dans la base cylindrique $(H, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ dans le référentiel en rotation.



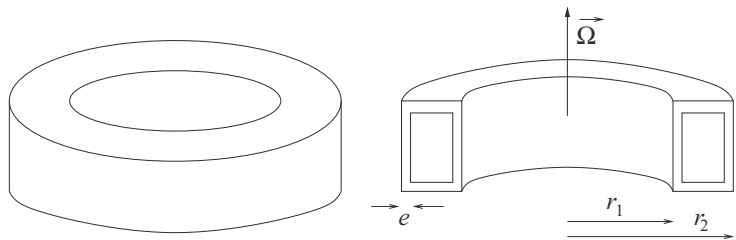
- Montrer que la force du fil dans le plan d'évolution de M s'écrit en valeur approchée $\vec{f} = -\frac{mgr}{L}\vec{u}_r$.
- Établir le système d'équations différentielles vérifiées par $r(t)$ et $\theta(t)$.
- Vérifier que $\theta(t) = -\Omega t$ est acceptable. À quel mouvement très simple correspond ce cas particulier ? En déduire l'équation vérifiée par $r(t)$ dans ce cas et la résoudre.
- On relève une trajectoire en forme de rosace à six pétales. En déduire une relation entre les différents paramètres.

7.10**Orbite circulaire**

Un corps ponctuel de masse m est satellisé en mouvement circulaire uniforme de rayon r et de période T autour du centre O d'un astre à symétrie sphérique de masse m_A . Le référentiel astro-corps est le référentiel en rotation autour de l'axe (O, z) orthogonal au plan de la trajectoire de M, et dans lequel celui-ci est fixe. En traduisant l'équilibre de M dans ce référentiel, établir la troisième loi de Kepler.

7.11**Simulateur de gravité**

Pour remédier aux troubles physiques que ressentent les astronautes en apesanteur, on envisage d'équiper une navette spatiale d'un module simulateur de gravité. Il est constitué d'un tore de section rectangulaire, de rayons intérieur r_1 et extérieur r_2 , creux, d'épaisseur des parois e . Ce tore tourne autour de son axe à la vitesse angulaire Ω . Un point M est repéré, dans le référentiel du simulateur, en coordonnées cylindriques dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.



La navette est en voyage intersidéral à vitesse constante, loin de tout astre massif.

- Donner l'expression de Ω qui permet de simuler la gravité terrestre g_0 dans le module en rotation. Faire l'application numérique avec $r_1 = 15$ m, $r_2 = 20$ m, $e = 1,0$ m et $g_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- Décrire qualitativement le mouvement et les sensations physiques d'un astronaute qui s'y promène qui saute « verticalement ».
- Étudier complètement les forces subies par un astronaute qui court à la vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{u}_\theta$.

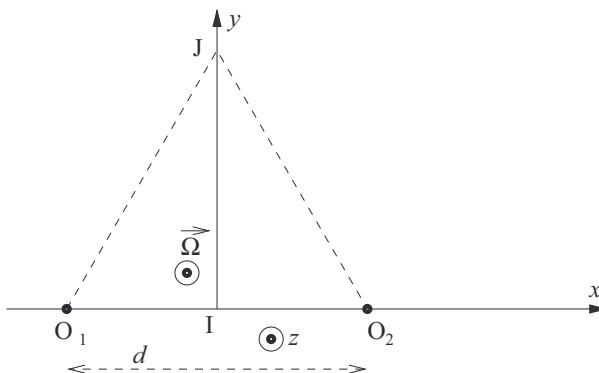
7.12

Points de Lagrange

On considère deux étoiles de même masse m_S en interaction gravitationnelle, dont la distance d reste constante. On peut démontrer dans ce cas que leurs centres O_1 et O_2 ont des mouvements circulaires uniformes de centre I, milieu fixe de ces points, de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{2Gm_S}}$$

Une planète assimilée à un point matériel M de masse $m \ll m_S$ est soumise à l'attraction gravitationnelle de ces deux étoiles. On se place dans le référentiel non galiléen de centre I en rotation uniforme autour de l'axe (I, z) orthogonal au plan d'évolution des centres de deux étoiles, et dans lequel ces deux points sont immobiles.



- a) On place M sur l'axe (I, x), à l'abscisse x . Justifier l'existence de trois positions d'équilibre de la planète. Justifier qualitativement que ces trois points, nommés points de Lagrange L_1 , L_2 et L_3 , sont instables vis-à-vis de leur mouvement sur l'axe (I, x).
- b) On place M au point J tel que (O_1O_2J) est un triangle équilatéral direct. Montrer que c'est une position d'équilibre.
- c) J est le quatrième point de Lagrange, L_4 . Le cinquième point L_5 est le symétrique de L_4 par rapport à I. Dans le référentiel en rotation, l'énergie potentielle de M est la somme des énergies potentielles de gravitation exercées par les deux étoiles et de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement axifuge. Quand on trace en trois dimensions la surface d'équation $Z = Ep(x, y)$, la position L_4 correspond à un maximum absolu local. Pourtant, c'est une position d'équilibre stable pour des petits mouvements. Justifier cette affirmation en étudiant qualitativement les petits mouvements d'un mobile initialement placé en L_4 , auquel on communique une vitesse initiale dans le plan (I, x, y). **Complément culturel** : la théorie la plus communément admise par les astrophysiciens, au sujet de l'émergence de la Lune est la suivante : une planète de masse ($5 \cdot 10^{23}$ kg ?) proche de celle de Mars, appelée Theia, s'est formée en L_4 du système Soleil-Terre, mais en a été délogée par les perturbations gravitationnelles des autres planètes, elle s'est écrasée sur la Terre, et les éclats de cet impact se sont rassemblés puis refroidis pour former la Lune.

7.13
Forces de marée

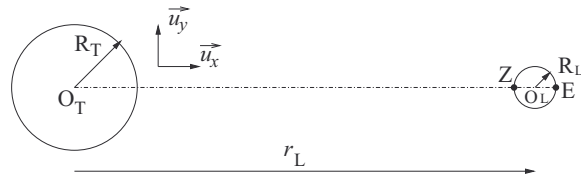
La Lune est assimilée à un corps sphérique de centre O_L , de rayon $R_L = 1,73 \cdot 10^6$ m et de masse $m_L = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg. Elle est en orbite circulaire de rayon

$$r_L = O_T O_L = 3,85 \cdot 10^8 \text{ m}$$

et de période $T_L = 27,5 \text{ j} = 2,38 \cdot 10^6$ s autour de la Terre elle-même sphérique, immobile de masse $m_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg et de rayon $R_T = 6,38 \cdot 10^6$ m. Dans le référentiel géocentrique \mathcal{R} supposé galiléen, le centre de la Lune est en mouvement circulaire uniforme. Le référentiel \mathcal{R}_{TL} dans lequel le centre de la Terre O_T et celui de la Lune O_L sont immobiles est non galiléen, en rotation uniforme à la vitesse angulaire

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_L} = 2,64 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

par rapport à \mathcal{R} . On s'intéresse à deux plaques du sol lunaire, assimilées à des points immobiles de même masse m , Z et E, alignées avec O_T et O_L , Z du côté de la face visible de la Lune, E du côté de la face cachée. On exprimera les vecteurs forces dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) .



- La Lune est immobile dans le référentiel \mathcal{R}_{TL} . En déduire l'identité $r_L \Omega^2 = \frac{G m_T}{r_L^2}$.
- Donner, pour Z puis pour E, l'expression des trois forces à distance qu'ils subissent :
 - la force de gravitation exercée par la Terre
 - la force de gravitation exercée par la Lune
 - la force d'inertie d'entraînement
 en fonction des différentes variables de l'énoncé.
- Pour un corps M à la surface de la Lune, on appelle forces de marée $\vec{f}_m(M)$ la résultante de la force de gravitation exercée par la Terre et de la force d'inertie d'entraînement. Établir que

$$\vec{f}_m(Z) = m\Omega^2 r_L \left[\frac{r_L - R_L}{r_L} - \frac{r_L^2}{(r_L - R_L)^2} \right] \vec{u}_x$$

$$\text{et } \vec{f}_m(E) = m\Omega^2 r_L \left[\frac{r_L + R_L}{r_L} - \frac{r_L^2}{(r_L + R_L)^2} \right] \vec{u}_x$$

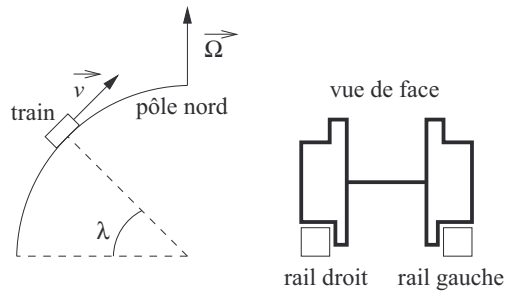
- On suppose $R_L \ll r_L$. Donner une expression approchée des forces de marée, montrer qu'elles ont tendance à soulever les plaques de la surface lunaire et calculer numériquement leur valeur pour $m = 1$ kg. Conclure.



7.14

Différence d'appui sur les rails

Un train de 500 tonnes se déplace du sud vers le nord à vitesse constante de l'ordre de $50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en France au voisinage du 45^{ème} parallèle. Estimer la valeur de la force traduisant la différence d'appui entre le rail gauche et le rail droit. Voici l'allure de la situation sur le globe terrestre et une vue de face avec le détail des roues sur les rails.



7.15

Rotation des cyclones

Une dépression importante se crée en un point de l'hémisphère nord. Les vents convergent à grande vitesse vers ce point. Dans quelles directions respectives sont déviés le vent qui vient du nord, celui qui vient de l'est, celui qui vient du sud, celui qui vient de l'ouest ? Dans quel sens le cyclone tourne-t-il vu depuis un satellite ?



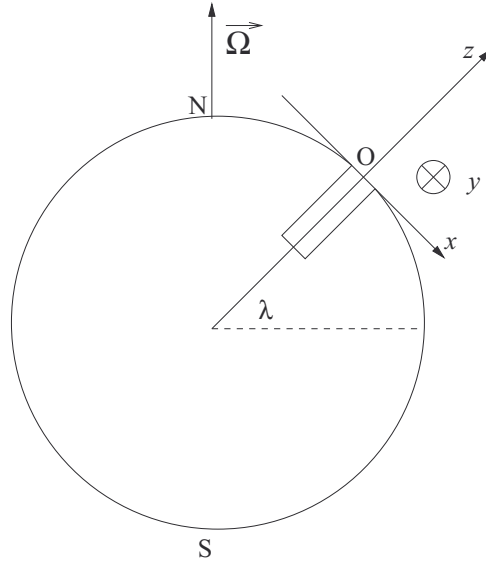
7.16

Vents dominants dans l'hémisphère nord

On adopte un point de vue très simple pour modéliser les vents dominants dans l'hémisphère nord. Entre le tropique du Cancer et l'équateur, l'air surchauffé monte en altitude. ce mouvement crée une dépression en basse altitude qui provoque un vent thermique du nord vers le sud en basse altitude. L'air chaud tropical en haute altitude se déplace à son tour du sud vers le nord pour fermer la boucle de convection. Ces vents thermiques de haute altitude peuvent atteindre des vitesses très importantes. En déduire la direction de ces vents dits **géostrophiques** dans l'hémisphère nord.

7.17
Déviations vers l'est

Un corps M de masse m est abandonné sans vitesse initiale depuis l'origine O dans un puits très profond. Dans le référentiel terrestre non galiléen, en rotation uniforme autour de l'axe des pôles dans le référentiel géocentrique galiléen, à la vitesse angulaire $\Omega = \frac{2\pi}{86164}$, M est soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ (la verticale est assimilée au rayon terrestre) et à la force d'inertie de Coriolis.



- Pourquoi l'énoncé n'évoque-t-il pas la force d'inertie d'entraînement ?
- Déterminer les composantes du vecteur $\vec{\Omega}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en fonction de Ω , $C = \cos \lambda$ et $S = \sin \lambda$.
- Établir le système d'équations différentielles vérifiées par x , y , z .
- On établit sans difficulté particulière les équations horaires

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}SCgt^2 + \frac{SCg}{4\Omega^2} [\cos(2\Omega t) - 1] \\ y(t) = \frac{Cg}{2\Omega} t - \frac{Cg}{4\Omega^2} \sin(2\Omega t) \\ z(t) = -\frac{1}{2}S^2gt^2 + \frac{C^2g}{4\Omega^2} [\cos(2\Omega t) - 1] \end{cases}$$

Dans les premières secondes du mouvement, Ωt est un très petit angle. En déduire les équations horaires approchées en effectuant les développements limités au troisième ordre et justifier le titre de l'énoncé.

- Estimer la déviation pour une chute de 400 mètres, en supposant encore vérifiée l'absence de frottements.

7.18
Une énigme biophysique (résolution de problème)

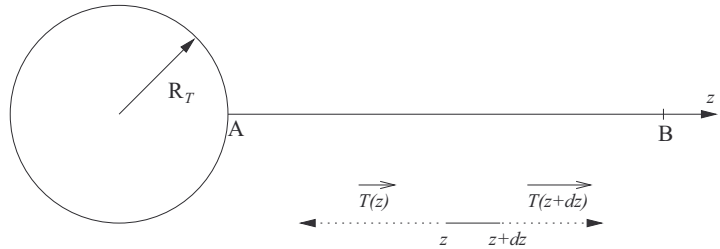
On place un pot rempli de terre sur un plateau tournant d'axe (O, z) . On plante une graine à germination rapide à une distance d de l'axe. La base de la tige de la fleur est-elle verticale ou penchée (auquel cas, de quel angle) ?

7.19

Ascenseur spatial

Un câble de masse linéique $\mu = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ est accroché au sol en un point A de l'équateur. Sa longueur est $L = 100\,000 \text{ km}$. Il se dresse verticalement, son extrémité B est libre et la tension en ce point est nulle. On donne, pour la Terre : $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, $m_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $T_T = 86\,164 \text{ s}$ et $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

- Établir l'expression de l'altitude z_{GS} de l'orbite géostationnaire.
- Le tronçon de câble $[z, z + dz]$ est en équilibre dans le référentiel non galiléen terrestre en rotation uniforme.



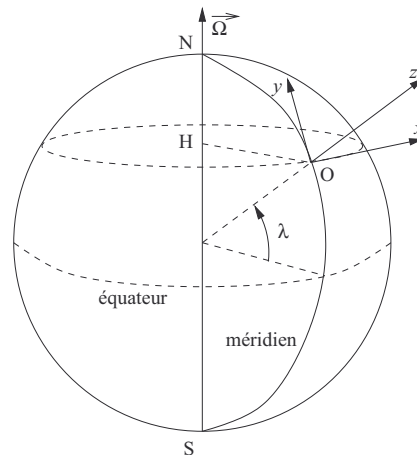
On note $T(z)$ la norme de la tension du câble à l'altitude z , on a représenté sur le schéma les forces de tension. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(z)$ et donner l'expression de $T(z)$. En déduire la tension en A et faire l'application numérique.

- Une cabine d'ascenseur monte à vitesse constante le long du câble. Pourquoi cela risque-t-il de faire fléchir le câble ? Comment remédier à cet inconvénient ? Quel est le poids d'un occupant de la cabine, de masse m , lorsque la cabine est à l'altitude z ?
- Quel intérêt un tel dispositif aurait-il ?

7.20

Pendule de Foucault

Le pendule de Foucault est un pendule simple dont le fil inextensible, accroché au sommet S du dôme du Panthéon à Paris, de latitude $\lambda = 48,85^\circ$, a une longueur $L = 67 \text{ m}$ et soutient un mobile M de masse $m = 28 \text{ kg}$. L'intensité de la pesanteur est $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On note O le point du sol à la verticale de S. Les axes du repère sont (O, x) dirigé vers l'est, (O, y) vers le nord et (O, z) vertical vers le haut.



- a) L'amplitude des oscillations du pendule est supposée suffisamment faible pour qu'on puisse supposer que M reste dans le plan horizontal. En déduire que la tension du fil s'écrit

$$\vec{T} \simeq -\frac{mg}{L} \vec{SM}$$

- b) En déduire que x et y vérifient le système d'équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\beta \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\beta \dot{x} \end{cases}$$

en précisant les expressions de ω_0 et β en fonction de L , g , Ω et λ . Vérifier que $\beta \ll \omega_0$.

- c) On définit la variable complexe

$$\underline{\rho}(t) = x(t) + iy(t)$$

Établir l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\rho}$ et la résoudre en prenant les conditions initiales

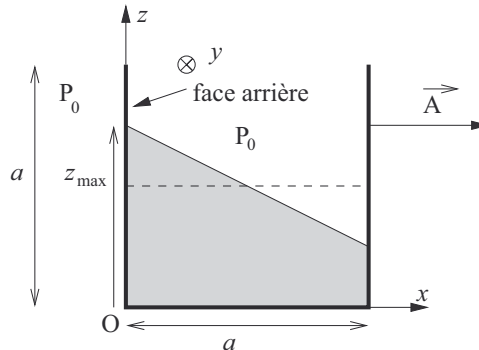
$$\begin{cases} x(0) = a \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$$

- d) En déduire $x(t)$ et $y(t)$ et montrer que le mouvement de M correspond à des allers-retours quasiment rectilignes selon un segment de centre O et de longueur $2a$ qui tourne très lentement à une vitesse angulaire Ω_F qu'on précisera. En déduire la période T_F du pendule de Foucault.

7.21

Résultante des forces de pression en référentiel en translation

On reprend les notations et les hypothèses de l'exemple du cours décrivant un aquarium sur un chariot en translation accélérée.



Déterminer la résultante des forces de pression de l'air et de l'eau sur la face arrière de l'aquarium.



7.22

Verre d'eau en rotation

Un verre cylindrique, de rayon R et de hauteur $H = 2R$, est rempli à moitié d'eau. Il est posé sur un plateau tournant horizontal à la vitesse angulaire Ω , l'axe de rotation étant confondu avec l'axe de révolution du verre.

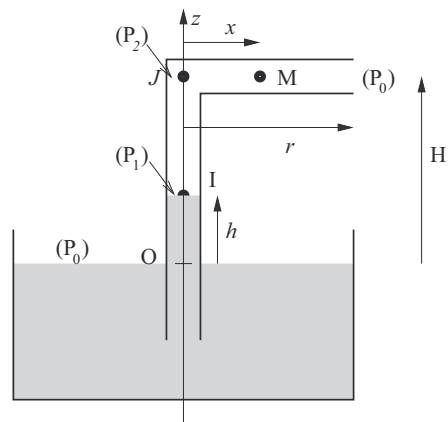
- Déterminer l'équation ($z = \varphi(r)$) de la surface. Préciser sa nature géométrique.
- Citer une utilisation de ce phénomène en astronomie.
- Lorsque Ω augmente, observera-t-on d'abord le débordement ou d'abord l'assèchement du fond du verre ?



7.23

Aspirateur rotatif

Dans le dispositif suivant, le tube coudé plonge dans un liquide de masse volumique μ_e . Il tourne à vitesse angulaire constante Ω autour de l'axe (O, z) . On note P_0 la pression de l'air extérieur.

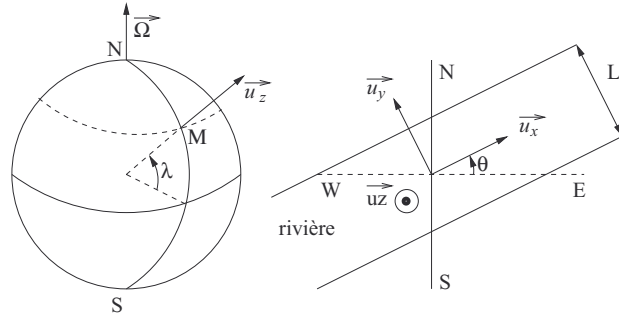


- Le point M est repéré par son rayon x . On suppose que la masse volumique de l'air est une constante uniforme μ_0 . Calculer la pression $P(x)$.
- Déterminer la dénivellation h . Faire l'application numérique avec $\Omega = 100\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $r = 0,100 \text{ m}$, $\mu_e = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\mu_0 = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Le point M est repéré par son rayon x . On prend maintenant en compte les variations de la masse volumique de l'air avec la pression selon la loi des gaz parfaits isothermes. Calculer la pression $P(x)$.

7.24

Différence de niveau entre les deux berges d'une rivière

Une rivière de largeur L coule du sud-ouest vers le nord-est à la vitesse uniforme et constante $\vec{v} = v\vec{u}_x$ faisant un angle θ avec l'axe ouest-est en un point du globe terrestre de latitude $\lambda = 45^\circ$.



Le référentiel terrestre est en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique supposé galiléen. On note μ la masse volumique de l'eau.

- Déterminer les coordonnées du vecteur Ω dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
- Écrire la condition d'équilibre de la particule de fluide dans le référentiel de la rivière. En déduire le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par la pression P en fonction de μ , Ω , g , θ et λ .
- En déduire $P(x, y, z)$ sans chercher l'ultime constante d'intégration qu'on pourra noter K_0 .
- La surface libre de la rivière est définie par $P = P_0$. En déduire l'équation cartésienne de cette surface.
- Calculer numériquement la valeur de Ω et donner l'ordre de grandeur de v , de L , de λ et de θ pour le Rhône, en déduire une expression simplifiée de l'équation cartésienne de la surface de l'eau.
- On se place dans le plan de coupe du lit de la rivière ($x = \text{cste}$). On note Δh la différence de niveau entre l'eau sur la rive droite et la rive gauche. Donner l'expression de Δh en fonction de L , Ω , v , λ et g . Calculer numériquement Δh et conclure.

Du mal à démarrer ?

7.1 On doit ici appliquer précisément les formules du cours, et persévérer jusqu'à parfaite adéquation entre les formules cinématiques obtenues de façon directe et les formules de composition.

7.2 Le pendule doit être étudié dans la base cylindrique. Les composantes des vecteurs vitesse et accélération relative sont celles du cours de première année. Les composantes des vecteurs forces réelles et de la force d'inertie d'entraînement font apparaître le sinus et le cosinus de θ . Il faut persévérer jusqu'à obtenir rigoureusement la même équation différentielle par les deux méthodes.

7.3 La détermination de $E_{p_{ie}}$ ne pose pas de difficulté. On en déduit l'énergie potentielle totale E_p qu'on exprime en fonction de θ . Le problème étant à un degré de liberté, l'équilibre est atteint

quand $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$. En exprimant E_c en fonction de $\dot{\theta}$, et en dérivant E_m par rapport au temps, on obtient l'équation différentielle.

7.4 La masse est soumise à son poids, à la force de frottement, à celle du ressort, et à la force d'inertie d'entraînement dans le référentiel en translation oscillatoire verticale.

7.5 Cet exercice comporte un piège, la nacelle n'est pas en rotation, mais en translation circulaire. La loi de la quantité de mouvement doit donc prendre en compte la force d'inertie d'entraînement qu'on détermine grâce au résultat de la question (a). La condition de non décollage se traduit par la non annulation de N quel que soit t . La fin de l'exercice nécessite le passage au formalisme complexe.

7.6 L'établissement de l'équation différentielle demande du soin mais ne pose pas de difficulté si on utilise la méthode préconisée dans le cours. Pour sa résolution, on prendra garde à ne pas confondre l'équation avec celle d'un oscillateur harmonique.

7.7 La question (a) ne pose pas de difficulté particulière, sinon de nature géométrique dans la projection de \vec{HM} dans la base cylindrique. Dans la question (b), on détermine Ep_{ie} , on lui ajoute Ep_p et on remarque que la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas. Puis on étudie, comme dans tous les problèmes à un degré de liberté conservatifs, l'annulation de la dérivée première et la positivité de la dérivée seconde de $Ep(\theta)$.

7.8 Il suffit de sommer toutes les énergies potentielles, de les exprimer en fonction de θ et d'écrire la nullité de la dérivée de l'énergie potentielle résultante.

7.9 Les questions (a) et (b) peuvent être menées en parallèle. On remarquera que $T_z \approx T$ car le fil est très peu incliné. Le mouvement se fait dans le plan horizontal passant par H, donc les vecteurs vitesse et accélération relative sont les vecteurs habituels explicités en première année en coordonnées polaires. On obtient ainsi deux équations non linéaires en $r(t)$ et $\theta(t)$ qui se simplifient dans le cas particulier proposé.

7.10 À l'équilibre du corps dans le référentiel en rotation, la vitesse relative est nulle donc la force d'inertie de Coriolis est nulle, et l'accélération relative est nulle donc la somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement est nulle. Parler de poids ici serait un grave hors sujet, on n'est pas immobile à la surface de l'astre.

7.11 Il faut avant tout identifier où se trouve le sol pour l'astronaute, puis identifier la force d'inertie axifuge à la pesanteur simulée. Tant que l'astronaute est immobile, il ne subit pas de force de Coriolis, mais lorsqu'il bouge, dans les questions (b) et (c), cette force provoque des perturbations subtiles dans le ressenti de l'astronaute.

7.12 Les trois forces subies par M sont les deux forces de gravitation et la force d'inertie d'entraînement axifuge selon \vec{IM} . À l'équilibre, la somme des forces est nulle. En exprimant Ω , qui apparaît dans la force d'inertie, en fonction de T, on peut exprimer cette somme de forces en fonction de \mathcal{G} , m_S , m et des distances fonctions de x sur l'axe (O_1O_2) et de d en J.

7.13 La relation établie à la question (a) s'apparente à la troisième loi de Kepler, on peut l'établir selon la méthode de l'exercice 7.10. La force d'inertie axifuge doit être exprimée avec soin pour distinguer la distance Z et l'axe de rotation, et celle entre E et l'axe.

7.14 La force d'inertie de Coriolis indique le sens et la direction de l'action de l'une des roues sur le rail correspondant. Pour l'application numérique, on rappelle que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

7.15 Un dessin en perspective du globe terrestre et l'application de l'une des règles géométriques de détermination de la direction et du sens du produit vectoriel (celle des trois doigts de la main

droite par exemple) permet d'identifier la direction et le sens des forces de Coriolis sur chacun des quatre vents. On en déduit le sens de rotation du cyclone.

7.16 Le texte de l'énoncé donne implicitement la direction et le sens des vents pour lesquels on détermine le sens et la direction de la force de Coriolis.

7.17 L'établissement du système d'équations différentielles en (x, y, z) est facilité par l'écriture soignée des composantes de tous les vecteurs cinématiques, puis de tous les vecteurs forces (sans oublier la force de Coriolis) selon la méthode préconisée dans le cours. Le développement limité au troisième ordre des fonctions cosinus et sinus conduit à des expressions très simples des équations horaires, qui permettent de conclure.

7.18 Comme dans l'étude du poids terrestre, on peut définir un poids apparent dans le référentiel tournant. La germination et le développement de la tige se font dans la direction du poids apparent.

7.19 On détermine z_{GS} grâce à la troisième loi de Kepler par exemple. Après avoir écrit la somme des forces sur le tronçon de câble, on fait apparaître la dérivée de T(z) en faisant le développement limité en dz de $T(z + dz)$.

7.20 L'exercice est très guidé jusqu'à la question (b). Le système d'équations différentielles en (x, y) se ramène à une équation unique en $\underline{\rho}$ en utilisant un coefficient imaginaire pur. La résolution de l'équation en complexes se fait comme en réels, on résout l'équation caractéristique en simplifiant le discriminant grâce à $\beta \ll \omega_0$, puis on exprime la solution générale sous la forme d'une combinaison linéaire à coefficients complexes de deux exponentielles complexes. On utilise les conditions initiales pour déterminer les deux coefficients, qu'on simplifie eux-aussi. On identifie enfin $x(t)$ à la partie réelle et $y(t)$ à la partie imaginaire de $\underline{\rho}$.

7.21 La somme des forces de pression de part et d'autre des parois permet de simplifier P_0 . On intègre $[P(0, y, z) - P_0] dy dz$ entre 0 et a pour y , entre 0 et z_{\max} pour z .

7.22 La méthode décrite dans le cours s'applique bien dans cet exercice. On détermine $P(r, \theta, z)$ en intégrant successivement les équations données par la loi de la statique des fluides en référentiel en rotation uniforme. La détermination de la constante finale (K_0) nécessite l'écriture de la conservation du volume d'eau entre la situation immobile (forme cylindrique) et la situation de rotation (paraboloïde de révolution). Le calcul de l'intégrale de volume peut se ramener à une intégrale sur r de cylindres coaxiaux $[r, r + dr]$ de hauteur $\varphi(r)$. Il y a assèchement si $\varphi(r) = 0$, débordement si $\varphi(r) = H$.

7.23 Dans le tube horizontal, la loi de la statique des fluides conduit (en négligeant le poids) à une équation différentielle qu'on intègre grâce à la condition aux limites en $P(x = r) = P_0$. À la question (b), l'égalité des pressions de part et d'autre de l'interface air-liquide permet de conclure (on pourra appliquer la loi de l'hydrostatique dans le liquide). À la question (c), on reprend l'équation différentielle de la question (a), mais on doit prendre en compte la relation entre μ et P, conséquence de la loi des gaz parfaits.

7.24 On peut projeter $\vec{\Omega}$ en deux temps, d'abord sur le méridien et la verticale, puis sur les axes du repère. On n'est pas ici en statique des fluides, mais l'uniformité et la constance du champ des vecteurs vitesses permet d'écrire que la somme des forces volu-

miques de poids, de pression et d'inertie de Coriolis est nulle. La suite de l'exercice correspond à la méthode de détermination de la surface libre d'un liquide décrite dans le cours.

Corrigés des exercices

7.1

a) On exprime : $\vec{u}_X = \cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_y$. On en déduit

$$\vec{v}_r = v_0 \vec{u}_X = \begin{vmatrix} v_0 \cos(\omega t) \\ v_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Par application de la formule du cours :

$$\vec{v}_e = \omega \vec{u}_z \wedge v_0 t \vec{u}_X = \begin{vmatrix} -v_0 \omega t \sin(\omega t) \\ v_0 \omega t \cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{On en déduit } \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \begin{vmatrix} v_0 \cos(\omega t) - v_0 \omega t \sin(\omega t) \\ v_0 \sin(\omega t) + v_0 \omega t \cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}.$$

b) Dans \mathcal{R} , le promeneur a une vitesse constante donc $\vec{a}_r = \vec{0}$. Par application des formules du cours :

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \cdot v_0 t \vec{u}_X = \begin{vmatrix} -v_0 \omega^2 t \cos(\omega t) \\ -v_0 \omega^2 t \sin(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \vec{a}_c = 2\omega \vec{u}_z \wedge \vec{v}_r = \begin{vmatrix} -2v_0 \omega \sin(\omega t) \\ 2v_0 \omega \cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{OM} = v_0 t \vec{u}_X \text{ donc } \begin{vmatrix} x(t) = v_0 t \cos(\omega t) \\ y(t) = v_0 t \sin(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

d) En dérivant par rapport au temps :

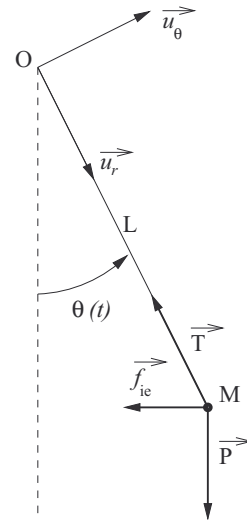
$$\vec{v}_a = \begin{vmatrix} v_0 \cos(\omega t) - v_0 \omega t \sin(\omega t) \\ v_0 \sin(\omega t) + v_0 \omega t \cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \vec{a}_a = \begin{vmatrix} -v_0 \omega^2 t \cos(\omega t) - 2v_0 \omega \sin(\omega t) \\ -v_0 \omega^2 t \sin(\omega t) + 2v_0 \omega \cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

donc $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ et $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_c + \vec{a}_r$.

7.2

a) On complète le schéma en dessinant les forces réelles et la force d'inertie d'entraînement qui s'exercent sur M.



Voici les composantes des vecteurs cinématiques et des vecteurs forces dans la base cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

$$\vec{OM} \begin{vmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{v}_r \begin{vmatrix} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{a}_r \begin{vmatrix} -L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{P} \begin{vmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{T} \begin{vmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{f}_{ie} \begin{vmatrix} -mA \sin \theta \\ -mA \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

Dans le référentiel non galiléen en translation, la loi de la quantité de mouvement appliquée à M s'écrit

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} = m\vec{a}_r \text{ donc}$$

$$\begin{cases} mg \cos \theta - T - mA \sin \theta = -mL\dot{\theta}^2 \\ -mg \sin \theta + 0 - mA \cos \theta = mL\ddot{\theta} \end{cases}$$

b) Le moment cinétique en O de M est

$$\vec{OM} \wedge m\vec{v}_r = mL^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

Les moments en O des trois forces sont

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = -Lmg \sin \theta \vec{u}_z$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ie}) = \vec{OM} \wedge \vec{f}_{ie} = -LmA \cos \theta \vec{u}_z$$

Dans le référentiel non galiléen en translation, la loi du moment cinétique en O appliquée à M s'écrit

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ie}) = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\text{soit } -Lmg \sin \theta + 0 - LmA \cos \theta = mL^2 \ddot{\theta}$$

- c) Les deux lois donnent bien la même équation différentielle non linéaire en $\theta(t)$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta + \frac{A}{L} \cos \theta = 0$$

À l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$ donc

$$\frac{g}{L} \sin \theta_{\text{eq}} + \frac{A}{L} \cos \theta_{\text{eq}} = 0$$

$$\text{soit } \tan \theta_{\text{eq}} = -\frac{A}{g}$$

Il est normal que θ_{eq} soit négatif car la force d'inertie d'entraînement est dirigée vers l'arrière du train.

- d) On fait les développements limités des fonctions $\cos \theta$ et $\sin \theta$ au voisinage de θ_{eq} .

$$\begin{cases} \sin(\theta_{\text{eq}} + \varepsilon(t)) = \sin \theta_{\text{eq}} \cos \varepsilon(t) + \cos \theta_{\text{eq}} \sin \varepsilon(t) \\ \cos(\theta_{\text{eq}} + \varepsilon(t)) = \cos \theta_{\text{eq}} \cos \varepsilon(t) - \sin \theta_{\text{eq}} \sin \varepsilon(t) \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \sin \theta \approx \sin \theta_{\text{eq}} + \varepsilon(t) \cos \theta_{\text{eq}} \\ \cos \theta \approx \cos \theta_{\text{eq}} - \varepsilon(t) \sin \theta_{\text{eq}} \end{cases}$$

On remplace dans l'équation différentielle. θ_{eq} est une constante donc $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$ et

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{L} \sin \theta_{\text{eq}} + \frac{g}{L} \varepsilon \cos \theta_{\text{eq}} + \frac{A}{L} \cos \theta_{\text{eq}} - \frac{A}{L} \varepsilon \sin \theta_{\text{eq}} = 0$$

En utilisant la relation définissant θ_{eq} , on simplifie cette équation et on obtient

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{L} \cos \theta_{\text{eq}} \left(1 + \frac{A^2}{g^2} \right) \varepsilon = 0$$

De plus

$$\cos^2 \theta_{\text{eq}} = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta_{\text{eq}}} = \frac{1}{1 + \frac{A^2}{g^2}}$$

L'équation différentielle s'écrit donc

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{L} \sqrt{1 + \frac{A^2}{g^2}} \varepsilon = 0$$

On reconnaît une équation d'oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 avec

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \sqrt{1 + \frac{A^2}{g^2}}$$

donc de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{g^2}}}$$

7.3

- a) Par définition

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{A} = -mA\vec{u}_x$$

- b) On en déduit le système

$$\begin{cases} -\frac{\partial E_{p_{ie}}}{\partial x} = -mA \\ -\frac{\partial E_{p_{ie}}}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial E_{p_{ie}}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$E_{p_{ie}}$ ne dépend donc ni de y ni de z et

$$\frac{dE_{p_{ie}}}{dx} = mA \text{ donc } E_{p_{ie}} = mAx + K$$

et $K = 0$ d'après la référence choisie. On remarque la forte analogie entre cette expression et celle de l'énergie potentielle de pesanteur.

- c) On prend le système d'axes avec x horizontal vers la droite et z vertical vers le bas.

- i) La tension du fil ne travaille pas car elle est orthogonale au vecteur vitesse de M. On en déduit l'énergie potentielle

$$E_p(\theta) = E_{p_p} + E_{p_{ie}} = -mgz + mAx$$

$$E_p(\theta) = -mgL \cos \theta + mA L \sin \theta$$

- ii) C'est un problème à un degré de liberté. À l'équilibre, la dérivée de E_p par rapport à θ est nulle, soit

$$mgL \sin \theta + mA L \cos \theta = 0 \text{ donc } \tan \theta_{\text{eq}} = -\frac{A}{g}$$

On trouve bien le même résultat qu'à l'exercice 7.2.

- iii) Le vecteur vitesse est $\vec{v}_r = L\dot{\theta}$ donc

$$E_C = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2$$

On en déduit l'énergie mécanique

$$Em = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 - mgL \cos \theta + mAL \sin \theta$$

En l'absence de force dissipative, l'énergie mécanique est constante donc sa dérivée par rapport au temps est nulle.

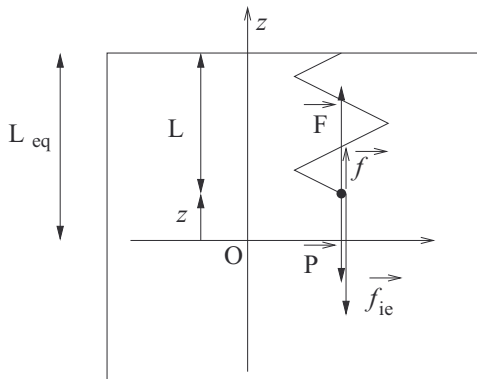
$$0 = \frac{1}{2} mL^2 \cdot 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta} \sin \theta + mAL\dot{\theta} \cos \theta = 0$$

soit, après simplification

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta + \frac{A}{L} \cos \theta = 0$$

7.4

Le sol a pour cote $z_S = H \cos(\omega t)$. Dans le référentiel non galiléen du sol, la masse est donc soumise au poids, à la force de rappel du ressort, au frottement fluide et à la force d'inertie d'entraînement. Au repos, en l'absence de séisme, la longueur du ressort est $L_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$.



Dans le référentiel non galiléen du sol, le mobile vérifie la loi de la quantité de mouvement : $\vec{F} + \vec{P} + \vec{f} + \vec{f}_{ie} = m\vec{a}_r$. Le boîtier étant en translation, son accélération est celle d'un point du sol : $\vec{V}_S = \dot{z}_S \vec{u}_z = -H\omega \sin(\omega t) \vec{u}_z$ et $\vec{A}_S = \ddot{z}_S \vec{u}_z = -H\omega^2 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. La force d'inertie d'entraînement s'écrit donc

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{A}_S = mH\omega^2 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

L'allongement du ressort est

$$L - \ell_0 = [(L_{eq} - z) - \ell_0] = \frac{mg}{k} - z$$

Par suite :

$$k \left(\frac{mg}{k} - z \right) - mg + mH\omega^2 \cos(\omega t) - \lambda \dot{z} = m\ddot{z}$$

$$\text{soit } m\ddot{z} + \lambda \dot{z} + kz = mH\omega^2 \cos(\omega t)$$

C'est donc l'équation différentielle d'oscillations forcées qu'on résout en formalisme complexe. En particulier, l'amplitude des oscillations forcées est (en passant au module)

$$Z = \frac{mH\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \lambda^2 \omega^2}}$$

7.5

a) $\vec{CP} = R\vec{u}_r$ donc

$$\vec{V} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\Omega \vec{u}_\theta \text{ et}$$

$$\vec{A} = R\Omega \cdot [-\dot{\theta} \vec{u}_r] = -R\Omega^2 \vec{u}_r$$

En utilisant les formules fournies, on change de base :

$$\vec{V} = -R\Omega \sin(\Omega t) \vec{u}_x + R\Omega \cos(\Omega t) \vec{u}_y$$

$$\text{et } \vec{A} = -R\Omega^2 \cos(\Omega t) \vec{u}_x - R\Omega^2 \sin(\Omega t) \vec{u}_y$$

- b) \mathcal{R} n'est pas galiléen car il n'est pas en translation circulaire uniforme par rapport à \mathcal{R}_0 (principe d'inertie).
- c) C'est un piège ! \mathcal{R} est bien en **translation circulaire** par rapport à \mathcal{R}_0 (et pas en rotation !) car tous les segments (verticaux et horizontaux en particulier) restent parallèles à eux-mêmes lors du mouvement.
- d) Les forces réelles sont le poids, la force normale du support et la force de frottement, et la force d'inertie d'entraînement est $\vec{f}_{ie} = -m\vec{A}$.

$$\vec{OM} \begin{vmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{v} \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{a} \begin{vmatrix} 0 \\ \ddot{y} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{P} \begin{vmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{N} \begin{vmatrix} -N \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{f} \begin{vmatrix} 0 \\ -\alpha \dot{y} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{f}_{ie} \begin{vmatrix} mR\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ mR\Omega^2 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

e) Sur la composante x :

$$N = mg + mR\Omega^2 \cos(\Omega t)$$

Il faut que quel que soit t , N ne s'annule jamais, donc qu'il reste positif. Or sa valeur minimale est atteinte quand le cosinus vaut -1 , donc $N_{\min} = mg - mR\Omega^2$. Si cette valeur minimale est positive, alors N restera toujours positif. Il y a donc absence de décollage si $g > R\Omega^2$.

f) Sur la composante y :

$$m\ddot{y} + \alpha \dot{y} = mR\Omega^2 \sin(\Omega t) = mR\Omega^2 \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- g) On passe en formalisme complexe. À $y(t) = Y_0 \cos(\Omega t + \varphi)$ on fait correspondre $\underline{Y} = Y_0 e^{i\Omega t} e^{i\varphi}$. Au second membre on fait correspondre $mR\Omega^2 e^{i\Omega t} e^{-i\frac{\pi}{2}}$. En considérant que dériver par rapport au temps revient à multiplier par $i\Omega$, on en déduit

$$\left[-\Omega^2 m + i\alpha\Omega\right] Y_0 e^{i\Omega t} e^{i\varphi} = mR\Omega^2 e^{i\Omega t} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

et en passant aux modules

$$\sqrt{\Omega^4 m^2 + \alpha^2 \Omega^2} \cdot Y_0 = mR\Omega^2 \text{ donc } Y_0 = \frac{mR\Omega^2}{\sqrt{\Omega^4 m^2 + \alpha^2 \Omega^2}}$$

7.6

- a) Dans le référentiel non galiléen de la tige, M est soumis à son poids

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$$

à la réaction normale de la tige

$$\vec{N} = N_y \vec{u}_y + N_z \vec{u}_z$$

à la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{ie} = m\Omega^2 \vec{OM} = m\omega^2 x \vec{u}_x$$

et à la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = -2m\Omega \dot{x} \vec{u}_y$$

La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m\vec{a}_r$$

$$\text{soit } \begin{cases} -2m\Omega \dot{x} + N_y = 0 \\ -mg + N_z = 0 \\ m\Omega^2 x = m\ddot{x} \end{cases}$$

d'où $\ddot{x} - \Omega^2 x = 0$.

- b) L'équation caractéristique s'écrit $r^2 - \Omega^2 = 0$ soit $r = \pm\Omega$, donc

$$x(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} \text{ et } \dot{x}(t) = A\Omega e^{\Omega t} - B\Omega e^{-\Omega t}$$

Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\Omega - B\Omega = v_0 \end{cases}$$

donc $A = \frac{v_0}{2\Omega}$ et $B = -\frac{v_0}{2\Omega}$ d'où

$$x = \frac{v_0}{2\Omega} \left[e^{\Omega t} - e^{-\Omega t} \right]$$

$$\text{ou } x(t) = \frac{v_0}{\Omega} \text{sh}(\Omega t)$$

- c) La relation $x = L$ donne

$$e^{\Omega t} - e^{-\Omega t} = \frac{2\Omega L}{v_0}$$

$$\text{soit } E - \frac{1}{E} = \frac{2\Omega L}{v_0} \text{ soit } E^2 - \frac{2\Omega L}{v_0} E - 1 = 0$$

On en déduit E en prenant la solution positive de l'équation du second degré

$$E = \frac{\Omega L}{v_0} + \sqrt{\frac{\Omega^2 L^2}{v_0^2} + 1}$$

puis t_f en passant au logarithme

$$t_f = \frac{1}{\Omega} \ln \left[\frac{\Omega L}{v_0} + \sqrt{\frac{\Omega^2 L^2}{v_0^2} + 1} \right]$$

7.7

- a) Voici les composantes des vecteurs cinématiques dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

$$\vec{OM} \begin{vmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \vec{v}_r \begin{vmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \vec{a}_r \begin{vmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \vec{\Omega} \begin{vmatrix} -\Omega \cos \theta \\ \Omega \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

En notant H le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation, on exprime

$$\vec{HM} = (R + R \sin \theta) \vec{u}_x = \begin{vmatrix} (R + R \sin \theta) \sin \theta \\ (R + R \sin \theta) \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

Les vecteurs forces ont pour composantes

$$\vec{P} \begin{vmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix} \vec{N} \begin{vmatrix} -N_r \\ 0 \\ -N_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{f}_{ie} \begin{vmatrix} m\Omega^2 (R + R \sin \theta) \sin \theta \\ m\Omega^2 (R + R \sin \theta) \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \vec{f}_{ic} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2m\Omega \cos \theta R \dot{\theta} \end{vmatrix}$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à M dans le référentiel non galiléen en rotation du cerceau s'écrit, en projection sur \vec{u}_θ

$$-mg \sin \theta + m\Omega^2 (R + R \sin \theta) \cos \theta = mR\ddot{\theta}$$

soit, après simplification par m

$$R\ddot{\theta} = -g \sin \theta + R\Omega^2(1 + \sin \theta) \cos \theta$$

On détermine θ_{eq} en prenant, à l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$. On pose ensuite $\theta = \theta_{\text{eq}} + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$. On fait les développements limités de $\sin \theta$ et de $\cos \theta$ au voisinage de θ_{eq} au premier ordre en ε , on obtient une équation du second ordre en ε qui, si le coefficient de ε est positif, est celle d'un oscillateur harmonique. Ce coefficient est alors le carré de la pulsation propre des petites oscillations. S'il est négatif, la position est instable.

b) Cerceau tournant autour de son diamètre vertical.

i) D'après la loi du cours, la force d'inertie d'entraînement axifuge est

$$\vec{f}_{ie} = m\Omega^2 \overrightarrow{HM} = m\Omega^2 \rho \vec{u}_\rho$$

ii) On en déduit, en prenant $E_{p_{ie}} = 0$ quand $\rho = 0$

$$-\frac{dE_{p_{ie}}}{d\rho} = m\Omega^2 \rho \text{ donc } E_{p_{ie}} = -\frac{1}{2} m\Omega^2 \rho^2$$

iii) L'action du cerceau sur la bague est modélisée par une force normale au cerceau, qui ne travaille donc pas. La force de Coriolis, perpendiculaire à la vitesse, a une puissance nulle, et ne travaille pas. Le poids et la force d'inertie d'entraînement dérivent toutes deux d'énergies potentielles qu'on somme et qu'on exprime en fonction de θ .

$$E_p = E_{p_p} + E_{p_{ie}} = mgZ - \frac{1}{2} m\Omega^2 \rho^2$$

$$\text{soit } E_p(\theta) = -mgR \cos \theta - \frac{1}{2} m\Omega^2 R^2 \sin^2 \theta$$

Ce problème étant à un degré de liberté, les positions d'équilibre correspondent à l'annulation de la dérivée première, la stabilité à la positivité de la dérivée seconde.

$$\begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = -m\Omega^2 R^2 \sin \theta \left[\cos \theta - \frac{g}{R\Omega^2} \right] \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = m\Omega^2 R^2 - 2m\Omega^2 R^2 \cos^2 \theta + mgR \cos \theta \end{cases}$$

Il y a donc 2 ou 3 positions d'équilibre candidates selon que $\cos \theta - \frac{g}{R\Omega^2}$ peut s'annuler ou pas.

• Premier cas : $\Omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$. Il y a 2 positions d'équilibre :

$$\theta = 0 \text{ avec } \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}(0) = -m\Omega^2 R^2 + mgR > 0$$

donc **stable** ;

$$\theta = \pi \text{ avec } \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}(\pi) = -m\Omega^2 R^2 - mgR < 0$$

donc **instable**.

• Deuxième cas : $\Omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$. Il y a 3 positions d'équilibre :

$$\theta = 0 \text{ avec } \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}(0) = -m\Omega^2 R^2 + mgR < 0$$

donc **instable** ;

$$\theta = \pi \text{ avec } \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}(\pi) = -m\Omega^2 R^2 - mgR < 0$$

donc **instable** ;

$$\theta = \theta^* = \arccos \frac{g}{R\Omega^2} \text{ avec}$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}(\theta^*) = m\Omega^2 R^2 \left[1 - \frac{g^2}{R^2 \Omega^4} \right] > 0$$

donc **stable**.

7.8

On exprime la relation géométrique

$$4d = z + 2d \cos \theta \text{ donc } z = 4d - 2d \cos \theta$$

L'énergie potentielle du système est la somme de toutes les énergies potentielles

$$E_p = E_{p_{ie}} + E_{p_p} + E_{p_{el}}$$

$$E_p = -2 \cdot \frac{1}{2} m\Omega^2 d^2 \sin^2 \theta + mgz + 2mg(z + d \cos \theta) + \frac{1}{2} k(z - 2d)^2$$

soit, en fonction de la seule variable θ :

$$E_p(\theta) = 2d \left[6mg + kd - \frac{1}{2} m\Omega^2 d - (2mg + kd) \cos \theta + \right.$$

$$\left. \left(kd + \frac{1}{2} m\Omega^2 d \right) \cos^2 \theta \right]$$

À l'équilibre, $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$, soit

$$(2mg + kd) \sin \theta - 2 \left(kd + \frac{1}{2} m\Omega^2 d \right) \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\text{soit } \sin \theta \left[(2mg + kd) - (m\Omega^2 d + 2kd) \cos \theta \right] = 0$$

$$\text{soit } \begin{cases} \sin \theta = 0 \text{ ou} \\ \cos \theta = \frac{2mg + kd}{m\Omega^2 d + 2kd} \end{cases}$$

La première solution donne $\theta = 0$. La seconde n'est possible que si

$$2mg + kd < m\Omega^2 d + 2kd$$

7.9

a) La tension du fil est selon le vecteur unitaire du fil, soit

$$\vec{T} = -T \frac{\vec{SM}}{L}$$

On travaille dans le référentiel non galiléen en rotation. Les composantes des vecteurs cinématiques dans la base cylindrique $(H, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ sont

$$\overrightarrow{HM} \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{v}_r \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{a}_r \begin{vmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le vecteur vitesse angulaire a pour composantes

$$\vec{\Omega} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{vmatrix}$$

Les vecteurs forces s'écrivent

$$\vec{T} \begin{vmatrix} T_r \\ T_\theta \\ T_z \end{vmatrix} \quad \vec{P} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix}$$

$$\vec{f}_{ie} \begin{vmatrix} m\Omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{f}_{ic} \begin{vmatrix} 2m\Omega r\dot{\theta} \\ -2m\Omega\dot{r} \\ 0 \end{vmatrix}$$

En projection sur l'axe vertical, on en déduit $T_z - mg = 0$. Les oscillations sont de faible amplitude, donc le fil reste quasiment vertical donc $T_z \approx T \approx mg$ d'où

$$\vec{T} \approx -\frac{mg}{L} \vec{SM}$$

La relation de Chasles s'écrit

$$\vec{SM} = \vec{SH} + \vec{HM} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ -L \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} T_r = -\frac{mg}{L}r \\ T_\theta = 0 \\ T_z = mg \end{cases} \quad \text{donc } \vec{f} = -\frac{mgr}{L} \vec{u}_r$$

b) La loi de la quantité de mouvement appliquée à M dans le référentiel non galiléen en rotation uniforme s'écrit donc, en projection sur les axes \vec{u}_r et \vec{u}_θ

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{mg}{L}r + m\Omega^2 r + 2m\Omega r\dot{\theta} \\ mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = -2m\Omega\dot{r} \end{cases}$$

c) Si $\theta(t) = \Omega t$ alors

$$\dot{\theta} = -\Omega \text{ et } \ddot{\theta} = 0$$

On remplace dans le système

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\Omega^2 = -\frac{mg}{L}r + m\Omega^2 r - 2m\Omega^2 r \\ 0 - 2m\dot{r}\Omega = -2m\Omega\dot{r} \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \ddot{r} + \frac{g}{L}r = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le plan $(H, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ tourne à vitesse angulaire $-\Omega$ par rapport au plateau qui tourne à vitesse angulaire Ω dans le référentiel du laboratoire. On retrouve donc les oscillations pendulaires harmoniques sans rotation de M dans le référentiel du laboratoire.

d) La rosace est le développement des oscillations pendulaires avec rotation du plateau. La période des oscillations pendulaires est $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, celle de rotation du référentiel $T_2 = \frac{2\pi}{\Omega}$. Lorsque le pendule fait une oscillation complète, il décrit deux pétales opposés. On en déduit

$$T_2 = 3T_1 \text{ soit } \frac{1}{\Omega^2} = \frac{9L}{g}$$

7.10

Dans le référentiel d'étude, en rotation uniforme à la vitesse angulaire

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z \text{ avec } \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

le corps est soumis à la force de gravitation et à la force d'inertie d'entraînement axifuge ; la force d'inertie de Coriolis est nulle car le corps est immobile ($\vec{v}_r = \vec{0}$). L'équilibre s'écrit

$$m\Omega^2 r \vec{u}_r - \frac{\mathcal{G} m_A m}{r^2} \vec{u}_r = \vec{0}$$

$$\text{soit } \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{\mathcal{G} m_A}{r^2} \text{ donc } \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} m_A}$$

qui forme la troisième loi de Kepler en mouvement circulaire.

7.11

a) Lorsqu'il est immobile, l'astronaute est plaqué au sol formé par le cylindre de rayon $r_2 - e$. On identifie cette force au poids soit

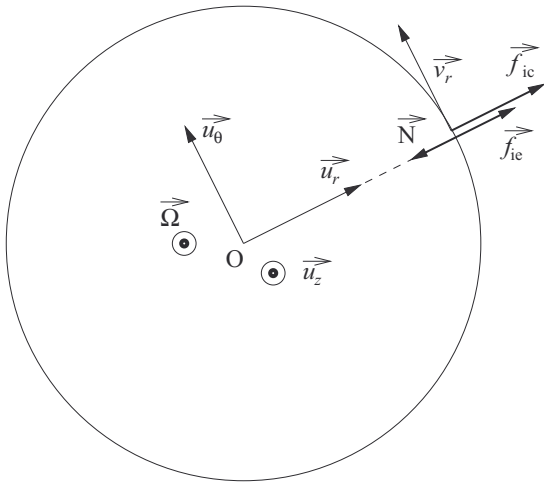
$$m\vec{g}_0 = m\Omega^2 (r_2 - e) \vec{u}_r \text{ donc } \Omega = \sqrt{\frac{g_0}{(r_2 - e)}} = 0,725 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Lorsque l'astronaute saute, il se rapproche de l'axe et sa pesanteur apparente diminue. De plus, comme il est en mouvement, il subit une force de Coriolis

$$\vec{f}_{ic} = -2m\Omega \vec{u}_z \wedge -v \vec{u}_r = 2m\Omega v \vec{u}_\theta$$

donc il subit un déplacement dans le sens des θ croissants quand il monte et dans l'autre sens quand il redescend.

- c) L'astronaute est animé d'un mouvement circulaire uniforme dans le référentiel en rotation. Les notations sont celles du schéma suivant.



On pose $R = r_2 - e$. Voici les composantes des vecteurs cinématiques dans la base cylindrique.

$$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{v}_r \\ v_\theta = R\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{a}_r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -R\dot{\theta}^2 = -\frac{v_0^2}{R} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

et $\vec{\Omega} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{vmatrix}$

Les composantes des vecteurs forces sont

$$\vec{N} \begin{vmatrix} -N \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{f}_{ie} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m\Omega^2 R \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{f}_{ic} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2m\Omega v_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à l'astronaute s'écrit

$$-N + m\Omega^2 R + 2m\Omega v_0 = -m \frac{v_0^2}{R} \text{ donc}$$

$$N = mR\Omega^2 \left[\frac{v_0^2}{R^2\Omega^2} + 2\frac{v_0}{R\Omega} + 1 \right] = mR\Omega^2 \left(1 + \frac{v_0}{R\Omega} \right)^2$$

Cette force s'annule quand $v_0 = -R\Omega$, ce qui est logique car dans ce cas, le mouvement de l'astronaute neutralise la rotation du module, et la gravité artificielle redevient nulle. On remarque aussi que plus l'astronaute court vite dans le sens de la rotation, plus N augmente, plus il se sentira lourd. Au contraire, si $-R\Omega < v_0 < 0$, il se sentira plus léger.

- a) En I (en $x_1 = 0$), M est sur l'axe donc la force d'inertie d'entraînement est nulle, et les forces d'attraction gravitationnelles subies par les deux étoiles sont opposées, c'est donc une position d'équilibre. Si x devient légèrement positif, la force d'attraction (dans le sens des x croissants) exercée par O_2 augmente, la force d'attraction (dans le sens des x décroissants) exercée par O_1 diminue, la force d'inertie d'entraînement (dans le sens des x croissants) augmente. La somme des forces est donc dirigée dans le sens des x croissants, donc dans le sens du déplacement initial. C'est donc une situation d'instabilité. Cherchons une position d'équilibre pour M à droite de O_2 , donc $x > \frac{d}{2}$. La somme des forces en projection sur \vec{u}_x s'écrit

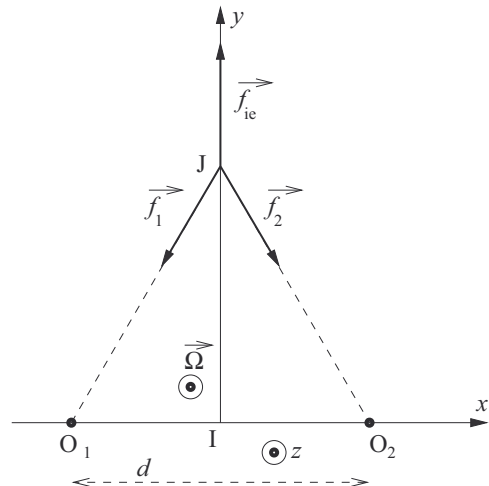
$$f(x) = -\frac{Gm_S m}{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{Gm_S m}{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2} + m\Omega^2 x$$

avec $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ donc

$$f(x) = -\frac{Gm_S m}{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{Gm_S m}{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2} + \frac{2\mathcal{G}m_S m x}{d^3}$$

Cette fonction est la somme de trois fonctions strictement croissantes pour $x > \frac{d}{2}$, elle est donc strictement croissante, tend vers $-\infty$ quand $x \rightarrow \frac{d}{2}$ et vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc elle s'annule une seule fois au point d'équilibre en $x = x_2$. Le point symétrique en $x = x_3 = -x_2$ est évidemment aussi point d'équilibre. Si M initialement en $x = x_2$ se déplace dans le sens des x croissants, $f(x)$ devient positive donc M est poussé dans le même sens que la perturbation, ce qui prouve que x_2 , et de même x_3 est une abscisse d'équilibre instable pour les mouvements selon x .

- b) M est soumise aux deux forces de gravitation et à la force d'inertie d'entraînement axifuge.



$$\vec{f}_{ie} = m\Omega^2 \vec{IJ} = \frac{4\pi^2 m}{T^2} d \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_y$$

$$\vec{f}_{ie} = \frac{\mathcal{G}m_S m \sqrt{3}}{d^2} \vec{u}_y$$

$$\vec{f}_1 = -\frac{\mathcal{G}m_S m}{d^2} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_y - \frac{1}{2} \vec{u}_x \right]$$

$$\vec{f}_2 = -\frac{\mathcal{G}m_S m}{d^2} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_y + \frac{1}{2} \vec{u}_x \right]$$

$$\text{donc } \vec{f}_{ie} + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$$

ce qui prouve que J est une position d'équilibre.

- c) Imaginons que M se déplace selon \vec{u}_x . La force d'inertie de Coriolis est dirigée vers $-\vec{u}_y$, donc son mouvement s'infléchit dans cette direction. Mais si la vitesse est dirigée vers $-\vec{u}_y$, la force de Coriolis est dirigée vers $-\vec{u}_x$, donc son mouvement s'infléchit dans cette direction. Mais si la vitesse est dirigée vers $-\vec{u}_x$, la force de Coriolis est dirigée vers \vec{u}_y , et en fin de compte, M est globalement ramené vers sa position de départ en J. C'est donc la force de Coriolis, qui n'apparaît pas dans l'énergie potentielle car sa puissance est nulle (elle est orthogonale à la vitesse) qui assure la stabilité de J. On peut retenir qu'on ne peut pas généraliser à deux dimensions les propriétés de la cuvette de potentiel dans les problèmes à un degré de liberté.

7.13

- a) Dans le référentiel \mathcal{R}_{TL} non galiléen, la loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$-\frac{\mathcal{G}m_T m_L}{r_L^2} \vec{u}_x + m_L \Omega^2 r_L \vec{u}_x = \vec{0} \text{ donc } r_L \Omega^2 = \frac{\mathcal{G}m_T}{r_L^2}$$

- b) Par application des lois du cours :

$$\vec{f}_{T-Z} = -\frac{\mathcal{G}m_T m}{(r_L - R_L)^2} \vec{u}_x \text{ et } \vec{f}_{T-E} = -\frac{\mathcal{G}m_T m}{(r_L + R_L)^2} \vec{u}_x$$

$$\vec{f}_{L-Z} = \frac{\mathcal{G}m_L m}{R_L^2} \vec{u}_x \text{ et } \vec{f}_{L-E} = -\frac{\mathcal{G}m_L m}{R_L^2} \vec{u}_x$$

$$\vec{f}_{ieZ} = m\Omega^2 (r_L - R_L) \vec{u}_x \text{ et } \vec{f}_{ieE} = m\Omega^2 (r_L + R_L) \vec{u}_x$$

- c) En sommant les deux forces :

$$\vec{f}_m(Z) = -\frac{\mathcal{G}m_T m}{(r_L - R_L)^2} \vec{u}_x + m\Omega^2 (r_L - R_L) \vec{u}_x$$

Or $r_L \Omega^2 = \frac{\mathcal{G}m_T}{r_L^2}$ donc

$$\vec{f}_m(Z) = -m\Omega^2 r_L \frac{r_L^2}{(r_L - R_L)^2} + m\Omega^2 r_L \frac{r_L - R_L}{r_L} \vec{u}_x$$

$$\vec{f}_m(Z) = m\Omega^2 r_L \left[\frac{r_L - R_L}{r_L} - \frac{r_L^2}{(r_L - R_L)^2} \right] \vec{u}_x$$

De même

$$\vec{f}_m(E) = -m\Omega^2 r_L \frac{r_L^2}{(r_L + R_L)^2} + m\Omega^2 r_L \frac{r_L + R_L}{r_L} \vec{u}_x$$

$$\vec{f}_m(E) = m\Omega^2 r_L \left[\frac{r_L + R_L}{r_L} - \frac{r_L^2}{(r_L + R_L)^2} \right] \vec{u}_x$$

- d) On peut écrire

$$\frac{r_L - R_L}{r_L} = 1 - \frac{R_L}{r_L}$$

et par développement limité :

$$\frac{r_L^2}{(r_L - R_L)^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_L}{r_L}\right)^2} \approx 1 + 2 \frac{R_L}{r_L}$$

$$\text{donc } \vec{f}_m(Z) \approx -3m\Omega^2 R_L \vec{u}_x$$

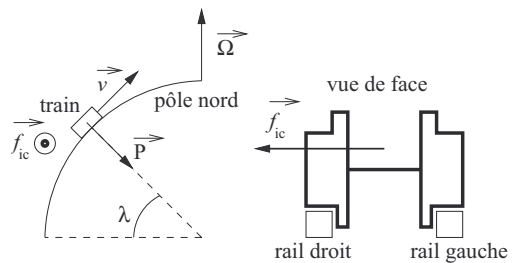
est opposée à l'attraction lunaire en Z. De même

$$\vec{f}_m(E) \approx 3m\Omega^2 R_L \vec{u}_x$$

est opposée à l'attraction lunaire en E. L'application numérique donne $f_m(Z) = f_m(E) = 3,62 \cdot 10^{-5}$ N très inférieure au poids lunaire de 1,62 N.

7.14

On complète les schémas avec les forces.

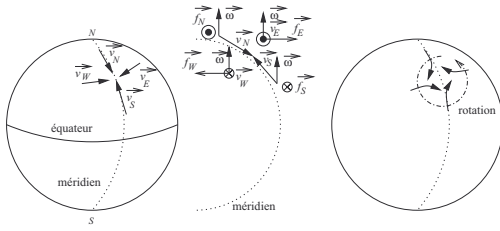


Il y a donc un appui latéral de la roue sur le rail de droite. La norme de la force de Coriolis est

$$2m\Omega \cdot v \cdot \sin 45^\circ = 2,6 \cdot 10^3 \text{ N}$$

7.15

Voici la construction des vecteurs force de Coriolis pour les vents venant du nord (N), de l'ouest (W), du sud (S) et de l'est (E).



Le vent du nord est donc dévié vers l'ouest, le vent d'ouest vers le sud, le vent du sud vers l'est et le vent d'est vers le nord. On en déduit que les vents tournent dans le sens anti-horaire (trigonométrique) vu depuis le ciel autour du minimum dépressionnaire. C'est le sens contraire pour un anticyclone.

7.16

Les vents de haute altitude, les plus rapides, se dirigent du sud vers le nord. La force d'inertie de Coriolis est donc dirigée d'ouest en est, de qui est conforme à l'observation du vent dominant dans l'hémisphère nord.

7.17

- a) La force d'inertie d'entraînement est incluse dans le poids.
 b) Par lecture directe

$$\vec{\Omega} \begin{vmatrix} -\Omega C \\ 0 \\ \Omega S \end{vmatrix}$$

- c) Voici les composantes des vecteurs cinématiques

$$\vec{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \vec{\Omega} \begin{vmatrix} -\Omega C \\ 0 \\ \Omega S \end{vmatrix} \quad \vec{v}_r \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \quad \vec{a}_r \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}$$

Voici les composantes des vecteurs forces

$$\vec{P} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{f}_{ic} \begin{vmatrix} 2m\Omega S \dot{y} \\ -2m\Omega S \dot{x} - 2m\Omega C \dot{z} \\ 2m\Omega C \dot{y} \end{vmatrix}$$

On en déduit le système d'équations différentielles vérifiées par x, y, z :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\Omega S \dot{y} \\ m\ddot{y} = -2m\Omega S \dot{x} - 2m\Omega C \dot{z} \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\Omega C \dot{y} \end{cases}$$

$$\text{donc} \begin{cases} \dot{x} = 2\Omega S y \\ \dot{y} = -2\Omega S x - 2\Omega C z \\ \dot{z} = -gt + 2\Omega C y \end{cases}$$

- d) Dans l'hypothèse des petits angles, les développements limités au troisième ordre s'écrivent

$$\cos(2\Omega t) \approx 1 - \frac{4\Omega^2 t^2}{2} \quad \text{et} \quad \sin(2\Omega t) \approx 2\Omega t - \frac{1}{6} \cdot 8\Omega^3 t^3$$

On en déduit les expressions approchées

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = \frac{Cg}{2\Omega} t - \frac{Cg}{2\Omega} t + \frac{1}{3} Cg\Omega t^3 = \frac{1}{3} Cg\Omega t^3 \\ z(t) \approx -\frac{1}{2} S^2 g t^2 - \frac{1}{2} C^2 g t^2 = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

On retrouve donc l'équation horaire de la chute libre selon z , et une fonction croissante selon y , donc une déviation vers l'est.

- e) Pour une chute de 400 mètres

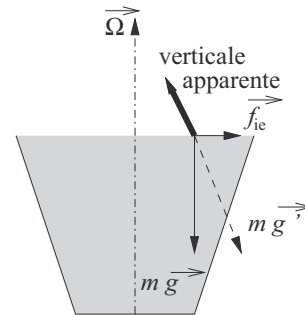
$$-\frac{1}{2} g t^2 = -400 \quad \text{donc} \quad t = \sqrt{\frac{800}{g}} \approx 8,9 \text{ s}$$

$$\text{et} \quad y(t) = 12 \text{ cm}$$

7.18

Là où la graine est plantée, un corps quelconque immobile subit le poids terrestre et la force d'inertie axifuge. La somme des ces deux forces forme une pesanteur modifiée

$$\vec{g}' = m\vec{g} + m\Omega^2 d\vec{u}_r$$



On peut, même sans grande connaissance en biologie, émettre l'hypothèse que la tige pousse verticalement vers le haut et qu'elle cherche la lumière. Comme le plateau tourne, il n'y a aucune anisotropie lumineuse. La tige se développe donc dans la direction de la verticale apparente, donc selon \vec{g}' , donc en se penchant vers l'intérieur. L'angle d'inclinaison par rapport à la verticale est α avec

$$\tan \alpha = \frac{f_{ie}}{mg} = \frac{\Omega^2 d}{g}$$

7.19

- a) Par application de la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T_{GS}^2}{(R_T + z_{GS})^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_T}$$

$$\text{donc} \quad z_{GS} = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}m_T T_{GS}^2}{4\pi^2}} - R_T = 35,8 \cdot 10^6 \text{ km}$$

b) On travaille dans le référentiel terrestre non galiléen en rotation à la vitesse angulaire $\Omega = \frac{2\pi}{T}$. Comme le câble s'élève à très haute altitude, on ne peut plus considérer que le poids s'exerce en intégrant la force d'inertie d'entraînement. Le tronçon de câble est soumis à

- la force de gravitation $\vec{f}_g = -\frac{\mathcal{G}m_T\mu dz}{(R_T+z)^2}\vec{u}_z$
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = \mu dz\Omega^2(R_T+z)\vec{u}_z$
- les forces de tension aux deux extrémités

$$\vec{T}(z) = -T(z)\vec{u}_z \text{ et } \vec{T}(z+dz) = T(z+dz)\vec{u}_z$$

Le tronçon de câble étant immobile, sa vitesse relative est nulle donc la force d'inertie de Coriolis est nulle, et son accélération est nulle donc la somme des forces est nulle :

$$T(z+dz) - T(z) - \frac{\mathcal{G}m_T\mu dz}{(R_T+z)^2} + \mu dz\Omega^2(R_T+z)$$

$$\text{donc } \frac{dT}{dz} = \frac{\mathcal{G}m_T\mu}{(R_T+z)^2} - \mu\Omega^2(R_T+z)$$

On intègre cette équation différentielle en tenant compte de la condition aux limites à l'extrémité du câble $T(z=L) = 0$:

$$T(z) = -\mathcal{G}m_T\mu \left[\frac{1}{R_T+z} - \frac{1}{R_T+L} \right] - \frac{1}{2}\mu\Omega^2 \left[(R_T+z)^2 - (R_T+L)^2 \right]$$

On en déduit la tension en A

$$T_A = T(z=0) = 28,8 \cdot 10^6 \text{ N}$$

c) La cabine se déplace à vitesse relative constante dans le référentiel non galiléen terrestre, elle subit donc une force perpendiculaire au câble qu'elle lui transmet, d'où le fléchissement. On pourrait remédier à cela en organisant la montée d'une cabine pendant qu'une autre descend. Le poids est la somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement. Elle est égale au poids terrestre en A, puis elle diminue quand z augmente car la distance au centre de la Terre diminue, donc la force de gravitation diminue et la force d'inertie augmente simultanément. Le poids est nul à l'altitude géostationnaire z_{GS} et devient négatif au delà c'est-à-dire qu'il repousse les occupants de la cabine vers l'espace.

d) Ce dispositif rendrait la mise en orbite beaucoup plus simple, moins dangereuse et plus économique en énergie car possible à vitesse faible par rapport à une fusée, donc avec beaucoup moins de frottements.

a) La tension du fil est selon le vecteur unitaire du fil, soit

$$\vec{T} = -T \frac{\vec{SM}}{L}$$

On travaille dans le référentiel terrestre non galiléen. Les composants des vecteurs cinématiques sont

$$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{v}_r \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{a}_r \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le vecteur vitesse angulaire a pour composante

$$\vec{\Omega} \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{vmatrix}$$

Les vecteurs forces s'écrivent

$$\vec{T} \begin{vmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{vmatrix} \quad \vec{P} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} \quad \vec{f}_{ic} = \begin{vmatrix} 2m\Omega \sin \lambda \dot{y} \\ -2m\Omega \sin \lambda \dot{x} \\ 2m\Omega \cos \lambda \dot{x} \end{vmatrix}$$

En projection sur l'axe vertical, on en déduit

$$T_z - mg + 2m\Omega \cos \lambda \dot{x} = 0$$

Les oscillations sont de faible amplitude, x varie peut-être d'une dizaine de mètres en une durée de l'ordre de la période du pendule

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \approx 16 \text{ s}$$

donc \dot{x} reste de l'ordre du mètre par seconde, et Ω est de l'ordre de $7 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on peut donc négliger le terme de Coriolis devant le poids. De plus, le fil reste quasiment vertical donc $T_z \approx T \approx mg$ d'où

$$\vec{T} \approx -\frac{mg}{L} \vec{SM}$$

b) La relation de Chasles s'écrit

$$\vec{SM} = \vec{SO} + \vec{OM} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ -L \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} T_x = -\frac{mg}{L}x \\ T_y = -\frac{mg}{L}y \\ T_z = mg \end{cases}$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à M dans le référentiel terrestre s'écrit donc, en projection sur les axes x et y

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{mg}{L}x + 2m\Omega \sin \lambda \dot{y} \\ m\ddot{y} = -\frac{mg}{L}y - 2m\Omega \sin \lambda \dot{x} \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \ddot{x} + \frac{g}{L}x = 2\Omega \sin \lambda \dot{y} \\ \ddot{y} + \frac{g}{L}y = -2\Omega \sin \lambda \dot{x} \end{cases}$$

On obtient bien la forme attendue avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ et } \beta = \Omega \sin \lambda$$

$$\text{et } \begin{cases} \beta = 5,49 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ \omega_0 = 0,146 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases} \text{ donc } \beta \ll \omega_0$$

- c) En sommant la première équation et la seconde multipliée par i , on obtient

$$\ddot{\underline{\rho}} + \omega_0^2 \underline{\rho} = 2\beta(-i\dot{x} + \dot{y}) = -2i\beta(\dot{x} + i\dot{y})$$

$$\text{soit } \ddot{\underline{\rho}} + 2i\beta\dot{\underline{\rho}} + \omega_0^2 \underline{\rho} = 0$$

On résout l'équation caractéristique

$$r^2 + 2i\beta r + \omega_0^2 = 0$$

Son discriminant est

$$\Delta = -4\beta^2 - 4\omega_0^2 \approx -4\omega_0^2 = (2i\omega_0)^2$$

Ses racines sont donc

$$r = -i\beta \pm i\omega_0 \text{ donc}$$

$$\begin{cases} \underline{\rho} = \underline{\rho}_1 e^{-i(\beta-\omega_0)t} + \underline{\rho}_2 e^{-i(\beta+\omega_0)t} \\ \dot{\underline{\rho}} = -i(\beta-\omega_0)\underline{\rho}_1 e^{-i(\beta-\omega_0)t} - i(\beta+\omega_0)\underline{\rho}_2 e^{-i(\beta+\omega_0)t} \end{cases}$$

Les conditions initiales donnent, en négligeant β devant ω_0

$$\begin{cases} \underline{\rho}_1 + \underline{\rho}_2 = a \\ i\omega_0 \underline{\rho}_1 - i\omega_0 \underline{\rho}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \underline{\rho}_1 = \underline{\rho}_2 = \frac{a}{2} \text{ et}$$

$$\underline{\rho} = a e^{-i\beta t} \cos(\omega_0 t) = a \cos(\beta t) \cos(\omega_0 t) - i a \sin(\beta t) \cos(\omega_0 t)$$

- d) Par identification

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(\Omega \sin \lambda \cdot t) \cos(\omega_0 t) \\ y(t) = -a \sin(\Omega \sin \lambda \cdot t) \cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

La pulsation ω_0 étant très supérieure à β , le mobile M fait donc des allers-retours à la pulsation ω_0 selon une direction quasiment rectiligne définie par

$$\begin{cases} x = a \cos(\Omega \sin \lambda \cdot t) q \\ y = -a \sin(\Omega \sin \lambda \cdot t) q \end{cases} \text{ avec } q \in [-1, 1]$$

Ces équations définissent une droite de vecteur directeur

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega \sin \lambda \cdot t) \\ -\sin(\Omega \sin \lambda \cdot t) \end{pmatrix}$$

qui tourne à vitesse angulaire constante

$$\Omega_F = \Omega \sin \lambda \text{ donc } T_F = \frac{2\pi}{\Omega_F}$$

$$\text{soit } T_F = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_T} \sin \lambda} = \frac{T_T}{\sin \lambda}$$

L'application numérique donne

$$T_F = 114,4 \cdot 10^3 \text{ s} = 31 \text{ h } 47 \text{ min}$$

7.21

Pour $z \in [0, z_{\max}]$, la pression de l'eau à gauche est

$$P(x=0^+) = P_0 + \mu a \frac{A+g}{2} - \mu g z$$

et la pression de l'air à droite est P_0 . Pour $z > z_{\max}$, la pression de l'air est identique des deux côtés de la paroi. La résultante des forces de pression sur la face arrière de l'aquarium est donc

$$\vec{F} = - \int_{y=0}^a \int_{z=0}^{a \frac{A+g}{2g}} \left[\mu a \frac{A+g}{2} - \mu g z \right] dy dz \vec{u}_x$$

$$\text{soit } \vec{F} = -\mu \vec{u}_x [y]_0^a \left[a \frac{A+g}{2} z - g \frac{z^2}{2} \right]_0^{a \frac{A+g}{2g}}$$

$$\text{soit } \vec{F} = -\mu a^3 \frac{(A+g)^2}{8g} \vec{u}_x$$

7.22

- a) Dans le référentiel non galiléen en rotation, l'eau est immobile. La force d'inertie d'entraînement et l'équilibre de la particule de fluide s'écrit, en coordonnées cylindriques,

$$-\mu g \vec{u}_z - \vec{\text{grad}} P + \mu \Omega^2 r \vec{u}_r = \vec{0}$$

$$\text{soit } \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial P}{\partial r} \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ -\mu g & \frac{\partial P}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu \Omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

P ne dépend pas de θ . On intègre la relation sur r

$$\frac{\partial P(r, z)}{\partial r} = \mu \Omega^2 r \text{ donc } P(r, z) = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 r^2 + K(z)$$

On injecte dans la relation sur z

$$K'(z) = -\mu g \text{ donc } K(z) = -\mu g z + K_0$$

$$\text{et } P(r, z) = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 r^2 - \mu g z + K_0$$

À la surface libre du liquide, $P = P_0$, donc son équation est

$$z = \varphi(r) = z_0 + \frac{\Omega^2}{2g} r^2$$

$$\text{avec } z_0 = \frac{K_0 - P_0}{\mu g}$$

On écrit la conservation du volume de liquide pour déterminer z_0 . Quand le verre ne tourne pas, le volume est

$$V = \pi R^2 \cdot \frac{H}{2} = \pi R^3$$

Lorsqu'il tourne, le volume de la couronne cylindrique entre r et $r + dr$ est

$$d\tau = 2\pi r dr \varphi(r)$$

On en déduit

$$V = \int_{r=0}^R 2\pi r \varphi(r) dr$$

$$V = 2\pi \int_{r=0}^R \left(z_0 r + \frac{\Omega^2}{2g} r^3 \right) dr$$

$$V = 2\pi \left[z_0 \frac{r^2}{2} + \frac{\Omega^2}{8g} r^4 \right]_{r=0}^R$$

$$\text{soit } \pi R^3 = \pi R^3 \left[\frac{z_0}{R} + \frac{\Omega^2 R}{4g} \right]$$

$$\text{donc } z_0 = R - \frac{\Omega^2 R^2}{4g}$$

La surface libre du liquide est donc un hyperboloïde de révolution d'équation

$$z = \varphi(r) = R + \frac{\Omega^2}{4g} (2r^2 - R^2)$$

- b) Si le liquide est du mercure, on obtient ainsi un miroir parabolique, instrument d'optique important dans les grands télescopes.
 c) Le niveau du liquide est minimal au centre et vaut z_0 . Il y aura donc assèchement quand

$$z_0 = 0 \text{ soit } \Omega = 2\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Le niveau du liquide est maximal à la périphérie du verre pour $r = R$. Il y aura débordement si

$$\varphi(R) > H \text{ soit } \Omega = 2\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Les deux événements sont donc concomitants.

7.23

- a) L'équilibre de la particule de fluide d'air se traduit par la nullité de la somme de la force de pesanteur qu'on néglige, des forces de pression et de la force d'inertie d'entraînement. En grandeurs volumiques :

$$-\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu_0 \Omega^2 x \vec{u}_x = \vec{0}$$

$$\text{soit } -\frac{dP}{dx} + \mu_0 \Omega^2 x = 0 \text{ donc } P = K + \frac{\mu_0 \Omega^2}{2} x^2$$

La pression vaut P_0 à l'extrémité du tube en $x = r$ donc

$$K = P_0 - \frac{\mu_0 \Omega^2}{2} r^2 \text{ et}$$

$$P = P_0 + \frac{\mu_0 \Omega^2}{2} (x^2 - r^2)$$

- b) L'équilibre de l'interface liquide-air dans le tube vertical se traduit par l'égalité de la pression dans les deux milieux :
- dans le liquide, d'après la loi de l'hydrostatique, $P = P_0 - \mu g h$;
 - dans l'air, sa masse volumique étant négligeable devant celle du liquide, on peut considérer qu'elle est uniforme sur la colonne verticale de l'axe du tube :

$$P = P(x=0) = P_0 - \frac{\mu_0 \Omega^2}{2} r^2$$

En identifiant les deux pressions, il vient

$$\mu g h = \frac{\mu_0 \Omega^2}{2} r^2$$

$$\text{donc } h = \frac{\mu_0 \Omega^2 r^2}{2\mu g}$$

On prend $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ d'où $h = 6,4 \text{ cm}$.

- c) La loi des gaz parfaits en termes de masse volumique s'écrit $PM = \mu RT$ donc $\mu = \frac{PM}{RT}$ et en remplaçant dans l'équation d'équilibre, il vient

$$-\frac{dP}{dx} + \frac{PM}{RT} \Omega^2 x = 0$$

$$\text{soit } \frac{dP}{P} = \frac{M\Omega^2}{RT} x dx$$

On intègre entre r et x :

$$[\ln P]_r^x = \frac{M\Omega^2}{RT} \left[\frac{x^2}{2} \right]_r^x$$

$$\text{soit } \ln \frac{P}{P_0} = \frac{M\Omega^2}{2RT} (x^2 - r^2)$$

$$\text{donc } P = P_0 e^{-\frac{M\Omega^2}{2RT} (r^2 - x^2)}$$

7.24

- a) Appelons \vec{u} le vecteur unitaire horizontal en M le long du méridien, dirigé vers le nord : on a

$$\vec{\Omega} = \cos \lambda \vec{u} + \sin \lambda \vec{u}_z$$

$$\text{et } \vec{u} = \sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$$

$$\text{donc } \vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \cos \lambda \sin \theta \\ \cos \lambda \cos \theta \\ \sin \lambda \end{vmatrix}$$

Pour alléger les notations, on notera dorénavant $c = \cos \lambda$, $s = \sin \lambda$, $C = \cos \theta$ et $S = \sin \theta$.

- b) Les particules de fluide ayant toutes la même vitesse, il n'y a pas de forces de frottement (de viscosité) entre elles. Dans le référentiel non galiléen terrestre en rotation uniforme autour de l'axe des pôles, la particule de fluide est donc seulement soumise à son poids (qui comprend la force gravitationnelle et la force d'inertie d'entraînement), les forces de pression et la force d'inertie de Coriolis. La somme des forces volumiques est nulle, soit

$$\mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P - 2\mu \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{0} \text{ soit}$$

$$\mu \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{vmatrix} - 2\mu \begin{vmatrix} \Omega c S \\ \Omega c C \\ \Omega s \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

- c) P ne dépend pas de x. On a

$$\frac{\partial P(y, z)}{\partial y} = -2\mu \Omega s v \text{ donc } P(y, z) = -2\mu \Omega s v y + K(z)$$

De plus

$$\frac{\partial P(y, z)}{\partial z} = -\mu g + 2\mu \Omega c C v$$

En remplaçant P par l'expression obtenue, il vient :

$$K'(z) = -\mu g + 2\mu \Omega c C v \text{ soit } K(z) = [-\mu g + 2\mu \Omega c C v] z + K_0$$

et enfin

$$P(x, y, z) = K_0 - 2\mu \Omega s v y + [-\mu g + 2\mu \Omega c C v] z$$

- d) $P(x, y, z) = P_0$ (air extérieur) donne

$$-2\mu \Omega s v y + [-\mu g + 2\mu \Omega c C v] z = P_0 - K_0$$

- e) Voici quelques valeurs et ordres de grandeur.

$$\Omega \simeq \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, L \simeq 100 \text{ m}$$

$$\lambda \simeq \frac{\pi}{4} \text{ et } \theta \simeq -\frac{\pi}{2}$$

car le Rhône coule du nord vers le sud. On peut donc considérer que

$$2\mu \Omega c C v \ll \mu g$$

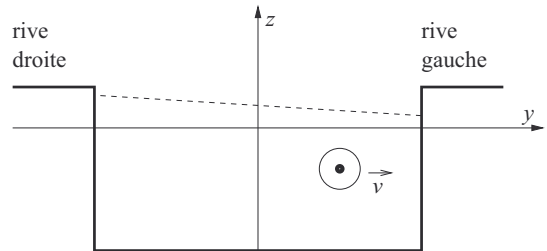
L'équation simplifiée est donc

$$-2\mu \Omega s v y - \mu g z = P_0 - K_0$$

- f) Dans le plan de coupe du lit de la rivière $x = \text{cste}$, on a pour le Rhône

$$-2\mu \Omega v y - \mu g z = P_0 - K_0$$

C'est donc une droite de coefficient directeur négatif, la vue depuis un observateur au sud qui voit le Rhône couler vers lui est donc :



Le niveau est donc plus haut sur la rive gauche que sur la rive droite. Par définition de la pente :

$$\frac{\Delta h}{L} = \frac{2\mu \Omega v}{\mu g} = \frac{2\Omega v}{g}$$

$$\text{donc } \Delta h = \frac{2L\Omega v}{g} = 1,5 \text{ cm}$$

Cette valeur, plus faible que la hauteur de la moindre vague, est difficilement détectable, mais on peut trouver des indices d'une usure plus prononcée des berges droites par rapport aux berges gauches des grands fleuves dans l'hémisphère nord.

CHAPITRE 8

Véhicule à roues

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Roue.
- ◇ Lois de Coulomb.
- ◇ Condition de non glissement d'une roue.
- ◇ Relation entre vitesse de rotation et vitesse du centre d'une roue.
- ◇ Véhicule à roues.
- ◇ Rôle du moteur dans un véhicule à roues.
- ◇ Roues motrices.
- ◇ Bilan énergétique, loi de la puissance cinétique.
- ◇ Loi de la quantité de mouvement.
- ◇ Loi du moment cinétique.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

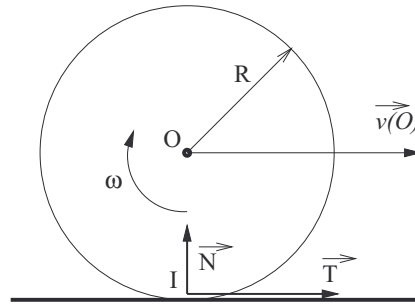
- ◇ Exprimer la condition de non-glissement d'une roue.
- ◇ Étudier un véhicule tracté par une force extérieure.
- ◇ Étudier un véhicule muni de roues motrices.

Les méthodes à retenir

Exprimer la condition de non-glisser d'une roue.

Les **lois de Coulomb** vues en PCSI sont appliquées au cas de la roue cylindrique au contact quasiment ponctuel d'un support plan. Les propriétés cinématiques et dynamiques sont complémentaires.

- **Aspect cinématique.** Soient O le centre et R le rayon de la roue. La vitesse de rotation est ω , la vitesse de déplacement de O est $\vec{v}(O)$.
- **Aspect dynamique.** L'action du support sur la roue au point I de contact se décompose en une force normale \vec{N} et une force tangentielle \vec{T} .



Deux cas sont à considérer, il faut remarquer leur complémentarité, l'un donne une égalité cinématique et une inégalité dynamique, l'autre donne une inégalité cinématique et une égalité dynamique.

- **Loi de Coulomb du glissement.** Il y a glissement lorsque la vitesse du point I de la roue est différent de la vitesse du point J du support (nulle la plupart du temps) sur lequel il s'appuie. La vitesse de glissement est

$$\vec{v}_{gl} = \vec{v}(I \in roue) - \vec{v}(J \in \text{support})$$

On a alors

$$\begin{cases} \vec{v}_{gl} \neq \vec{0} \\ v(O) \neq R\omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{T} \text{ anticolinéaire à } \vec{v}_{gl} \\ T = \mu_d N \end{cases}$$

où μ_d est le coefficient de frottement dynamique, sans dimension. Dans le référentiel du support, les puissances des actions de contact sont

$$\mathcal{P}(\vec{N}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v}_{gl} < 0$$

Le glissement provoque une dissipation d'énergie mécanique.

- **Loi de Coulomb du non-glisserment.** Il y a non-glisserment si la vitesse de glissement est nulle. On a alors

$$\begin{cases} \vec{v}_{gl} = \vec{0} \\ v(O) = R\omega \end{cases} \quad \text{et} \quad T \leq \mu_s N$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique, sans dimension. Le sens de \vec{T} est défini ainsi : cette force s'oppose au glissement éventuel de la roue sur le support.

Dans le référentiel du support, les puissances des actions de contact sont nulles

$$\mathcal{P}(\vec{N}) = \mathcal{P}(\vec{T}) = 0$$

C'est pourquoi on préfère qualifier \vec{T} de force d'adhérence plutôt que de force de frottement.

Voici la méthode préconisée pour l'étude du contact entre une roue cylindrique et un support plan.

a) On suppose qu'il y a non-glissement. Si l'énoncé fournit l'expression de l'énergie cinétique E_c de la roue dans le référentiel du support, on peut appliquer la **loi de la puissance cinétique**. La puissance des forces de contact est nulle, celle des forces localisées (\vec{f}) est le produit scalaire de la force par le vecteur vitesse du point d'application, celle d'un couple moteur ou de frottement (Γ) est le produit algébrique du moment par la vitesse angulaire. La loi s'écrit

$$\frac{dE_{c_{roue}}}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}) + \mathcal{P}(\Gamma)$$

b) On en déduit l'accélération \vec{a}_O et/ou l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ puis la vitesse $\vec{v}(O)$ et/ou la vitesse angulaire ω .

c) On calcule les actions de contact T et N en utilisant l'une des deux lois suivantes.

c.1) Si O a un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel du support, on peut appliquer la **loi du moment cinétique** autour de l'axe Δ passant par O dans le **référentiel barycentrique** de centre O et en translation par rapport au support.

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}$$

c.2) On peut aussi appliquer la **loi de la quantité de mouvement** (dans laquelle les couples moteur et de frottement n'apparaissent pas)

$$m\vec{a}(O) = \sum \vec{f}$$

d) On vérifie l'inégalité de Coulomb $T \leq \mu_s N$. Si elle est vérifiée, on valide le non-glissement, sinon, il y a glissement.

e) Dans ce cas, $T = \mu_d N$ et on en déduit le mouvement de la roue par l'une des méthodes suivantes.

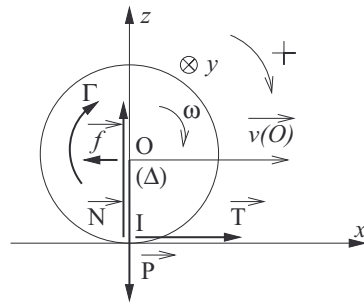
e.1) La **loi de la quantité de mouvement** donne l'accélération \vec{a}_O dont on déduit \vec{v}_O .

e.2) La **loi du moment cinétique** donne l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ dont on déduit ω .

f) On peut en déduire la vitesse de glissement \vec{v}_g et la puissance dissipée par la force de frottement \vec{T} .

Exemple :

Une roue de centre O, de rayon R, de masse m , de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mR^2$ par rapport à l'axe Δ horizontal passant par O, se déplace à vitesse angulaire constante ω sur un support plan horizontal qui forme un référentiel galiléen. Elle subit dans son déplacement une force de frottement \vec{f} , appliquée en O, de même direction et de sens opposé à \vec{v}_O . Un couple moteur de moment Γ par rapport à Δ s'exerce sur la roue.



a) Supposons qu'il n'y a pas glissement. On en déduit la relation cinématique

$$v(O) = r\omega \text{ soit } \dot{x} = R\omega$$

L'énergie cinétique de la roue est

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega^2$$

La loi de la puissance cinétique s'écrit donc

$$\frac{3}{4}mR^2 \cdot 2\dot{\omega}\omega = -f \cdot R\omega + \Gamma\omega$$

La vitesse angulaire est constante donc

$$\Gamma = fR$$

b) le mouvement de la roue est donné dans l'énoncé, elle tourne à la vitesse angulaire constante ω et O a un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\dot{x} = R\omega$.

c.1) Le référentiel barycentrique $\mathcal{R}_b = (O, x, y, z)$ est en translation rectiligne à vitesse constante par rapport au support, il est donc galiléen. L'orientation positive des moments est indiquée sur le schéma. Les bras de levier de \vec{P} , \vec{N} et \vec{f} sont nuls. Celui de \vec{T} est R.

La loi du moment cinétique en O dans \mathcal{R}_b s'écrit donc

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\omega} = -R \cdot T + \Gamma \text{ donc } \Gamma = TR$$

car ω est constant. En identifiant avec le résultat précédent, $T = f$.

c.2) L'application de la loi de la quantité de mouvement donne

$$m\vec{a}_O = \vec{0} = \vec{P} \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \vec{N} \begin{vmatrix} 0 \\ N \end{vmatrix} + \vec{T} \begin{vmatrix} T \\ 0 \end{vmatrix} + \vec{f} \begin{vmatrix} -f \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } T = f \text{ et } N = mg$$

d) La condition de Coulomb pour le non-glissement est vérifiée si

$$T \leq \mu_s N \text{ soit } f \leq \mu_s mg$$

e) Si $f > \mu_s mg$, il y a glissement donc $T = \mu_d N$.

e.1) La loi du moment cinétique par rapport à Δ dans \mathcal{R}_b donne (ω n'est plus constant)

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\omega} = -R \cdot T + \Gamma \text{ donc } \dot{\omega} = \frac{\Gamma - TR}{\frac{1}{2}mR^2}$$

e.2) La loi de la quantité de mouvement donne

$$\begin{vmatrix} m\ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{P} \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \vec{N} \begin{vmatrix} 0 \\ N \end{vmatrix} + \vec{T} \begin{vmatrix} T \\ 0 \end{vmatrix} + \vec{f} \begin{vmatrix} -f \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$m\ddot{x} = T - f \text{ et } N = mg$$

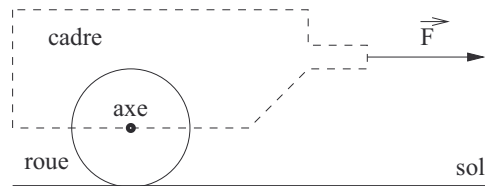
En utilisant la relation dynamique de Coulomb en présence de frottement, on en déduit

$$\begin{cases} N = mg \\ T = \mu_d mg \\ \dot{\omega} = \frac{\Gamma - \mu_d mgR}{\frac{1}{2}mR^2} \\ \ddot{x} = \frac{\mu_d mg - f}{m} \end{cases}$$

↪ **Exercices 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.6, 8.7.**

Étudier un véhicule tracté par une force extérieure.

Un véhicule à roues est formé d'un cadre s'appuyant sur le ou les axes des roues cylindriques. Dans la première situation proposée par le programme, ce cadre est soumis à une force extérieure.



On fait l'hypothèse que le cadre de masse M est en mouvement de translation rectiligne et uniforme à la vitesse \vec{V} . La roue i de centre G_i a un rayon R_i , une masse m_i et un moment d'inertie par rapport à son axe J_i . S'il y a roulement sans glissement de cette roue sur le sol, alors la vitesse angulaire est $\omega_i = \frac{V}{R_i}$. Voici les principes d'application des trois lois de la mécanique.

a) La quantité de mouvement du système complet {cadre,roues} est

$$\vec{p} = \left(M + \sum_{\text{roues}} m_i \right) \vec{V}$$

Les forces **extérieures** qui s'exercent sur ce système sont le poids, les forces de contact entre chaque roue et le sol et la force \vec{F} . La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\sum \vec{f}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

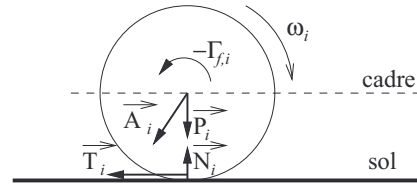
b) L'énergie cinétique du système complet {cadre,roues} est

$$Ec = \frac{1}{2} \left(M + \sum_{\text{roues}} m_i \right) V^2 + \sum_{\text{roues}} \frac{1}{2} J_i \omega_i^2$$

La puissance des forces normales \vec{N}_i est nulle. Celle des forces tangentielles \vec{T}_i est nulle s'il y a roulement sans glissement. Il est possible qu'un couple de frottement $\Gamma_{f,i}$ soit subi par les roues au niveau de leurs axes. C'est une force intérieure pour le véhicule complet, mais une particularité de la loi de la puissance cinétique est qu'on doit prendre en compte la puissance de cette action, soit $\mathcal{P}_{f,i} = -\Gamma_{f,i} \omega_i$. La loi de la puissance cinétique (ou de l'énergie cinétique) s'écrit

$$\sum \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{ext}}) + \sum_{\text{roues}} \mathcal{P}_{f,i} = \frac{dEc}{dt} = 0$$

c) Le moment cinétique de la roue i par rapport à son axe est $L_i = J_i \omega_i$. Le référentiel barycentrique $\mathcal{R}_b = (G_i, x, y, z)$ associé à cette roue est galiléen car en translation rectiligne uniforme par rapport au sol. La roue subit l'action \vec{A}_i du cadre sur son axe avec un bras de levier nul, son poids de bras de levier nul, la force normale \vec{N}_i de bras de levier nul, la force tangentielle \vec{T}_i de bras de levier R_i et l'éventuel couple de frottement $-\Gamma_{f,i}$.



La loi du moment cinétique appliqué à la roue i dans \mathcal{R}_b s'écrit

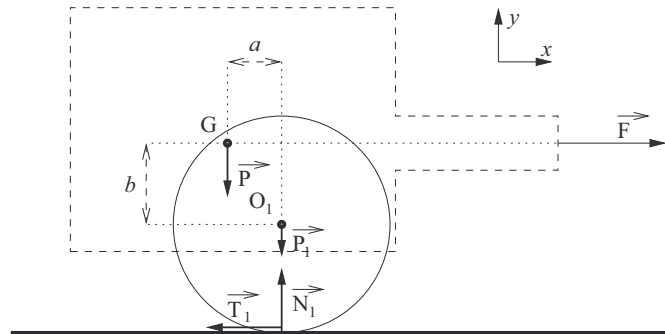
$$\pm R_i T_i - \Gamma_{f,i} = J_i \frac{d\omega_i}{dt}$$

d) Le cadre ne pivote pas autour de l'axe de la roue i . Son moment cinétique par rapport à cet axe est donc nul. Il subit la force \vec{F} , son poids et l'action de la roue i avec une force d'axe et l'opposé du couple de frottement $\Gamma_{f,i}$. On peut ainsi appliquer la loi du moment cinétique au cadre : la somme des moments des actions est nulle.

L'étude générale du véhicule à roues tracté par une force extérieure s'articule autour de la détermination des actions, de la détermination de sa vitesse de déplacement et des vitesses de rotation des roues, et de la discussion sur l'apparition d'un glissement à l'une des roues.

Exemple :

Une remorque de voiture est constituée d'un cadre de masse M et de centre de gravité G , solidaire d'un axe de rotation de deux roues identiques, de centres respectifs O_1 et O_2 , de masse m , de rayon R , de moment d'inertie par rapport à leur axe Δ . En régime normal de fonctionnement, en notant I le milieu de $[O_1 O_2]$, $\vec{GI} = a\vec{u}_x - b\vec{u}_y$. La remorque est tractée par une force \vec{F} parallèle à ce plan selon une droite d'action qui passe par G . Le sol est horizontal.



Le sens choisi pour \vec{T}_1 (et \vec{T}_2) est conforme à la règle donnée par la loi de Coulomb, cette force s'oppose au glissement éventuel de la roue. Par symétrie du problème, les actions sur les deux roues sont identiques. On note μ le coefficient de frottement statique entre le sol et les roues. Modélisons les frottements de l'air par une force $\vec{f} = -h\vec{V}$ et les frottements au niveau de l'axe des roues par un couple de moment identique $-\Gamma_f = -\lambda\omega$ sur chacune des deux roues. On fait l'hypothèse initiale d'un roulement sans glissement donc $V = R\omega$.

a) La loi de la quantité de mouvement appliquée à l'ensemble de la remorque s'écrit

$$\begin{vmatrix} F \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -(M+2m)g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -T_1 \\ N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -T_2 \\ N_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -hV \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} (1) F - 2T = hV \\ (2) 2N = (M + 2m)g \end{cases}$$

b) La loi de la puissance cinétique s'écrit

$$F \cdot V - hV \cdot V - 2\lambda\omega \cdot \omega = 0 \text{ soit } (3) F = \left(h + \frac{2\lambda}{R^2} \right) V$$

c) La loi du moment cinétique appliquée à une roue, en choisissant le sens positif dans celui des aiguilles d'une montre, s'écrit

$$+RT - \lambda\omega = 0 \text{ soit } (4) R^2T = \lambda V$$

On calcule les trois inconnues à partir des relations (2), (3) et (4) et on vérifie qu'elles conviennent dans (1) :

$$V = \frac{FR^2}{hR^2 + 2\lambda}, T = \frac{\lambda F}{(hR^2 + 2\lambda)} \text{ et } N = \frac{(M + 2m)g}{2}$$

La condition de Coulomb de roulement sans glissement s'écrit

$$T \leq \mu N \text{ soit } F \leq \frac{\mu g(M + 2m)(2\lambda + hR^2)}{2\lambda}$$

Si la traction est trop forte, la vitesse V devient importante, la vitesse angulaire ω devient elle-aussi importante, donc le couple de frottement au niveau de l'axe des roues devient grand, ce qui nécessite une force tangentielle importante pour faire tourner les roues, et si la remorque est trop légère, la condition de non-glissement n'est plus vérifiée, les roues dérapent, et le caoutchouc des pneus risque de se détériorer rapidement.

d) Si on peut négliger les couples de frottement devant les couples des forces sur le cadre, la loi du moment cinétique appliquée au cadre en rotation autour de (O_1, z) s'écrit, en tenant compte des bras de levier

$$+Fb - Mga = 0$$

↪ **Exercices 8.8, 8.9.**

Étudier un véhicule muni de roues motrices.

Le véhicule muni de roues motrices se distingue du véhicule soumis à une force extérieure en ce que le moteur est attaché au cadre. En termes mécaniques :

- un couple moteur Γ_m est exercé par le cadre sur la ou les **roues motrices**;
- réciproquement, la ou les roues motrices exercent sur le cadre un couple $-\Gamma_m$.

Les lois mécaniques et leurs conditions d'application sont analogues à celles données dans le paragraphe précédent. Mentionnons les spécificités du véhicule à roues motrices.

a) La force tangentielle n'a pas le même sens pour une roue motrice et une roue non motrice. Cette force tangentielle est dans le sens du mouvement pour une roue motrice (c'est elle qui assure la traction du véhicule) et dans le sens opposé pour une roue non motrice (c'est elle qui fait tourner la roue passive).

b) Dans la loi de la quantité de mouvement appliquée à l'ensemble du véhicule, les couples n'apparaissent pas.

c) Dans la loi du moment cinétique, appliquée au cadre, par rapport à l'axe d'une des roues il ne faut pas oublier de prendre en compte $-\Gamma_m$. Dans la grande majorité des cas, le cadre ne pivote pas et la somme des moments et couples est nulle.

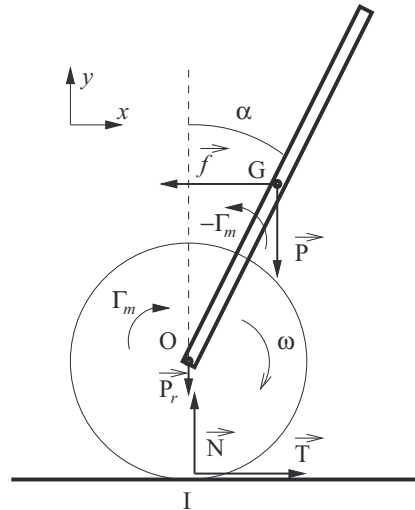
d) La somme des puissances du couple Γ_m qui s'exerce sur la roue motrice et du couple $-\Gamma_m$ n'est pas nulle. En effet, la roue tourne à la vitesse angulaire ω mais pas le cadre donc

$$\mathcal{P}(\Gamma_m) = \Gamma_m \cdot \omega \text{ et } \mathcal{P}(-\Gamma_m) = -\Gamma_m \cdot 0 = 0$$

e) L'étude des forces de contact permet de mettre en évidence un dérapage éventuel d'une roue motrice ou d'une roue non motrice grâce à l'inégalité de Coulomb, et un décollement de la roue avant (cabrage) ou arrière par annulation de N .

Exemple :

Le monocycle est le plus simple des véhicules, à roue motrice unique. On le modélise par un cadre réduit à une simple tige de masse M (moteur ou cycliste compris) de longueur L et de centre de gravité G , et une roue de rayon R et de masse m . On note Γ_m le couple exercé par le moteur sur la roue. Le cadre subit une force de frottement exercée en G $\vec{f} = -h\vec{V}$ et on note α l'angle d'inclinaison de la tige par rapport à la verticale. On note μ_s le coefficient de frottement statique entre la route horizontale et la roue et on suppose qu'il y a roulement sans glissement. On note $\vec{V} = V\vec{u}_x$ le vecteur vitesse supposé constant de G . On a donc $V = R\omega$.



La loi de la puissance cinétique appliquée au système complet donne

$$\Gamma_m \omega - hV \cdot V = 0 \text{ soit } \Gamma_m = hRV$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée au système complet donne

$$\begin{vmatrix} T \\ N \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -Mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -hV \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{donc } \begin{cases} T = hV \\ N = (M + m)g \end{cases}$$

La loi du moment cinétique appliquée au cadre en rotation autour de l'axe de la roue dans le référentiel barycentrique (O, x, y) donne, en tenant compte des bras de levier

$$-\Gamma_m - hV \frac{L}{2} \cos \alpha + Mg \frac{L}{2} \sin \alpha = 0$$

équation qui permet de calculer α .

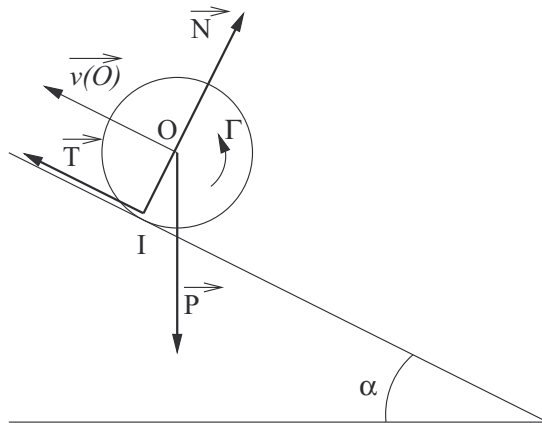
↪ **Exercices 8.10, 8.11, 8.12.**

Énoncés des exercices

8.1

Montée d'une pente

Une roue de masse m , de centre O et de rayon R se déplace sur un plan incliné de α avec l'horizontale, elle subit un couple moteur de moment Γ .



On note μ_s le coefficient de frottement statique.

- La roue monte sans glisser à vitesse angulaire constante ω . En déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}(O)$.
- Déterminer la valeur de Γ .
- Déterminer la valeur maximale de α permettant une montée sans glissement.

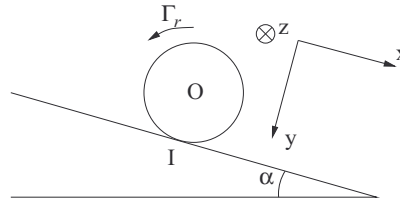


8.2

Freinage en descente

Une roue de voiture est assimilée à un cylindre de masse m et de rayon R de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mR^2$ par rapport à son axe de révolution Δ passant par O . Elle roule sans glisser en descente sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. L'action du frein s'assimile à un couple dont le moment par rapport à Δ vaut $-\Gamma_r$. La vitesse angulaire est notée ω . L'énergie cinétique de la roue est

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2(O) + \frac{1}{2}J\omega^2$$



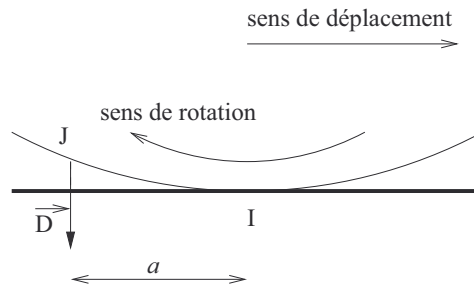
- a) Déterminer la valeur minimale de Γ_r pour qu'il y ait freinage. Donner dans ce cas l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ et de l'accélération de O $\ddot{x} = R\dot{\omega}$.
- b) Déterminer la valeur maximale de Γ_r pour qu'il n'y ait pas glissement. On notera μ_s le coefficient de frottement statique.
- c) En déduire pour quelles valeurs de α le freinage est possible sans glissement.



8.3

Adhérence excessive

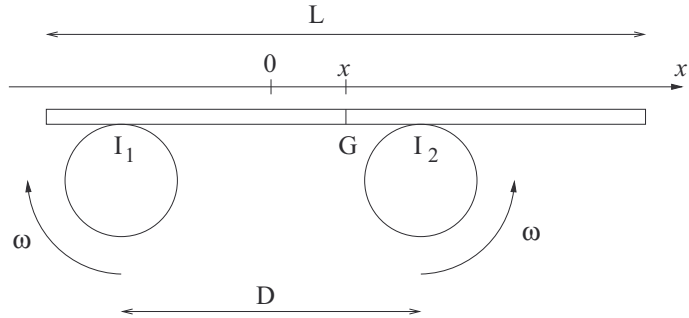
Pour augmenter la valeur du coefficient de frottement statique μ_s , et éviter le glissement d'une roue sur un support, on a recouvert le pourtour de celle-ci d'un produit adhésif. Lorsque la roue roule sans glissement sur un support plan, des fils de colle retiennent la roue après son passage, avant leur rupture. On modélise cette adhérence par une force unique \vec{D} s'exerçant au point J à une distance très petite a de I , dirigée vers le support. La roue a pour rayon R , pour masse m et pour moment d'inertie autour de son axe $\frac{1}{2}mR^2$.



- a) Justifier que cette force supplémentaire diminue le risque d'observer un glissement.
- b) Pour un mouvement sans glissement à vitesse angulaire constante sur un support horizontal, déterminer le couple moteur nécessaire qu'il faut exercer sur la roue et sa puissance.
- c) Déterminer l'évolution de ω au cours du temps, en l'absence de moteur, sur un sol horizontal, pour une vitesse angulaire initiale ω_0 .

8.4**Machine de Timochenko**

Dans le dispositif suivant, les deux cylindres tournent dans deux sens opposés, à la même vitesse angulaire ω . Leurs axes sont distants de D . La plaque posée dessus a une masse m et une longueur L . Elle reste horizontale et on repère sa position par l'abscisse x de son centre d'inertie G ($x = 0$ correspond au point milieu). Il y a glissement aux deux points de contact I_1 et I_2 .



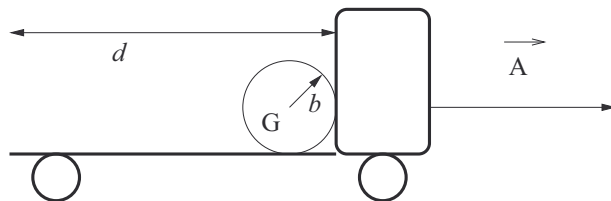
On note μ_d le coefficient de frottement dynamique de la plaque sur les cylindres. Montrer que la plaque oscille horizontalement et déterminer la période de ces oscillations. On pourra admettre que la loi du moment cinétique peut être appliquée autour de l'axe passant par G , orthogonal au plan de la figure, dans le référentiel barycentrique de la plaque, sans qu'il soit nécessaire de prendre en compte les forces d'inertie dans ce référentiel.

8.5**Mouvement d'un tonneau sur la plate-forme d'un camion**

Un tonneau cylindrique, de masse m , de rayon b , de centre G , de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mb^2$ autour de son axe de révolution Δ , d'énergie cinétique

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2(G) + \frac{1}{2}J\omega^2$$

est posé sur le plateau horizontal d'un camion qui accélère avec une accélération constante $\vec{a} = A\vec{u}_x$. Le coefficient de frottement statique est pris égal au coefficient de frottement dynamique, soit μ . Le plateau a une longueur d .



Dans le référentiel du camion, on admettra que la force d'inertie d'entraînement s'exerce en G .

- Déterminer les valeurs d'accélération du camion pour lesquelles il y a roulement sans glissement, celles pour lesquelles il y a glissement.
- Déterminer la distance L parcourue par le camion lorsque le tonneau va en tomber.



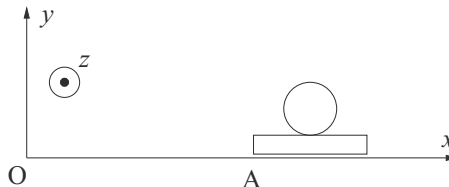
8.6

Cylindre équilibriste

Un cylindre de masse m , de rayon R , de moment d'inertie par rapport à son axe $J = \frac{1}{2}mR^2$ est posé sur un bloc oscillant parallélépipédique horizontal animé d'un mouvement oscillatoire

$$\vec{OA} = a[1 - \cos(\omega t)] \vec{u}_x$$

On note μ le coefficient de frottement statique et dynamique.



On admet que dans un référentiel non galiléen en translation, la force d'inertie d'entraînement s'exerce au centre de gravité d'un solide.

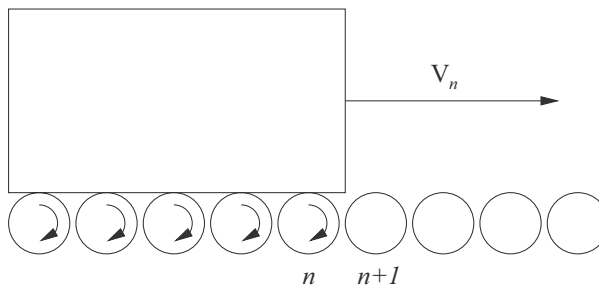
- À quelle(s) condition(s) y a-t-il roulement sans glissement ?
- Sous cette condition, donner l'équation horaire de G dans le référentiel du sol, sans chercher les constantes d'intégration.



8.7

Tapis à rouleaux (résolution de problème)

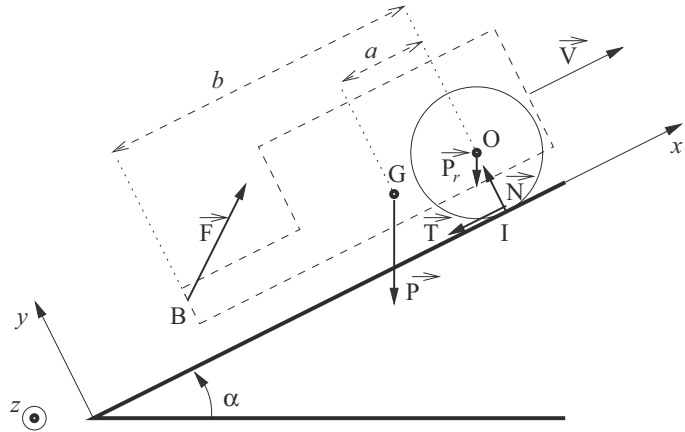
Un tapis à rouleaux est une suite de cylindres identiques de rayon R , de masse m , de moment d'inertie par rapport à leur axe $J = \frac{1}{2}mR^2$, en rotation sans frottement autour de leurs axes parallèles et distants d'un tout petit peu plus que $2R$.



Un solide parallélépipédique de masse $M = 5m$ et de longueur $L = 10R$ se déplace en translation horizontale sur les rouleaux. Lorsque le solide arrive sur le $(n + 1)$ ème rouleau, sa vitesse est V_n . Après un bref régime transitoire où le solide glisse sur le $(n + 1)$ ème rouleau abordé, le non-glissement s'instaure et la vitesse du solide devient V_{n+1} . On pourra supposer que les coefficients de frottement statique et dynamique sont égaux à μ . Établir l'expression de V_n en prenant une vitesse initiale V_0 .

8.8**Étude d'une brouette**

Une brouette est modélisée par un cadre de masse totale M , de centre de gravité G , possédant une roue unique d'axe (O, z) , de rayon R et de masse m . Elle est mise en mouvement par l'action \vec{F} d'un jardinier exercée en B sur les bras de la brouette. Les trois points B , G et O sont alignés, on pose $BO = b$ et $GO = a$. Le sol est plan et incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On définit les axes x parallèle au sol et y perpendiculaire. Le cadre de la brouette est en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_x$. On suppose qu'il y a roulement sans glissement des roues sur le sol.



Les inconnues du problème sont les composantes F_x, F_y de la force \vec{F} et les composantes T et N de l'action du sol sur la roue.

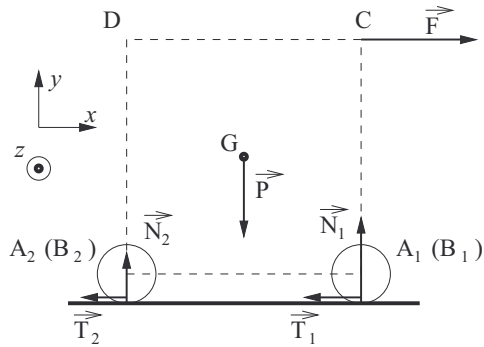
- Par application de la loi du moment cinétique à la roue, justifier que $T = 0$.
- Par application de la loi de la quantité de mouvement, établir deux équations entre les inconnues.
- Par application de la loi de la puissance cinétique, établir une troisième équation. Vérifier qu'elle est équivalente à l'une des équations précédentes.
- Dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}_b = (O, x, y, z)$ de la roue, écrire la loi du moment cinétique sur le cadre en rotation autour de l'axe de rotation (O, z) .
- En déduire les expressions de F_x, F_y et N .



8.9

Étude d'un chariot de supermarché

Un chariot de supermarché est modélisé par un cadre cubique de côté c , de centre de gravité G , de masse M , monté sur quatre roues dont les centres A_1 et B_1 sur l'axe avant, A_2 et B_2 sur l'axe arrière, sont aux quatre coins inférieurs, de même masse m et de même rayon $R \ll c$. Un client du supermarché peut pousser ou tirer son chariot sur le sol horizontal en exerçant une force horizontale \vec{F} au milieu C ou D d'un des côtés supérieurs parallèles aux axes des roues du chariot. Le chariot se déplace à vitesse constante $\vec{V} = V\vec{u}_x$, les roues roulent sans glisser sur le sol donc tournent à la vitesse angulaire $\omega = \frac{V}{R}$. Le frottement au niveau des axes des roues est modélisé par un couple $-\Gamma$, indépendant de la vitesse angulaire de rotation, appliqué à chaque roue. On pourra négliger la masse des roues devant celle du chariot.



Les inconnues sont les composantes T_1 et N_1 des actions sur l'une des deux roues avant, T_2 et N_2 sur l'une des deux roues arrière et la force F .

- Écrire l'équation résultant de la loi de la puissance cinétique appliquée au chariot tout entier. En déduire F .
- Établir les équations résultant de la loi du moment cinétique appliquée à une roue avant puis à une roue arrière. En déduire T_1 et T_2 .
- Écrire les deux équations résultant de la loi de la quantité de mouvement appliquée au chariot tout entier. En déduire $N_1 + N_2$.
- Dans le référentiel barycentrique (A_1, x, y, z) , écrire la loi du moment cinétique appliquée au système formé du cadre et des deux roues arrière dans le cas où on tire le chariot en C . Montrer dans ce cas qu'un décollage des roues arrière est possible.
- Dans le référentiel barycentrique (A_2, x, y, z) , écrire la loi du moment cinétique appliquée au système formé du cadre et des deux roues avant dans le cas où on pousse le chariot en D . Montrer dans ce cas qu'un décollage des roues avant est impossible.

8.10**Bicyclette en montée**

Une bicyclette est formée d'un cadre de masse M et de centre de gravité G (cycliste compris), et de deux roues identiques de masse m et de rayon R . Le cycliste développe une puissance mécanique \mathcal{P} , transférée à la roue arrière motrice (par l'intermédiaire de la chaîne) qui lui permet de monter à vitesse constante V une côte, le sol plan étant incliné par rapport à l'horizontale d'un angle α . On fera l'hypothèse idéale d'un roulement sans glissement aux deux roues et de l'absence de tout frottement. Déterminer la valeur de \mathcal{P} et faire une estimation de sa valeur numérique pour une côte à 10%, c'est-à-dire que le cycliste monte de 10 mètres tous les 100 mètres de parcours à une vitesse de 12 kilomètres par heure.

8.11**Modèle d'une automobile à traction avant**

On modélise une automobile par deux cylindres de même masse m , et de même rayon R , de centres C_1 (représentant les deux roues avant) et C_2 (roues arrière), solidaires grâce à des liaisons pivot parfaites à une tige (le cadre) C_2C_1 de centre G , de masse M et de longueur L . L'axe x est l'axe horizontal de la route dans le sens $\overrightarrow{C_2C_1}$, l'axe z est vertical et l'axe y horizontal complète la base orthonormée directe. L'action du moteur se ramène à un couple Γ . On suppose que les roues roulent sans glisser et on note μ le coefficient de frottement entre la route et les roues. La voiture est une "traction avant", c'est-à-dire que Γ s'exerce sur la roue avant. La voiture se déplace à vitesse constante $\vec{V} = V\vec{u}_x$ et subit une force de frottement $\vec{f} = -h\vec{V}$ appliquée en G . Les inconnues sont V et les forces de contact $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{N}_1$ et \vec{N}_2 .

- Faire un schéma en indiquant les vecteurs forces.
- Exprimer la vitesse de rotation ω des roues.
- Par application de la loi de la puissance cinétique, déterminer V .
- Par application de la loi de la quantité de mouvement à l'ensemble de la voiture, établir deux relations entre T_1, T_2, N_1 et N_2 .
- Par application de la loi du moment cinétique au cylindre modélisant les roues avant, déterminer T_1 .
- Par application de la loi du moment cinétique au cylindre modélisant les roues arrière, déterminer T_2 .
- Par application de la loi du moment cinétique au système formé du cadre et du cylindre modélisant les roues arrière, en rotation autour de l'axe des roues avant, dans le référentiel barycentrique, déterminer N_2 .
- En déduire N_1 et montrer qu'un dérapage de la roue avant est possible.

8.12

Cabrage d'une moto

On modélise une moto par trois solides distincts :

- a) la roue arrière de rayon R , de masse m et de moment d'inertie autour de son axe $J_1 = \frac{1}{2}mR^2$ est en rotation autour de O_1 et soumise de la part du moteur à un couple de moment résultant \vec{T} ;
- b) la roue avant de rayon R , de masse m et de moment d'inertie autour de son axe $J_2 = \frac{1}{2}mR^2$ est en rotation autour de O_2 ;
- c) le cadre est un segment O_1O_2 de longueur L , de masse M et de centre G , englobant le moteur.

Le coefficient de frottement entre chacune des deux roues et le sol est noté μ . On note ω la vitesse angulaire des roues de la moto et x l'abscisse de la moto sur un sol horizontal. Étudier le mouvement de la moto, étudier les conditions de roulement sans glissement au niveau des deux roues et étudier la condition de cabrage, c'est-à-dire de soulèvement de la roue avant.

Du mal à démarrer ?

8.1 Le roulement sans glissement donne la relation entre V et ω et l'inégalité que doivent vérifier T et N . Seuls Γ et le poids travaillent et la somme de leurs puissances est nulle car E_c est constante. De même, la somme des vecteurs forces est nulle.

8.2 Il y a freinage si $\dot{\omega} < 0$. On trouve l'expression de cette grandeur en appliquant la loi de la puissance cinétique et en utilisant la relation entre V et ω . La loi de la quantité de mouvement donne les expressions de T et de N . On en déduit la condition de non-glissement.

8.3 La loi de la quantité de mouvement donne T et N , la loi du moment cinétique donne l'expression de Γ . On en déduit sa puissance. En l'absence de couple moteur, il faut appliquer ces mêmes lois, mais en régime variable, et éliminer \ddot{x} en fonction de $\dot{\omega}$ grâce à la relation cinématique du roulement sans glissement. On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $\omega(t)$.

8.4 Le glissement permet de relier T_1 et N_1 d'une part, T_2 et N_2 d'autre part. La loi de la quantité de mouvement appliquée à la plaque, en projection verticale, permet de relier N_1 et N_2 . Pour terminer la détermination des quatre grandeurs, il faut une quatrième relation qui découle de la loi du moment cinétique appliquée à la plaque autour de G . Les bras de levier de N_1 et N_2 dépendent de x . La projection sur x de la loi de la quantité de mouvement appliquée à la plaque donne l'équation d'oscillateur cherchée.

8.5 La loi de la puissance cinétique fait apparaître comme unique puissance non nulle celle de la force d'inertie d'entraînement. On en déduit T et N grâce à la loi de la quantité de mouvement appliquée au tonneau dans le référentiel non galiléen du camion, puis la condition de non-glissement de Coulomb. L'étude du mouvement du tonneau dans chaque cas n'est qu'un classique exercice de mécanique. La camion ayant un mouvement rectiligne uniformément accéléré, il est facile de déterminer son abscisse sur la route quand le tonneau tombe.

8.6 On détermine la force d'inertie d'entraînement subie par le cylindre, et appliquée en G . C'est la seule force dont la puissance sur le cylindre est non nulle. La loi de la puissance cinétique appliquée au cylindre dans le référentiel non galiléen de la plaque permet d'en déduire l'accélération du cylindre sur la plaque, puis son mouvement. La loi de la quantité de mouvement permet d'exprimer les forces de contact et d'en déduire la condition de non-glissement.

8.7 Pendant la phase de glissement, la force normale appliquée sur le $(n+1)$ ième rouleau est $\frac{Mg}{5}$, on en déduit la force tangentielle en appliquant la loi de Coulomb. On en déduit l'équation du mouvement de translation du solide ($V(t)$) par application de la loi de la quantité de mouvement et celle du mouvement de rotation du cylindre ($\omega(t)$) par application de la loi du moment cinétique. Le glissement cesse quand $V(t) = R\omega(t)$. On en déduit la date et la vitesse acquise par le solide à cette date, soit V_{n+1} , d'où la relation de récurrence.

8.8 L'exercice est parfaitement guidé. Seule la question (d) demande un peu d'initiative pour évaluer les bras de levier des différentes forces.

8.9 L'exercice est parfaitement guidé. À la question (d), les bras de levier sont déterminés à partir du côté c , et on pourra négliger $\frac{B}{2}T_2$ devant cN_2 . Il y a décollage si $N_2 \leq 0$. La question (e) est analogue à la question (d), mais les signes de certains moments changent.

8.10 La loi de la puissance cinétique suffit pour conclure.

8.11 La force \vec{T}_1 est motrice et la force \vec{T}_2 est dirigée vers l'arrière. Il est conseillé sur le schéma de séparer le poids du cadre de ceux des roues. L'exercice est parfaitement guidé. Seule la question (g) demande un peu d'initiative pour évaluer les bras de levier des différentes forces ; il ne faut pas oublier le couple réciproque $-T$

et distinguer le point d'application du poids du cadre et celui du poids de la roue arrière.

8.12 L'énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique de translation de toute la moto et des énergies cinétiques de rotation

des deux roues, on obtient $E_c = \frac{1}{2}(M+3m)\dot{x}^2$. La détermination de toutes les forces de contact nécessite le choix du système de travail, la moto entière, le cadre, l'une des roues, le cadre et l'une des roues, et de l'équation judicieuse. On déduit la possibilité de cabrage ou de dérapage des expressions de T et N.

Corrigés des exercices

8.1

- a) La relation cinématique du non-glissement donne $v(O) = R\omega$.
- b) Le roulement sans glissement impose la nullité des puissances de \vec{T} et de \vec{N} . L'application de la loi de la puissance cinétique à la roue donne

$$\mathcal{P}(\Gamma) + \mathcal{P}(\vec{P}) = 0 \text{ soit } \Gamma\omega - mgV\sin\alpha$$

$$\text{donc } \Gamma = mgR\sin\alpha$$

- c) La loi de la quantité de mouvement appliquée à la roue donne

$$\begin{cases} T = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases} \text{ donc } \frac{T}{N} = \tan\alpha$$

La montée sans glissement est donc possible si

$$\tan\alpha \leq \mu_s$$

8.2

- a) Il y a freinage si la vitesse angulaire diminue. Appliquons la loi de la puissance cinétique à la roue. Il y a non-glissement donc la puissance des forces de contact est nulle et $v(O) = R\omega$. On en déduit

$$-\Gamma_r\omega + mg\sin\alpha \cdot R\omega = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m(R\omega)^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \right]$$

$$\text{soit } (-\Gamma_r + mgR\sin\alpha)\omega = (mR^2 + J)\dot{\omega}$$

Il y a freinage si $\dot{\omega} < 0$ donc si

$$\Gamma_r > mgR\sin\alpha$$

Dans ce cas,

$$\dot{\omega} = \frac{-\Gamma_r + mgR\sin\alpha}{\frac{3}{2}mR^2} \text{ et } \ddot{x} = R\dot{\omega} = \frac{-\Gamma_r + mgR\sin\alpha}{\frac{3}{2}mR}$$

- b) Appliquons la loi de la quantité de mouvement à la roue. La force tangentielle s'oppose au glissement éventuel donc est dirigée selon $-x$.

$$\begin{vmatrix} mg\sin\alpha \\ mg\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -T \\ -N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m\ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} T = \frac{1}{3}mg\sin\alpha + \frac{2\Gamma_r}{3R} \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

La loi de Coulomb indique qu'il y aura non-glissement si

$$T < \mu_s N \text{ soit } \Gamma_r < \frac{mgR}{2}(3\mu_s\cos\alpha - \sin\alpha)$$

- c) On ne peut freiner sans glissement que si la valeur minimale est inférieure à la valeur maximale, soit (après simplifications) $\tan\alpha < \mu_s$. Ce résultat est immédiat à vitesse constante par application de la loi de la quantité de mouvement.

8.3

- a) En projection sur l'axe perpendiculaire au plan, la somme des forces est nulle. Comme \vec{D} augmente l'appui de la roue sur le support, la force normale est augmentée de D avec la colle, donc l'inégalité de Coulomb est plus facilement vérifiée.
- b) La loi de la quantité de mouvement appliquée à la roue donne

$$\begin{vmatrix} T \\ N \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} = \vec{0} \text{ donc } \begin{cases} T = 0 \\ N = mg + D \end{cases}$$

Appliquons la loi du moment cinétique sur la roue en rotation autour de son axe dans le référentiel galiléen barycentrique. Le bras de levier de \vec{D} est a donc

$$-Da + \Gamma = 0 \text{ donc } \Gamma = Da$$

Sa puissance est

$$\mathcal{P}(\Gamma) = Da\omega$$

- c) Le mouvement de O n'est plus rectiligne uniforme et la loi de la quantité de mouvement donne

$$T = m\ddot{x} = mR\dot{\omega}$$

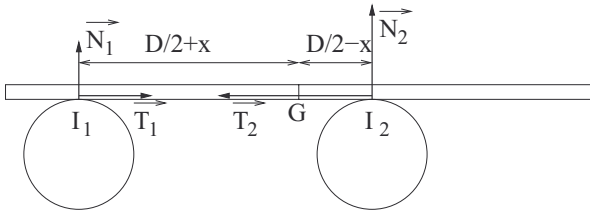
La loi du moment cinétique sur la roue en rotation autour de son axe dans le référentiel galiléen barycentrique donne

$$-RT - Da = \frac{1}{2}mR^2\dot{\omega} \text{ soit } \dot{\omega} = -\frac{2Da}{3mR^2}$$

$$\text{donc } \omega(t) = \omega_0 - \frac{2Da}{3mR^2} \cdot t$$

8.4

Prenons les notations du schéma suivant.



Les lois de Coulomb en présence de glissement donnent

$$T_1 = \mu_d N_1 \text{ et } T_2 = \mu_d N_2$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la plaque donne

$$\begin{vmatrix} T_1 \\ N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -T_2 \\ N_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m\ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} T_1 - T_2 = m\ddot{x} \\ N_1 + N_2 = mg \end{cases}$$

La plaque ne pivote pas donc son moment cinétique autour de l'axe horizontal passant par G est donc nul à tout instant. La loi du moment cinétique autour de cet axe dans le référentiel barycentrique s'écrit donc

$$\left(\frac{D}{2} + x\right)N_1 - \left(\frac{D}{2} - x\right)N_2 = 0$$

On résout le système et on en déduit

$$\begin{cases} N_1 = \frac{mg}{2} - mg \frac{x}{D} \\ N_2 = \frac{mg}{2} + mg \frac{x}{D} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} T_1 = \frac{\mu_d mg}{2} - \mu_d mg \frac{x}{D} \\ T_2 = \frac{\mu_d mg}{2} + \mu_d mg \frac{x}{D} \end{cases}$$

La loi de la quantité de mouvement donne donc

$$-2\mu_d mg \frac{x}{D} = m\ddot{x} \text{ soit } \ddot{x} + \frac{2\mu_d g}{D}x = 0$$

C'est une équation différentielle d'oscillateur harmonique. La période des oscillations est donc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{D}{2\mu_d g}}$$

8.5

a) Dans le référentiel non galiléen, en translation accélérée, du camion, le tonneau est soumis à son poids, aux forces \vec{N} et \vec{T} et à la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{A}$. Supposons qu'il y a roulement sans glissement. La vitesse de G dans le référentiel du camion et la vitesse angulaire sont alors liées

$$\dot{x} = b\omega \text{ donc } E_c = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

La loi de la puissance cinétique s'écrit

$$-mA \cdot \dot{x} = \frac{3}{4}m \cdot 2\dot{x}\ddot{x} \text{ donc } \ddot{x} = -\frac{2A}{3}$$

Si le tonneau glissait sur le plateau du camion, la vitesse de glissement serait dirigée vers l'arrière, donc \vec{T} est dans le sens des x croissants. La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\begin{vmatrix} T \\ N \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -mA \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m\ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} T = \frac{mA}{3} \\ N = mg \end{cases}$$

D'après la loi de Coulomb, il y a roulement sans glissement si

$$T \leq \mu N \text{ soit } A \leq 3\mu g$$

Il y aura glissement si $A > 3\mu g$.

b) Si $A \leq 3\mu g$, alors, en prenant l'origine du repère à l'arrière du plateau

$$\ddot{x} = -\frac{2A}{3} \Rightarrow x(t) = -\frac{A}{3}t^2 + d - b$$

Le tonneau tombera quand

$$x(t) = 0 \text{ soit } t = \sqrt{\frac{3(d-b)}{A}}$$

L'équation horaire du mouvement du camion dans le référentiel du sol est

$$X(t) = \frac{1}{2}At^2 \text{ donc } L = \frac{3}{2}(d-b)$$

Si $A > 3\mu g$, il y a glissement donc

$$T = \mu N$$

La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\begin{cases} T - mA = m\ddot{x} \\ N = mg \end{cases} \text{ donc } \ddot{x} = \mu g - A$$

$$\text{et } x(t) = \frac{1}{2}(\mu g - A)t^2 + d - b$$

Le tonneau tombera quand

$$x(t) = 0 \text{ soit } t = \sqrt{\frac{2(d-b)}{A - \mu g}}$$

et à cette date

$$L = \frac{A(d-b)}{A - \mu g}$$

Le coefficient de frottement statique étant pris égal au coefficient dynamique, on peut vérifier la continuité des deux cas en remarquant que pour $A = 3\mu g$, les deux expressions de L coïncident.

8.6

- a) On travaille dans le référentiel non galiléen du support. On note X l'abscisse du centre G du cylindre sur le support et ω la vitesse angulaire de rotation du cylindre comptée positivement dans le sens trigonométrique. La condition de non-glissement s'écrit, dans le référentiel du support :

$$\dot{X} = -R\omega$$

Le cylindre est soumis à la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{ie} = -m \frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} = -m a \omega^2 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

Sa puissance est donc

$$\mathcal{P}_{ie} = \vec{f}_{ie} \cdot \vec{v}_G = -m a \dot{X} \omega^2 \cos(\omega t)$$

Dans le référentiel du support, l'énergie cinétique du cylindre est

$$\frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{3}{4} m \dot{X}^2$$

On applique simultanément la loi de la puissance cinétique et celle de la quantité de mouvement :

$$\begin{cases} -m a \dot{X} \omega^2 \cos(\omega t) = \frac{3}{2} m \dot{X} \ddot{X} \\ T - m a \omega^2 \cos(\omega t) = m \ddot{X} \\ N - m g = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \ddot{X} = -\frac{2}{3} a \omega^2 \cos(\omega t) \\ T = \frac{1}{3} m a \omega^2 \cos(\omega t) \\ N = m g \end{cases}$$

D'après les lois de Coulomb, il y a non glissement si

$$\forall t, T \leq \mu N$$

$$\text{soit } \forall t, \frac{1}{3} a \omega^2 \cos(\omega t) \leq \mu g$$

et comme le cosinus est majoré par 1, on en déduit la condition

$$a \omega^2 \leq 3 \mu g$$

- b) Sous ces conditions, en intégrant l'expression de \ddot{X} :

$$X(t) = \frac{2}{3} a \cos(\omega t) + b t + c$$

$$\text{donc } x(t) = x_A(t) + X(t) = -\frac{1}{3} a \cos(\omega t) + b t + c + a$$

8.7

Prenons la référence des temps ($t = 0$) et des abscisses ($X = 0$) quand le solide de vitesse V_n entre en contact avec le $(n + 1)$ ième cylindre. Le cylindre est alors immobile et il y a

une phase de glissement. Le solide reposant sur 5 rouleaux, on peut supposer que la force normale au contact d'un rouleau est

$$N = \frac{Mg}{5} \text{ donc } T = \mu N = \frac{\mu Mg}{5}$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée au solide donne

$$M \ddot{X} = -T = -\frac{\mu Mg}{5} \text{ donc } \dot{X} = V_n - \frac{\mu g}{5} t$$

La loi du moment cinétique appliquée au rouleau donne

$$J \dot{\omega} = TR = \frac{\mu MgR}{5} \text{ donc } \omega = \frac{\mu MgR}{5J} t$$

Le glissement cessera quand la vitesse de glissement sera nulle donc quand

$$\dot{X} = R\omega \text{ soit } V_n - \frac{\mu g}{5} t_f = \frac{\mu MgR^2}{5J} t_f$$

$$\text{soit } V_n = \frac{11 \mu g}{5} t_f$$

À cette date, l'énoncé précise que le régime transitoire est bref, on peut donc supposer que le solide n'a pas encore abordé le $(n + 2)$ ième rouleau et la vitesse devient constante, donc

$$V_{n+1} = V_n - \frac{\mu g}{5} t_f = \frac{10}{11} V_n$$

La suite est donc géométrique de raison $\frac{10}{11}$ et

$$V_n = V_0 \left(\frac{10}{11} \right)^n$$

8.8

- a) L'application de la loi du moment cinétique à la roue dans le référentiel barycentrique galiléen (O, x, y, z) s'écrit

$$T \cdot R = 0 \text{ donc } T = 0$$

- b) La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -Mg \sin \alpha \\ -Mg \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -mg \sin \alpha \\ -mg \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{donc } \begin{cases} (1) F_x = (M + m) g \sin \alpha \\ (2) F_y + N = (M + m) g \cos \alpha \end{cases}$$

- c) La loi de la puissance cinétique donne

$$\vec{F} \cdot \vec{V} + \vec{P} \cdot \vec{V} + \vec{P}_r \cdot \vec{V} + \vec{N} \cdot \vec{V} = 0$$

$$\text{soit } F_x V - MgV \sin \alpha - mgV \sin \alpha = 0$$

qui est équivalent à l'équation (1).

Chapitre 8 Véhicule à roues

- d) Le bras de levier de la force exercée par la roue sur l'axe est nul. Celui de \vec{P} vaut $a \cos \alpha$, celui de \vec{F}_x est nul, celui de \vec{F}_y est b . La loi du moment cinétique appliquée au cadre s'écrit

$$+bF_y - Mg a \cos \alpha = 0$$

- e) On en déduit

$$F_y = \frac{Mg a \cos \alpha}{b}, \quad F_x = (M + m)g \sin \alpha$$

$$\text{et } N = \left[M \left(1 - \frac{a}{b} \right) + m \right] g \cos \alpha$$

8.9

- a) La loi de la puissance cinétique s'écrit

$$F \cdot V - 4\Gamma \omega = 0 \text{ donc } F = \frac{4\Gamma}{R}$$

- b) La loi du moment cinétique appliquée à l'une des roues avant donne

$$R \cdot T_1 - \Gamma = 0 \text{ donc } T_1 = \frac{\Gamma}{R}$$

De même pour une roue arrière

$$T_2 = \frac{\Gamma}{R}$$

- c) La loi de la quantité de mouvement appliquée au chariot s'écrit

$$\begin{vmatrix} F \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2T_1 \\ 2N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2T_2 \\ 2N_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -(M+4m)g \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{donc } \begin{cases} T_1 + T_2 = \frac{F}{2} \\ N_1 + N_2 = \frac{(M+4m)g}{2} \end{cases}$$

- d) Le couple de frottement est le résultat d'actions exercées par le cadre sur les roues avant. Par principe d'action-réaction, les roues avant exercent sur la cadre un couple opposé. La loi du moment cinétique pour le système {cadre, roues arrière} s'écrit, en tenant compte des bras de levier,

$$2\Gamma + cF - \frac{c}{2}Mg + \frac{R}{2}T_2 + cN_2 = 0$$

La loi de Coulomb traduisant le non-glissement donne $T_2 \leq \mu_s N_2$, μ_s a une valeur de l'ordre de 0,5 et $R \ll c$ donc on peut négliger $\frac{R}{2}T_2$ devant cN_2 , d'où

$$N_2 = \frac{Mg}{2} - \frac{2\Gamma}{c} - \frac{4\Gamma}{R}$$

Il y a donc décollage si

$$N_2 \leq 0 \text{ soit } \Gamma \geq \frac{MgRc}{4R+8c} \approx \frac{MgR}{8}$$

- e) De même, si on pousse le chariot

$$2\Gamma + cF + \frac{c}{2}Mg + \frac{R}{2}T_1 - cN_1 = 0$$

$$\text{donc } N_1 \approx \frac{Mg}{2} + \frac{2\Gamma}{c} + F$$

N_1 est donc toujours positif, les roues avant ne décollent donc pas. Remarquons que le fait de tirer ou de pousser le chariot ne change rien au résultat.

8.10

En l'absence de glissement, aucune des quatre forces de contact ne travaille. La roue arrière tourne, mais pas le cadre, la puissance mécanique apportée par le cycliste est donc transférée à la roue arrière. En l'absence de frottements (hypothèse qui n'est pas trop excessive, avec une bicyclette de très bonne qualité et à faible vitesse de montée), seul le poids travaille. La loi de la puissance cinétique s'écrit donc

$$\mathcal{P} - (M + 2m)gV \sin \alpha = 0 \text{ soit } \mathcal{P} = (M + 2m)gV \sin \alpha$$

On propose $M + 2m = 80 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Le pourcentage s'identifie à

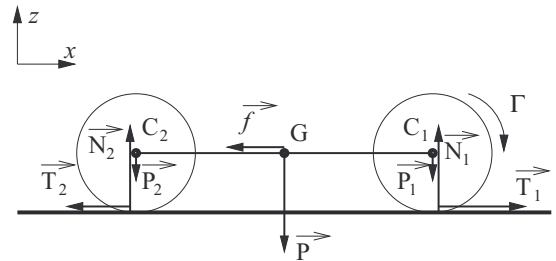
$$\tan \alpha = \frac{10}{100} \text{ donc } \alpha = 5,7^\circ \text{ donc}$$

$$\mathcal{P} = 80 \cdot 10 \cdot \frac{12}{3,6} \cdot \sin 5,7 = 265 \text{ W}$$

L'ordre de grandeur communément admis pour les champions cyclistes est de 450 W.

8.11

- a) Voici le schéma des différentes actions, la force tangentielle \vec{T}_1 est motrice, la force \vec{T}_2 fait tourner la roue arrière.



- b) Il y a roulement sans glissement donc $V = R\omega$.
c) Les forces de contact ne travaillent pas car il y a roulement sans glissement. Le sol étant horizontal, les poids ne travaillent pas. La loi de la puissance cinétique s'écrit

$$\Gamma \omega - hV \cdot V = 0 \text{ soit } \Gamma \frac{V}{R} = hV^2$$

$$\text{donc } V = \frac{\Gamma}{hR}$$

d) La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\begin{vmatrix} -T_2 \\ 0 \\ N_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_1 \\ 0 \\ N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -(M+2m)g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -hV \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{donc } \begin{cases} T_1 - T_2 = hV \\ N_1 + N_2 = (M+2m)g \end{cases}$$

e) La loi du moment cinétique pour les roues avant s'écrit

$$-RT_1 + \Gamma = 0 \text{ donc } T_1 = \frac{\Gamma}{R}$$

f) La loi du moment cinétique pour les roues arrière s'écrit

$$RT_2 = 0 \text{ donc } T_2 = 0$$

g) Le système étudié est soumis au couple $-\Gamma$, à la force d'axe exercée par les roues avant sur le cadre, de moment nul car le bras de levier est nul, et aux autres forces \vec{N}_2 , \vec{P}_2 , \vec{P} et \vec{F} . En identifiant les différents bras de levier, la loi du moment cinétique s'écrit

$$-\Gamma + LN_2 - Lmg - \frac{L}{2}Mg = 0 \text{ donc } N_2 = \frac{\Gamma}{L} + \left(\frac{M}{2} + m\right)g$$

h) En injectant dans la relation de la question (d), on en déduit

$$N_1 = (M+2m)g - \left[\frac{\Gamma}{L} + \left(\frac{M}{2} + m\right)g\right]$$

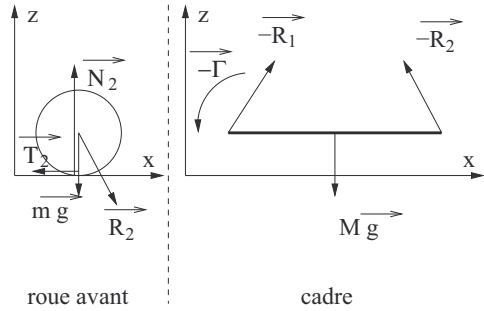
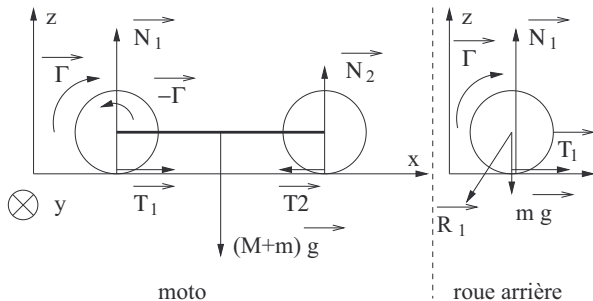
$$\text{soit } N_1 = -\frac{\Gamma}{L} + \left(\frac{M}{2} + m\right)g$$

Un dérapage est possible si $T_1 > \mu N_1$, donc si

$$\Gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{\mu}{L}\right) > \left(\frac{M}{2} + m\right)\mu g$$

8.12

On réalise un ensemble de schémas représentant les différents systèmes sur lesquels on travaille et les actions extérieures qui interviennent.



Le roulement sans glissement se traduit par la relation cinématique

$$\dot{x} = R\omega$$

On écrit le théorème de la puissance cinétique dans le référentiel galiléen de la route sur la moto. Son énergie cinétique est

$$Ec = Ec_{\text{roue 1}} + Ec_{\text{roue 2}} + Ec_{\text{cadre}}$$

$$Ec = 2 \times \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \omega^2 \right] + \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$Ec = \frac{1}{2} (M+3m) \dot{x}^2$$

La moto n'étant pas un solide, les actions intérieures peuvent travailler. Les réactions d'axes ne travaillent pas car elles sont opposées (cadre-moto et moto-cadre) en des points de même vitesse. En revanche, le couple moteur $\vec{\Gamma}$ s'exerce sur la roue arrière qui a une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et le couple de réaction $-\vec{\Gamma}$ s'exerce sur le cadre (solidaire du moteur) qui a une vitesse angulaire nulle tant que la moto ne se cabre pas. La résultante des puissances de rotation n'est donc pas nulle. On en déduit

$$\Gamma \omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (M+3m) \dot{x}^2 \right)$$

$$\text{donc } \Gamma \frac{\dot{x}}{R} = \frac{1}{2} (M+3m) \times 2 \dot{x} \dot{x}$$

$$\text{soit } \ddot{x} = \frac{\Gamma}{(M+3m)R}$$

On connaît donc le mouvement de la moto. Pour étudier la possibilité d'apparition de glissement ou de cabrage, on doit déterminer les actions de contact. On écrit la loi de la quantité de mouvement sur la moto dans le référentiel de la route :

$$\vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + (M+2m)\vec{g} = (M+2m)\ddot{x}\vec{u}_x$$

d'où en projections sur les deux axes :

$$\begin{cases} T_2 - T_1 = (M+2m)\ddot{x} = \frac{(M+2m)\Gamma}{(M+3m)R} \\ N_1 + N_2 = (M+2m)g \end{cases}$$

On écrit la loi du moment cinétique en O_1 sur la roue arrière dans le référentiel barycentrique :

$$\Gamma - T_1 R = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\omega}$$

Chapitre 8 Véhicule à roues

$$\text{donc } T_1 = \frac{(2M+5m)\Gamma}{2(M+3m)R}$$

On applique maintenant la loi du moment cinétique en O_2 sur le cadre dans le référentiel barycentrique. Comme sa vitesse angulaire est nulle s'il n'y a pas cabrage, la somme des moments est nulle. Notons

$$\vec{R}_2 = R_{2x} \vec{u}_x + R_{2z} \vec{u}_z$$

On en déduit

$$-\Gamma + Mg \frac{L}{2} + LR_{2z} = 0$$

Pour déterminer R_{2z} , on applique la loi de la quantité de mouvement sur la roue avant :

$$\vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{R}_2 + m\vec{g} = m\vec{\ddot{x}}$$

$$\text{donc } N_2 + R_{2z} - mg = 0$$

On peut donc éliminer R_{2z} dans le résultat précédent, donc

$$N_2 = \frac{(M+2m)gL - 2\Gamma}{2L}$$

En remplaçant N_2 dans la relation entre N_1 et N_2 précédemment établie, on en déduit

$$N_1 = \frac{(M+2m)gL + 2\Gamma}{2L}$$

On en déduit les conditions de glissement et de cabrage :

- il y a glissement de la roue arrière si

$$\frac{T_1}{N_1} > \mu \text{ soit } \frac{\Gamma(2M+5m)L}{R(M+3m)[(M+2m)gL+2\Gamma]} > \mu$$

- il y a glissement de la roue avant si

$$\frac{T_2}{N_2} > \mu \text{ soit } \frac{\Gamma mL}{R(M+3m)[(M+2m)gL-2\Gamma]} > \mu$$

- il y a décollage de la roue arrière si $N_1 = 0$, ce qui est algébriquement, et physiquement impossible
- il y a décollage de la roue avant, et cabrage si

$$N_2 = 0 \text{ soit } \Gamma = \frac{(M+2m)gL}{2}$$

CHAPITRE 9

Fluides en écoulement, étude locale

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Particule de fluide.
- ◇ Masse volumique.
- ◇ Champ de vitesses, carte de champ.
- ◇ Dérivée particulière de la masse volumique.
- ◇ Équation locale de conservation de la masse.
- ◇ Dérivée particulière du vecteur vitesse.
- ◇ Accélération locale, accélération convective.
- ◇ Vecteur tourbillon.
- ◇ Écoulement irrotationnel.
- ◇ Écoulement stationnaire, incompressible, homogène.
- ◇ Force volumique de pression, force surfacique de viscosité.
- ◇ Statique des fluides.
- ◇ Équation de Navier-Stokes.
- ◇ Nombre de Reynolds.
- ◇ Traînée.
- ◇ Écoulement laminaire, écoulement turbulent.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Opérer une classification cinématique des écoulements.
- ◇ Exprimer et calculer les termes d'accélération particulière, locale, convective.
- ◇ Exprimer les actions de contact sur la particule de fluide.
- ◇ Résoudre un problème de mécanique des fluides visqueux.
- ◇ Définir et exploiter le nombre de Reynolds.

Les méthodes à retenir

Opérer une classification cinématique des écoulements.

La mécanique du point étudie le déplacement d'un point matériel de masse m animé d'une vitesse \vec{v} . La mécanique des fluides étudie le champ des masses volumiques $\mu(M, t)$ et le **champ eulérien des vitesses** $\vec{v}(M, t)$. La **loi locale de conservation de la masse** couple ces deux champs dans une relation totalement indépendante de la loi mécanique développée en fin de chapitre :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

La difficulté spécifique des équations de la mécanique des fluides conduit à faire des hypothèses simplificatrices sur la cinématique de l'écoulement. Voici une classification sommaire.

a) Un **fluide incompressible** possède une masse volumique uniforme et constante :

$$\mu(M, t) = \mu_0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

b) Un **écoulement incompressible** est caractérisé par le fait que chaque particule de fluide garde une masse volumique constante dans son déplacement, sa **dérivée particulaire** est nulle

$$\frac{D\mu}{Dt} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

c) Un **écoulement stationnaire** est caractérisé par la nullité de toutes les dérivées locales $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$. La loi de conservation de la masse donne dans ce cas

$$\operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

d) Un écoulement est irrotationnel si son **vecteur tourbillon** $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}$ est nul ; dans ce cas, le champ des vitesses dérive d'un **potentiel des vitesses**

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \exists \Phi(M, t) \text{ tel que } \vec{v}(M, t) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi(M, t)$$

La traduction mathématique de ces différentes hypothèses nécessite la bonne manipulation des opérateurs d'analyse vectorielle dans les différents systèmes de coordonnées. Ce n'est qu'une affaire de mathématiques, mais on ne peut pas faire correctement de la mécanique des fluides sans cette compétence. Citons la principale difficulté. La composante du vecteur vitesse **selon un des vecteurs** de la base est indexée :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z \text{ ou } \vec{v} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta + v_z \vec{u}_z$$

Mais cet indice ne signifie absolument pas que la composante **est fonction de** cette variable.

Exemple :

Prenons le champ de vitesses

$$\vec{v}(x, y, z, t) = v_x(z) \vec{u}_x$$

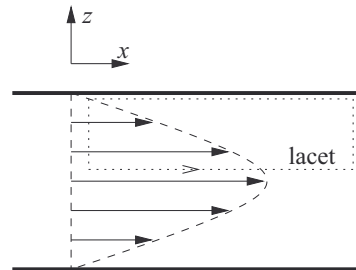
Cette notation signifie que la seule composant non nulle du vecteur vitesse est selon \vec{u}_x et que cette composante ne dépend que de z . On en déduit

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_x(z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial v_x(z)}{\partial x} = 0$$

L'écoulement est donc incompressible.

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_x(z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial v_x(z)}{\partial z} \\ -\frac{\partial v_x(z)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ v'_x(z) \\ 0 \end{vmatrix}$$

L'écoulement est donc rotationnel et le vecteur tourbillon est selon \vec{u}_y . Voici l'allure de la carte d'un champ des vitesses cohérent avec cette expression.



On constate que chaque particule de fluide se déplace sur un axe à z constant donc sa vitesse ne varie pas. On constate aussi l'absence de boucle tourbillonnaire parcourue par une particule de fluide, malgré le caractère rotationnel de l'écoulement ; en revanche, si on décrit en nageant le lacet tracé sur la figure (dans le plan orthogonal à $\vec{\Omega}$ et dans le sens cohérent avec ce vecteur selon la règle du tire-bouchon), on constate qu'on a globalement le courant favorable, c'est un bon critère géométrique des écoulements rotationnels.

↪ Exercices 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 9.6.

Exprimer et calculer les termes d'accélération particulaire, locale, convective.

Deux cas particuliers permettent de comprendre l'expression de l'**accélération particulaire**.

- Si le champ des vitesses est uniforme, une particule de fluide accélère si le champ des vitesses évolue dans le temps ; c'est le cas pour une particule de fluide dans un tuyau d'arrosage quand on augmente le débit. L'accélération particulaire s'identifie alors à l'**accélération locale** $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$.
- Si l'écoulement est permanent, une particule de fluide de vitesse \vec{v} , accélère si elle se déplace vers une zone de vitesse plus importante ; c'est le cas quand un bouchon à la surface de l'eau d'un ruisseau aborde une cascade. L'accélération particulaire s'identifie alors à l'**accélération convective**

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}$$

Dans le cas général

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}$$

L'opérateur $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)$ n'est facilement calculable qu'en coordonnées cartésiennes. On peut retenir que $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}$ est le vecteur dont les composantes sont $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$ des composantes.

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = \begin{cases} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_y = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_z = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{cases}$$

Voici l'expression alternative de l'accélération convective, qui est utilisable dans d'autres systèmes de coordonnées :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \right) \wedge \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\vec{v}^2}{2}$$

Exemple :

Soit le champ de vitesses

$$\vec{v} = v_x(z) \vec{u}_x \text{ avec } v_x(z) = v_0 \frac{z(a-z)}{a^2}$$

$$\text{soit } \vec{v} = \begin{cases} v_x = v_0 \frac{z(a-z)}{a^2} \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

L'accélération locale $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est nulle car \vec{v} ne dépend pas du temps. Calculons les trois champs dérivés.

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_0 \frac{z(a-z)}{a^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

L'écoulement est donc incompressible.

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_0 \frac{z(a-z)}{a^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{v_0}{a^2} (a-2z) \\ 0 \end{vmatrix}$$

L'écoulement est donc rotationnel.

$$\left(\vec{v} \cdot \operatorname{grad} \right) \vec{v} = \begin{vmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Or v_x ne dépend que de z donc seul $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ est non nul. Mais son coefficient v_z est nul donc l'accélération convective est nulle. C'est physiquement facile à interpréter car chaque particule de fluide se déplace selon \vec{u}_x , sa cote z reste donc constante et comme v_x ne dépend que de z , l'accélération convective est nulle. Vérifions la cohérence du résultat en calculant l'accélération convective avec l'autre formule.

$$\operatorname{rot} \vec{v} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{v_0}{a^2} (a-2z) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_0 \frac{z(a-z)}{a^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{soit } \operatorname{rot} \vec{v} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v_0^2}{a^4} (az - z^2)(a - 2z) \end{vmatrix}$$

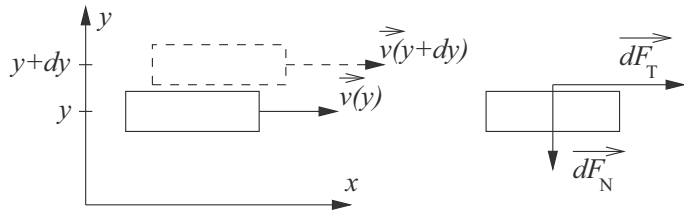
$$\operatorname{grad} \frac{\vec{v}^2}{2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \left(\frac{v_0^2}{2a^4} (az - z^2)^2 \right)}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v_0^2}{a^4} (az - z^2)(a - 2z) \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \operatorname{rot} \vec{v} \wedge \vec{v} + \operatorname{grad} \frac{\vec{v}^2}{2} = \vec{0}$$

↪ Exercices 9.7, 9.8.

Exprimer les actions de contact sur la particule de fluide.

Une particule de fluide de masse volumique μ et de volume $d\tau$ est soumise à un ensemble d'actions à distance, son poids en particulier $\mu d\tau \vec{g}$. Les forces de contact s'exercent sur les facettes qui la délimitent. On définit l'axe y perpendiculairement à la facette plane de séparation entre la particule d'ordonnée y et sa voisine d'ordonnée $y + dy$. La particule supérieure appuie et glisse sur la particule inférieure, en exerçant sur elle une force possédant une composante normale \vec{dF}_N et une composante tangentielle \vec{dF}_T .



- La force normale est une force de **pression** $\vec{dF}_P = -P \cdot dS \vec{n}$ avec $\vec{n} = \vec{u}_y$ où P est la pression exprimée en Pascal ($\text{Pa} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$).
- La force tangentielle est une force de **viscosité** $\vec{dF}_T = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dS \vec{u}_x$ où η est la **viscosité dynamique** exprimée en Poiseuille ($\text{Pl} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$). La résultante des forces de pression et de viscosité sur la particule de fluide est proportionnelle à son volume. Voici les expressions des forces volumiques.
- La résultante des forces de pression vaut

$$\vec{dF}_P = -\vec{\text{grad}} P \cdot d\tau \text{ donc } \vec{f}_P = \frac{\vec{dF}_P}{d\tau} = -\vec{\text{grad}} P$$

\vec{f}_P est la **force volumique de pression**.

- La résultante des forces de viscosité vaut

$$\vec{dF}_V = \eta \vec{\Delta} \vec{v} \cdot d\tau \text{ donc } \vec{f}_V = \frac{\vec{dF}_V}{d\tau} = \eta \vec{\Delta} \vec{v}$$

\vec{f}_V est la **force volumique de viscosité** et $\vec{\Delta}$ est l'opérateur **Laplacien vectoriel**. En coordonnées cartésiennes, le Laplacien d'un vecteur est le vecteur dont les composantes sont les Laplaciens scalaires des composantes

$$\vec{\Delta} \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Cette expression est analogue à celle du Laplacien scalaire, c'est pourquoi on note souvent $\Delta \vec{v}$ en omettant la flèche.

Exemple :

• Dans le cas de la **statique des fluides** le champ des vitesses est uniformément nul, donc les forces de viscosité sont nulles et la particule de fluide ne subit que les forces de contact de pression, le poids et les autres forces à distance (force d'inertie d'entraînement, ...). En équivalent volumique

$$-\vec{\text{grad}} P + \mu \vec{g} + \dots = \vec{0}$$

Voici deux cas particuliers. Pour un fluide incompressible, d'une part, dans le champ de pesanteur uniforme, on en déduit la **loi de l'hydrostatique** :

$$P(z) = P_0 + \mu g z$$

où P_0 est la pression à la surface du liquide ($z = 0$) et l'axe des z orienté vers le bas.

Pour un gaz parfait, d'autre part, la pression est liée à la masse volumique : $PM = \mu RT$. Si on assimile l'atmosphère terrestre à un gaz parfait isotherme, et qu'on suppose g uniforme, la loi de la statique des fluides en projection sur l'axe (O, z) vertical s'écrit

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{PMg}{RT} \text{ donc } P(z) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

• Une particule de fluide d'un fluide visqueux de champ de vitesses

$$\vec{v} = v_x(z) \vec{u}_x \text{ avec } v_x(z) = v_0 \frac{z(a-z)}{a^2}$$

$$\text{soit } \vec{v} = \begin{cases} v_x = v_0 \frac{z(a-z)}{a^2} \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

subit une force volumique de viscosité

$$\vec{f}_V = \eta \vec{\Delta} \vec{v} = \eta \begin{cases} \Delta v_x \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } \vec{f}_V = \begin{cases} \eta \frac{\partial^2 \left(v_0 \frac{z(a-z)}{a^2} \right)}{\partial z^2} = -\frac{2v_0}{a^2} \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

↪ **Exercices 9.9, 9.10, 9.11, 9.12, 9.13.**

Résoudre un problème de mécanique des fluides visqueux.

On cherche à déterminer complètement le champ des vitesses et/ou des pressions d'un fluide visqueux sous des hypothèses de type d'écoulement, de géométrie et de conditions aux limites. Les trois inconnues sont le champ de masse volumique, le champ de pression et le champ de vitesse. La loi de la quantité de mouvement appliquée à la particule de fluide prend la forme de l'équation de Navier-Stokes.

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \vec{\Delta} \vec{v}$$

(on ajoute le cas échéant les autres forces volumiques au terme de droite)

$$\text{soit } \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \vec{\Delta} \vec{v}$$

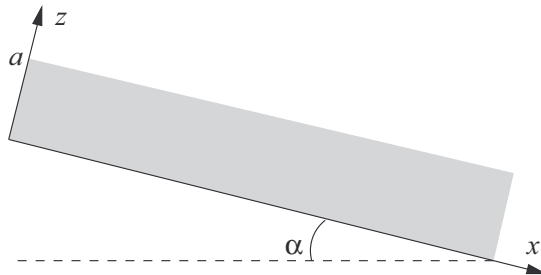
$$\text{ou } \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\vec{v}^2}{2} = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \vec{\Delta} \vec{v}$$

Voici la méthode préconisée.

- a) Identifier dans l'énoncé les hypothèses relatives à l'écoulement, en déduire les composantes non nulles et les variables dont elles dépendent.
- b) Traduire l'équation de conservation de la masse, en déduire une première équation différentielle.
- c) Écrire, simplifier et projeter l'équation de Navier-Stokes, en déduire les autres équations différentielles.
- d) Intégrer la (ou les) équation(s) différentielle(s).
- e) Traduire les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration.

Exemple :

Une flaque d'huile, fluide incompressible homogène de masse volumique μ et de viscosité dynamique η d'épaisseur a glisse sur un plan incliné de α par rapport à l'horizontale.



On cherche les champs des vitesses et des pressions sous la forme

$$\vec{v} = v(z)\vec{u}_x \text{ et } P(z)$$

L'incompressibilité du fluide entraîne celle de l'écoulement et on vérifie que

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v(z)}{\partial x} + 0 + 0 = 0$$

On est en régime permanent donc

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

L'accélération convective vaut

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \right) \vec{v} = \begin{vmatrix} v_z \frac{\partial v(z)}{\partial z} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0$$

Le Laplacien vectoriel de la vitesse est

$$\vec{\Delta} \vec{v} = \begin{vmatrix} \Delta v(z) = \frac{d^2 v(z)}{dz^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit donc

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} g \sin \alpha \\ 0 \\ -g \cos \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{dP}{dz} \end{vmatrix} + \eta \begin{vmatrix} \frac{d^2 v(z)}{dz^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{\mu g}{\eta} \sin \alpha \\ \frac{dP}{dz} = \mu g \cos \alpha \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} v(z) = -\frac{\mu g}{2\eta} \sin \alpha z^2 + Az + B \\ P(z) = -\mu g \cos \alpha z + C \end{cases}$$

L'étude des conditions aux limites qui permet le calcul des constantes A, B, C d'intégration est proposée en exercice.

↪ **Exercices 9.14, 9.15, 9.16, 9.17, 9.18, 9.19.**

Définir et exploiter le nombre de Reynolds.

Les cinq termes de l'équation de Navier-Stokes sont homogènes. Le rapport des ordres de grandeur de deux quelconques est un nombre sans dimension. Le nombre de Reynolds est l'un d'eux :

$$Re = \frac{\|\eta \vec{\Delta} \vec{v}\|_{o.d.g.}}{\|\mu (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}\|_{o.d.g.}} \simeq \frac{\mu VL}{\eta}$$

où V est un ordre de grandeur de la vitesse et L une distance caractéristique de l'écoulement. Dans une canalisation, à faible nombre de Reynolds, chaque tranche annulaire de fluide glisse entre ses deux voisines, comme le feraient des cartes à jouer les unes sur les autres : on dit que l'écoulement est **laminaire**. Mais à plus grand débit, à plus faible viscosité, à plus grande masse volumique ou à plus grand diamètre, apparaît un régime désordonné, avec de **fortes variations** tant spatiales que temporelles de \vec{v} : c'est un **écoulement turbulent**.

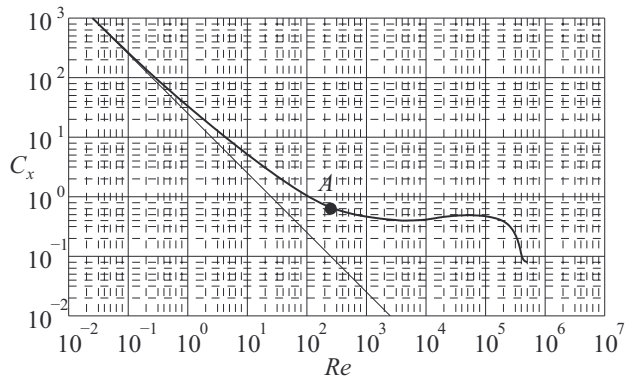
Voici un tableau récapitulatif.

$Re = \frac{\mu U d}{\eta}$	$Re < 2000$	$Re > 2000$
écoulement	laminaire	turbulent
description	glissement de lames de fluide faibles variations de \vec{v}	mouvement désordonné fortes fluctuations de \vec{v}

La valeur de Re permet de choisir le **modèle de traînée**. Une sphère solide de rayon R en déplacement à la vitesse $\vec{V} = V \vec{u}_x$ dans un fluide immobile, de masse volumique μ et de viscosité η , subit une **force de traînée** \vec{F} opposée au vecteur vitesse

$$\vec{F} = -C_x \cdot \frac{1}{2} \mu \pi R^2 V^2 \vec{u}_x$$

Le **coefficient de traînée** C_x ne dépend que du nombre de Reynolds $Re = \frac{\mu V \cdot 2R}{\eta}$, le graphe de ses variations a l'allure suivante.



On y distingue deux cas limites :

- Pour $Re \leq 1$, la courbe se confond avec une droite oblique $C_x = \frac{24}{Re}$, la force de traînée est linéaire et s'identifie à la **loi de Stokes** :

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{V}$$

- Pour $10^3 < Re < 10^5$, C_x est indépendant du nombre de Reynolds ($C_x \approx 0,5$) et la force de traînée est quadratique

$$\vec{F} = -\beta V^2 \vec{u}_x$$

Ces lois conduisent à des problèmes de mécanique, en particulier de balistique et de chute verticale.

Exemple :

- Dans une conduite cylindrique de diamètre $d = 0,20$ m, avec un débit $Q = 10 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$, la vitesse débitante est $U = \frac{Q}{\pi \frac{d^2}{4}} = 0,318 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Si le fluide est de l'eau, $\mu = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$ donc $Re = \frac{\mu U d}{\eta} = 63\,600$ et l'écoulement est turbulent.

- Dans la même conduite, si le fluide est de l'huile d'olive, $\mu = 915 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\eta = 84 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$ donc $Re = \frac{\mu U d}{\eta} = 693$ et l'écoulement est laminaire.

- Pour une bille de rayon $R = 2,5$ cm, de vitesse

$$V = 0,50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

dans l'huile d'olive :

$$Re = \frac{920 \cdot 0,50 \cdot 0,050}{0,10} = 230$$

On lit (point A) $C_x = 0,6$ donc la force de traînée vaut

$$\vec{F} = -F\vec{u}_x \text{ avec}$$

$$F = 0,6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 920\pi \cdot 0,025^2 \cdot 0,50^2 = 0,135 \text{ N}$$

↪ **Exercices 9.20, 9.21, 9.22, 9.23, 9.24, 9.25, 9.26.**

Énoncés des exercices

9.1

Exemples de classes d'écoulements

- Décrire un écoulement incompressible d'un fluide compressible.
- Décrire un écoulement incompressible et non stationnaire.
- Décrire un écoulement stationnaire non incompressible.

9.2

Écoulement incompressible d'un fluide

Un fluide incompressible a pour champ de vitesses

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \begin{cases} v_x = \frac{1}{\tau^2}(2x - 3y)t \\ v_y = \frac{1}{\tau^2}(3x - \alpha y)t \\ v_z = 0 \end{cases}$$

- Déterminer α .
- L'écoulement est-il rotationnel ?

9.3

Dérivée particulaire de la masse volumique, incompressibilité de l'écoulement

La dérivée particulaire de la masse volumique est

$$\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial\mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mu$$

On donne la formule d'analyse vectorielle

$$\text{div}(a\vec{b}) = a \text{div} \vec{b} + \vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} a$$

- Interpréter physiquement chacun des deux termes de la dérivée particulaire de μ .
- Démontrer que pour un écoulement incompressible, $\text{div} \vec{v} = 0$.

9.4

Champ de vitesses défini par un potentiel

Un champ de vitesses dérive du potentiel

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi_0 \ln \frac{x^2 + y^2}{d^2}$$

- Déterminer le champ des vitesses. Préciser l'unité de Φ_0 et de d .
- L'écoulement est-il rotationnel ?
- L'écoulement est-il incompressible ?

9.5
Potentiel des vitesses et équation de Laplace

- a) Un fluide est en écoulement irrotationnel et incompressible. Montrer qu'il dérive d'un potentiel Φ qui vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta\Phi = 0 \text{ avec } \Delta\Phi = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi$$

(Δ est l'opérateur Laplacien).

- b) On cherche une solution de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques sous la forme

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \Phi(r)$$

Déterminer $\Phi(r)$ et en déduire le champ des vitesses \vec{v} .

9.6
Fontaine linéique, puits linéique et dipôle hydrodynamique

- a) Une fontaine linéique est un fil rectiligne infini d'où sort un fluide incompressible ; le débit volumique linéique est $d_V = \frac{dQ}{dt}$. Définir un champ des vitesses radial $\vec{v}(r) = v(r)\vec{u}_r$ et le potentiel des vitesses $\Phi(r)$ associé.
- b) Un dipôle hydrodynamique est l'association d'une fontaine et d'un puits linéiques parallèles, de débits respectifs d_V et $-d_V$. Le fluide est incompressible et on se place en régime permanent. Soit Π un plan perpendiculaire aux deux axes, N et P les points d'intersection du plan avec le puits et la source respectivement, O le milieu de $[N, P]$ et M un point de Π défini par ses coordonnées polaires $r = OM$ et $\theta = (\vec{NP}, \vec{OM})$. Déterminer le champ des vitesses et le potentiel dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire en supposant que $a \ll r$ avec $a = NP$.

9.7
Calcul de l'accélération particulière pour un champ de vitesses

Un fluide incompressible a pour champ de vitesses

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = (2x - 3y)t \\ v_y = (3x - 2y)t \\ v_z = 0 \end{array} \right.$$

Calculer l'accélération particulière par les deux formules du cours.

9.8
Champ des vitesses et trajectoire d'une particule de fluide

Une particule de fluide passe au point de coordonnées cartésiennes (1, 2, 3) à la date $t = 1$ s lors d'un écoulement caractérisé par le champ des vitesses

$$\vec{v} = 3x\vec{u}_x + (8y + 5)\vec{u}_y + 10t^2\vec{u}_z$$

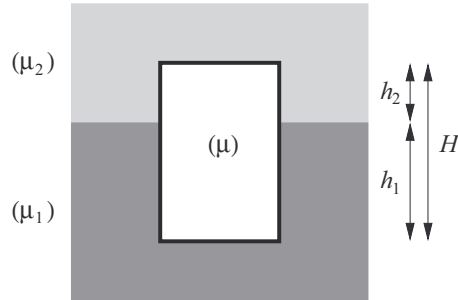
Déterminer les équations paramétriques de la trajectoire de cette particule fluide.



9.9

Équilibre à l'interface entre deux fluides

Un cylindre vertical de hauteur H et de masse volumique μ est placé à l'interface entre deux fluides de masses volumiques μ_1 (fluide inférieur) et μ_2 (supérieur) avec $\mu_1 > \mu_2$. Déterminer la position d'équilibre du cylindre en exprimant les hauteurs h_1 et h_2 des parties immergées dans les deux fluides.



Justifier que cette flottaison à l'interface n'est possible que si $\mu_1 > \mu > \mu_2$.



9.10

Atmosphère de Titan (analyse documentaire, ENSTIM 2008)

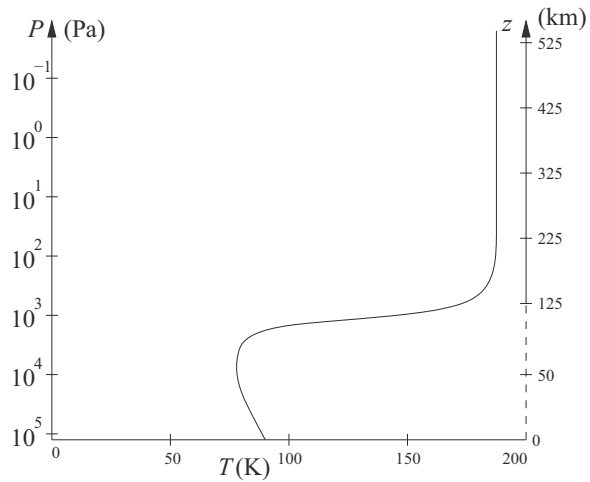
Dans le modèle de l'atmosphère polytropique, on suppose que la pression et la masse volumique, à l'altitude z , du gaz qui la constitue vérifie la loi

$$P(z)\mu^{-\alpha}(z) = P_0\mu_0^{-\alpha}$$

avec $P_0 = P(0)$ et $\mu_0 = \mu(0)$. L'accélération de la pesanteur g est supposée uniforme, le gaz est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M , on note R la constante des gaz parfaits.

- À quels cas particuliers correspondent $\alpha = 0$? $\alpha = 1$? $\alpha = \gamma = \frac{C_p}{C_v}$?
- Pour $\alpha = 1$, établir l'expression de $P(z)$ en fonction de P_0 et T_0 , pression et température en $z = 0$.
- Même question pour $\alpha \neq 1$.
- La sonde Huygens a traversé l'atmosphère de Titan, une des lunes de Saturne, en janvier 2005. On donne ci-dessous l'allure du relevé de la pression (axe de gauche en échelle logarithmique) et de la température (courbe) en fonction de l'altitude (axe de droite en échelle linéaire pour $z > 125$ km).

L'accélération de la pesanteur est de l'ordre de $g = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, et l'atmosphère est constituée à 95% de diazote de masse molaire moléculaire $M_{N_2} = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et de 5% de méthane de masse molaire moléculaire $M_{CH_4} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Peut-on valider, dans un intervalle d'altitude, l'hypothèse d'atmosphère isotherme ? l'hypothèse d'atmosphère isentropique (polytropique avec $\alpha = \gamma = \frac{7}{5}$) ?


9.11
Résultante des forces de pression sur un dôme hémisphérique

Un dôme hémisphérique de rayon a est placé au fond d'une cuve contenant une hauteur H d'eau, fluide incompressible de masse volumique μ . L'air atmosphérique est à la pression P_0 . Sous le dôme, une poche d'air à la même pression est emprisonnée. Le dôme est donc soumis aux forces de pression de l'eau au dessus et à celles de l'air de la poche en dessous. On cherche à déterminer la résultante \vec{f} de toutes ces forces de pression par deux méthodes distinctes.

- a) **Méthode intégrale.** La surface du dôme est décrite en coordonnées sphériques par $r = a$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Le vecteur surface élémentaire est

$$d\vec{S} = a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

- i) Déterminer la pression $P(z)$ à l'altitude z dans l'eau.
 - ii) En déduire son expression $P(\theta)$ en fonction de θ et l'expression de la résultante $d\vec{f} = -dP \vec{u}_r$ des forces de pression de l'air intérieur et de l'eau extérieure sur l'élément de surface.
 - iii) Justifier que la résultante \vec{f} des forces de pression sur le dôme est selon \vec{u}_z . Donner l'expression de la projection $-dP_z$ de $d\vec{f}$ sur cet axe.
 - iv) Par un calcul intégral, en déduire la résultante $\vec{f} = -f \vec{u}_z$.
- b) **Superposition.** Le dôme peut être considéré comme la différence entre le dôme muni d'un couvercle de fond totalement immergé dans l'eau, pour lequel la loi de la poussée d'Archimède s'applique, et ce couvercle plan sur lequel les forces de pression de l'air et de l'eau sont faciles à exprimer. En déduire la résultante $\vec{f} = -f \vec{u}_z$.

9.12
Masse de l'atmosphère (résolution de problème)

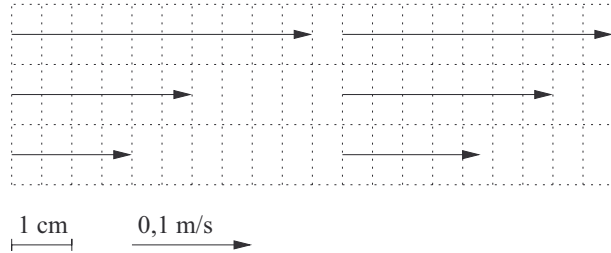
La masse molaire moyenne de l'air est $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. La constante des gaz parfaits vaut $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, l'accélération de la pesanteur à basse altitude est $g \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, la pression moyenne au niveau du sol est de l'ordre de $1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, le rayon terrestre est $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ et on prend l'hypothèse d'une atmosphère isotherme à $T = 290 \text{ K}$. Estimer la masse totale de l'atmosphère.



9.13

Estimation de la viscosité par analyse d'une carte de vitesses

Voici la carte du champ des vecteurs vitesse pour l'écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible et homogène de masse volumique $\mu = 1500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.



Donner une estimation de la valeur numérique de sa viscosité en supposant la pression homogène dans tout le fluide et le poids négligeable devant la force de viscosité.



9.14

Conditions aux limites pour une flaque d'huile

La flaque d'huile étudiée dans la fiche de cours est au contact, sur le plan incliné, d'une plaque de bois à laquelle elle adhère et, sur sa surface supérieure, de l'air à la pression atmosphérique P_0 qui n'a aucune interaction visqueuse avec l'huile.

- Donner les expressions de $P(z = a)$ et de $v(z = 0)$.
- Faire le bilan des forces tangentielles selon \vec{u}_x pour une particule de fluide de volume $d\tau = dx dy dz$ dont la face supérieure est au contact de l'air en $z = a$ et dont la face inférieure est dans l'huile en $z = a - dz$. En passant à la limite $dz \rightarrow 0$, en déduire la condition aux limites $\frac{dv}{dz}(a) = 0$.
- En déduire les constantes A, B et C dans les expressions de $P(z)$ et $v(z)$.
- Dresser l'allure de la carte du champ de vitesses.
- Calculer le débit massique d'huile à travers la section $(y, z) \in [0, a] \times [0, a]$.



9.15

Mouvements oscillatoires de l'eau dans un aquarium

Dans un aquarium très large, on place une hauteur H d'eau de masse volumique μ uniforme et de viscosité η . Le fond de l'aquarium est mis en mouvement oscillatoire horizontal avec une vitesse

$$\vec{V} = V_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

Déterminer le champ des vitesses pour $z \in [0, H]$ sous la forme

$$\vec{v} = v(z, t) \vec{u}_x$$

et le champ de pression sous la forme $P(z)$.

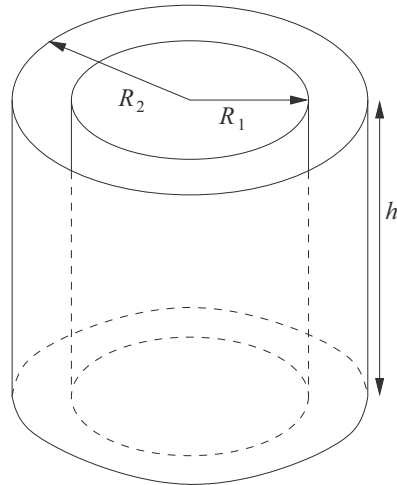
9.16
Écoulement de Couette plan

On considère l'écoulement incompressible et permanent d'un fluide visqueux entre deux plaques planes horizontales infinies. La première plaque ($z = 0$) est immobile, la seconde ($z = L$) est animée d'une translation horizontale à la vitesse constante $\vec{U} = U \vec{u}_x$. En régime permanent, on note $p(z)$ le champ des pressions et $\vec{v} = v(z) \vec{u}_x$ le champ des vitesses dans le fluide.

- Déterminer $v(z)$ et dresser l'allure de la carte du champ de vitesses.
- En déduire la composante horizontale de la force exercée par le fluide sur une surface S de la plaque mobile.
- Proposer une application de ce phénomène.

9.17
Écoulement de Couette cylindrique

Un fluide visqueux, de viscosité η , incompressible, de masse volumique μ , occupe le volume entre les deux cylindres de rayons R_1 et R_2 . Le cylindre intérieur est maintenu immobile, l'extérieur tourne à la vitesse angulaire constante Ω .



On cherche le champ des vitesses sous la forme $\vec{v} = v(r) \vec{u}_\theta$ et le champ de pression sous la forme $P(r, z)$. On travaille sur la particule de fluide située entre r et $r + dr$, z et $z + dz$, θ et $\theta + d\theta$. On donne l'expression du Laplacien vectoriel en coordonnées cylindriques

$$\vec{\Delta} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta$$

- Exprimer le vecteur accélération d'une particule de fluide.
- Par application de la loi de la quantité de mouvement à la particule de fluide, établir les équations différentielles vérifiées par $P(r, z)$ et $v(r)$.
- Déterminer $v(r)$ en utilisant les conditions aux limites en $r = R_1$ et en $r = R_2$ et dresser l'allure de la carte du champ de vitesses.

9.18

Loi de Hagen-Poiseuille

Un fluide visqueux de viscosité η et incompressible de masse volumique μ s'écoule dans une canalisation horizontale cylindrique d'axe (O, z) , de rayon R et de longueur L . On néglige les effets de la pesanteur. Le champ des pressions est $P(z, r)$, le champ des vitesses $\vec{v} = v(r, z)\vec{u}_z$. On pose $P(z=0) = P_1$ et $P(z=L) = P_2$.

a) Montrer que v ne dépend pas de z , en déduire que chaque particule de fluide a un mouvement rectiligne et uniforme. On en déduit l'expression

$$\vec{\Delta} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

b) Par application de l'équation de Navier-Stokes, montrer que P ne dépend pas de r et établir les équations différentielles vérifiées séparément par $P(z)$ et $v(r)$, dans lesquelles apparaît une même constante K .

c) En déduire $P(z)$ et exprimer la valeur de K en fonction de P_1, P_2 et L .

d) Exprimer la loi de Hagen-Poiseuille donnant $v(r)$. Donner l'allure de la carte du champ de vitesses dans la conduite.

e) En déduire le modèle de la **résistance hydraulique** : la différence de pression $P_1 - P_2$ (équivalent de la différence de potentiel) est proportionnelle au débit Q (équivalent de l'intensité)

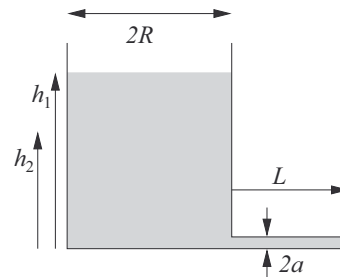
$$P_1 - P_2 = R_h Q$$

et préciser l'expression de R_h .

9.19

Viscosimètre (résolution de problème)

Un fluide visqueux, de viscosité η , incompressible, de masse volumique μ , est placé dans un récipient cylindrique de rayon R et s'écoule lentement à travers un tube capillaire de longueur L et de rayon $a \ll R$. On mesure le temps de descente τ entre les deux hauteurs h_1 et h_2 .



L'écoulement dans la conduite est très lent, on admet la validité de la loi de l'hydrostatique dans le récipient et la loi d'Ohm hydraulique (voir exercice 9.18) : le débit volumique Q dans une canalisation cylindrique de rayon r et de longueur ℓ est proportionnelle à la différence des pressions entre ses extrémités

$$P_1 - P_2 = R_h Q \text{ avec } R_h = \frac{8\eta\ell}{\pi r^4}$$

a) Déterminer l'expression de η .

b) Faire l'application numérique pour l'eau avec les valeurs $a = 0,8 \text{ mm}$, $R = 5,9 \text{ cm}$, $h_1 = 15 \text{ cm}$, $h_2 = 12 \text{ cm}$, $L = 50 \text{ cm}$, $\tau = 610 \text{ s}$ et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

9.20**Estimation d'un nombre de Reynolds**

Une voiture se déplace sur l'autoroute. Estimer le nombre de Reynolds pour l'écoulement de l'air sous la voiture et en déduire le régime de cet écoulement.

9.21**Estimation du régime de quelques écoulements**

- a) La viscosité cinématique est le rapport $\frac{\eta}{\mu}$. Dans une conduite cylindrique de diamètre $d = 3,0$ cm, du fuel lourd circule à la vitesse débitante $U = \frac{Q}{S} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ où Q est le débit et S la section de la conduite. La viscosité cinématique du fuel à 10°C est égale à $290 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, et à 50°C elle vaut $110 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer le débit et qualifier l'écoulement dans les deux cas.
- b) Un ruisseau a un débit de l'ordre de $Q = 7,5 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$. La masse volumique de l'eau est $\mu = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et sa viscosité $\eta \approx 10^{-3} \text{ Pl}$. En suivant le cours du ruisseau, on voit apparaître des zones où l'eau est lente et calme et d'autres où l'eau est rapide est agitée. Peut-on expliquer ce fait grâce au nombre de Reynolds (on estimera librement la largeur du lit et la hauteur d'eau dans les différentes zones) ?

9.22**Chute libre verticale d'une bille dans un fluide très visqueux**

Une bille sphérique de rayon $R = 3,0$ mm et de masse $m = 0,90$ g est lâchée sans vitesse initiale dans une éprouvette très large contenant de la glycérine de masse volumique $\mu = 1260 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de viscosité η de valeur précise inconnue, mais de l'ordre de 1 Pl . On donne $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Après un régime transitoire, la bille atteint la vitesse limite $V_{\text{lim}} = 8,2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- a) Calculer une valeur approchée du nombre de Reynolds en régime permanent.
- b) Pourquoi peut-on admettre la loi de Stokes pour la totalité du mouvement ? Déterminer la valeur de η avec deux chiffres significatifs.
- c) Déterminer l'expression de la vitesse verticale $V(t)$ de la bille et préciser l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

9.23**Chute libre verticale d'une bille dans un fluide peu visqueux**

Une bille sphérique de rayon $R = 3,0$ mm et de masse $m = 0,90$ g est lâchée sans vitesse initiale dans une éprouvette très large contenant de l'eau de masse volumique $\mu = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de viscosité $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$. On donne $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Après un régime transitoire, la bille atteint la vitesse limite $V_{\text{lim}} = 0,74 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- a) Calculer le nombre de Reynolds en régime permanent et la valeur de C_x .
- b) On suppose que le nombre de Reynolds reste supérieur à 1000 pendant la quasi-totalité du mouvement. En utilisant le graphe du cours, en déduire qu'on peut considérer C_x constant et donner l'expression de la force de traînée en fonction de la vitesse verticale $\vec{V} = -V(t)\vec{u}_z$ de la bille.
- c) Déterminer l'expression de la vitesse verticale $V(t)$ de la bille. On pourra poser $u = \frac{V}{V_{\text{lim}}}$ et on donne $\int_0^U \frac{du}{1-u^2} = \text{argth}U$.

9.24

Problématique de la détermination de l'équation horaire de chute libre verticale d'un objet dans un fluide

- a) Le parachutiste Félix Baumgartner s'est jeté sans vitesse initiale d'un point en haute atmosphère à une altitude $z(t = 0) = z_0 = 39$ km. L'accélération de la pesanteur g peut être supposée constante pendant le saut, mais pas la masse volumique de l'air dont l'expression approchée est $\mu(z) = 1,2 \cdot e^{-\frac{z}{9000}}$. Le parachutiste a réussi son pari d'être le premier humain à dépasser la vitesse du son en chute libre, égale à $301 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à l'altitude z_1 . On prend $C_x = 0,8$ pendant la totalité du saut, on remplace le maître couple πR^2 de la sphère par $S = 0,8 \text{ m}^2$ pour le parachutiste, $m = 100 \text{ kg}$ et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- Le saut admet-il une vitesse limite ?
 - Calculer la valeur approchée de z_1 .
 - Pourquoi le calcul de la durée séparant z_0 et z_1 est-il difficile sans outil informatique ?
- b) Une bille de platine est lâchée sans vitesse initiale dans un fluide homogène et immobile dans le référentiel terrestre. On néglige la poussée d'Archimède devant le poids. On supposera que le nombre de Reynolds reste inférieur à 10^5 pendant toute la chute.
- Sa vitesse tend-elle nécessairement vers une vitesse limite ? Calculer celle-ci si $m = 0,40 \text{ kg}$, $R = 16 \text{ mm}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\eta = 1,0 \text{ Pl}$.
 - Sa vitesse peut-elle passer par une valeur maximale strictement supérieure à cette vitesse limite avant de s'en rapprocher ?
- c) La chute libre d'une sphère de masse m dans un fluide homogène et immobile se fait avec un nombre de Reynolds qui reste inférieur à 5. Dans ce cas, une bonne approximation du coefficient de traînée est donnée par la formule de Oseen et Lamb : est $C_x = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right)$.
- Écrire l'équation différentielle vérifiée par l'altitude $z(t)$ de la sphère. Quel type de calcul doit-on mener pour résoudre cette équation ?
 - Écrire l'équation algébrique vérifiée par la vitesse limite de chute. Combien a-t-elle de solutions ?

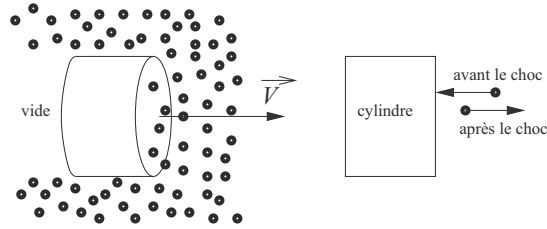
9.25

Fardage d'un mât cylindrique

Un voilier dont les voiles ont été affalées est immobile sur la mer et soumis à un vent de 30 nœuds, soit environ $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Son mât vertical est cylindrique, de rayon $R = 10 \text{ cm}$ et de hauteur $H = 20 \text{ m}$. La force de traînée est appelée dans ce cas le « fardage ». Elle est donnée par une formule analogue à celle de la sphère, à condition de remplacer la surface πR^2 de la sphère projetée sur un plan perpendiculaire au vecteur vitesse (le maître-couple) par celle du cylindre et de prendre un C_x double. Calculer le fardage dû au mât en prenant pour l'air $\mu = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\eta = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ Pl}$.

9.26
Un C_x record

Un cylindre de hauteur H et de rayon R se déplace horizontalement à la vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_x$ dans un fluide virtuel constitué d'atomes ponctuels, sans interaction mutuelle, de masse individuelle m_a , immobiles, régulièrement répartis dans l'espace, formant un gaz de masse volumique μ . Sur la face avant du cylindre (un disque), les atomes rebondissent, sur la face arrière, le cylindre a totalement nettoyé l'espace et dessiné un tunnel cylindrique vide. Le rebond des atomes est supposé parfait, c'est-à-dire que dans le référentiel du cylindre, chaque atome arrivant à la vitesse $-V\vec{u}_x$ repart, après le choc, avec une vitesse $+V\vec{u}_x$.



- Exprimer le nombre n d'atomes par mètre cube. En déduire le nombre dN d'atomes qui entrent en collision avec la face avant du cylindre pendant dt .
- Exprimer la variation de quantité de mouvement $\delta\vec{p}$ que subit chaque atome au moment du choc. En déduire la variation de quantité de mouvement $d\vec{p}$ du gaz pendant dt .
- En déduire la force exercée par le cylindre sur le gaz puis celle exercée par le gaz sur le cylindre et la valeur du C_x dans ce cas.

Du mal à démarrer ?

9.1 On pourra chercher des écoulements d'air pour trouver des écoulements compressibles.

9.2 La divergence de \vec{v} est nulle si l'écoulement est incompressible. Son rotationnel est non nul si l'écoulement est rotationnel.

9.3 La dérivée particulaire apparaît dans l'équation de conservation de la masse grâce à la formule d'analyse vectorielle donnée par l'énoncé.

9.4 Les calculs de gradient, de rotationnel (facultatif) et de divergence en coordonnées cylindriques sont définis par l'opérateur nabla (∇), il suffit de savoir dériver des fonctions pour conclure.

9.5 Les propriétés du cours sur l'écoulement irrotationnel et sur l'écoulement incompressible suffisent à établir l'équation de Laplace. Pour la résoudre dans le cas particulier proposé, il suffit de primitiver deux fois, sans oublier les constantes d'intégration (qu'on ne peut pas déterminer ici, faute de conditions aux limites).

9.6 Le débit à travers un cylindre de hauteur H et de rayon r est $2\pi r H v(r)$, qu'on identifie à $H \cdot d\gamma$. On en déduit \vec{v} , puis Φ par intégration. Pour le doublet hydrodynamique, On a intérêt à superposer les potentiels (qui sont des champs scalaires), puis à en déduire \vec{v} .

9.7 Après avoir identifié les composantes v_x , v_y et v_z et les variables x , y , z , t dont elles dépendent, l'exercice se ramène à une série de dérivations. Il faut bien sûr persévérer jusqu'à obtenir la même expression avec les deux formules du cours.

9.8 La dérivée particulaire est égale, par définition, à l'accélération de la particule, qu'on exprime avec la formule habituelle de cinématique. On en déduit $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ par intégration des équations différentielles.

9.9 Le cylindre est soumis à son poids et à l'équivalent des poussées d'Archimède des deux portions immergées dans les deux fluides.

9.10 L'établissement des lois donnant $P(z)$ dans les différents cas se ramène à l'intégration de la loi de la statique des fluides couplée à la loi polytropique. On pourra chercher sur le graphe • une zone isotherme • une zone polytropique, en cherchant dans les deux cas un profil particulier de température et en vérifiant si la loi de pression est cohérente.

9.11 La méthode intégrale est très guidée et purement calculatoire. La méthode de superposition utilise le fait que la loi de la poussée d'Archimède peut être appliquée au dôme muni de son couvercle plan, car lui est réellement immergé (au contact de l'eau

dessus et dessous). Il faut persévérer dans cet exercice jusqu'à ce que les expressions obtenues par les deux méthodes soient rigoureusement identiques.

9.12 La faible épaisseur de l'atmosphère par rapport à son rayon permet géométriquement de se ramener à un calcul d'intégrale sur une forme cylindrique dont la surface est celle de la Terre et de hauteur infinie (ce qui ne pose pas de problème pour une forme exponentielle).

9.13 Une exploitation poussée du graphe permet de déterminer les vitesses des particules de fluide, d'en déduire le gradient de ces vitesses, puis la durée du passage de la particule centrale de la zone de gauche à la zone de droite, et d'en déduire son accélération. L'application de la loi de la quantité de mouvement à cette particule de fluide soumise aux forces de viscosité permet de conclure.

9.14 La principale difficulté de l'exercice est l'établissement de la condition aux limites sur la dérivée de la vitesse en $z = a$ (question (b)). Il faut pour cela justifier que l'accélération de la particule de fluide à la surface est nulle, puis en déduire une relation entre les forces de viscosité qu'elle subit sur sa facette supérieure dans l'air et sur sa facette inférieure dans l'huile.

9.15 L'établissement des équations différentielles est un pur exercice technique. La résolution de l'équation vérifiée par la pression donne une loi hydrostatique. La résolution de l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la vitesse nécessite le passage au formalisme complexe spatio-temporel comme dans l'exercice 5.17 auquel on renvoie.

9.16 L'équation de Navier-Stokes donne l'équation différentielle vérifiée par $v(z)$, qu'on intègre en traduisant les conditions aux limites.

9.17 La particule de fluide a un mouvement circulaire uniforme, on en déduit son accélération en coordonnées cylindriques puis les équations différentielles en P et v . Le fluide étant visqueux, la vitesse de la particule sur la paroi est égale à celle de la paroi.

9.18 (a) Utiliser la loi de cinématique des fluides $\text{div } \vec{v} = 0$. (b) On montrera au préalable que le champ des vitesses proposées donne une accélération nulle pour toute particule de fluide. L'identité entre deux fonctions de variables distinctes indépendantes implique que les deux fonctions sont égales à une même constante.

(c) On intègre entre $z = 0$ et $z = L$. (d) On primitive l'équation différentielle en utilisant les conditions aux limites : la vitesse reste finie en $r = 0$ et elle est nulle en $r = R$. (e) L'élément de surface est $dS = r dr d\theta$.

9.19 La loi d'Ohm hydraulique permet de relier le débit Q dans la conduite et la pression au fond du réservoir, la conservation du débit permet de relier Q à la dérivée de $h(t)$, et la loi de l'hydrostatique permet de relier $h(t)$ à la pression à l'entrée de la conduite.

9.20 La largeur caractéristique de l'écoulement est la distance séparant le chassis de la route, de l'ordre de 25 cm.

9.21 Dans les deux questions, on peut s'attendre à observer un régime laminaire dans un cas, turbulent dans l'autre. L'estimation libre des dimensions et vitesses du ruisseau laisse une très grande latitude de choix, la seule règle est de rester dans des valeurs raisonnables.

9.22 L'application de la formule de Stokes donne l'expression de la force de frottement visqueux. La loi de la quantité de mouvement (attention à ne pas oublier la poussée d'Archimède) donne une équation différentielle dont la résolution est sans difficulté.

9.23 La force de traînée est quadratique, la résolution de l'équation différentielle non linéaire en V est facilitée par la donnée par l'énoncé de l'intégrale et du changement de variable pertinent.

9.24 (a) On applique la loi de la quantité de mouvement au parachutiste soumis à son poids et à la force de traînée. L'équation différentielle non linéaire vérifiée par $z(t)$ n'est pas simplement soluble, on pourra montrer par l'absurde que l'annulation de la dérivée de la vitesse correspond à un maximum de vitesse, et pas à une vitesse limite asymptotique. (b) À grand nombre de Reynolds, seule une méthode graphique est possible : on cherche le point de fonctionnement du dispositif en traduisant la loi de l'équilibre à vitesse limite entre poids et force de traînée en termes de nombre de Reynolds et en traduisant graphiquement cette relation sur le diagramme. (c) À faible nombre de Reynolds, la formule de Oseen et Lamb permet une traduction algébrique de la loi de l'équilibre.

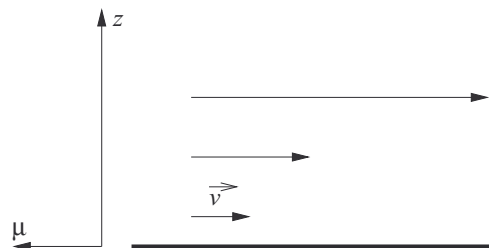
9.25 Le maître-couple est un rectangle. L'utilisation du graphe donne la valeur du C_x pour une sphère, il suffit de le multiplier par 2. L'application de la loi du cours donne la valeur du fardage.

9.26 (a) Pendant dt , les atomes qui frappent la paroi sont celles situées à moins de $V dt$ de celle-ci. (b) $d\vec{p} = dN \cdot \delta\vec{p}$. (c) $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

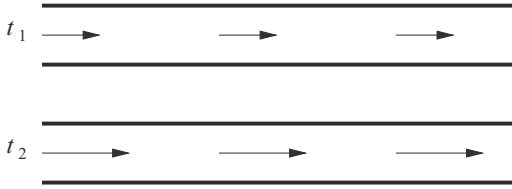
Corrigés des exercices

9.1

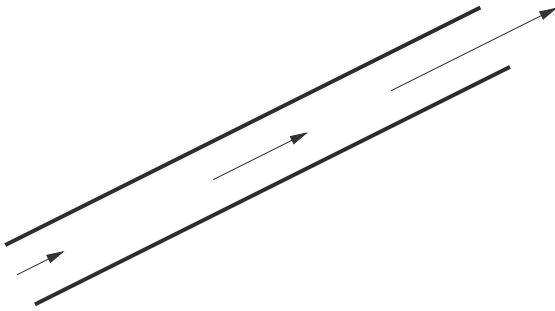
a) Le glissement des couches d'air atmosphériques les unes sur les autres, et de masses volumiques décroissant avec l'altitude est un exemple d'écoulement incompressible, car chaque particule de fluide garde dans son déplacement la même altitude donc la même masse volumique, d'un gaz compressible, car μ n'est pas uniforme.



- b) Dans une canalisation cylindrique, l'eau assimilée à un fluide incompressible, peut avoir un débit, donc une vitesse qui dépend du temps, l'écoulement est donc incompressible, et non stationnaire.



- c) Dans une cheminée, en régime permanent, la pression décroît et la masse volumique peut diminuer quand l'altitude croît. L'écoulement est donc stationnaire et compressible.


9.2

- a) On calcule

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} (2t - \alpha t)$$

L'écoulement étant incompressible cette divergence est nulle donc $\alpha = 2$. On en déduit

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \frac{1}{r^2} (2x - 3y) t \\ v_y = \frac{1}{r^2} (3x - 2y) t \\ v_z = 0 \end{cases}$$

- b) On calcule

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{6t}{r^2} \end{pmatrix}$$

L'écoulement est donc rotationnel sauf à $t = 0$.

9.3

- a) La dérivée particulaire est la variation $d\mu$ de la masse volumique d'une particule de fluide qu'on suit dans son mouvement divisée par l'intervalle de temps dt . Il y a deux causes de variations de μ pendant dt .

- Le champ eulérien des masses volumiques évolue dans le temps. Si la particule ne bouge pas, $\vec{v} = 0$ et la dérivée particulaire s'identifie à la dérivée locale

$$\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t}$$

- Le champ eulérien des masses volumiques n'est pas uniforme. Le vecteur gradient indique la direction et le sens de la variation maximale de μ à partir du point considéré. Si le champ des masses volumiques est constant dans le temps, et que la particule se déplace à la vitesse \vec{v} , sa masse volumique augmente donc beaucoup si \vec{v} est de même direction et de même sens que le gradient, elle n'évolue pas si ces deux vecteurs sont orthogonaux et elle diminue si les vecteurs sont de même direction et de sens opposés. La dérivée particulaire s'identifie alors à la dérivée convective

$$\frac{D\mu}{Dt} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mu$$

Dans le cas général, la dérivée particulaire est la somme des deux termes.

- b) Appliquons la loi locale de conservation de la masse.

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\operatorname{div} (\mu \vec{v}) = -\mu \operatorname{div} \vec{v} - \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mu$$

$$\text{donc } \frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mu = -\mu \operatorname{div} \vec{v}$$

L'écoulement est incompressible si

$$\frac{D\mu}{Dt} = 0 \text{ donc } \mu \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ donc } \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

9.4

- a) On ne peut exprimer le logarithme que d'une quantité sans dimension, donc d est une longueur exprimée en mètres. Par définition

$$\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi = \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_0 \frac{2x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi_0 \frac{2y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Pour assurer l'homogénéité de cette expression, on doit avoir

$$[\Phi_0] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

- b) La relation $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi = \vec{0}$ est une formule d'analyse vectorielle (on peut le vérifier par acquit de conscience). Un écoulement qui dérive d'un potentiel est nécessairement irrotationnel.

c) On calcule

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial \left(\Phi_0 \frac{2x}{x^2+y^2} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\Phi_0 \frac{2y}{x^2+y^2} \right)}{\partial y} + 0$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x + 2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

donc l'écoulement est incompressible.

9.5

a) L'écoulement est irrotationnel donc il existe un potentiel Φ tel que

$$\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi$$

L'écoulement est incompressible donc

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ donc } \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi = 0 \text{ soit } \Delta \Phi = 0$$

b) Le Laplacien en coordonnées cylindriques de Φ qui ne dépend que de r s'écrit

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)}{\partial r}$$

L'équation de Laplace s'écrit donc

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0$$

donc $r \frac{d\Phi}{dr} = A$ soit $\frac{d\Phi}{dr} = \frac{A}{r}$
donc $\Phi = A \ln r + B$

On en déduit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(A \ln r + B)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(A \ln r + B)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(A \ln r + B)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

soit $\vec{v} = \frac{A}{r} \vec{u}_r$

La constante A est déterminée par les conditions aux limites.

9.6

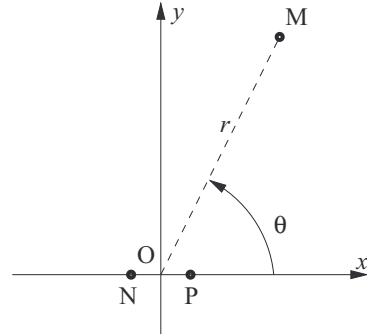
a) Le débit volumique à travers un cylindre de hauteur H et de rayon r est celui qui sort de la fontaine, soit

$$2\pi r H \cdot v(r) = d_V \cdot H \text{ soit } v(r) = \frac{d_V}{2\pi r}$$

En coordonnées cylindriques, la relation $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi$ s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d_V}{2\pi r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \\ 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases} \text{ donc } \Phi(r) = \frac{d_V}{2\pi} \ln r$$

b) Les notations sont celles du schéma suivant.



Les coordonnées des points sont

$$O \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right., N \left| \begin{matrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \end{matrix} \right., P \left| \begin{matrix} \frac{a}{2} \\ 0 \end{matrix} \right., M \left| \begin{matrix} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{matrix} \right. \text{ donc}$$

$$\begin{cases} NM = \sqrt{\left(r \cos \theta + \frac{a}{2} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{r^2 + ar \cos \theta + \frac{a^2}{4}} \\ PM = \sqrt{\left(r \cos \theta - \frac{a}{2} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{r^2 - ar \cos \theta + \frac{a^2}{4}} \end{cases}$$

L'approximation dipolaire permet de faire les développements limités au premier ordre en $\frac{a}{r}$:

$$\begin{cases} NM = r \sqrt{1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}} \simeq r \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ PM = r \sqrt{1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}} \simeq r \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} NM \simeq r \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \\ PM \simeq r \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \end{cases}$$

On en déduit le potentiel somme des potentiels du puits et de la fontaine

$$\Phi = \frac{d_V}{2\pi} \ln PM - \frac{d_V}{2\pi} \ln NM$$

$$\Phi = \frac{d_V}{2\pi} \left[\ln r + \ln \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right) - \ln r - \ln \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \right]$$

$$\Phi \simeq \frac{d_V}{2\pi} \left[\ln r + \frac{a \cos \theta}{2r} - \ln r + \frac{a \cos \theta}{2r} \right]$$

soit $\Phi = \frac{a \cos \theta}{r}$

On en déduit, en coordonnées cylindriques

$$\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi = \begin{pmatrix} v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{-a \cos \theta}{r^2} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{a \sin \theta}{r^2} \\ v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \end{pmatrix}$$

9.7

L'accélération locale est

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \begin{vmatrix} 2x-3y \\ 3x-2y \\ 0 \end{vmatrix}$$

L'accélération convective est

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \begin{vmatrix} -5xt^2 \\ -5yt^2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Pour vérifier la cohérence avec l'autre expression, on calcule

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 6t \end{vmatrix}$$

$$\frac{v^2}{2} = (13x^2 - 24xy + 13y^2) \frac{t^2}{2}$$

$$\text{donc } \text{grad } \frac{v^2}{2} = \begin{vmatrix} [13x-12y] t^2 \\ [-12x+13y] t^2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} -6t^2[3x-2y] \\ 6t^2[2x-3y] \\ 0 \end{vmatrix}$$

On vérifie l'identité

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \frac{v^2}{2} + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

9.8

 Les conditions initiales pour la particule de fluide considérée sont à $t = 1$

$$\overrightarrow{OM_1} \begin{vmatrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \\ z_1 = 3 \end{vmatrix} \quad \text{et } \vec{v}_1 \begin{vmatrix} 3 \\ 21 \\ 10 \end{vmatrix}$$

La dérivée particulière s'écrit

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$$

$$\text{avec } \vec{v} \begin{vmatrix} v_x = 3x \\ v_y = 8y + 5 \\ v_z = 10t^2 \end{vmatrix}$$

On obtient

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 20t \end{vmatrix}$$

$$\text{et } (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \begin{vmatrix} 9x \\ 64y + 40 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On en déduit les équations différentielles du mouvement de la particule de fluide :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 9x \\ \ddot{y} = 64y + 40 \\ \ddot{z} = 20t \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t} \\ y(t) = A'e^{-8t} + B'e^{8t} - 5/4 \\ z(t) = 20/6t^3 + A''t + B'' \end{cases}$$

On calcule les six constantes grâce aux conditions initiales.

9.9

 Le cylindre est à l'équilibre sous l'action de son poids et des poussées d'Archimède qui s'exercent sur ses deux parties. En notant S sa section :

$$-\mu SHg + \mu_1 Sh_1g + \mu_2 Sh_2g = 0$$

 avec $h_1 + h_2 = H$ donc

$$h_1 = \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \cdot H$$

 Le cylindre est à l'interface si $0 < h_1 < H$ soit si $0 < \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} < 1$. Or $\mu_1 > \mu_2$ donc la double inégalité s'écrit

$$0 < \mu - \mu_2 < \mu_1 - \mu_2 \text{ donc } \mu_2 < \mu < \mu_1$$

9.10

a) La loi des gaz parfaits s'écrit $PM = \mu RT$. $\alpha = 0$ donne $P(z) = P_0$, correspondant à une atmosphère isobare. $\alpha = 1$ donne $\frac{P(z)}{\mu(z)} = \frac{P_0}{\mu_0}$ soit $\frac{RT(z)}{M} = \frac{RT_0}{M}$ donc $T(z) = T_0$, correspondant à une atmosphère isotherme. $\alpha = \gamma$ correspond à $P(z)\mu^{-\gamma}(z) = P_0\mu_0^{-\gamma}$ soit $P(z)V^\gamma = P_0V_0^\gamma$, loi de Laplace correspondant à une atmosphère isentropique.

b) C'est le cas du cours, atmosphère isotherme :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PMg}{RT_0} \text{ donc } P(z) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}$$

c) La loi polytropique donne

$$\mu(z) = \mu_0 \frac{P^\alpha}{P_0^\alpha}$$

La loi de la statique des fluides donne donc une équation à variables séparables :

$$\frac{dP}{dz} = -\mu_0 g \frac{P^\alpha}{P_0^\alpha} \Rightarrow P^{-\frac{1}{\alpha}} dP = -\mu_0 g P_0^{-\frac{1}{\alpha}} dz$$

qu'on intègre membre à membre entre $(z = 0, P = P_0)$ et $(z, P(z))$:

$$\frac{P^{-\frac{1}{\alpha}+1} - P_0^{-\frac{1}{\alpha}+1}}{-\frac{1}{\alpha} + 1} = -\mu_0 g P_0^{-\frac{1}{\alpha}} [z - 0]$$

On tire $P(z)$ de cette relation

$$P(z) = P_0 \left[1 - \frac{(\alpha - 1)\mu_0 g}{\alpha P_0} z \right]^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}$$

$$= P_0 \left[1 - \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} \cdot \frac{Mgz}{RT_0} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}$$

d) On distingue clairement que pour $z > 200$ km, T est constante et l'atmosphère est isotherme. La loi établie à la question (b) donne alors

$$\ln P(z) = \ln P_0 - \frac{Mgz}{RT}$$

ce qui est confirmé sur le graphe où l'échelle logarithmique en pression à gauche correspond à l'échelle linéaire en altitude. Voici le tableau de correspondance

P (Pa)	10^2	10^1	10^0	10^{-1}
ln P	4,605	2,303	0	-2,303
$z \cdot 10^3$ (m)	200	290	380	470

La régression linéaire donne $R = 0,99999$ ce qui confirme la validité de l'hypothèse d'atmosphère isotherme. Le coefficient directeur vaut

$$-\frac{Mg}{RT} = -2,558 \cdot 10^{-5}$$

En prenant $T = 190$ K, on en déduit $M = 25 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. La masse molaire moyenne d'un gaz constitué de 95% de diazote et de 5% de méthane est $M = 0,95 \cdot 28 + 0,05 \cdot 16 = 27,4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, l'accord est donc acceptable. Pour des altitudes inférieures, la loi de l'atmosphère polytropique combinée à la loi des gaz parfaits et loi polytropique une relation $P^{1-\alpha} T^\alpha = P_0^{1-\alpha} T_0^\alpha$, soit $P = P_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ d'où

$$\ln P = \ln P_0 + \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{T}{T_0}$$

La courbe de température est sensiblement affine, de pente positive en fonction de P en échelle logarithmique pour $z < 50$ km, ce qui valide le modèle. La pente vaut

$$\frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{\ln 10^4 - \ln 10^5}{75 - 88} = 0,177$$

En prenant $T_0 = 90$ K, on identifie

$$\frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{T_0} = 0,177 \text{ donc } \alpha = 1,07$$

Cette valeur est comparable à γ , mais l'écart est assez important. Pour valider ou non le modèle, on doit vérifier la conformité de l'évolution avec l'altitude, même si l'échelle n'est pas régulière aux basses altitudes. La loi théorique obtenue pour $P(z)$ donne une pression nulle quand

$$z = \frac{\alpha RT_0}{(\alpha - 1)Mg} = 58 \text{ km}$$

ce qui n'est pas conforme au graphe. Le modèle isentropique pour les basses altitudes est donc faux : il est en effet difficile d'imaginer une évolution adiabatique pour une lune soumise au rayonnement du Soleil et de Saturne.

9.11

a) **Méthode intégrale.**

i) La loi de l'hydrostatique donne $P(z) = P_0 + \mu g(H - z)$.

ii) θ est l'angle entre la verticale et le vecteur \vec{OM} donc $z = a \cos \theta$ et $P(\theta) = P_0 + \mu g(H - a \cos \theta)$. Du côté de la poche d'air, la pression vaut P_0 . La résultante des forces de pression vaut donc

$$d\vec{f} = +P_0 d\vec{S} - P(\theta) d\vec{S}$$

$$d\vec{f} = -\mu g(H - a \cos \theta) a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

iii) Le problème est symétrique par rapport à tout plan passant par l'axe vertical de révolution de l'hémisphère. La force de pression est donc selon \vec{u}_z et

$$df_z = -df \cos \theta = -\mu g a^2 \sin \theta \cos \theta (H - a \cos \theta) d\theta d\varphi$$

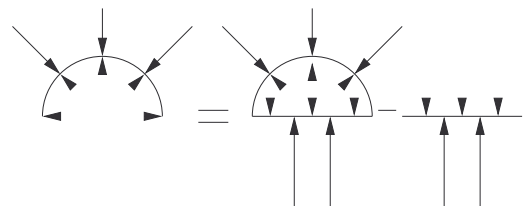
iv) On en déduit la force

$$f = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} df_z$$

$$f = -\mu g a^2 \left[H \frac{\sin^2 \theta}{2} + a \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$f = -\mu \left[\pi a^2 H - \frac{2}{3} \pi a^3 \right] g$$

b) **Superposition.** Le schéma explicatif est le suivant :



Sur le schéma du milieu (dôme avec couvercle, les forces intérieures de pression s'annulent (surface fermée soumise à une pression uniforme) et la résultante des forces extérieures est égale à la poussée d'Archimède, soit $\mu \cdot \frac{2}{3}\pi a^3 g \vec{u}_z$. Sur le schéma de droite (couvercle seul), la résultante des forces de pression est la somme de celles de l'air, soit $-P_0\pi a^2 g \vec{u}_z$ et de celles de l'eau, soit $(P_0 + \mu g H)\pi a^2 g \vec{u}_z$. La résultante cherchée est donc

$$\vec{f} = \mu \frac{2}{3}\pi a^3 g \vec{u}_z - \left[-P_0\pi a^2 g \vec{u}_z + (P_0 + \mu g H)\pi a^2 g \vec{u}_z \right]$$

$$\vec{f} = \mu g \pi a^2 \left[\frac{2a}{3} - H \right] \vec{u}_z$$

On retrouve donc bien le résultat précédent.

9.12

La loi de la statique des fluides pour un gaz parfait s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dz} = -\mu g \\ PM = \mu RT \end{array} \right. \text{ donc } \frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT}P$$

donc $P(z) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$ en supposant g uniforme. On en déduit la masse volumique $\mu(z) = \frac{P_0 M}{RT} e^{-\frac{Mgz}{RT}}$. On peut écrire l'exponentielle sous la forme $e^{-\frac{z}{\delta}}$ avec $\delta = \frac{RT}{Mg} = 8\,300$ m. L'épaisseur de l'atmosphère est donc de l'ordre de $5\delta \approx 40$ km $\ll R_T$. À cette altitude, g a très peu varié. De plus, on peut donc assimiler l'atmosphère à un cylindre de base $S = 4\pi R_T^2$. On intègre $\mu(z)$ entre 0 et l'infini :

$$m_a = S \cdot \int_{z=0}^{+\infty} \mu(z) dz$$

$$m_a = \frac{SP_0 M}{RT} \left[-\frac{RT}{Mg} e^{-\frac{Mgz}{RT}} \right]_0^{+\infty} = \frac{SP_0}{g}$$

Ce résultat est très naturel : avec les différentes approximations faites, P_0 est le rapport entre le poids total $m_a g$ de l'atmosphère et la surface $S = 4\pi R_T^2$ sur laquelle il s'exerce. soit $m_a \approx 5 \cdot 10^{18}$ kg.

9.13

Choisissons l'axe x horizontal, l'axe y vertical et l'axe z perpendiculaire à la figure. La particule de fluide étudiée est de volume $d\tau = dx \times b \times dz$ avec $b = 1$ cm. Ses facettes supérieure et inférieure ont une surface $dS = dx \times dz$. Sur la partie gauche de la figure, la vitesse de la particule centrale est $v_x(y) = 0,150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Celle de la particule voisine supérieure $v_x(y+b) = 0,250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, celle de la particule voisine inférieure

$v_x(y-b) = 0,100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Les dérivées de la composante horizontale de la vitesse par rapport à y sont estimées sur les facettes supérieure et inférieure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial y} \text{ sup} \approx \frac{v_x(y+b) - v_x(y)}{b} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} \text{ inf} \approx \frac{v_x(y-b) - v_x(y)}{b} = -5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \end{array} \right.$$

Par application de la formule du cours, les forces de viscosité correspondantes sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{dF}_{\text{sup}} = \eta \cdot 10 \cdot dx dz \vec{u}_x \\ \vec{dF}_{\text{inf}} = -\eta \cdot 5 \cdot dx dz \vec{u}_x \end{array} \right.$$

L'accélération de la particule de fluide est estimée ainsi. À une distance de $\Delta x = 5,5$ cm sur la même ligne de courant, la vitesse vaut $0,175 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Elle est donc peu différente de sa valeur initiale et on peut considérer que cette distance a été parcourue en une durée proche de $\Delta t = \frac{\Delta x}{0,15} = 0,367$ s. L'accélération de la particule de fluide est donc estimée à

$$a = \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,175 - 0,150}{0,367} = 0,068 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Par application de la loi de la quantité de mouvement à la particule de fluide :

$$\mu d\tau \vec{a} = \vec{dF}_{\text{sup}} + \vec{dF}_{\text{inf}} \text{ donc}$$

$$\mu b dx dz \cdot 0,068 = \eta \cdot 10 \cdot dx dz - \eta \cdot 5 \cdot dx dz$$

$$\text{et } \eta = \frac{0,068 \mu b}{5} = 0,20 \text{ Pl}$$

9.14

- a) La condition aux limites pour la pression est : en $z = a$, la pression est égale à la pression atmosphérique donc $P(a) = P_0$. La particule d'huile en $z = 0$ adhère à la paroi immobile (on dit que l'huile mouille la paroi) donc $v(0) = 0$.
- b) En $z = a$, la particule de fluide a sa facette supérieure au contact de l'air et il n'y a pas d'adhérence entre l'huile et l'air, donc la force de viscosité est nulle sur cette facette : $\vec{dF}_{\text{sup}} = \vec{0}$. En $z = a - dz$, par définition,

$$\vec{dF}_{\text{inf}} = -\eta \frac{dv}{dz} (z = a - dz) \cdot dx dy \vec{u}_x$$

La résultante des forces de pression est dirigée selon \vec{u}_z . Le poids est

$$\mu d\tau \vec{g} = \mu g dx dy dz \sin \alpha \vec{u}_x - \mu g dx dy dz \cos \alpha \vec{u}_z$$

La vitesse de la particule de fluide est selon \vec{u}_x , elle garde donc un z constant (elle reste à la surface), or la vitesse ne dépend que de z et pas du temps, donc la particule a

un mouvement rectiligne uniforme et son accélération est nulle. En projection sur \vec{u}_x , la loi de la quantité de mouvement s'écrit donc

$$-\eta \frac{dv}{dz} (z = a - dz) \cdot dx dy + \mu g dx dy dz \sin \alpha = 0$$

$$\text{soit } \eta \frac{dv}{dz} (z = a - dz) = \mu g dz \sin \alpha$$

En faisant tendre dz tend vers zéro, on obtient bien la condition aux limites donnée dans l'énoncé.

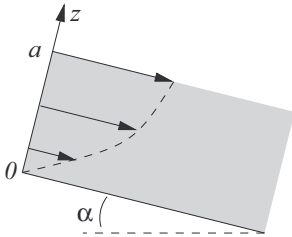
c) En reprenant les formules établies dans le cours, les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} 0 = B \\ 0 = -\frac{\mu g}{\eta} \sin \alpha a + A \\ P_0 = -\mu g \cos \alpha a + C \end{cases} \text{ donc}$$

$$A = \frac{\mu g}{\eta} \sin \alpha a, B = 0 \text{ et } C = P_0 + \mu g a \cos \alpha$$

$$\text{et } \begin{cases} P(z) = P_0 + \mu g \cos \alpha (a - z) \\ v(z) = -\frac{\mu g}{2\eta} \sin \alpha z^2 + \frac{\mu g}{\eta} \sin \alpha a z \end{cases}$$

d) Voici le profil des vitesses :



e) Le débit massique est le flux du vecteur $\mu \vec{v}$ à travers la section :

$$D_m = \int_{y=0}^a \int_{z=0}^a \left(-\frac{\mu^2 g}{2\eta} \sin \alpha z^2 + \frac{\mu^2 g}{\eta} \sin \alpha a z \right) dy dz$$

$$D_m = \frac{\mu^2 g}{2\eta} \sin \alpha [y]_0^a \left[-\frac{z^3}{3} + a z^2 \right]_0^a$$

$$D_m = \frac{\mu^2 g a^4}{3\eta} \sin \alpha$$

9.15

On peut vérifier que le champ de vitesses est cohérent avec un écoulement incompressible homogène car

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v(z, t)}{\partial x} = 0$$

L'équation de Navier-Stokes en projections sur x et z donne le système

$$\begin{cases} \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \mu \frac{\partial v}{\partial t} \\ -\frac{dP}{dz} - \mu g = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\mu}{\eta} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \frac{dP}{dz} = -\mu g \end{cases}$$

La pression suit donc la loi de l'hydrostatique :

$$P(z) = P_0 + \mu g (H - z)$$

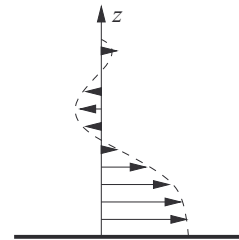
La vitesse vérifie une équation aux dérivées partielles du type équation de diffusion avec une condition aux limites sinusoidale

$$v(z = 0, t) = V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

Le passage au formalisme complexe conduit à la solution

$$v(z, t) = V_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\mu\omega}}$$

La carte de champ de vitesses fait apparaître des oscillations déphasées et d'amplitude décroissant exponentiellement avec z .



9.16

a) Chaque particule se déplace à l'horizontale, donc garde une valeur de z constante ; or la vitesse ne dépend que de z , donc chaque particule a un mouvement rectiligne uniforme et son accélération est nulle. L'accélération L'équation de Navier-Stokes donne le système

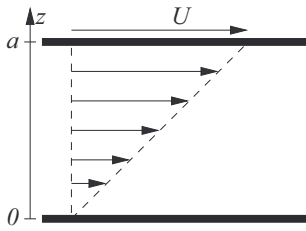
$$\begin{cases} 0 = \eta \frac{d^2 v}{dz^2} \\ 0 = -\frac{dP}{dz} - \mu g \end{cases}$$

$$\text{donc } \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \text{ et } v(z) = Az + B$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} 0 = B \\ U = AL + B \end{cases} \text{ donc } A = \frac{U}{L} \text{ et } B = 0$$

$$\text{donc } v(z) = U \frac{z}{L}$$



b) D'après le cours, la force s'écrit

$$\vec{F} = -\eta \frac{\partial v}{\partial z} S \vec{u}_x = -\frac{\eta U S}{L} \vec{u}_z$$

c) C'est un freinage visqueux car la plaque supérieure subit une force proportionnelle à l'opposé de la vitesse. Sa vitesse se rapproche donc de celle de la plaque inférieure (immobile ici), et le système peut fonctionner en embrayage sans contact direct entre les plaques (on parle de visco-couplage), ce qui limite leur usure.

9.17

a) Le champ des vitesses est tel qu'une particule qui se trouve à la distance r de l'axe se déplace selon \vec{u}_θ donc son rayon ne varie pas. Elle a donc un mouvement circulaire uniforme. En coordonnées cylindriques :

$$O\vec{M} = r \vec{u}_r, \quad \vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta, \quad \vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

$$\text{donc } v(r) = r \dot{\theta} \text{ et } \vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r$$

Cette accélération est l'accélération particulaire.

b) L'équation de Navier-Stokes donne donc

$$\mu \vec{a} = \mu \vec{g} - \text{grad } P + \eta \vec{\Delta} \vec{v} \text{ soit}$$

$$\begin{cases} -\mu \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial P(r,z)}{\partial r} \\ 0 = -\eta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) \\ 0 = -\mu g - \frac{\partial P(r,z)}{\partial z} \end{cases}$$

c) La vitesse ne dépendant que de r , l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(rv)}{dr} \right) = 0$$

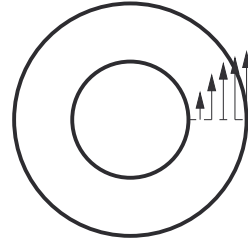
$$\text{donc } \frac{1}{r} \frac{d(rv)}{dr} = A \text{ soit } \frac{d(rv)}{dr} = Ar$$

$$\text{donc } rv = \frac{Ar^2}{2} + B \text{ soit } v(r) = \frac{A}{2}r + \frac{B}{r}$$

Les conditions aux limites sont $v(R_1) = 0$ et $v(R_2) = R_2\Omega$ donc

$$\begin{cases} \frac{A}{2} = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega \\ B = -\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega \end{cases}$$

$$\text{donc } v(r) = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r \Omega \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right)$$



9.18

a) L'écoulement est incompressible homogène donc $\text{div } \vec{v} = 0$ soit $\frac{\partial v(r,z)}{\partial z} = 0$ ce qui prouve que v ne dépend pas de z . Chaque particule de fluide se déplace selon \vec{u}_z donc à r constant, donc sa vitesse reste constante, son mouvement est rectiligne uniforme parallèlement à l'axe de la conduite et son accélération est nulle.

b) L'équation de Navier-Stokes donne le système

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \eta \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \end{cases}$$

La première égalité prouve que P ne dépend que de z . La seconde est une égalité entre un membre qui ne dépend que de r et l'autre qui ne dépend que de z entraîne qu'ils sont tous deux égaux à une même constante K :

$$\begin{cases} \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = K \\ \frac{dP}{dz} = K \end{cases}$$

c) On en déduit que $P(z) = Kz + A$. Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} P_1 = A \\ P_2 = KL + A \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} A = P_1 \\ K = -\frac{P_1 - P_2}{L} \end{cases}$$

d) L'équation en $v(r)$ s'intègre en deux temps :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{K}{\eta} r$$

$$\text{donc } r \frac{dv}{dr} = \frac{K}{2\eta} r^2 + C$$

$$\text{soit } \frac{dv}{dr} = \frac{K}{2\eta} r + \frac{B}{r}$$

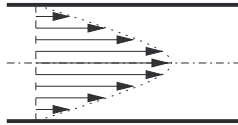
$$\text{donc } v(r) = \frac{K}{4\eta} r^2 + B \ln r + C$$

Au centre de la conduite en $r = 0$, le terme $B \ln r$ diverge, or une vitesse ne peut pas être infinie, donc $B = 0$. En $r = R$, la

condition aux limites d'adhérence du fluide visqueux à la paroi intérieure de la conduite donne $v(R) = 0$ soit

$$\frac{K}{4\eta}R^2 + C = 0 \text{ donc } C = -\frac{K}{4\eta}R^2$$

On en déduit $v(r) = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{4\eta L} \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right]$. On remarque que $v_0 = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{4\eta L}$ est la vitesse au centre de la canalisation. Le champ des vitesses a un profil parabolique :



e) Le débit volumique est

$$Q = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} v(r) r dr d\theta$$

$$Q = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{4\eta L} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi}$$

soit $Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (P_1 - P_2)$. C'est bien la loi d'Ohm hydraulique :

$$P_1 - P_2 = R_h Q \text{ avec } R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

9.19

a) La pression au fond du récipient est donnée par la loi de l'hydrostatique, c'est aussi la pression à l'extrémité gauche de la conduite $P_0 + \mu g h$. La pression à l'extrémité droite est P_0 . La loi d'Ohm hydraulique donne le débit volumique sortant :

$$Q = \frac{\mu g h}{R_h} \text{ avec } R_h = \frac{8\eta L}{\pi a^4}$$

Pendant dt , le volume sortant $Q dt$ correspond à la diminution du niveau de liquide dans le récipient, soit

$$\pi R^2 dh = -Q dt \text{ donc } \frac{dh}{dt} = -\frac{\mu g}{\pi R^2 R_h} h$$

$$\text{soit } \frac{dh}{dt} = -\frac{\mu g a^4}{8\eta L R^2} h$$

Cette équation du premier ordre s'intègre grâce à la condition initiale $h(t=0) = h_1$:

$$h(t) = h_1 e^{-\frac{\mu g a^4 t}{8\eta L R^2}}$$

À $t = \tau$, $h(\tau) = h_2$, donc

$$h_2 = h_1 e^{-\frac{\mu g a^4 \tau}{8\eta L R^2}} \text{ soit } \ln \frac{h_2}{h_1} = -\frac{\mu g a^4 \tau}{8\eta L R^2}$$

$$\text{donc } \eta = \frac{\mu g a^4 \tau}{8\eta L \ln \frac{h_1}{h_2}}$$

b) Pour l'eau, $\mu = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et l'application numérique donne $\eta = 7,9 \cdot 10^{-4} \text{ Pl}$.

9.20

Lorsque l'air s'engouffre sous une automobile qui roule sur l'autoroute, la vitesse caractéristique est de l'ordre de celle de la voiture (par mouvement relatif) $V \approx 36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, la largeur caractéristique est mesurée entre la chaussée et le châssis soit $L \approx 25 \text{ cm}$; pour l'air $\mu \approx 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pl}$ donc $Re = \frac{\mu U d}{\eta} = 600\,000$ et l'écoulement est turbulent.

9.21

a) Le débit est dans les deux cas

$$Q = U \cdot \pi \frac{d^2}{4} = 7,07 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Le nombre de Reynolds $Re = \frac{U d}{\eta/\mu}$ vaut respectivement

$$\begin{cases} Re(10^\circ\text{C}) = 1034 < 2000 \\ Re(50^\circ\text{C}) = 2727 > 2000 \end{cases}$$

L'écoulement est donc laminaire à 10°C et turbulent à 50°C .

b) Dans certaines zones, on dit que le régime est **torrentiel** (c'est le cas dans les zones où la pente est forte), la hauteur d'eau faible, de l'ordre du décimètre, la largeur du lit est faible, de l'ordre du mètre et la vitesse importante :

$$U = \frac{Q}{0,10 \times 1,0} = 0,075 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La largeur caractéristique d'écoulement est la hauteur d'eau et le nombre de Reynolds vaut

$$Re_{\text{torrent}} = \frac{1000 \cdot 0,075 \cdot 0,10}{10^{-3}} = 7500$$

donc l'écoulement est turbulent. Dans d'autres zones, on dit que le régime est **fluvial** (c'est le cas avant un obstacle en travers du ruisseau), la hauteur d'eau est plus grande, de l'ordre du mètre, la largeur aussi, de l'ordre de 5 mètres, et la vitesse plus faible :

$$U = \frac{Q}{1,0 \times 5,0} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le nombre de Reynolds vaut

$$Re_{\text{torrent}} = \frac{1000 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,0}{10^{-3}} = 1500$$

et l'écoulement est laminaire.

9.22

a) $Re \approx \frac{1260 \cdot 0,082 \cdot 0,006}{1} = 0,62$.

b) La vitesse limite est aussi la vitesse maximale atteinte par la bille après la phase d'accélération pendant le régime transitoire, le nombre de Reynolds reste inférieur à 1, ce qui correspond au domaine de validité de la loi de Stokes. La loi de la quantité de mouvement appliquée, dans le référentiel galiléen du laboratoire, à la bille soumise à son poids, à la poussée d'Archimède et à la force de traînée, s'écrit, en projection sur l'axe (O, z) vertical dirigé vers le bas :

$$m \frac{dV}{dt} = mg - \mu \frac{4}{3} \pi R^3 g - 6\pi\eta RV$$

En régime permanent, la vitesse est constante, égale à V_{lim} donc

$$0 = \left(m - \mu \frac{4}{3} \pi R^3 \right) g - 6\pi\eta R V_{\text{lim}}$$

$$\text{donc } \eta = \frac{\left(m - \mu \frac{4}{3} \pi R^3 \right) g}{6\pi R V_{\text{lim}}} = 1,6 \text{ Pl}$$

c) Posons $m' = \mu \frac{4}{3} \pi R^3 = 0,14 \text{ g}$ et $\tau = \frac{m}{6\pi\eta R} = 9,9 \text{ ms}$. L'équation différentielle vérifiée par V s'écrit

$$\frac{dV}{dt} = \frac{m - m'}{m} g - \frac{1}{\tau} V$$

Cette équation différentielle se résout en tenant compte de la condition initiale $V(0) = 0$ en

$$V(t) = \frac{m - m'}{m} g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\text{soit } V(t) = V_{\text{lim}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

L'ordre de grandeur de la durée du régime permanent est $5\tau \approx 50 \text{ ms}$.

9.23

a) $Re = \frac{1000 \cdot 0,74 \cdot 0,006}{10^{-3}} = 4440$. On lit sur le graphe $C_x = 0,5$.

b) La vitesse limite est aussi la vitesse maximale atteinte par la bille après la phase d'accélération pendant le régime transitoire, le nombre de Reynolds reste inférieur donc entre 1000 et 4440, ce qui correspond au domaine de stabilité du C_x à 0,5. La force de traînée vaut donc

$$\vec{F} = C_x \cdot \frac{1}{2} \mu \pi R^2 V^2 \vec{u}_z$$

$$\vec{F} = \beta V^2 \vec{u}_z \text{ avec } \beta = 7,1 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2$$

c) La loi de la quantité de mouvement appliquée, dans le référentiel galiléen du laboratoire, à la bille soumise à son poids, à la poussée d'Archimède et à la force de traînée, s'écrit, en projection sur l'axe (O, z) vertical dirigé vers le haut :

$$-m \frac{dV}{dt} = -mg + \mu \frac{4}{3} \pi R^3 g + \beta V^2$$

$$\text{soit } m \frac{dV}{dt} = (m - m')g - \beta V^2$$

avec $m' = \mu \frac{4}{3} \pi R^3 = 0,14 \text{ g}$. En régime permanent :

$$0 = (m - m')g - \beta V_{\text{lim}}^2$$

donc l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\beta}{m} \left(V_{\text{lim}}^2 - V^2 \right)$$

C'est une équation à variables séparables qui s'écrit

$$\frac{dV}{V_{\text{lim}}^2 - V^2} = \frac{\beta}{m} dt$$

En posant $u = \frac{V}{V_{\text{lim}}}$, cette équation s'écrit

$$\frac{du}{1 - u^2} = \frac{\beta V_{\text{lim}}}{m} dt$$

$$\text{soit } \frac{du}{1 - u^2} = \frac{dt}{\tau} \text{ avec } \tau = \frac{m}{\beta V_{\text{lim}}}$$

En intégrant terme à terme entre $(t = 0, u = 0)$ et t , on en déduit

$$\text{argth}(u) = \frac{t}{\tau} \text{ donc } V(t) = V_{\text{lim}} \text{th} \frac{t}{\tau}$$

9.24

a) i) L'équation différentielle vérifiée par z s'écrit, en négligeant la poussée d'Archimède devant le poids $mg = 980 \text{ N}$ du parachutiste :

$$100\ddot{z} = -980 + 0,384e^{-\frac{z}{9000}} \dot{z}^2$$

Si le parachutiste atteignait une vitesse limite V_{lim} , alors son accélération deviendrait constamment nulle, donc

$$V_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{980}{0,384} e^{\frac{z}{9000}}}$$

Or cette vitesse est non nulle, donc au cours du déplacement, z varie, donc V_{lim} aussi, ce qui est absurde car l'accélération ne serait pas nulle.

ii) Lorsque la vitesse passe par une valeur maximale, l'accélération s'annule donc

$$980 = 0,384e^{-\frac{z_1}{9000}} V_{\text{max}}^2 \text{ donc}$$

$$z_1 = 9000 \ln \frac{0,384}{980 \cdot 301^2} = 32 \text{ km}$$

- iii) L'équation différentielle est non linéaire avec un terme \dot{z}^2 multiplié par une exponentielle dépendant de z . Il semble donc peu probable qu'on puisse en donner une solution exacte analytique. De plus, l'expression de la masse volumique en fonction de l'altitude correspond à un modèle d'atmosphère isotherme, et ce modèle est sans doute très approximatif.
- b) i) La loi de la quantité de mouvement projetée sur un axe (O, z) dirigé vers le bas s'écrit

$$m \frac{dV}{dt} = mg - C_x(\mathcal{R}e) \cdot \frac{1}{2} \mu \pi R^2 V^2$$

La vitesse limite, si elle existe, est celle pour laquelle V devient constante donc elle est définie par

$$C_x(\mathcal{R}e) = \frac{2mg}{\mu \pi R^2 V^2}$$

Comme on n'a pas d'expression analytique du terme de gauche, mais seulement un graphe, on exprime celui de droite en fonction de $\mathcal{R}e$ en utilisant $V = \frac{\eta \mathcal{R}e}{2\mu R}$:

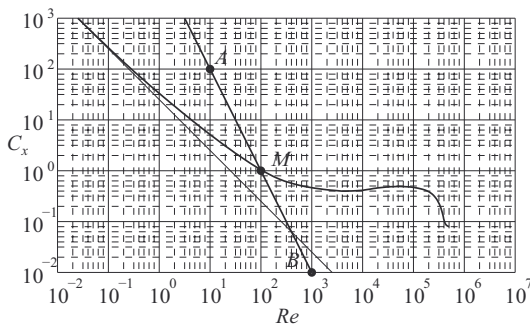
$$C_x(\mathcal{R}e) = \frac{\alpha}{\mathcal{R}e^2} \text{ avec } \alpha = \frac{8\mu mg}{\pi \eta^2}$$

Pour le tracer sur le graphe en échelle log-log, on remarque que

$$\log \frac{\alpha}{\mathcal{R}e^2} = \log \alpha - 2 \log \mathcal{R}e$$

qui est l'équation d'une droite de pente de -2 décade par décade. Or la pente de $C_x(\mathcal{R}e)$ est toujours supérieure à 1 décade par décade (celle de la partie linéaire du graphe pour $\mathcal{R}e \leq 1$). Les graphes se croisent donc nécessairement une fois et une seule, on lit en abscisse la valeur de $\mathcal{R}e$ et on en déduit celle de V_{lim} . Avec les valeurs numériques fournies, $\alpha = 10 \cdot 10^3$ donc la droite passe par

$$A \left| \begin{matrix} 10^1 \\ 10^2 \end{matrix} \right. \text{ et } B \left| \begin{matrix} 10^3 \\ 10^{-2} \end{matrix} \right.$$



Au point d'intersection M, on lit $\mathcal{R}e = 1,0 \cdot 10^2$ et on en déduit

$$V_{\text{lim}} = \frac{\eta \mathcal{R}e}{2\mu R} = 3,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Montrons maintenant que la vitesse tend vers cette vitesse limite. Si $V < V_{\text{lim}}$, $\mathcal{R}e < 1,0 \cdot 10^2$ donc

$$C_x(\mathcal{R}e) < \frac{\alpha}{\mathcal{R}e^2}$$

La force de traînée est donc inférieure au poids et V augmente. De même si $V > V_{\text{lim}}$, V diminue. Dans tous les cas, V tend à se rapprocher de V_{lim} .

- ii) À $t = 0$, $V = 0 < V_{\text{lim}}$. Supposons qu'à une date t_2 $V = V_{\text{max}} > V_{\text{lim}}$. V est continue donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, V croise nécessairement V_{lim} à une date $t_1 < t_2$. Mais alors à cette date l'accélération est nulle donc on a atteint la vitesse limite, et V ne peut plus augmenter, et ne pourra donc pas atteindre $V_{\text{max}} > V_{\text{lim}}$. Il est donc impossible que la vitesse atteigne une vitesse maximale strictement supérieure à V_{lim} .
- c) i) La sphère est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède et à la force de traînée. Le nombre de Reynolds s'exprime en fonction de la vitesse $V(t) = -\dot{z}$. La force de traînée vaut donc, après simplifications

$$\vec{F} = 6\pi\eta R \dot{z} \left(1 - \frac{3\mu R}{8\eta} \dot{z} \right) \vec{u}_z$$

On en déduit l'équation différentielle par projection de la loi de la quantité de mouvement sur l'axe vertical :

$$m\ddot{z} = -mg + \mu \frac{4}{3} \pi R^3 g + 6\pi\eta R \dot{z} \left(1 - \frac{3\mu R}{8\eta} \dot{z} \right)$$

En posant $V = -\dot{z}$, on constate que cette équation différentielle s'écrit sous la forme d'une équation à variables séparables :

$$F(V)dV = dt$$

où $F(V)$ est une fraction rationnelle. En effectuant la décomposition en éléments simples de F et en intégrant terme à terme, on en déduit $V(t)$ puis $z(t)$ en primitivant.

- ii) À la vitesse limite de chute, l'accélération est nulle. On doit donc résoudre l'équation du second degré

$$-mg + \mu \frac{4}{3} \pi R^3 g - 6\pi\eta R V \left(1 + \frac{3\mu R}{8\eta} V \right) = 0$$

L'hypothèse $m > \mu \frac{4}{3} \pi R^3$ est naturelle, sinon la bille flotte. L'équation du second degré est donc du type

$$aV^2 + bV + c = 0$$

avec $a < 0$, $b < 0$ et $c > 0$. Son discriminant est donc strictement positif, la produit $\frac{c}{a}$ de ses racines est négatif, elle admet donc une unique solution positive acceptable (on retrouve le résultat de la question (b)).

9.25

Dans le référentiel de l'air, tout se passe comme si le mât se déplaçait à $V = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le vent immobile. Le nombre de Reynolds est

$$\mathcal{R}e = \frac{1,2 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 0,10}{2 \cdot 10^{-5}} = 2,0 \cdot 10^5$$

On lit sur le graphe $C_x = 0,4$ pour une sphère, donc $0,8$ pour le cylindre. Le maître-couple de la sphère est πR^2 car la projection d'une sphère sur un plan est un disque. La projection du mât cylindrique sur un plan vertical perpendiculaire au vent est un rectangle de surface $H \cdot 2R = 4,0 \text{ m}^2$. La force de traînée est donc $\vec{F} = F \vec{u}_x$ où \vec{u}_x est le vecteur unitaire dans la direction et le sens du vent et

$$F = 0,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 4 \cdot 17^2 = 550 \text{ N}$$

9.26

a) Par définition de la masse volumique :

$$\mu = \frac{m}{V} = \frac{nV \cdot m_a}{V} = n \cdot m_a$$

$$\text{donc } n = \frac{\mu}{m_a}$$

Les atomes qui entrent en collision pendant dt avec la face avant du cylindre sont ceux situés à une distance maximale $V dt$ de cette face, ils sont donc situés dans un cylindre de volume $\pi R^2 V dt$ donc $dN = n \pi R^2 V dt$.

b) Dans le référentiel du cylindre, la quantité de mouvement finale est $m_a V \vec{u}_x$, la quantité de mouvement initiale $-m_a V \vec{u}_x$ donc

$$\delta \vec{p} = +m_a V \vec{u}_x - (-m_a V \vec{u}_x) = 2m_a V \vec{u}_x$$

$$\text{donc } d\vec{p} = dN \cdot \delta \vec{p} = n \pi R^2 V dt \cdot 2m_a V \vec{u}_x$$

c) La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{f}_{\text{cyl} \rightarrow \text{gaz}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 2n m_a \pi R^2 V^2 \vec{u}_x \text{ donc}$$

$$\vec{f}_{\text{gaz} \rightarrow \text{cyl}} = -2\mu \pi R^2 V^2 \vec{u}_x$$

Par identification avec la formule du cours, $C_x = 4$, valeur évidemment impossible à atteindre en réalité (le gaz ne peut laisser vide le sillage du cylindre).

CHAPITRE 10

Fluides parfaits

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Couche limite.
- ◇ Tension superficielle.
- ◇ Fluide parfait.
- ◇ Équation d'Euler.
- ◇ Relation de Bernoulli.
- ◇ Effet Venturi.
- ◇ Formule de Torricelli.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Modéliser l'écoulement incompressible autour d'un obstacle.
- ◇ Résoudre un problème de mécanique des fluides parfaits.
- ◇ Exprimer et exploiter la relation de Bernoulli.
- ◇ Identifier et exploiter l'effet Venturi.

Les méthodes à retenir

Modéliser l'écoulement incompressible autour d'un obstacle.

L'écoulement **externe** d'un fluide autour d'un obstacle est en général décrit dans le référentiel de l'obstacle, un pilier de pont fixe par exemple, ou une balle se déplaçant dans un fluide immobile. On distingue alors trois zones.

- La **zone d'adhérence** est celle où le fluide adhère à la paroi de l'obstacle. Cette adhérence est distincte de la viscosité (qui caractérise les forces de frottement entre deux particules de fluide voisines) et est caractérisée par la **tension superficielle** γ_{FS} entre le fluide et le support, c'est-à-dire l'énergie surfacique de liaison

$$\gamma_{FS} = \frac{d\mathcal{E}_{FS}}{dS} \text{ en } \text{J} \cdot \text{m}^{-2}$$

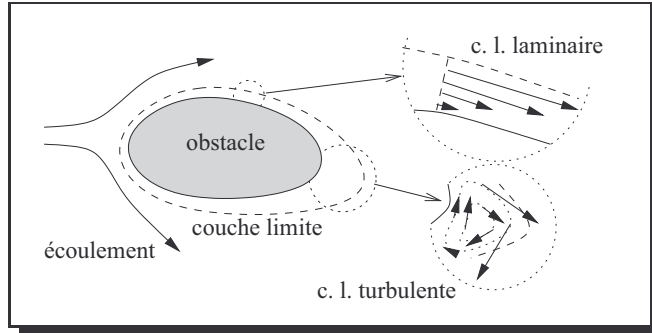
La définition même de la tension superficielle nous encourage à recommander des raisonnements énergétiques pour les exercices associés. En particulier, une situation d'équilibre stable dans un problème à un degré de liberté correspond à une énergie minimale.

- La **couche limite** se situe à l'interface entre la zone d'adhérence et la zone homogène, sa meilleure description tient en cette expression : « la couche limite est la zone où les fluctuations du vecteur vitesse sont importantes ».
- La zone homogène est celle où les variations spatiales de vitesse et de masse volumique sont très faibles.

Exemple :

Au voisinage d'un pilier de pont, le champ de vitesses est très complexe.

- On distingue, sur la paroi latérale du pont, une couche limite laminaire, où les vecteurs vitesses sont sensiblement parallèles, et où leurs normes varient fortement entre la zone d'adhérence où elle est nulle et la zone homogène. Les forces de viscosité sont importantes, le transfert de quantité de mouvement par viscosité prédomine.
- Sur la face arrière du pont, en aval, on distingue une couche limite turbulente où les fluctuations du vecteur vitesse sont importantes en norme et en direction. Des tourbillons caractéristiques révèlent le transfert convectif de quantité de mouvement.



↔ Exercices 10.1, 10.2, 10.3, 10.4, 10.5, 10.6, 10.7.

Résoudre un problème de mécanique des fluides parfaits.

Pour un fluide de viscosité nulle, l'équation de Navier-Stokes se simplifie et devient l'équation d'Euler

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P$$

(on ajoute le cas échéant les autres forces volumiques au terme de droite)

$$\text{soit } \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P$$

$$\text{ou } \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\vec{v}^2}{2} = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P$$

Malgré le fait que $\mathcal{R}e \rightarrow \infty$ pour un fluide parfait, on admet l'existence d'écoulements laminaires, à condition de rester à l'extérieur de la couche limite, où les fluctuations de vitesse sont importantes. Les conditions aux limites s'expriment alors ainsi : le vecteur vitesse pour l'écoulement parfait est **tangent** à la surface extérieure de la couche limite.

Exemple :

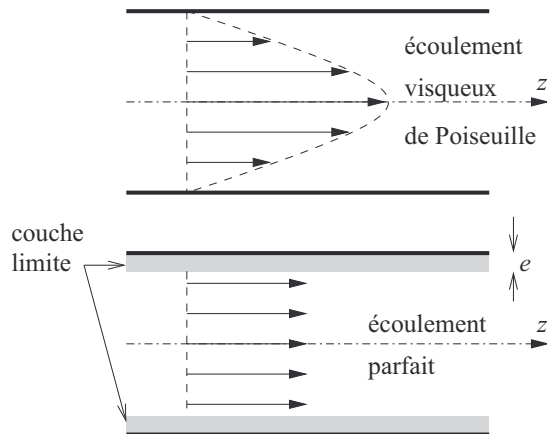
Dans une canalisation cylindrique d'axe (O, z) et de rayon R , la couche limite a une forme annulaire d'épaisseur e , qui tapisse l'intérieur de la canalisation. À la surface de cette couche limite, le champ des vitesses est tangent donc

$$\vec{v}(r = R_e, \theta, z, t) = v(R_e, \theta, z, t) \vec{u}_z$$

Contrairement au cas de l'écoulement d'un fluide visqueux (écoulement de Poiseuille, voir exercice 9.18), où la vitesse est nulle sur la paroi, on peut faire ici l'hypothèse d'un champ des vitesses homogène sur toute section droite de la canalisation :

$$\vec{v}(r, \theta, z, t) = v(z, t) \vec{u}_z$$

et simplifier ainsi considérablement l'équation d'Euler.



Si $e \ll R$, le débit massique à travers la section droite de la canalisation vaut alors

$$D_m(z, t) = \mu(z, t) v(z, t) \cdot \pi R^2$$

↪ Exercices 10.8, 10.9, 10.10, 10.11.

Exprimer et exploiter la relation de Bernoulli.

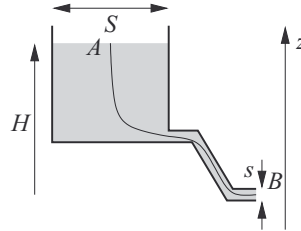
Pour un écoulement incompressible, stationnaire et homogène d'un fluide parfait, la quantité de Bernoulli $P + \mu g z + \frac{1}{2} \mu V^2$, homogène à une énergie volumique, est une constante dans un tube de courant. La méthode d'application de cette loi est stéréotypée : on identifie deux points A et B dans un même tube, on identifie pour chacun les trois paramètres pression P, altitude z et vitesse V et on écrit la **relation de Bernoulli**

$$P_A + \mu g z_A + \frac{1}{2} \mu V_A^2 = P_B + \mu g z_B + \frac{1}{2} \mu V_B^2$$

Il est fréquent, à l'oral du concours, que les hypothèses d'application de la loi de Bernoulli ne soient pas parfaitement vérifiées, et que ce soit pourtant bien cette loi qui permette de répondre à la question ; on attend dans ce cas que le candidat prenne l'initiative de justifier les approximations effectuées.

Exemple :

L'eau s'écoule par un tuyau de section s situé à la base d'un réservoir cylindrique de section S . La différence d'altitude entre la surface de l'eau (z_A) dans le réservoir et l'orifice de sortie de l'eau (z_B) est H .



Considérons la ligne de courant entre le point A à la surface dans le réservoir et B à la sortie du tuyau. Plusieurs hypothèses et approximations doivent être faites. • L'eau est quasiment incompressible. • On suppose que la pression dans l'air est la même entre A et B, ce qui revient à négliger la variation de pression $\mu_{\text{air}}gH$ devant les autres quantités. • La viscosité de l'eau est de l'ordre de 10^{-3} Pl . Si la section $s = \pi r^2$ du tuyau est assez grande et sa longueur assez faible, sa résistance hydraulique $R_h = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$ est très faible et la chute de pression $\delta P = R_h Q$ négligeable, on peut donc considérer l'écoulement parfait. • $S \gg s$ donc la vitesse du fluide en A est négligeable devant celle en B et on peut considérer qu'on est en régime permanent. La relation de Bernoulli s'écrit alors

$$P_0 + \mu gH + 0 = P_0 + 0 + \frac{1}{2} \mu V_B^2 \text{ donc } V_B = \sqrt{2gH}$$

C'est la **formule de Torricelli**.

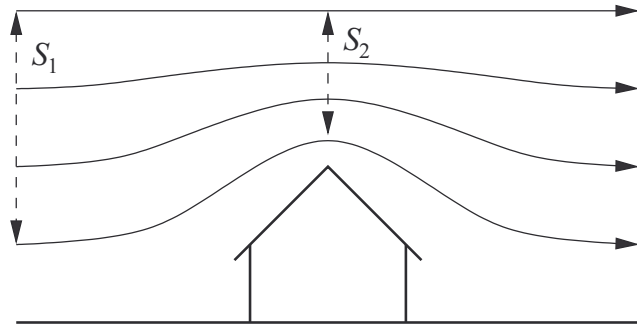
↪ Exercices 10.12, 10.13, 10.14, 10.15.

Identifier et exploiter l'effet Venturi.

L'**effet Venturi** est une conséquence de la loi de Bernoulli. Pour un écoulement incompressible, stationnaire et homogène d'un fluide parfait, lorsque les lignes de courant quasiment horizontales se resserrent, la section du tube de courant diminue, donc la vitesse du fluide augmente donc la pression diminue. Cet effet peut être mis en évidence par une lecture directe de cartes de courant.

Exemple :

Voici l'allure des lignes de courant autour d'un bâtiment soumis à un vent violent.



Les lignes de courant se resserrent nettement au dessus du toit. La section S_2 est plus faible que S_1 . Si on suppose que l'écoulement de l'air est incompressible, la conservation du débit volumique Q dans le tube de courant défini sur la largeur du bâtiment perpendiculaire au plan de la figure donne la relation

$$Q = S_1 V_1 = S_2 V_2$$

donc $V_2 > V_1$. En négligeant les variations d'énergie potentielle devant celles d'énergie cinétique volumique, la relation de Bernoulli s'écrit

$$P_1 + \frac{1}{2} \mu V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \mu V_2^2 \text{ donc}$$

$$P_2 = P_1 - \frac{1}{2} \mu V_1^2 \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] < P_1$$

Cette dépression au dessus du toit peut provoquer son soulèvement. L'étude quantitative des phénomènes expliqués qualitativement par l'effet Venturi nécessite un modèle mathématique de champ de vitesses. Par application de la relation de Bernoulli, on en déduit le champ des pressions. Par calcul intégral des forces de pression, on en déduit leur résultante.

↪ Exercices 10.16, 10.17, 10.18, 10.19.

Énoncés des exercices

10.1

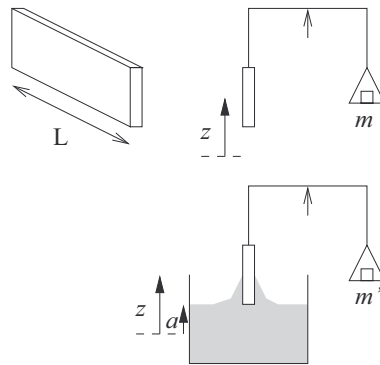
Coalescence de deux gouttes

Deux gouttes de liquide, sphériques, de même rayon R , sont formées dans un gaz. On note γ la tension superficielle entre le liquide et le gaz. Les deux gouttes se rapprochent et se touchent. Les deux gouttes ont-elles tendance à fusionner en une seule goutte sphérique ?

10.2

Mesure d'une tension superficielle par la méthode de la lame immergée

Une lame de rasoir de longueur L et d'épaisseur $e \ll L$ peut avoir sa base immergée dans un fluide. On note γ_{FS} la tension superficielle entre le liquide et la lame. On supposera la tension superficielle entre le fluide et l'air et celle entre la lame et l'air négligeables devant γ_{FS} .



On mesure d'abord le poids de la lame dans l'air grâce à une balance équilibrée avec la masse m . On immerge ensuite partiellement la lame et on obtient l'équilibre lorsqu'on place une masse $m' = m + \delta m$ sur le plateau de la balance.

- L'énergie de la lame sèche est assimilée à son énergie potentielle de pesanteur E_{pp} . Donner l'expression de cette énergie en fonction de z et en déduire la force que subit la lame.
- L'énergie de la lame mouillée à sa base est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} et de l'énergie de tension superficielle E_{ps} . Donner l'expression de ces énergies en fonction de z et a et en déduire la force que subit la lame.
- En déduire l'expression de γ_{FS} en fonction de δm .

10.3

Loi de Laplace

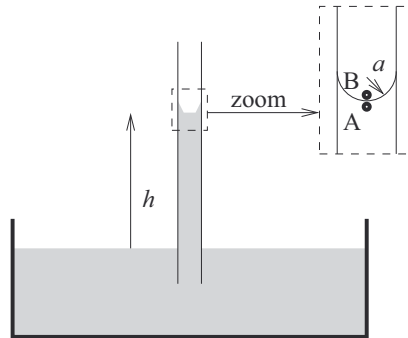
Une bulle d'air sphérique de rayon R est en équilibre dans de l'eau. On note γ la tension superficielle entre l'air et l'eau. On note P_i la pression interne dans l'air et P_e la pression extérieure dans l'eau au voisinage de l'interface. Lorsque le rayon de la goutte augmente de dR , on identifie l'augmentation de l'énergie de tension superficielle au travail des forces de pression. En déduire la **loi de Laplace des tensions superficielles** donnant la différence de pressions $\delta P = P_i - P_e$ en fonction du rayon R et de γ .



10.4

Loi de Jurin

Dans un fin capillaire, de rayon intérieur a , on observe la montée d'un liquide jusqu'à l'altitude h à la base d'un ménisque hémisphérique.



A est un point dans le liquide juste sous le ménisque, B un point dans l'air juste au dessus du ménisque. On admet la loi de Laplace (voir exercice 10.3) :

$$P(B) - P(A) = \frac{2\gamma}{a}$$

La pression P_0 de l'air est uniforme. On note μ la masse volumique du liquide et g l'accélération de la pesanteur. Exprimer la **loi de Jurin** donnant h en fonction de γ , μ , g et a .

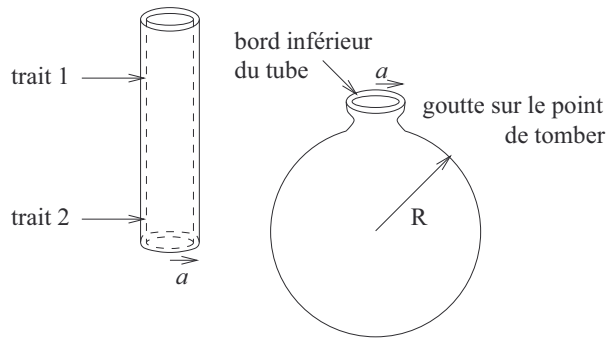


10.5

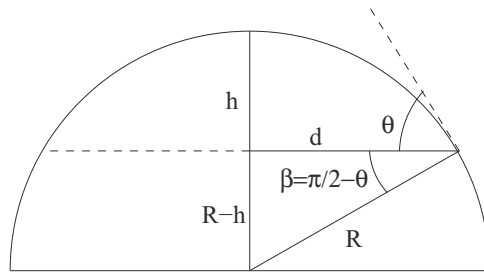
Force linéique et stalagmomètre

- a) Justifier qu'une tension superficielle γ est homogène à une force linéique. On admet dans cet exercice que la force de contact entre un fluide et une tige solide de longueur ℓ à la surface de ce liquide est $\gamma\ell$.
- b) Un **stalagmomètre** est formé d'un tube en verre vertical, de rayon extérieur a , muni de deux traits, aux altitudes z_1 et z_2 . On l'emplit d'un liquide de masse volumique μ_0 et de tension superficielle γ_0 au contact du verre connues. On laisse le liquide s'écouler très lentement et on compte le nombre de gouttes N_0 qui sortent à la base du tube lorsque le niveau du liquide évolue entre les deux traits. On remplace ensuite le liquide d'étalonnage par un liquide de masse volumique μ connue mais de tension superficielle γ inconnue. On laisse le liquide s'écouler très lentement et on compte le nombre de gouttes N qui sortent à la base du tube lorsque le niveau du liquide évolue entre les deux traits. En écrivant qu'au moment de tomber, la goutte est en quasi-équilibre entre la force d'adhésion à la base du tube et son poids, justifier la formule

$$\gamma = \gamma_0 \frac{\mu N_0}{\mu_0 N}$$


10.6
Angle de mouillage

Une goutte d'eau étalée sur un support plan a la forme d'une calotte sphérique de rayon R et de hauteur h . On note γ_{SL} la tension superficielle entre le support et l'eau, γ_{LG} la tension superficielle entre l'eau et l'air et γ_{SG} la tension superficielle entre le support et l'air. L'**angle de mouillage** θ est l'angle entre le plan et la tangente à l'arc de cercle méridien de la goutte. Le rayon du disque de contact entre la goutte et le support est noté d . La surface totale du support, assimilée arbitrairement à un disque, est notée πR_0^2 . Voici les données géométriques utiles pour la calotte sphérique, avec les notations du schéma suivant.



La surface de la calotte est $S = 2\pi R h$, son volume $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$.

- a) On néglige l'énergie potentielle de pesanteur devant les énergies de tension superficielle. Établir l'expression de leur somme

$$\mathcal{E}(h) = \gamma_{SL} \pi \left(\frac{2V}{\pi h} - \frac{h^2}{3} \right) + \gamma_{LG} \left(\frac{2\pi h^2}{3} + \frac{2V}{h} \right) + \gamma_{SG} \left(\pi R_0^2 - \pi \left(\frac{2V}{\pi h} - \frac{h^2}{3} \right) \right)$$

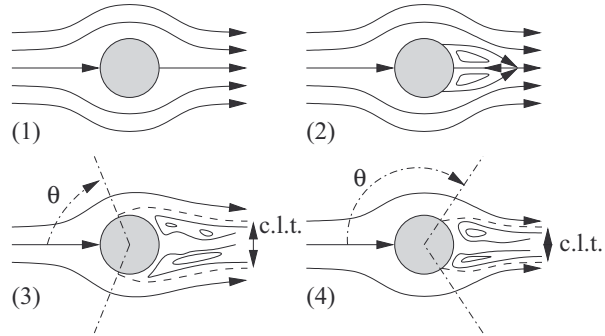
- b) Le problème est à un degré de liberté. En déduire la formule de Young-Dupré

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LG}}$$

10.7

Crise de traînée (analyse documentaire)

Le document suivant présente l'allure des lignes de courant tracées dans le référentiel d'un objet sphérique de rayon R , en déplacement à la vitesse $\vec{V} = -V\vec{u}_x$ dans un fluide immobile de masse volumique μ et de viscosité η . V augmente de (1) à (4).



- À quel régime correspond la figure 1 ? Préciser la valeur maximale de V correspondant à ce régime en fonction des paramètres. Rappeler dans ce cas l'expression de la force de traînée.
- Sur la figure 2, comment peut-on qualifier la couche limite ?
- Si la figure 1 correspond à $Re = 0,5$ et la figure 2 à $Re = 5$, la force de traînée augmente-t-elle d'un facteur 10, inférieure à 10 ou supérieure à 10 (on utilisera le graphe du cours).
- La figure 3 correspond à $Re = 2 \cdot 10^5$ et la 4 à $Re = 3 \cdot 10^5$. L'angle θ auquel la couche limite turbulente (c.l.t., ou sillage turbulent) prend naissance augmente brusquement. Expliquer, par un argument énergétique qualitatif, pourquoi le C_x baisse brusquement. *Cette chute brutale est appelée crise de traînée.*
- Si on déforme la surface de la sphère, lisse dans toute l'étude du cours, en y creusant des aspérités, on constate une baisse significative de la valeur du nombre de Reynolds auquel apparaît la crise de traînée. Expliquer l'intérêt de ce fait pour les balles de golf.

10.8

Relation pression-vitesse dans une canalisation

Un fluide parfait et compressible circule dans une canalisation horizontale d'axe (O, z) , cylindrique de section S . On se place en régime stationnaire et on cherche les champs sous la forme

$$\vec{v} = v(z)\vec{u}_z, \mu(z) \text{ et } P(z)$$

Le débit massique à travers toute section droite de la canalisation est noté D_m .

- Établir la relation entre $\mu(z)$ et $v(z)$ traduisant la conservation du débit.
- Établir la relation entre $P(z)$ et $v(z)$ en notant $P(0) = P_0$ et $v(0) = v_0$.
- Si le fluide est un gaz parfait de masse molaire M , en évolution isotherme à la température T , en déduire l'expression de $v(z)$.

10.9
Gaz parfait dans une cheminée

Un gaz parfait de masse molaire M et de rapport de capacités thermiques γ circule de bas en haut d'une cheminée cylindrique de section S verticale d'axe (O, z) dirigé vers le haut, avec un débit massique D_m constant et indépendant de z . On cherche les champs eulériens sous la forme

$$\vec{v} = v(z)\vec{u}_z, \mu(z) \text{ et } P(z)$$

On note P_0 la pression, T_0 la température et v_0 la vitesse du gaz en $z = 0$.

- Établir la relation directe entre $v(z)$ et z dans l'hypothèse d'une évolution isotherme du gaz dans la cheminée.
- Établir la relation directe entre $v(z)$ et z dans le cas d'une évolution isentropique du gaz dans la cheminée.

10.10
Écoulement à débit variable

Un fluide compressible circule dans une canalisation cylindrique horizontale, d'axe (O, z) , de section S et de longueur L . On cherche les champs eulériens sous la forme

$$\vec{v} = v(z, t)\vec{u}_z, \mu(z, t) \text{ et } P(z, t)$$

On note $v_0(t)$ la vitesse et P_0 la pression du fluide (supposée constante) en $z = 0$ à la date t . Le débit massique varie selon la loi

$$D_m(t) = D_0 \left(1 + \frac{t}{T} \right)$$

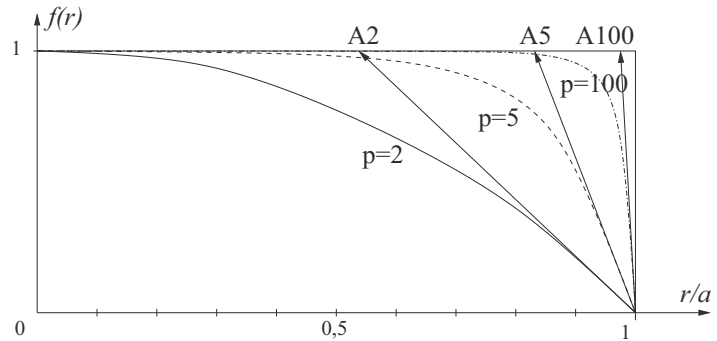
avec T le temps caractéristique de variation du débit, supposé très grand devant le temps caractéristique de propagation le long de la canalisation. Établir la relation entre $v(z, t)$, $v_0(t)$ et $P(z)$ en justifiant les approximations effectuées.

10.11
Modèle de couche limite dans une canalisation cylindrique (Mines-Ponts PSI (1) 2007)

On modélise l'écoulement d'un fluide dans une canalisation cylindrique de rayon a par le champ des vitesses

$$\vec{v}(r) = v_0 f(r)\vec{u}_z \text{ avec } f_p(r) = 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^p$$

Le faisceau de courbes représentatives de $f_p(r)$ pour différentes valeurs de p est représenté ci-dessous



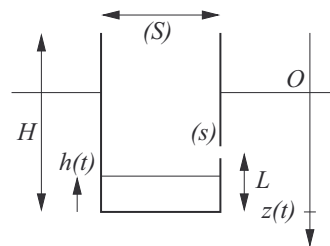
Les points A2, A5 et A100 sont les points d'intersection entre la tangente à la courbe de f_2, f_5, f_{100} et l'horizontale $g(r) = 1$.

- Donner une estimation graphique, puis numérique, de l'épaisseur de la couche limite δ en fonction de a et de p pour $p = 2, 5$ et 100 .
- La calculer numériquement pour $a = 10$ cm et respectivement $p = 2$ (écoulement de Poiseuille), $p = 5, p = 100$.

10.12

Naufrage d'un bateau

La coque d'un bateau est assimilée à un cylindre droit vertical, fermé en bas, ouvert en haut, de section S , de hauteur H , de masse M ; la coque est percée d'un trou de section s petite devant S , situé à une hauteur L au dessus du fond de la coque.

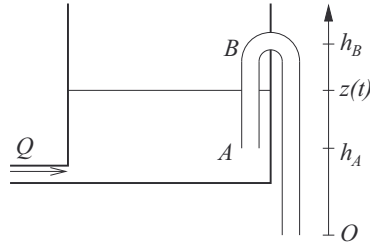


$h(t)$ est la hauteur de l'eau rentrée dans le fond de la coque ; $z(t)$ est la profondeur du fond de la coque mesurée depuis la surface de la mer, (O, z) est orienté vers le bas. On note μ la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur et P_0 la pression atmosphérique uniforme.

- Montrer, lorsque l'eau commence à entrer, que si on suppose que la vitesse d'enfoncement du bateau reste faible, alors $M + \mu S h(t) = \mu S z(t)$.
- Déterminer la vitesse d'entrée V de l'eau à la date t .
- En déduire l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$.
- Déterminer la date à laquelle le niveau de l'eau atteindra l'orifice.

10.13
Vase de Tantale

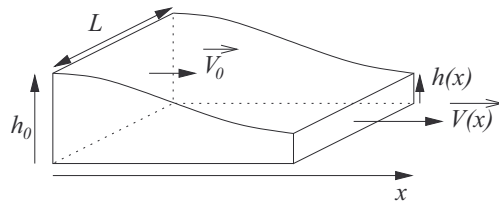
Le vase de tantale est schématisé sur la figure suivante. s est la section du siphon, S celle du réservoir ; le réservoir est alimenté avec un débit volumique constant Q .



- On suppose que le siphon est amorcé (plein d'eau). Déterminer la vitesse d'écoulement V_O en O en fonction de z .
- Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
- Résoudre cette équation quand $Q = 0$.
- Montrer qu'un régime permanent peut s'établir lorsque $Q \neq 0$ et donner dans ce cas le niveau d'eau z_p .
- Montrer qualitativement que lorsque $Q \neq 0$, on peut observer des oscillations.

10.14
Régime fluvial, régime torrentiel

On considère une voie d'eau en écoulement permanent, de grande largeur L . La hauteur d'eau $h(x)$ varie et la vitesse v est supposée horizontale et uniforme sur une section verticale de la rivière : $\vec{V} = V(x)\vec{u}_x$. On note h_0 et V_0 leurs valeurs en $x = 0$.



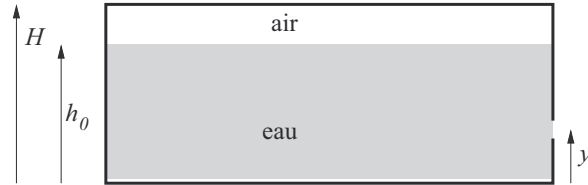
- Montrer qu'il existe une constante h_s fonction de h_0 et V_0 telle que $h + \frac{V^2}{2g} = h_s$.
- Exprimer le débit Q en fonction de h et des paramètres L , g et h_s .
- Tracer l'allure de la courbe représentative de Q en fonction de h .
- Le débit Q étant fixé, montrer graphiquement que deux valeurs h_1 et h_2 sont possibles pour h . Justifier que l'une des deux correspond au régime torrentiel, l'autre au régime fluvial.
- On suppose que la présence d'un pilier de pont fait passer la largeur de L à $L(1 - \epsilon)$ avec $\epsilon \ll 1$. Dans ce cas, on peut établir que la conservation du débit entraîne une variation de la hauteur donnée par la formule $\Delta h \approx \frac{2\epsilon h(h_s - h)}{2h_s - 3h}$. Que constate-t-on alors (discuter suivant le type d'écoulement) ?



10.15

Vidange (résolution de problème) (Mines PC (2) 2010)

Dans le dispositif suivant, la poche d'air qui surmonte l'eau est initialement à la pression atmosphérique. On explicitera les hypothèses et approximations effectuées.



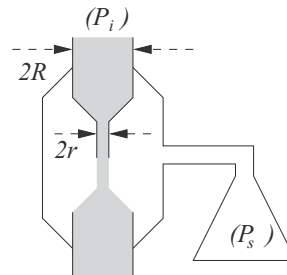
- a) Établir l'équation algébrique vérifiée par la hauteur d'eau restante h_f lorsque l'eau cessera de couler par l'orifice.
- b) Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la hauteur $h(t)$.



10.16

Trompe à eau

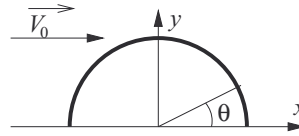
Une trompe à eau est formée d'une canalisation rigide, de symétrie de révolution, dont le rayon est R à la sortie du robinet (débit massique D_m , pression P_i) et diminue à r au niveau médian ; en ce point, l'eau (de masse volumique μ) tombe dans une canalisation de récupération et la cavité est mise en communication avec l'intérieur d'un erlenmeyer (Büchner).



Déterminer le débit de l'eau permettant d'atteindre la pression de vapeur saturante de l'eau P_s dans l'erlenmeyer. On négligera le terme de pesanteur.

10.17
Soulèvement du toit d'un hangar

Un hangar est héli-cylindrique, de rayon R et de longueur L . L'axe horizontal est (O, x) , l'axe vertical (O, y) , O est le centre du hangar. Il est soumis à l'action du vent dont la vitesse, loin du hangar, est $\vec{V}_0 = V_0 \vec{u}_x$.



La pression dans l'intérieur du hangar est P_0 , la même que loin du hangar. On assimile l'air à un fluide parfait en écoulement incompressible, on néglige les effets de la pesanteur.

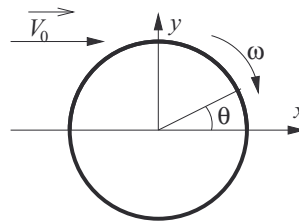
- Quel est le nom de l'effet qui aura tendance à provoquer le soulèvement du toit du hangar ?
- On dit qu'un champ des vitesses dérive du potentiel Φ si $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$. Montrer qu'ici le potentiel $\Phi = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r}\right) \cos \theta$ exprimé en coordonnées cylindriques convient, déterminer les constantes α et β . On donne

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Déterminer le champ des pressions $P(\theta)$ à la surface extérieure du hangar.
- Déterminer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le toit du hangar.

10.18
Effet Magnus

Un puissant ventilateur produit un écoulement horizontal de l'air supposé incompressible, parfait et permanent dans les conditions de l'expérience, de masse volumique μ , homocinétique $\vec{V} = V_0 \vec{u}_x$ et à la pression P_0 . Un cylindre de rayon R , de longueur L , de masse m et d'axe horizontal (O, z) est placé dans le souffle d'air. Il est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire $\vec{\omega} = -\omega \vec{u}_z$ avec $\omega = \frac{V_0}{R}$.



On modélise l'écoulement par la loi suivante où \vec{u}_y est vertical vers le haut

$$\vec{V} = \vec{V}_0 - \frac{R^2}{r^2} V_0 (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) - \frac{R^2 \omega}{r} \vec{u}_\theta$$

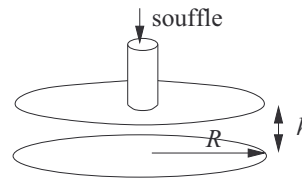
On néglige les effets de la pesanteur sur l'air.

- Déterminer le champ des vitesses à la surface de la couche limite.
- Déterminer les points d'arrêt du fluide.
- Déterminer le champ des pressions à la surface de la couche limite.
- Déterminer les composantes de la force de pression s'exerçant sur la languette comprise entre θ et $\theta + d\theta$.
- En déduire par intégration la résultante des forces de pression.
- Montrer qu'un effet de lévitation est possible. Justifier qualitativement le résultat en traçant l'allure des lignes de courant.

10.19

Explication d'une expérience (résolution de problème)

Deux plaques en forme de disque de rayon R sont placées horizontalement l'une au dessus de l'autre. Celle du dessus est munie d'un petit tube par lequel on peut souffler tout en la maintenant à l'horizontale.



Montrer que si la distance h entre les plaques est grande, la plaque inférieure est poussée, et que si h est faible, elle peut être aspirée et trouver une position d'équilibre de sustentation.

Du mal à démarrer ?

- 10.1 Quelques notions simples de géométrie sphérique suffisent pour exprimer la conservation du volume total et comparer les surfaces dans les deux cas.
- 10.2 Le surplus d'énergie entre le cas de la lame sèche et le cas de la lame mouillée est le produit de γ_{FS} par la surface mouillée. La force dérive de l'énergie potentielle totale dans les deux cas.
- 10.3 L'augmentation d'énergie de tension superficielle est proportionnelle à l'augmentation de l'aire de la sphère. Le travail est celui des forces de pression, moteur pour P_i et résistant pour P_e , sur une distance dR .
- 10.4 La pression en A est donnée par la loi de l'hydrostatique. En utilisant l'uniformité de P_0 , on conclut facilement.
- 10.5 En utilisant le schéma, il est facile d'identifier la longueur ℓ pertinente pour expliciter la force de contact qui compense le poids. Entre les deux expériences, le volume qui sort sous la forme de gouttes est le même, c'est celui situé entre les deux traits, mais le nombre de gouttes est différent car les gouttes n'ont pas le même volume.
- 10.6 Les surfaces des trois contacts doivent être évaluées en fonction de R et de h , puis on se débarrasse de R au profit de h en utilisant l'expression du volume. À l'équilibre, la dérivée de $\mathcal{E}(h)$ est nulle, on en déduit la loi après simplifications.

- 10.7 L'analyse de la forme des lignes de courant dans la couche limite permet de distinguer couche limite laminaire et couche limite turbulente. Au sein d'une couche limite, les fluctuations de vitesse provoquent une dissipation d'énergie par viscosité.
- 10.8 Le débit massique est le produit $D_m = \mu \cdot v \cdot S$. On en déduit l'expression de μ en fonction de P . L'équation d'Euler donne la relation différentielle entre P et v , on en déduit la relation entre les grandeurs en séparant les variables et en intégrant terme à terme. La loi des gaz parfaits en termes de masse volumique donne la relation entre P et μ .
- 10.9 (a) La loi des gaz parfaits et la conservation du débit massique permettent de transformer l'équation d'Euler en une équation différentielle en $v(z)$, qu'on intègre entre $z = 0$ et z . (b) On remplace la loi des gaz parfaits par la loi de Laplace et on procède de même.
- 10.10 En raisonnant en ordres de grandeurs, on montre que l'accélération locale est négligeable devant l'accélération convective. En éliminant μ grâce au débit massique, l'équation d'Euler donne une relation entre les dérivées par rapport à z de v et de P , qu'on intègre entre $z = 0$ et z .
- 10.11 La couche limite étant la zone dans laquelle les fluctuations spatiales de vitesse sont importantes, on cherche algébriquement,

ou graphiquement jusqu'à quelle valeur de r ces fluctuations sont faibles.

10.12 (a) On traduit l'équilibre de la coque chargée d'eau sous l'action de son poids et de la poussée d'Archimède. (b) La loi de Bernoulli s'applique entre un point à la surface de la mer et le point d'entrée de la voie d'eau. (c) L'entrée pendant dt d'une quantité d'eau évaluée au niveau du trou provoque une augmentation de dh dans la coque. (d) L'équation différentielle vérifiée par $h(t)$ est à variables séparables et s'intègre entre $(t = 0, h = 0)$ et $(t = T, h = L)$.

10.13 (a) La loi de Bernoulli s'applique entre la surface du liquide dans le réservoir et le point O. (b) La variation de z pendant dt est la conséquence de la sortie de l'eau par le siphon et de l'entrée dans le tuyau. (c) Quand $Q = 0$, on obtient une équation différentielle à variables séparables. (d) En régime permanent, $z = 0$, on en déduit z_p . (e) On a une succession de montées d'eau siphon désamorçé jusqu'à ce que z atteigne h_B et de vidanges par le siphon amorcé jusqu'à ce que z atteigne h_A .

10.14 La loi de Bernoulli appliquée à la surface de la rivière donne la relation de la question (a). La relation $Q = VS$ donne l'expression de Q en fonction de h , la suite de l'exercice n'est qu'une exploitation de cette relation.

10.15 On pourra considérer la poche d'air comme un gaz parfait

en évolution isotherme, ce qui donne la pression à l'interface supérieure de l'eau. La loi de Bernoulli permet de conclure.

10.16 Les rayons permettent d'exprimer les sections, la conservation du débit permet d'exprimer les vitesses et la loi de Bernoulli permet d'exprimer les pressions.

10.17 Le champ des vitesses, calculé à partir de Φ , doit vérifier trois propriétés : sa divergence est nulle, la vitesse loin du hangar ($r \rightarrow \infty$) vaut \vec{V}_0 , et au contact de la paroi ($r = R$) elle est tangente à celle-ci. Le champ des pressions est calculé grâce à la loi de Bernoulli entre un point à l'infini et le point P à la surface du hangar repéré par θ . La résultante est déterminée par un calcul intégral sur la surface du hangar.

10.18 Il faut penser à projeter \vec{V}_0 sur les axes de la base cylindrique. Le champ des pressions est calculé grâce à la loi de Bernoulli entre un point à l'infini et le point P à la surface du cylindre repéré par θ .

10.19 Le champ des vitesses est radial entre le rayon r_0 du cylindre de soufflée et R. La conservation du débit permet de relier v à r . La loi de Bernoulli entre un point de la couronne extérieure ($r = R, P = P_0$) et un point entre les plaques permet de calculer $P(r)$. L'intégration des forces de pression permet de calculer leur résultante et de vérifier qu'elle permet une aspiration de la plaque inférieure.

Corrigés des exercices

10.1

L'énergie de tension superficielle des deux gouttes séparées est

$$\mathcal{E}_2 = 2\gamma \cdot 4\pi R^2$$

Si elles fusionnent, elles forment une sphère de rayon R' , et comme le volume reste constant

$$\frac{4}{3}\pi R'^3 = 2 \times \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ donc } R' = R\sqrt[3]{2}$$

L'énergie de tension superficielle des deux gouttes fusionnées est

$$\mathcal{E}_1 = \gamma \cdot 4\pi R'^2 = \gamma \cdot 4\pi R^2 \times 2^{\frac{2}{3}}$$

On en déduit

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = 2^{-\frac{1}{3}} = 0,794 < 1$$

L'énergie diminue donc la fusion est favorable. C'est ainsi que s'il y a beaucoup de gouttelettes d'eau, elles en forment des plus grosses, et qu'il finit par pleuvoir.

10.2

a) Notons M la masse de la lame, $Ep_p = Mgz$ donc

$$\vec{f} = -\frac{dEp_p}{dz} \vec{u}_z = -Mg \vec{u}_z$$

b) La surface mouillée est $2(z - a)L$ donc

$$Ep_p = Mgz \text{ et } Ep_s = 2\gamma_{FS}(z - a)L \text{ donc}$$

$$\vec{f} = -\frac{d(Ep_p + Ep_s)}{dz} \vec{u}_z = -Mg \vec{u}_z - 2\gamma_{FS}L \vec{u}_z$$

c) Par différence

$$\left. \begin{array}{l} Mg = mg \\ Mg + 2\gamma_{FS}L = m'g \end{array} \right\} \Rightarrow m'g = mg + 2\gamma_{FS}L$$

$$\text{soit } \gamma_{FS} = \frac{g\delta m}{2L}$$

10.3

L'augmentation de l'énergie de tension superficielle est

$$d\mathcal{E} = \gamma d\mathcal{A} \text{ avec } d\mathcal{A} = 4\pi(R + dR)^2 - 4\pi R^2 \simeq 8\pi R dR$$

Le travail des forces de pression est

$$\delta W = +\left(P_i \cdot 4\pi R^2\right) dR - \left(P_e \cdot 4\pi R^2\right) dR = 4\pi R^2 dR(P_i - P_e)$$

Par identification, et après simplification :

$$d\mathcal{E} = \delta W \Rightarrow R(P_i - P_e) = 2\gamma \text{ donc } P_i - P_e = \frac{2\gamma}{R}$$

10.4

La pression dans le liquide vérifie la loi de l'hydrostatique donc $P(A) = P_0 - \mu gh$. La loi de Laplace s'écrit $P_0 - P(A) = \frac{2\gamma}{a}$. En éliminant $P(A)$ entre ces deux relations, on en déduit

$$\mu gh = \frac{2\gamma}{a} \text{ soit } h = \frac{2\gamma}{\mu ga}$$

10.5

a) On a

$$[\gamma] = \text{J} \cdot \text{m}^{-2} = \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{m}^{-2} = \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) La force d'adhésion vaut $\gamma \cdot 2\pi a$. et le poids de la goutte vaut $\mu \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \mu g$

$$\text{donc } \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\gamma \cdot 2\pi a}{\mu g}$$

Or lorsque le niveau du liquide évolue entre les deux traits, le volume total de liquide \mathcal{V} qui s'échappe est le produit du nombre de gouttes par le volume de chaque goutte. En écrivant la relation pour le liquide d'étalement et pour le liquide de tension superficielle inconnue :

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{V}}{N_0} = \frac{\gamma_0 \cdot 2\pi a}{\mu_0 g} \\ \frac{\mathcal{V}}{N} = \frac{\gamma \cdot 2\pi a}{\mu g} \end{cases}$$

soit, en divisant ces deux égalités

$$\frac{N}{N_0} = \frac{\gamma_0 \mu}{\gamma \mu_0} \text{ donc } \gamma = \gamma_0 \frac{\mu N_0}{\mu_0 N}$$

10.6

a) On doit identifier les aires des surfaces de contact. Entre le support et le liquide, la surface est un disque de rayon d , donc

$$\mathcal{A}_{SL} = \pi d^2 = \pi (R^2 - (R-h)^2)$$

$$\mathcal{A}_{SL} = \pi (2Rh - h^2)$$

et en exprimant R en fonction de V :

$$R = \frac{V}{\pi h^2} + \frac{h}{3} \text{ donc}$$

$$\mathcal{A}_{SL} = \pi \left(\frac{2V}{\pi h} - \frac{h^2}{3} \right)$$

Entre le liquide et le gaz, la surface est une calotte sphérique, donc

$$\mathcal{A}_{SL} = 2\pi R h = \frac{2V}{h} + \frac{2\pi h^2}{3}$$

Entre le solide et le gaz, la surface est le complémentaire du disque mouillé par rapport au disque complet donc

$$\mathcal{A}_{SG} = \pi R_0^2 - \pi d^2 = \pi R_0^2 - \pi \left(\frac{2V}{\pi h} - \frac{h^2}{3} \right)$$

On en déduit, en multipliant par les tensions superficielles respectives, l'expression donnée par l'énoncé.

b) À l'équilibre stable, l'énergie fonction de l'unique variable h est minimale, donc

$$\frac{d\mathcal{E}(h)}{dh} = 0 \text{ soit}$$

$$(\gamma_{SG} - \gamma_{SL}) \left[\frac{2V}{h^2} + \frac{2\pi h}{3} \right] = \gamma_{LG} \left[\frac{2V}{h^2} - \frac{4\pi h}{3} \right]$$

$$\text{soit } \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LG}} = \frac{3V - 2\pi h^3}{3V + \pi h^3} = \sin\beta$$

$$\frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LG}} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

qui est bien la formule de Young-Dupré.

10.7

a) La figure (1) correspond à un écoulement laminaire, le nombre de Reynolds est inférieur à 2000 donc $V \leq \frac{2000\eta}{2\mu R}$. La force de traînée est donnée par la formule de Stokes

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$$

b) La couche limite est laminaire.

c) Le nombre de Reynolds est multiplié par 10 donc $V_2 = 10V_1$. La courbe indique que $C_x = \frac{24}{Re}$ pour $Re = 0,5$ et $C_x > \frac{24}{Re}$ pour $Re = 5$. Par conséquent $C_x(2) > \frac{C_x(1)}{10}$. On en déduit que

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{C_x(2)V_2^2}{C_x(1)V_1^2} = 100 \frac{C_x(2)}{C_x(1)} > 10$$

d) Au déplacement de la sphère dans le fluide, l'énergie est majoritairement dissipée par viscosité dans la couche limite turbulente. Comme la taille de celle-ci diminue brusquement, il en est de même du C_x lorsque le nombre de Reynolds atteint celui de la crise de traînée.

e) La chute du C_x à la crise de traînée entraîne celle de la force de traînée, et donne à la balle de golf une très grande portée.

10.8

a) On est en régime permanent donc

$$\text{div}(\mu \vec{v}) = 0 \text{ donc } \mu(z)v(z) = \text{cste}$$

Ce résultat est cohérent avec l'expression du débit :

$$D_m = \mu(z)v(z)S \text{ donc } \mu(z)v(z) = \frac{D_m}{S}$$

b) L'équation d'Euler s'écrit, en régime permanent et pour une canalisation horizontale

$$\mu(z)v(z) \cdot \frac{dv(z)}{dz} = -\frac{dP(z)}{dz}$$

$$\text{donc } \frac{D_m}{S} \cdot \frac{dv(z)}{dz} = -\frac{dP(z)}{dz}$$

On intègre entre 0 et z

$$\frac{D_m}{S} [v(z) - v_0] = P_0 - P(z)$$

c) La loi des gaz parfaits s'écrit

$$P(z)M = \mu(z)RT \text{ donc } P(z) = \frac{D_m RT}{SMv(z)} \text{ et } P - 0 = \frac{D_m RT}{SMv_0}$$

$$\text{donc } v(z) - v_0 = \frac{RT}{M} \frac{v(z) - v_0}{v_0 v(z)}$$

$$\text{soit } (v(z) - v_0) \left[1 - \frac{RT}{Mv_0 v(z)} \right] = 0$$

$$\text{donc } \begin{cases} v(z) = v_0 \\ \text{ou} \\ v_0 v(z) = \frac{RT}{M} \end{cases}$$

La seconde équation donnerait $v(z) = \text{cste}$, donc $v(z) = v_0 = \sqrt{\frac{RT}{M}}$. La première donne $v(z) = v_0$, donc dans tous les cas $v(z)$ est uniforme et constante.

10.9

a) L'équation d'Euler s'écrit ici, en régime permanent, en projection sur (O, z) :

$$\mu(z)v(z) \cdot \frac{dv(z)}{dz} = -\mu(z)g - \frac{dP(z)}{dz}$$

En utilisant la loi des gaz parfaits à température constante et la conservation du débit massique

$$\left. \begin{aligned} \mu(z)v(z)S &= D_m \\ P(z)M &= \mu(z)RT \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(z) = \frac{D_m RT}{SMv(z)}$$

$$\text{donc } \frac{dP(z)}{dz} = -\frac{D_m RT}{SM} \frac{dv(z)}{v^2(z)}$$

et en remplaçant dans l'équation d'Euler

$$\frac{D_m}{S} \frac{dv(z)}{dz} = -\frac{D_m g}{Sv(z)} + \frac{D_m RT}{SM} \frac{dv(z)}{v^2(z)}$$

$$\text{soit } \left[v - \frac{RT}{M} \cdot \frac{1}{v} \right] = -gz$$

On intègre entre $(z = 0, v = v_0)$ et $(z, v(z))$:

$$\left[\frac{v^2}{2} - \frac{RT}{M} \ln v \right]_{v_0}^v = [-gz]_0^z$$

$$\text{soit } \frac{v^2(z) - v_0^2}{2} - \frac{RT}{M} \ln \frac{v(z)}{v_0} = -gz$$

b) Dans le cas de l'évolution isentropique, on utilise la loi de Laplace qui s'exprime, en termes de masse volumique, par

$$P(z)\mu^{-\gamma}(z) = P_0\mu_0^{-\gamma}$$

En utilisant la conservation du débit, on en déduit

$$P(z) = \frac{P_0 v_0^\gamma}{v^\gamma(z)}$$

En injectant dans l'équation d'Euler, on obtient

$$\frac{D_m}{S} \cdot \frac{dv(z)}{dz} = \gamma P_0 v_0^\gamma v^{-\gamma(z)} \cdot \frac{dv(z)}{dz} - \frac{D_m g}{Sv(z)}$$

et en intégrant comme à la question (a) cette équation à variables séparables, on obtient

$$\text{soit } \frac{v^2(z) - v_0^2}{2} + \frac{\gamma S P_0 v_0^\gamma}{(\gamma - 1) D_m v^{\gamma-1}(z)} = -gz$$

10.10

L'hypothèse de variation lente permet de supposer qu'à tout instant le débit est indépendant de z. Le temps caractéristique de propagation est

$$\tau = \frac{L}{o.d.g.(v)}$$

Le débit massique est

$$D_m(t) = \mu(z, t)v(z, t)S$$

L'équation d'Euler s'écrit

$$\frac{D_m(t)}{Sv(z, t)} \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + \frac{D_m(t)}{Sv(z, t)} v(z, t) \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial P(z, t)}{\partial z}$$

Comparons les ordres de grandeur de l'accélération locale de l'accélération convective

$$\left\{ \begin{aligned} \left\| \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \right\| &\simeq \frac{o.d.g.(v)}{T} \\ \left\| v(z, t) \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \right\| &\simeq \frac{o.d.g.(v)^2}{L} \end{aligned} \right.$$

$$\text{donc } \frac{\left\| \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \right\|}{\left\| v(z, t) \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \right\|} \simeq \frac{o.d.g.(v)}{T} \cdot \frac{L}{o.d.g.(v)^2} = \frac{T}{\tau} \ll 1$$

Chapitre 10 Fluides parfaits

On peut donc négliger l'accélération locale devant l'accélération convective et l'équation d'Euler s'écrit

$$\frac{D_m(t)}{S} \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = - \frac{\partial P(z, t)}{\partial z}$$

En intégrant entre $z = 0$ et z , on en déduit

$$\frac{D_0 \left(1 + \frac{t}{T}\right)}{S} [v(z, t) - v_0(t)] = P_0 - P(z, t)$$

10.11

- a) La couche limite est la zone dans laquelle les fluctuations de vitesse sont importantes. On remarque que $f(r)$, donc $v_0 f(r)$ ne varie pas significativement constante tant que $\frac{r}{a}$ reste inférieur à l'abscisse du point A. Donc par lecture graphique

$$r_2 \approx 0,5a, r_5 \approx 0,8a \text{ et } r_{100} \approx 0,95a$$

Par le calcul, on peut fixer arbitrairement

$$f_p(r) \geq 0,90 \text{ soit } r_p \geq a \cdot 10^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{donc } r_2 \approx 0,32a, r_5 \approx 0,63a \text{ et } r_{100} \approx 0,98a$$

On peut aussi définir la couche limite par

$$\left| \frac{df(r)}{dr} \right| \ll \frac{1}{a}$$

- b) On obtient

$$r_2 = 3,2 \text{ cm}, r_5 = 6,3 \text{ cm} \text{ et } r_{100} = 9,8 \text{ cm}$$

10.12

- a) Le bateau est en équilibre sous l'action de son poids et de la poussée d'Archimède : quand une masse $\mu Sh(t)$ d'eau est entrée dans le bateau, la vitesse étant très faible, on peut considérer qu'on est en quasi-équilibre :

$$(M + \mu Sh(t))g = \mu Sz(t)g$$

d'où la relation cherchée.

- b) On applique la loi de Bernoulli (en prenant garde au fait que l'axe z est orienté vers le bas) entre un point A à la surface libre de la mer où $V_A \approx 0$ et $P_A = P_0$ et le point B d'entrée de l'eau dans la coque où $P_B = P_0$ et $V_B = V$:

$$P_0 + \frac{1}{2} \mu \cdot 0^2 - \mu g \cdot 0 = P_0 + \frac{1}{2} \mu V^2 - \mu g(z-L) \text{ soit } V = \sqrt{2g(z-L)}$$

- c) La vitesse de montée de l'eau dans le bateau correspond au débit d'entrée de l'eau par la voie d'eau, soit :

$$Vs = \dot{h}S \text{ soit } S\dot{h} = s\sqrt{2g(z-L)} = s\sqrt{2g\left(h + \frac{M}{\mu S} - L\right)}$$

- d) L'équation différentielle est à variables séparables et s'écrit, en posant $h_0 = \frac{M}{\mu S} - L$:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{s\sqrt{2g}}{S} \sqrt{h+h_0} \text{ soit } \frac{dh}{2\sqrt{h+h_0}} = \frac{s\sqrt{2g}}{2S} dt$$

On intègre entre $(t = 0, h = 0)$ et $(t = T, h = L)$:

$$\left[\sqrt{h+h_0} \right]_0^L = \frac{s\sqrt{2g}}{2S} [t]_0^T \text{ soit } \sqrt{L+h_0} - \sqrt{h_0} = \frac{s\sqrt{2g}}{2S} T$$

$$\text{d'où } T = \frac{\sqrt{L+h_0} - \sqrt{h_0}}{\frac{s\sqrt{2g}}{2S}}$$

10.13

- a) En supposant $s \ll S$, on est en régime quasi permanent. En négligeant les pertes de charge, la loi de Bernoulli appliquée le long d'une ligne de courant allant d'un point à la surface libre du liquide où $V \approx 0$ et le point O :

$$P_0 + 0 + \mu gz(t) = P_0 + \frac{1}{2} \mu V_O^2 + 0 \text{ donc } V_O = \sqrt{2gz(t)}$$

- b) On peut faire un bilan de masse en régime non permanent sur le système ouvert formé de l'eau dans le réservoir et dans le siphon.

$$m(t) + \mu Q dt = m(t+dt) + \mu V_O s dt$$

avec $m(t+dt) = m(t) + \mu S dz$ donc $Q dt = S dz + V_O s dt$ soit

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q}{S} - \frac{s}{S} \sqrt{2gz(t)}$$

- c) Quand $Q = 0$, cette équation est à variables séparables :

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = - \frac{s}{S} \sqrt{2g} dt$$

En l'intégrant entre $(t = 0, z = z_0)$ et (t, z) :

$$[2\sqrt{z}]_{z_0}^z = - \frac{s}{S} \sqrt{2g} [t]_0^t$$

$$\text{donc } z(t) = \left(\sqrt{z_0} - \frac{s}{2S} \sqrt{2g} t \right)^2$$

- d) En régime permanent, $z(t) = z_p = \text{cste}$ donc $\frac{dz}{dt} = 0$ soit

$$0 = \frac{Q}{S} - \frac{s}{S} \sqrt{2gz_p} \text{ soit } z_p = \frac{Q^2}{2gs^2}$$

- e) Partons d'une situation où il n'y a pas d'eau dans le réservoir. Le siphon est donc désamorçé et l'eau ne s'échappe pas. L'apport d'eau au débit Q emplit donc le réservoir et z croît. Lorsque z atteint h_B , le siphon s'amorce et l'eau commence à couler en O. Si $Q < s\sqrt{2gh_A}$, le débit d'eau sortant est supérieur au débit entrant, et z diminue jusqu'à h_A où le siphon se désamorce. L'eau ne coulant plus en O, z réaugmente et il y a oscillations de relaxation entre h_A et h_B .

10.14

- a) Par application de la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant en surface de la rivière :

$$P_0 + \mu gh_0 + \frac{1}{2}\mu V_0^2 = P_0 + \mu gh(x) + \frac{1}{2}\mu V^2(x) \text{ donc}$$

$$h(x) + \frac{V^2(x)}{2g} = h_0 + \frac{V_0^2}{2g} = h_s$$

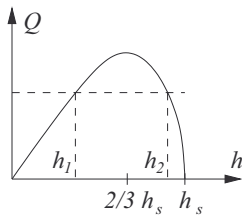
- b) Le débit vaut $Q = V(x) \cdot h(x) \cdot L$ soit

$$Q = L\sqrt{2g} \cdot h\sqrt{h_s - h}$$

- c) Posons $\beta = L\sqrt{2g}$. On a $Q = \beta h\sqrt{h_s - h}$. L'étude de cette fonction définie pour $h \in [0, h_s]$ est sans difficulté. Sa dérivée

$$\frac{dQ}{dh} = \beta \frac{2h_s - 3h}{2\sqrt{h_s - h}}$$

s'annule pour $h = \frac{2}{3}h_s$ et est infinie pour $h = h_s$. Voici l'allure du graphe :



- d) La construction graphique indique l'existence de deux solutions h_1 à faible hauteur donc à forte vitesse qui est le régime torrentiel et h_2 à grande hauteur et donc faible vitesse qui est le régime fluvial.
- e) En régime torrentiel, $h < \frac{2}{3}h_s$ donc $\Delta h > 0$ et le niveau de l'eau monte : on observe effectivement que le niveau de l'eau est plus élevé autour des piliers dans un torrent. En régime fluvial, c'est le contraire.

10.15

- a) Assimilons l'air à un gaz parfait en évolution isotherme, l'eau jouant le rôle de thermostat. La quantité de matière restant constante :

$$P_0 S(H - h_0) = nRT_0 = P_f S(H - h_f) \text{ donc}$$

$$P_f = P_0 \frac{H - h_0}{H - h_f}$$

L'eau ne s'écoule plus quand la pression au point de sortie atteint P_0 . Comme l'eau ne coule plus, on peut appliquer la loi de Bernoulli (qui s'assimile à celle de l'hydrostatique) dans l'eau entre un point à la surface libre et l'orifice de sortie :

$$P_0 + \mu gy = P_f + \mu gh_f \text{ soit } P_0 \frac{h_0 - h_f}{H - h_f} = \mu g(h_f - y)$$

équation du second degré en h_f qui se résout aisément.

- b) Supposons l'écoulement incompressible, non visqueux et en régime quasi permanent. À l'instant t , la pression dans la poche d'air est

$$P = P_0 \frac{H - h_0}{H - h}$$

La loi de Bernoulli entre la surface libre de l'eau et l'orifice de sortie donne, si on néglige la vitesse de descente de l'eau devant celle de sortie :

$$P_0 \frac{H - h_0}{H - h} + \mu gh = P_0 + \frac{1}{2}\mu V^2 + \mu gy$$

Si on note s la section de l'orifice et S celle du réservoir, la conservation du débit donne $V \cdot s = -\dot{h} \cdot S$. h vérifie donc l'équation différentielle

$$-\frac{S}{s}\dot{h} = \sqrt{2g(h - y) - \frac{2P_0}{\mu} \frac{h_0 - h}{H - h}}$$

10.16

L'application de la loi de Bernoulli, en négligeant les termes de pesanteur, donne

$$P_i + \frac{1}{2}\mu V_i^2 = P_s + \frac{1}{2}\mu V_s^2$$

Le débit vaut

$$D_m = \mu V_i \pi R^2 = \mu V_s \pi r^2$$

$$\text{donc } P_i - P_s = \frac{D_m^2}{2\mu\pi^2} \left[\frac{1}{r^4} - \frac{1}{R^4} \right] \text{ donc}$$

$$D_m = \sqrt{\frac{2\mu\pi^2 R^4 r^4 (P_i - P_s)}{R^4 - r^4}}$$

10.17

- a) Les lignes de courant se resserrent donc la pression diminue au dessus du hangar. C'est l'effet Venturi.

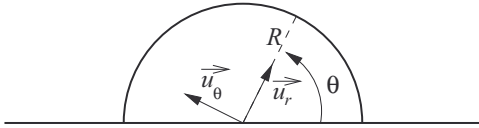
b) On calcule le champ des vitesses

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \left(\alpha - \frac{\beta}{r^2}\right) \cos \theta \\ \left(-\alpha - \frac{\beta}{r^2}\right) \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier que l'écoulement est incompressible, on calcule

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \left(\alpha + \frac{\beta}{r^2}\right) \cos \theta + \frac{1}{r} \left(-\alpha - \frac{\beta}{r^2}\right) \cos \theta = 0$$

Loin du hangar, pour $r \rightarrow \infty$, dans la direction $\theta = \pi$, la vitesse est $\vec{V}_0 = V_0 \vec{u}_x = -V_0 \vec{u}_r$. En $r = R$, à la surface du hangar, la vitesse doit être tangente à la couche limite, donc \vec{V} doit être selon \vec{u}_θ .



Les conditions aux limites donnent donc

$$\begin{cases} -V_0 = -\alpha \\ \alpha - \frac{\beta}{R^2} = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \alpha = V_0 \\ \beta = R^2 V_0 \end{cases}$$

Le champ des vitesses est donc

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} V_0 \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \\ -V_0 \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Considérons la ligne de courant venant de l'infini et longeant la surface du hangar. La loi de Bernoulli entre le point à l'infini et le point repéré par l'angle θ donne, en négligeant les effets de la pesanteur :

$$P_0 + \frac{1}{2} \mu V_0^2 = P(\theta) + \frac{1}{2} \mu V_0^2 \cdot 4 \sin^2 \theta \text{ donc}$$

$$P(\theta) = P_0 - \frac{1}{2} \mu V_0^2 (4 \sin^2 \theta - 1)$$

d) L'élément de surface compris entre θ et $\theta + d\theta$ et entre z et $z + dz$ est soumis à une force de pression résultante

$$d\vec{F} = +P_0 R d\theta dz \vec{u}_r - P(\theta) R d\theta dz \vec{u}_r$$

P_0 se simplifie et on projette cette force sur les axes cartésiens :

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} \mu V_0^2 R d\theta dz (4 \sin^2 \theta - 1) [\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y]$$

Les composantes de la résultante des forces de pression se calculent en intégrant ces expressions.

$$\begin{cases} F_x = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{z=0}^L \frac{1}{2} \mu V_0^2 \cos \theta (4 \sin^2 \theta - 1) R d\theta dz \\ F_y = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{z=0}^L \frac{1}{2} \mu V_0^2 \sin \theta (4 \sin^2 \theta - 1) R d\theta dz \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = \frac{1}{2} \mu V_0^2 R L \left[\frac{4}{3} \sin^3 \theta - \sin \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ F_y = \frac{1}{2} \mu V_0^2 R L \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin \theta (3 - 4 \cos^2 \theta) d\theta \end{cases}$$

Donc $F_x = 0$, ce qui était prévisible par symétrie du champ de pression par rapport à l'axe (O, y) . Enfin :

$$F_y = \frac{1}{2} \mu V_0^2 R L \left[-3 \cos \theta + \frac{4}{3} \cos^3 \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$\text{et } F_y = \frac{5}{3} \mu V_0^2 R L.$$

10.18

a) À la surface de la couche limite, en $r = R$:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 - V_0 (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) - R\omega \vec{u}_\theta$$

Or $\vec{V}_0 = V_0 \vec{u}_x = V_0 \cos \theta \vec{u}_r - V_0 \sin \theta \vec{u}_\theta$ et $R\omega = V_0$ donc

$$\vec{V} = -V_0 (1 + 2 \sin \theta) \vec{u}_\theta$$

La vitesse est bien tangente à la surface de la couche limite du cylindre.

b) Les points d'arrêt sont définis par $1 + 2 \sin \theta = 0$ donc $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ soit $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ et $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

c) La loi de Bernoulli appliquée le long de la ligne de courant entre un point à l'infini et le point M à la surface du cylindre repéré par l'angle θ s'écrit, en négligeant les termes de pesanteur :

$$P_0 + \frac{1}{2} \mu V_0^2 = P(\theta) + \frac{1}{2} \mu V_0^2 (1 + 2 \sin \theta)^2$$

$$\text{donc } P(\theta) = P_0 - 2 \mu V_0^2 (\sin \theta + \sin^2 \theta)$$

d) La force de pression sur la languette est normale à la surface du cylindre :

$$d\vec{F} = -P(\theta) L d\theta \vec{u}_r$$

Ses composantes sur les axes cartésiens sont

$$\begin{cases} dF_x = -P(\theta) \cos \theta L R d\theta \\ dF_y = -P(\theta) \sin \theta L R d\theta \end{cases}$$

- e) Il est inutile de calculer la composante intégrale selon x , elle est nulle car le champ des pressions est symétrique par rapport à l'axe (O, y) . Selon y :

$$F_y = \int_{\theta=0}^{2\pi} (-P_0 + 2\mu V_0^2 (\sin\theta + \sin^2\theta)) \sin\theta LR d\theta$$

$$F_y = -LRP_0 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta + 2\mu V_0^2 LR \int_{\theta=0}^{2\pi} (\sin^2\theta + \sin^3\theta) d\theta$$

Les intégrales des fonctions puissances de $\sin\theta$ valent

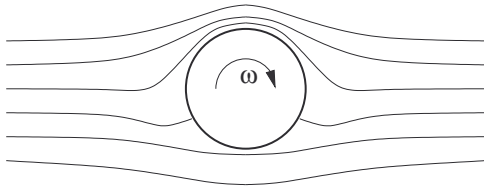
$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^3\theta d\theta = 0$$

On en déduit $F_y = \mu V_0^2 L 2\pi R$.

- f) Cette force est dirigée vers le haut et peut compenser le poids. Il est ainsi possible de faire léviter une balle de tennis de table dans le flux d'air d'un sèche-cheveux. L'allure des lignes de courant (avec les points d'arrêt) est la suivante :



La rotation du cylindre accélère le fluide dessus, le ralentit dessous, les lignes de courant se resserrent au dessus du cylindre, l'effet Magnus est donc un corollaire de l'effet Venturi : la pression de l'air au dessus du cylindre est inférieure à celle en dessous, ce qui explique que la résultante des forces de pression est dirigée vers le haut.

10.19

L'air entre avec un débit massique D_m à travers une section

$$s = \pi r_0^2$$

Il s'échappe sur le bord dans une section

$$S = 2\pi R h$$

On peut supposer $s \ll S$ donc il y a augmentation de vitesse donc diminution de pression entre les plaques par effet Venturi, d'où la possibilité que la plaque inférieure soit attirée. Par conservation du débit, en tout point entre les plaques repéré par son rayon r , on a

$$D_m = 2\pi r h v(r) = 2\pi R h v(R)$$

On applique la loi de Bernoulli entre un point au rayon r et le point sur la même ligne radiale de courant en $r = R$, en supposant l'écoulement permanent, incompressible et quasiment horizontal :

$$P(r) + \mu \frac{v^2(r)}{2} = P_0 + \mu \frac{v^2(R)}{2} \text{ donc}$$

$$P(r) = P_0 + \frac{\mu D_m^2}{8\pi^2 h^2} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

La plaque inférieure peut rester en équilibre si la résultante des forces de pression compense le poids. Chaque élément de surface $dS = r dr d\theta$ est soumis à la force de pression en dessous à P_0 et au dessus à $P(r)$. Supposons $r_0 \ll R$ et qu'on puisse négliger les forces de pression sur la surface d'entrée s . La résultante des forces de pression vaut donc

$$\vec{F} = \iint (P_0 - P(r)) dS \vec{u}_z$$

$$\vec{F} = \frac{\mu D_m^2}{8\pi^2 h^2} \vec{u}_z \int_{r=r_0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) r dr d\theta$$

$$\vec{F} = \frac{\mu D_m^2}{8\pi^2 h^2} \vec{u}_z \left[\ln r - \frac{r^2}{2R^2} \right]_{r_0}^R \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\vec{F} = \frac{\mu D_m^2}{4\pi h^2} \vec{u}_z \left[\ln \frac{R}{r_0} - \frac{1}{2} + \frac{r_0^2}{2R^2} \right]$$

Cette force est dirigée vers le haut si $R \gg r_0$. Elle peut être rendue aussi grande que voulu si h est assez petit, elle peut donc compenser le poids, d'où l'effet de lévitation.

CHAPITRE *11*

Bilans macroscopiques

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Système ouvert, système fermé.
- ◇ Bilan de masse.
- ◇ Bilan thermodynamique pour un écoulement stationnaire.
- ◇ Modèle de l'écoulement parfait.
- ◇ Relation de Bernoulli.
- ◇ Effet Venturi.
- ◇ Perte de charge régulière, singulière.
- ◇ Bilan macroscopique d'énergie mécanique.
- ◇ Bilan de quantité de mouvement.
- ◇ Bilan de moment cinétique.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Faire un bilan local.
- ◇ Traduire et exploiter un bilan de masse.
- ◇ Traduire et exploiter un bilan thermodynamique énergétique.
- ◇ Traduire et exploiter un bilan thermodynamique entropique.
- ◇ Choisir un système ouvert et identifier les actions subies.
- ◇ Choisir et effectuer un bilan de quantité de mouvement, d'énergie cinétique ou mécanique.
- ◇ Identifier les cas d'application du premier principe industriel, de Bernoulli, du bilan d'énergie.

Les méthodes à retenir

Faire un bilan local.

Dans un **phénomène de transport**, un objet solide est caractérisé par une grandeur locale intensive $G(M, t)$ dépendant de la position M et de la date t , cette grandeur variant sous l'effet d'entrée et de sortie de particules portant une caractéristique physique mesurée par une grandeur extensive C selon une loi du type $\frac{dG}{dt} = C$. Pour faire un bilan local :

- on délimite dans l'espace un objet de taille infinitésimale autour du point M , on note $G_M(t) = G(M, t)$,
- on identifie les facettes de cet objet par lesquelles les particules porteuses de C entrent et sortent,
- on mesure les quantités entrantes dC_e et sortantes dC_s pendant la durée infinitésimale dt ,
- on mesure l'éventuelle quantité créée ou annihilé dC_c au sein de l'objet pendant dt ,
- on exprime le bilan local en écrivant

$$G_M(t + dt) - G_M(t) = dC_e - dC_s + dC_c$$

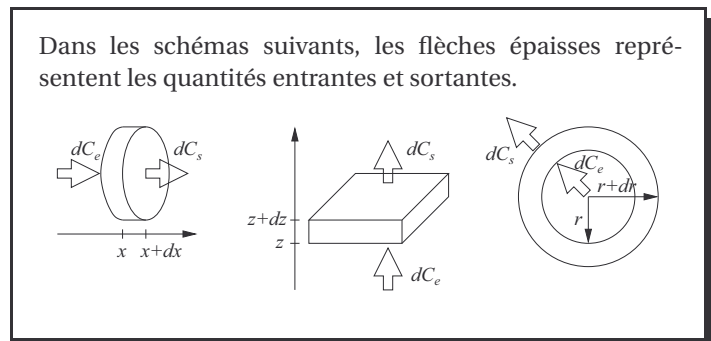
et on le simplifie en effectuant les développements limités au premier ordre

$$\frac{X(t + dt) - X(t)}{dt} \simeq \frac{\partial X}{\partial t}, \quad \frac{X(x + dx) - X(x)}{dx} \simeq \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{X(y + dy) - X(y)}{dy} \simeq \frac{\partial X}{\partial y},$$

$$\frac{X(z + dz) - X(z)}{dz} \simeq \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{X(r + dr) - X(r)}{dr} \simeq \frac{\partial X}{\partial r}, \quad \frac{X(\theta + d\theta) - X(\theta)}{d\theta} \simeq \frac{\partial X}{\partial \theta}$$

On obtient ainsi une équation aux dérivées partielles spatio-temporelle, dans laquelle on doit prendre garde à l'exactitude des développements limités : la présence parasite d'un terme différentiel dt, dx, dy, \dots ne se simplifiant pas est toujours le signe d'une erreur dans l'écriture du bilan.

Exemple :



↪ Exercice 11.1

Traduire la loi de conservation de la masse.

Pour un fluide en écoulement, le **bilan de masse** est effectué sur une surface fermée appelée surface de contrôle. La masse de fluide à l'intérieur de cette surface varie dans le temps par le jeu des entrées et sorties. Deux formulations sont possibles pour la loi de conservation :

- la masse qui entre moins celle qui sort est égale à celle qui s'est accumulée ;
- la masse finale plus la masse sortie est égale à la masse initiale plus celle qui est entrée.

La masse contenue dans la surface de contrôle est

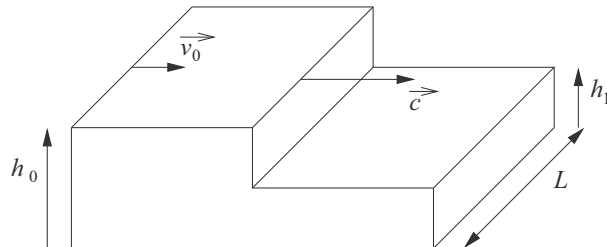
$$m = \iiint \mu d\tau$$

La masse entrante (ou sortante) pendant dt par une face \mathcal{S} est le flux du vecteur $\mu \vec{v}$ à travers cette face orientée vers l'intérieur (ou l'extérieur) multiplié par dt :

$$dm = \left[\iint_{\mathcal{S}} \mu \vec{v} \cdot \vec{dS} \right] \cdot dt$$

Exemple :

Un mascaret est une vague formant une marche entre l'amont et l'aval d'un fleuve. On note h_0 et h_1 les hauteurs de part et d'autre de la marche, L sa largeur, v_0 la vitesse de l'eau remontante d'un côté, $v_1 = 0$ de l'autre côté, et c la vitesse de déplacement de la marche.



La surface de contrôle est la portion du fleuve de largeur $2b$ de part et d'autre de la marche. Pendant dt , la marche se déplace de dx , la masse entrante est dm_e , la masse sortante $dm_s = 0$ et l'accumulation de masse $m(t + dt) - m(t)$.

la masse entrante est

$$dm_e = dt \cdot \int_{y=0}^L \int_{z=0}^{h_0} \mu v_0 dy dz = \mu v_0 L h_0 dt$$

La masse sortante est $dm_s = 0$. La masse dans la surface de contrôle aux dates t et $t + dt$ est :

$$\begin{cases} m(t) = \mu b L h_0 + \mu b L h_1 \\ m(t + dt) = \mu(b + dx)L h_0 + \mu(b - dx)L h_1 \end{cases}$$

donc $m(t + dt) - m(t) = \mu L(h_0 - h_1) dx$

La conservation de la masse s'écrit

$$m(t + dt) - m(t) = dm_e - dm_s \text{ soit}$$

$$\mu L(h_0 - h_1) dx = \mu v_0 L h_0 dt$$

On en déduit la vitesse de la marche

$$c = \frac{dx}{dt} = v_0 \frac{h_0}{h_0 - h_1}$$

↪ Exercices 11.2, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.7, 11.8.

Exploiter les hypothèses de stationnarité, d'incompressibilité et d'homogénéité des écoulements.

La loi locale de conservation de la masse est analogue aux lois vues aux chapitres 12 pour le transport de charges, 5 pour le transfert thermique et 6 pour le transport de particules sans terme de création :

charges	1 ^{er} principe	particules	fluide
ρ	T	n	μ
\vec{j}	\vec{J}_{th}	\vec{J}_p	$\mu \vec{v}$
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$	$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{J}_{th} = 0$	$\frac{\partial n}{\partial t} + D \text{div } \vec{J}_p = 0$	$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div } (\mu \vec{v}) = 0$

Les deux hypothèses suivantes permettent de simplifier la loi locale de conservation de la masse et ont des conséquences importantes sur l'écoulement.

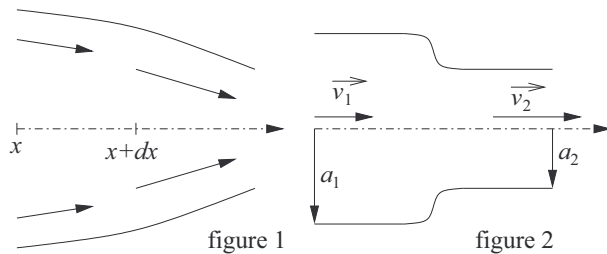
- **Écoulement stationnaire** : $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ donc $\text{div}(\mu \vec{v}) = 0$; le débit de masse à travers un tube de courant est le même en tout point, ce qui permet de relier masses volumiques, vitesses et sections.
- **Écoulement incompressible et homogène** : μ est uniforme en tout point de l'écoulement donc $\text{div} \vec{v} = 0$; le débit volumique à travers un tube de courant indéformable est le même en tout point, ce qui permet de relier vitesses et sections.

Exemple :

• **Écoulement stationnaire** : un gaz parfait s'écoule dans un tuyau horizontal et calorifugé, d'axe de révolution (O, x) et de rayon variable $r(x)$ (figure 1). On note $\vec{v} = v_x(x)\vec{u}_x + v_r(x)\vec{u}_r$ le vecteur vitesse et $\mu(x)$ la masse volumique à l'abscisse x . En régime permanent, le débit massique se conserve entre les abscisses x et $x + dx$ donc

$$\mu(x)\vec{v}(x) \cdot \pi r^2(x)\vec{u}_x = \mu(x+dx)\vec{v}(x+dx) \cdot \pi r^2(x+dx)\vec{u}_x$$

$$\text{soit } \frac{\partial (\mu(x)v_x(x)\pi r^2(x))}{\partial x} = 0$$



• **Écoulement incompressible et homogène** : lorsque le sang incompressible et homogène s'écoule dans une artère cylindrique de rayon a , le champ des vitesses s'écrit

$$\vec{v} = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \vec{u}_r$$

Un rétrécissement d'artère causé par un dépôt fait passer l'artère d'un rayon a_1 à un rayon a_2 , on note v_1 et v_2 les vitesses au centre des artères (figure 2). Le débit volumique de sang à travers l'artère qui forme un tube de courant indéformable est le même dans les deux zones.

On en déduit

$$\int_{r=0}^{a_1} \int_{\theta=0}^{2\pi} v_1 \left(1 - \frac{r^2}{a_1^2}\right) r dr d\theta = \int_{r=0}^{a_2} \int_{\theta=0}^{2\pi} v_2 \left(1 - \frac{r^2}{a_2^2}\right) r dr d\theta$$

$$\text{soit } \frac{\pi a_1^2 v_1}{2} = \frac{\pi a_2^2 v_2}{2}$$

↔ Exercice 11.9.

Traduire et exploiter un bilan thermodynamique énergétique.

On parle de **thermodynamique industrielle** quand l'unité (lieu où une transformation thermodynamique est opérée) est alimentée à l'entrée et vidée en sortie de façon continue. En régime permanent, la masse entrante est égale à la masse sortante pendant dt , ce qui revient à identifier débit massique entrant et débit massique sortant :

$$dm_e = dm_s \text{ ou } Dm_e = \frac{dm_e}{dt} = \frac{dm_s}{dt} = Dm_s$$

En notant avec l'indice e les grandeurs mesurées à l'entrée et s celles à la sortie, et avec des minuscules les grandeurs massiques, on énonce le **premier principe industriel** :

$$\Delta h + \Delta ec + \Delta(gz) = w_u + q \text{ avec } \begin{cases} \Delta h = h_s - h_e \\ \Delta ec = ec_s - ec_e = \frac{1}{2}v_s^2 - \frac{1}{2}v_e^2 \\ \Delta(gz) = epp_s - epp_e = gz_s - gz_e \end{cases}$$

Le **travail massique utile** w_u est celui produit par les pièces mobiles au sein de l'unité et exclut le travail des forces de pression à l'entrée et à la sortie. q est l'énergie thermique massique reçue au sein de l'unité. L'estimation des variations d'enthalpie massique peut être le résultat de calculs classiques ($\Delta h = c_p \Delta T$ pour un gaz parfait, $\Delta h = c \Delta T$ pour un liquide incompressible indilatable) ou par utilisation d'une table ou d'un diagramme thermodynamique (P, h), particulièrement adapté à l'étude des systèmes frigorifiques.

Exemple :

Un grand nombre d'unités fonctionnent en système ouvert. Chacune opère une ou une combinaison de deux ou trois transformations fondamentales dont voici une liste et l'expression simplifiée correspondante du premier principe industriel.

- Une conduite cylindrique horizontale calorifugée parcourue par un fluide incompressible non visqueux forme le cas trivial $0 + 0 + 0 = 0 + 0$.
- Si cette conduite n'est pas horizontale, alors $\Delta h + \Delta ec + \Delta(gz) = 0$.
- Dans une conduite cylindrique calorifugée munie d'une paroi poreuse, avec un écoulement très lent (détente de Joule-Thomson) $\Delta h + 0 + 0 = 0 + 0$ • Dans une tuyère horizontale calorifugée, $\Delta h + \Delta ec + 0 = 0 + 0$.
- Dans une pompe de relèvement $0 + 0 + \Delta(gz) = w_u + 0$.
- Dans la canalisation horizontale d'un chauffage central où circule de l'eau chaude, $\Delta h + 0 + 0 = 0 + q$.

↪ **Exercices 11.10, 11.11, 11.12, 11.13.**

Traduire et exploiter un bilan thermodynamique entropique.

Le second principe en système ouvert et en régime permanent s'écrit

$$\Delta s = s_{\text{éch}} + s_{\text{cr}}$$

L'intérêt de cette relation est la mise en évidence d'une irréversibilité dans le processus avec le calcul de l'entropie créée massique, c'est-à-dire rapportée à l'unité de masse du fluide traversant l'unité. On rappelle ici deux principes importants qui permettent d'interpréter le résultat obtenu, ce qui conduit à améliorer le procédé :

- c'est l'hétérogénéité (de température, de pression, de composition) qui crée l'irréversibilité ;
- quand un processus est irréversible, il est possible de changer le procédé physique pour récupérer de l'énergie.

Exemple :

Un mélangeur est un type d'unité à deux entrées et à une sortie, fonctionnant sans pièce mobile, adiabatiquement et de façon isobare. On peut aussi supposer que la variation d'altitude et d'énergie cinétique est nulle. Le mitigeur d'un évier mélange de l'eau froide à $\theta_1 = 10^\circ\text{C}$ avec un débit $Q_{e1} = 0,10 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$ avec de l'eau chaude à $\theta_1 = 50^\circ\text{C}$ avec un débit $Q_{e2} = 0,05 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$. La capacité thermique massique de l'eau vaut $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Trois bilans se succèdent. (1) Le bilan de masse donne le débit massique sortant

$$Q_s = Q_{e1} + Q_{e2} = 0,15 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) le premier principe enthalpique pendant dt s'écrit

$$Q_s dt \cdot h_s - (Q_{e1} dt \cdot h_1 + Q_{e2} dt \cdot h_2) = 0$$

En définissant une température de référence T_0 pour laquelle l'enthalpie massique de l'eau est h_0 , par définition de la capacité thermique massique, $h(T) - h_0 = c(T - T_0)$ et le bilan enthalpique donne

$$Q_s T_s = Q_{e1} T_1 + Q_{e2} T_2 \text{ donc}$$

$$T_s = \frac{Q_{e1} T_1 + Q_{e2} T_2}{Q_{e1} + Q_{e2}} = 296,48 \text{ K} = 23,33^\circ \text{C}$$

(3) L'entropie échangée est nulle car le système est adiabatique et le bilan entropique s'écrit

$$Q_s dt \cdot s_s - (Q_{e1} dt \cdot s_1 + Q_{e2} dt \cdot s_2) = Q_s s_{cr}$$

La seconde identité thermodynamique donne $dh = v dP + T ds$ soit

$$cdT = 0 + T ds \text{ donc } ds = c \frac{dT}{T} \text{ donc } s(T) - s_0 = c \ln \frac{T}{T_0}$$

Le bilan entropique donne donc

$$s_{cr} = c \frac{Q_s \ln T_s - Q_{e1} \ln T_1 - Q_{e2} \ln T_2}{Q_{e1} + Q_{e2}} = 8,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Cette quantité est strictement positive, le mélangeur fonctionne donc de façon irréversible. On aurait pu changer de processus pour récupérer de l'énergie, par exemple en concevant une machine de Carnot dont l'eau chaude est la source chaude et l'eau froide la source froide, produisant ainsi du travail.

Choisir un système ouvert et identifier les actions subies.

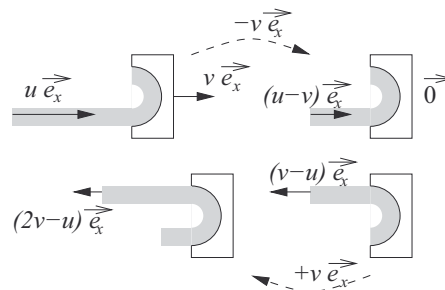
Deux bilans mécaniques sont inscrits au programme : Quantité de mouvement et énergie cinétique ou mécanique. Ils s'appliquent entre t et $t + dt$, sur un système fermé qui « enjambe » une unité fonctionnant en système ouvert :

- à la date t , il est la réunion de $\Sigma(t)$ et de la masse entrante dm_e
- à la date $t + dt$, il est la réunion de $\Sigma(t + dt)$ et de la masse sortante dm_s .

Comme il est difficile d'évaluer la grandeur extensive, énergie mécanique, quantité de mouvement, moment cinétique, du fluide contenu dans Σ , on doit se placer en régime permanent, afin que cette quantité s'élimine entre t et $t + dt$. Pour cette raison, on est souvent amené à se placer dans un référentiel particulier, galiléen s'il reste en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre. Les actions subies par le système sont les forces de pression en amont et en aval, les forces de contact exercées par les parois sur le fluide, les forces à distance comme le poids, et les forces exercées par les parties mobiles comme les pales de ventilateur ou de pompe.

Exemple :

L'action d'un fluide sur l'auget d'une turbine en rotation est difficile à évaluer dans le référentiel terrestre car l'auget bouge. Si on suppose le bras de la turbine assez long, on peut assimiler le mouvement de l'auget à une translation à la vitesse $v\vec{e}_x$ sous l'action d'un jet incident à une vitesse $u\vec{e}_x$ avec $u > v$. Dans le référentiel terrestre, on n'est pas en régime permanent et il est difficile, entre autres, de déterminer la vitesse du jet d'eau après rebond sur l'auget. C'est pourquoi on se place dans le référentiel de l'auget en ajoutant $-v\vec{e}_x$ à tous les vecteurs vitesses : celle de l'auget devient $\vec{v}' = \vec{0}$ et celle du jet $(u - v)\vec{e}_x$.



Si on note S la section du jet avant et après rebond sur l'auget, la conservation de la masse en régime permanent équivaut à la conservation du débit volumique pour l'eau incompressible, soit

$$v'_s \cdot S = (u - v) \cdot S \text{ donc } \vec{v}'_s = (v - u)\vec{e}_x$$

On en déduit la vitesse du jet après rebond dans le référentiel terrestre en effectuant le changement de référentiel inverse du premier, donc en ajoutant $+v\vec{e}_x$, soit $\vec{v}_s = (2v - u)\vec{e}_x$.

↪ Exercices 11.16, 11.17, 11.18, 11.19, 11.20, 11.21.

Choisir et effectuer un bilan de quantité de mouvement, d'énergie cinétique ou mécanique.

Il est conseillé de toujours effectuer un bilan préliminaire de masse, afin d'identifier le référentiel de travail (de préférence dans lequel on est en régime permanent), les masses entrante dm_e et sortante dm_s . Le bilan de masse donne une relation entre les vitesses en entrée et en sortie. Ensuite, on effectue un bilan de nature mécanique, choisi selon les critères suivants.

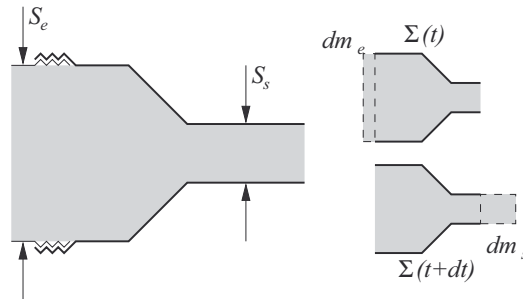
- Pour calculer une force exercée sur une paroi ou sur une canalisation, on utilise le **bilan de quantité de mouvement**.
- Pour calculer la puissance d'un dispositif (donnée à un fluide, ou reçue de sa part), on utilise le **bilan d'énergie mécanique ou cinétique**, qui s'assimile dans certains cas au premier principe industriel, à la loi de Bernoulli simple ou généralisée ; on rappelle que la puissance des forces internes n'est pas nulle en général, celle-ci s'assimile souvent à la puissance dissipée par frottements visqueux.

Faisons une remarque pertinente servant de point de repère dans les calculs : la puissance à laquelle la vitesse apparaît dans un bilan est supérieure de une unité par rapport à l'habitude.

- Pour un système en régime permanent à une entrée et une sortie, le bilan de masse donne une relation entre les vitesses v_e et v_s car la masse est proportionnelle au débit.
- Le bilan de quantité de mouvement une relation entre leurs carrés v_e^2 et v_s^2 car on multiplie les masses par les vitesses).
- Le bilan d'énergie cinétique une relation entre leurs cubes v_e^3 et v_s^3 car on multiplie les masses par les carrés des vitesses.

Exemple :

Un embout est vissé à l'extrémité d'une canalisation cylindrique afin de diminuer la section du jet. Ses sections d'entrée et de sortie sont S_e et S_s , le débit volumique traversant l'embout en régime permanent est Q . En sortie et sur la face latérale de l'embout règne la pression atmosphérique P_0 uniforme. On cherche la force qui s'exerce sur le pas de vis pour maintenir l'embout en place.



- Le bilan de masse donne $v_e S_e = v_s S_s = Q$.
- Le système fermé est la juxtaposition de l'eau dans l'embout $\Sigma(t)$ et de la masse entrante $dm_e = \mu Q dt = \mu v_e S_e dt$ à la date t et de celle de $\Sigma(t+dt)$ et $dm_s = \mu Q dt = \mu v_s S_s dt$ à la date $t+dt$.
- Le bilan de quantité de mouvement permet de calculer la force exercée par l'embout sur l'eau.

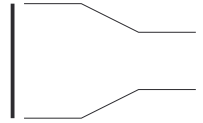
$$\frac{[\vec{P}_{\Sigma(t+dt)} + dm_s v_s \vec{u}_x] - [\vec{P}_{\Sigma(t)} + dm_e v_e \vec{e}_x]}{dt} =$$

$$P_e S_e \vec{u}_x - P_s S_s \vec{u}_x + \vec{F}_{\text{embout} \rightarrow \text{eau}}$$

En régime permanent, $\vec{P}_{\Sigma(t+dt)} = \vec{P}_{\Sigma(t)}$ et par principe d'action-réaction :

$$[\mu S_s v_s^2 - \mu S_e v_e^2] \vec{u}_x = [P_e S_e - P_s S_s] \vec{u}_x - \vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{embout}}$$

- Il ne faut pas oublier de calculer la force exercée par l'air extérieur sur la face latérale de l'embout. On imagine pour cela une surface fermée plongée dans l'air atmosphérique en enlevant l'embout, en plaçant un couvercle plan à l'entrée et un autre à la sortie.



La pression de l'air est uniforme, ce qui revient à supposer que sa masse volumique est nulle. La poussée d'Archimède est donc nulle, c'est-à-dire que la somme des forces de pression sur cette surface fermée est nulle :

$$\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{lat}} + P_0 S_e \vec{u}_x - P_0 S_s \vec{u}_x = \vec{0}$$

- Enfin, on écrit la condition d'équilibre de l'embout

$$\vec{F}_{\text{vis}} + \vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{lat}} + \vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{embout}} = \vec{0}$$

d'où on déduit la force sur le pas de vis.

↪ Exercices 11.16, 11.17, 11.18, 11.19, 11.20, 11.21.

Identifier les cas d'application du premier principe industriel, de la loi de Bernoulli, du bilan d'énergie mécanique.

Le premier principe industriel est homogène une énergie massique, la loi de Bernoulli à une énergie volumique, le bilan homogène à une énergie mécanique. Soulignons leurs spécificités.

- Seul le premier principe industriel met en évidence l'enthalpie et implicitement l'énergie interne, les variations de température et les transferts thermiques. C'est donc un bilan d'énergie totale, le plus général de tous.
- La loi de Bernoulli est associée à beaucoup d'hypothèses restrictives, mais c'est la plus simple à appliquer. Il est donc naturel d'y penser en premier, et de l'écarter si le fluide est compressible, s'il est visqueux, si une turbine vient couper les lignes de courant.
- La loi de Bernoulli généralisée permet, grâce aux pertes de charge, d'étudier les fluides visqueux en écoulement incompressible et sans turbine.
- Le bilan d'énergie mécanique prend en compte les travaux de forces intérieures de viscosité, et est le seul à pouvoir être appliqué en régime non permanent.

À l'oral des concours, on notera le candidat au moins autant sur le choix de la méthode adaptée au problème que sur sa capacité à la développer.

Exemple :

Imaginons un fluide en écoulement dans une conduite entre deux points.

- Si le fluide est incompressible non visqueux homogène, le régime permanent, et la canalisation cylindrique, la loi de Bernoulli s'applique.
- Si sur son trajet le fluide incompressible met en mouvement une turbine, ou est mis en mouvement par une pompe, on peut appliquer la loi de Bernoulli entre l'entrée et une section située juste avant la turbine, ou entre une section située juste après la turbine et la sortie. Un bilan d'énergie mécanique est ensuite effectué sur un système ouvert s'étendant de part et d'autre de la turbine.
- Si le fluide est compressible et/ou reçoit une énergie thermique sur son trajet, le premier principe industriel peut être appliqué.
- En régime non permanent sur un fluide quelconque sans échange thermique, un bilan d'énergie mécanique donne accès à une loi d'évolution spatio-temporelle.

↪ **Exercices 11.22, 11.23, 11.24, 11.25.**

Énoncés des exercices

11.1

Bilan routier

Sur une autoroute, chaque point est repéré par son abscisse kilométrique x . Dans le sens croissant des x , on note $D(x, t)$ le débit de voitures au point d'abscisse x et à la date t , exprimé en voitures par seconde, et $n(x, t)$ la densité d'automobiles au voisinage de l'abscisse x et à la date t , exprimée en voitures par kilomètre. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par ces deux grandeurs.



11.2

Calculs de débits

- a) Un liquide incompressible de masse volumique homogène μ_0 s'écoule de façon uniforme avec une vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$ dans une canalisation de section droite (perpendiculaire à \vec{u}_x) S. Donner l'expression du débit massique dans la canalisation et vérifier l'homogénéité de l'expression.
- b) Une langue de lave horizontale de hauteur a et de largeur L, de masse volumique homogène μ_0 s'écoule avec un champ de vitesses $\vec{v} = v_0 \frac{z}{a} \vec{u}_x$. Calculer le débit massique à travers le rectangle $(y, z) \in [0, L] \times [0, a]$.
- c) Une masse d'air dont la masse volumique est $\mu(z) = \mu_0 e^{-\frac{z}{\delta}}$ se déplace avec un champ de vitesses uniforme $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$. Calculer le débit massique d'air par unité de largeur.
- d) Un liquide de masse volumique uniforme μ_0 s'écoule dans un tuyau cylindrique d'axe (O, z) de rayon R avec un champ de vitesses $\vec{v} = v_0 \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \vec{u}_z$. Calculer le débit massique dans le tuyau.
- e) Un brumisateurs émet des particules de fluide de façon sphérique isotrope à partir d'un point O avec un débit massique D_m . Celui-ci est conservé à travers toute sphère de rayon r . Le champ des vitesses en M défini par $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ est $\vec{v}(r) = v_0 \vec{u}_r$. Déterminer $\mu(r)$.



11.3

Bilan dans un cylindre en régime non permanent

Un tuyau cylindrique d'axe (O, z) a un rayon R et une longueur L. Il est muni de deux pistons étanches A en $x = 0$ et B en $x = L$. À $t = 0$, l'air qui s'y trouve a une masse volumique uniforme μ_0 et une pression P_0 . À partir de cette date, A se déplace dans le sens des x croissants à la vitesse v_0 et B dans le sens des x décroissants à la vitesse $2v_0$. Quelle est la masse volumique $\mu(t)$ supposée uniforme de l'air à la date t ? En déduire la pression $P(t)$ en assimilant la transformation à une compression adiabatique réversible d'un gaz parfait de rapport de capacités thermiques $\gamma = 1,4$.



11.4

Cheminée

Une cheminée conique de hauteur H a un rayon $2R$ en bas ($z = 0$) et R en haut ($z = H$). La fumée est assimilée à un gaz parfait de masse molaire M. En bas, sa température est T_0 , sa pression P_0 sa vitesse verticale vers le haut $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$. En haut, sa température est $T_1 = \alpha T_0$, sa pression P_0 . Exprimer sa vitesse v_1 en fonction de v_0 et α en régime permanent. Commenter le résultat obtenu.



11.5

Vitesse du front d'un bouchon routier

Sur une autoroute à 3 voies, la circulation est fluide, les véhicules se répartissent sur les 3 voies, se suivent sur chaque voie à 200 mètres d'écart et se déplacent à $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en moyenne. Un bouchon routier se forme subitement au point kilométrique D. Dans le bouchon, les véhicules sont à l'arrêt à raison d'un véhicule dans un espace de 10 mètres de long en moyenne. Déterminer la vitesse du front du bouchon, c'est-à-dire la vitesse d'un véhicule de sécurité qui se déplace pour rester à la hauteur des derniers véhicules arrêtés dans le bouchon.

11.6

Confluence

L'eau est incompressible de masse volumique μ_0 uniforme et constante. Une rivière de débit massique D_1 et de vitesse v_1 se jette dans un fleuve de débit massique $D_2 = 3D_1$, et de vitesse $v_2 = \frac{v_1}{2}$. Les hauteurs d'eau dans la rivière, dans le fleuve avant et après la confluence sont égales à H . La vitesse du fleuve après la confluence est $\beta \cdot v_1$ et la largeur du fleuve est la somme des largeurs des deux affluents. Quelle est la valeur numérique de β ?

11.7

Forme d'une coulée d'huile

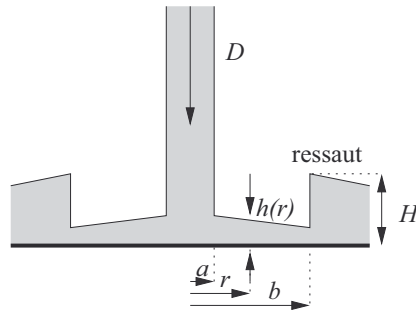
Un bidon d'huile est muni d'un robinet sur sa face inférieure, dont l'extrémité est circulaire de rayon R de centre O . On définit l'axe vertical (O, z) dirigé vers le bas. On note $\vec{g} = g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur. La masse volumique de l'huile est μ_0 . Le débit massique sortant est noté D . À la cote z , la vitesse du fluide $v(z)\vec{u}_z$ est supposée uniforme. On pose $v_0 = v(z=0)$. La vitesse $v(z)$ est prise égale à celle qu'aurait une bille en chute libre sans frottement lâchée en $z=0$ avec une vitesse v_0 .

- Donner l'expression de v_0 en fonction de μ_0 , D et R .
- Établir l'expression de $v(z)$.
- Déterminer le rayon $r(z)$ du filet d'huile à la cote z en supposant que $v_0 \approx 0$ (on supposera cette approximation valable pour la fin de l'exercice).
- Le sol est à la cote H . Lorsqu'on ferme le robinet, quelle est la masse d'huile qui reste à se répandre sur le sol ?

11.8

Bilan de masse dans un ressaut hydraulique (Mines-Ponts PC 2002)

Lorsqu'on ouvre le robinet d'une burette au dessus d'une surface plane, on observe autour du point d'impact du jet un disque presque parfait de rayon extérieur b et intérieur a , puis un bourrelet circulaire (le ressaut) au delà duquel se forment des irrégularités nettes. On note D le débit massique d'eau sortant de la burette et μ la masse volumique de l'eau. En un point du disque à la distance r de l'axe, on note $h(r)$ la hauteur d'eau et $\vec{v} = v(r)\vec{u}_r$ la vitesse, supposée presque radiale. On note $v_a = v(a)$ et H la hauteur de l'eau à l'endroit du ressaut.



- Donner les expressions de $h(a)$ et de $v(r=b^+)$.
- Le ressaut se forme quand $\frac{\mu v(r)h(r)}{\eta} \approx 50$. Calculer la valeur de b pour $D = 0,05 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ et une viscosité $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$.



11.9

Distensibilité des artères

Le sang dans les artères forme un fluide incompressible et homogène, de masse volumique μ_0 . Les artères sont souples, distensibles, et leur section peut varier au passage du sang. Une artère cylindrique d'axe (O, x) et de section S_0 au repos, a une section qui varie au passage du sang selon la loi $S(x, t) = S_0 + s_1(x, t)$. On note $\vec{v} \approx v_1(x, t) \vec{u}_x$ le vecteur vitesse du sang à l'abscisse x et à la date t .

- a) Le débit volumique à travers l'artère n'est pas le même en toute abscisse. Est-ce en contradiction avec le cours relatif à un écoulement incompressible et homogène ?
- b) Établir l'équation aux dérivées partielles reliant $S(x, t)$ et $v_1(x, t)$.
- c) On effectue l'approximation suivante : les termes indexés par 1 sont du premier ordre par rapport à ceux indexés par 0 ; on néglige tous les termes d'ordre 2. En déduire l'équation aux dérivées partielles reliant $s_1(x, t)$ et $v_1(x, t)$.
- d) La pression dans l'artère est $P(x, t) = P_0 + p_1(x, t)$. On admet l'équation $\mu_0 \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x}$ Quel est sa signification physique ?
- e) La distensibilité d'une artère est

$$\mathcal{D} = \frac{1}{S_0} \frac{\partial S}{\partial P} \approx \frac{1}{S_0} \frac{\frac{\partial s_1(x, t)}{\partial x}}{\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x}}$$

Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $v_1(x, t)$.



11.10

Détente de Joule-Thomson

Un fluide quelconque se détend dans une canalisation horizontale et calorifugée et à vitesse très faible, en traversant une paroi poreuse.

- a) Par application du premier principe industriel, montrer que cette détente est isenthalpique.
- b) Si le fluide est un gaz parfait, quelle propriété obtient-on ?
- c) Pourquoi la détente de Joule-Thomson est-elle complémentaire de celle de Joule Gay-Lussac ?



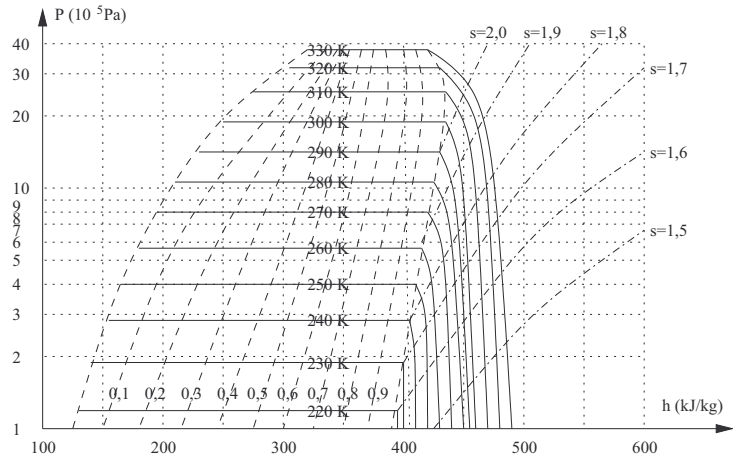
11.11

Machine frigorifique à fluide idéal

Un fluide est utilisé dans une machine frigorifique du type pompe à chaleur, chargée de prélever de l'énergie thermique à l'eau d'un lac formant un thermostat et d'en restituer à l'air d'une pièce ou à l'eau d'une piscine. Le fluide caloporteur est supposé idéal, en ce sens qu'il est un corps pur, se comporte comme un gaz parfait à l'état de vapeur, de rapport de capacités thermiques γ et qu'il est non visqueux, incompressible et indilatable à l'état liquide, de capacité thermique massique c_ℓ . On note M sa masse molaire et $\Delta_{\text{vap}}h$ l'enthalpie molaire de vaporisation supposée indépendante de la température. Le fluide au point de rosée en A (P_A, T_A) subit une compression adiabatique réversible jusqu'au point B (P_B, T_B) à l'état de vapeur sèche. Il subit alors un refroidissement puis une liquéfaction isobare jusqu'au point d'ébullition C ($P_C = P_B, T_C$). Il subit une détente isenthalpique jusqu'au point D diphasé ($P_D = P_A, T_D$) et revient au point A par une vaporisation isobare. Pour les applications numériques, on prend $\gamma = 1,40$, $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M = 50,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, $P_B = 3P_A$, $T_A = 280 \text{ K}$, $T_C = 320 \text{ K}$, $c_\ell = 2,00 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, $\Delta_{\text{vap}}h(280 \text{ K}) = 2,00 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\Delta_{\text{vap}}h(320 \text{ K}) = 1,43 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$. On suppose les variations d'énergie potentielle de pesanteur et d'énergie cinétique négligeables devant les variations d'enthalpie du fluide.

- Donner la valeur de la température T_D et calculer T_B .
- Donner les valeurs des titres massiques en vapeur x_A et x_C . Calculer x_D .
- Tracer l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron (P, v) en faisant apparaître la courbe de saturation (courbe d'ébullition et de rosée) et les différentes isothermes.
- Identifier l'énergie utile, l'énergie gratuite et l'énergie coûteuse. Calculer ces trois énergies par application du premier principe industriel. En déduire l'efficacité η de cette machine.

11.12
Machine frigorifique à fluide réel

 Voici le diagramme thermodynamique de **Mollier** (P, h) d'un fluide réel.


Ce fluide effectue un cycle frigorifique dans une installation industrielle de surgélation. En A, il est au point de rosée à $T_A = 240$ K. Il subit une compression isentropique jusqu'au point B à $T_B = 320$ K puis un refroidissement suivi d'une liquéfaction isobare jusqu'au point C, point d'ébullition. Il subit une détente isenthalpique entre C et D puis une vaporisation isobare de D à A. On suppose les variations d'énergie potentielle de pesanteur et d'énergie cinétique négligeables devant les variations d'enthalpie du fluide.

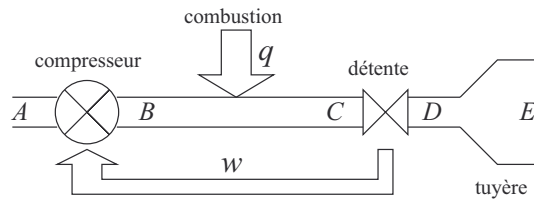
- Tracer le cycle (A,B,C,D) et en déduire les pressions, températures, titres massiques en vapeur et enthalpies massiques de ces états.
- Déterminer la valeur de l'efficacité η de ce surgélateur.



11.13

Turbine

L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ et de rapport de capacités thermiques $\gamma = 1,4$. On donne $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. Il entre dans une turbine en A à la température $T_A = 290 \text{ K}$ à la pression $P_A = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ avec un débit massique $D_m = 40 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Il subit une compression adiabatique réversible jusqu'à un état B avec $P_B = 5P_A$, puis un échauffement isobare jusqu'à l'état C où $T_C = 1500 \text{ K}$. On note q l'énergie thermique massique reçue par l'air entre B et C grâce à la combustion du kérosène. Il subit une détente adiabatique réversible dans une turbine jusqu'à l'état D en lui fournissant un travail massique $w_u(\text{CD})$ qui est intégralement restitué au compresseur agissant entre A et B. Enfin, l'air se détend, toujours de façon adiabatique et réversible, dans la tuyère pour retrouver en E la pression $P_E = P_A$. À la sortie de la tuyère, on note V_E la vitesse d'éjection de l'air. On suppose toutes les autres vitesses négligeables devant celle-ci, et on les prendra nulles pour les calculs.



- Calculer les pressions et températures des cinq états non fournies par l'énoncé.
- Calculer la vitesse V_E .
- Calculer le rendement de cette turbine, la puissance cinétique produite et la puissance thermique consommée.



11.14

Bilan entropique dans un détendeur

Un gaz monte à vitesse constante le long d'un conduit de cheminée partiellement obstrué, formant une paroi poreuse entre l'altitude z_1 où le gaz est à la pression P_1 et à la température T_1 et l'altitude z_2 où le gaz est à la pression P_2 et à la température T_2 inconnue. Le gaz est assimilé à un gaz parfait de rapport de capacités thermiques γ et de masse molaire M . On note D_m le débit massique de gaz. Le conduit de cheminée est calorifugé.

- Déterminer T_2 .
- Déterminer l'entropie massique échangée et l'entropie massique créée.
- Déterminer les quantités d'entropie échangée et créée par unité de temps.

11.15**Écoulement isentropique dans une tuyère**

Une tuyère est formée d'une canalisation horizontale à symétrie de révolution autour de l'axe (O, x) , dont la section varie selon la loi $S(x)$. On note P_0 la pression à l'entrée de la tuyère en $x = 0$, le fluide qui s'y écoule est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M et de rapport de capacités thermiques noté γ ; on note μ_0 sa masse volumique à l'entrée. L'écoulement est supposé adiabatique réversible, donc isentropique et non visqueux. On note $\vec{V} = V(x)\vec{u}_x$ le vecteur vitesse supposé uniforme à l'abscisse x .

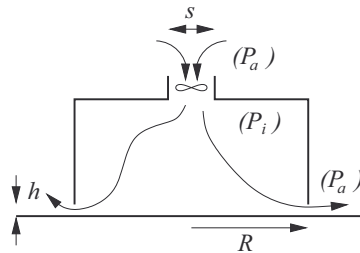
- Établir la loi reliant P , μ , P_0 , μ_0 et γ .
- Établir l'expression de la vitesse $V(x)$ en fonction de la pression $P(x)$. On supposera la vitesse d'injection V_0 négligeable devant $V(x)$.
- À l'extrémité de la tuyère, en $x = L$, on note $P_1 = P(L)$ la pression et $S_1 = S(L)$ la section de la tuyère. On pose $u = \frac{P_1}{P_0}$. Montrer qu'on peut écrire le débit massique sous la forme

$$D_m = Cu^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - u^{1 - \frac{1}{\gamma}}}$$

- Donner l'expression de la pression de sortie qui rend le débit maximum.

11.16**Hydroglisseur**

Un hydroglisseur est assimilé à un cylindre de rayon $R = 5,0$ m, de masse $M = 8,0$ tonnes, dont l'extrémité inférieure se maintient à une hauteur $h = 3,0$ cm au dessus de l'eau parfaitement plate d'un lac. Il glisse sur un coussin d'air assuré par l'aspiration (partie supérieure) d'air atmosphérique à la pression extérieure $P_a = 1,0 \cdot 10^5$ Pa grâce à un ventilateur de section $s = 1,0$ m², cet air se répartissant à la pression P_i dans la cavité intérieure de section $S = \pi R^2 = 78,5$ m², où on néglige sa vitesse, puis étant expulsé sur le pourtour circulaire de périmètre $L = 2\pi R = 31,4$ m. On prend $g = 10$ m · s⁻².



L'air est assimilé à un fluide incompressible non visqueux de masse volumique $\mu = 1,18$ kg · m⁻³. On néglige les effets de la pesanteur sur les fluides.

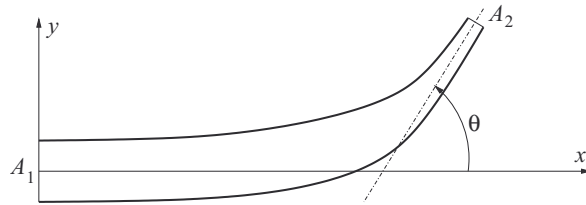
- Identifier sous quelles actions l'hydroglisseur se maintient en équilibre. En déduire que $P_i \approx P_a + \frac{Mg}{S}$.
- Déterminer la vitesse de sortie V_s et la vitesse d'entrée V_e de l'air.
- En déduire la puissance du ventilateur et le coût énergétique d'un maintien immobile pendant une heure.



11.17

Force exercée sur une canalisation coucée

Dans le dispositif suivant, vu dans le plan horizontal, la pression en A_1 est P_1 , la section S_1 et la vitesse V_1 , la pression en A_2 est P_2 et la section S_2 et la vitesse V_2 . On étudie l'écoulement stationnaire d'un fluide homogène, parfait et incompressible de masse volumique μ .



- Déterminer la relation entre les deux pressions et les deux vitesses.
- Déterminer la relation entre les deux sections et les deux vitesses.
- Déterminer la force exercée par le fluide sur le tuyau. On pourra d'abord déterminer la somme des forces extérieures sur le fluide puis la décomposer.



11.18

Onde de choc

Un fluide parfait compressible est initialement en écoulement incompressible uniforme et stationnaire, masse volumique μ_0 , vitesse

$$\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$$

dans une canalisation horizontale cylindrique infinie, de section S . À la date $t = 0$, on ferme brutalement l'extrémité de la canalisation en $x = 0$ et on étudie le régime transitoire de l'écoulement pour $x < 0$. On étudie un modèle simple dans lequel le fluide est séparé en deux par une surface fictive d'abscisse ξ qui se déplace à vitesse constante

$$\vec{c} = -c \vec{u}_x$$

(c est appelée la célérité de l'onde de choc) avec $c \gg v_0$. À tout instant :

- à gauche de la surface fictive, pour $x \leq \xi$, le fluide se déplace encore à la vitesse

$$\vec{v} = \vec{v}_0$$

et $\mu = \mu_0$, on note P_0 la pression et s_0 l'entropie massique ; la perturbation n'est pas encore arrivée ;

- à droite de la surface fictive, pour $\xi < x \leq 0$, le fluide s'est immobilisé

$$\vec{v} = \vec{0}$$

et on pose $\mu = \mu_0 + \delta\mu$ avec $\delta\mu \ll \mu_0$, on note P_1 la pression.

- a) Faire un schéma dans le référentiel galiléen du laboratoire, \mathcal{R}_0 , faisant apparaître la surface fictive et les différentes vitesses de déplacement.
- b) On note \mathcal{R}^* le référentiel en translation uniforme par rapport à \mathcal{R}_0 dans lequel la surface fictive est immobile. On travaille sur un système fermé de fluide se répartissant de part et d'autre de la surface. Faire un schéma dans ce référentiel et préciser les vitesses des deux surfaces délimitant le système (indiquées en pointillés sur le schéma) dans \mathcal{R}^* .
- c) Par un bilan de masse, justifier l'équation

$$(i) \mu_0 v_0 = c \delta \mu$$

- d) Par un bilan de quantité de mouvement, justifier l'équation

$$(ii) (\mu_0 + \delta \mu) c^2 - \mu_0 (v_0 + c)^2 = P_0 - P_1$$

- e) Sous quelles conditions peut-on considérer que l'écoulement est isentropique ?
- f) On note $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$ le coefficient de compressibilité isentropique du fluide, supposé constant et uniforme. En intégrant et en effectuant un développement limité, justifier l'équation

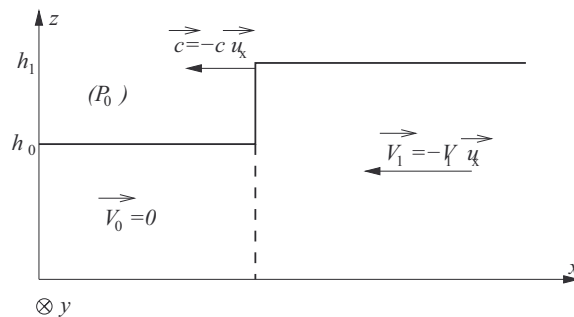
$$(iii) \delta \mu = \mu_0 \chi_S (P_1 - P_0)$$

- g) En déduire l'expression de c en fonction de μ_0 et χ_S .
- h) Combien vaut c dans le cas d'un gaz parfait diatomique ($\gamma \approx \frac{7}{5}$) de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ à la température $T = 300 \text{ K}$?

11.19

Mascaret (résolution de problème)

Un mascaret est une vague séparant deux niveaux d'eau dans un canal. Les notations sont celles du schéma suivant, où l'eau dans le canal a un niveau h_0 à gauche du mascaret où l'eau est immobile ($V_0 = 0$) et un niveau h_1 à droite où l'eau a une vitesse $\vec{V}_1 = -V_1 \vec{u}_x$. On note $\vec{c} = -c \vec{u}_x$ la célérité du mascaret (qui va de droite à gauche). La masse volumique de l'eau (incompressible) est μ , la largeur du canal est L (selon \vec{u}_y).



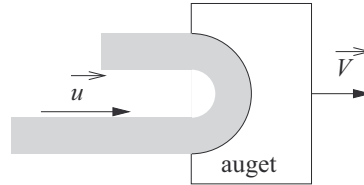
La question unique est : établir l'expression de c en fonction de g , h_0 , h_1 . Après avoir défini un système s'étendant de part et d'autre du mascaret, dans un référentiel convenablement choisi, on fera un bilan de masse et un bilan de quantité de mouvement. Pour le calcul des forces de pression, on appliquera la loi de l'hydrostatique et on intégrera $P dS$ sur la paroi.



11.20

Auget Pelton en translation (Mines PSI (1) 2006)

Dans ce modèle, un auget est mis en mouvement de translation à la vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_x$ (dans le référentiel terrestre) grâce à un jet d'eau à la vitesse $\vec{u} = u\vec{e}_x$ qui rebondit en gardant une section égale s . La masse volumique de l'eau est μ .



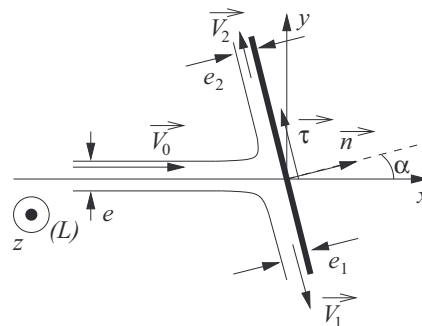
- Par un bilan de masse dans un référentiel convenablement choisi, déterminer la vitesse du jet de retour dans le référentiel terrestre.
- Déterminer la force exercée par le jet d'eau sur l'auget. On négligera le poids et les forces de pression de l'air devant cette force.
- En déduire la puissance de cette force.
- Le rendement énergétique de ce dispositif est le rapport entre cette puissance et la puissance cinétique incidente $\frac{dE_c}{dt}$ du jet d'eau. Quelle relation doit-on vérifier entre u et V pour rendre ce rendement maximal ? Calculer ce rendement maximal.



11.21

Action d'un jet sur une plaque

Un jet d'eau (fluide parfait et incompressible) a la forme d'une lame d'épaisseur e selon y , de largeur L selon z , et se déplace à la vitesse incidente uniforme $\vec{V}_0 = V_0\vec{u}_x$. Il s'écrase sur une plaque dont la normale est inclinée d'un angle α par rapport à \vec{u}_x . Il se divise en deux jets d'épaisseurs respectives e_1 et e_2 , de même largeur L , de vitesses \vec{V}_1 et \vec{V}_2 . La figure suivante est donnée dans le plan horizontal, on néglige les effets de la pesanteur. Le système baigne dans l'air à la pression uniforme P_0 .

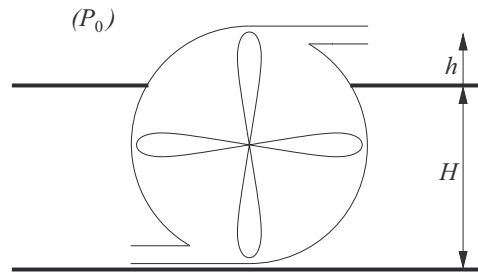


- Déterminer les épaisseurs e_1 et e_2 .
- Déterminer la force \vec{F} qu'il faut exercer sur la plaque pour la maintenir immobile.

11.22

Pompe de relevage

Le système suivant sert de pompe d'aspiration de l'eau, fluide incompressible de masse volumique μ_0 au fond d'un lac de profondeur H pour la remonter à l'altitude h avec un débit massique fixé $D_m = D_0$. La section d'entrée et celle de sortie sont identiques : $S_e = S_s = S_0$. La pompe ne cède aucune énergie thermique à l'eau et l'absence de forces de viscosité permet de supposer que l'énergie interne massique de l'eau ne varie pas.



- Déterminer la puissance mécanique \mathcal{P} de la pompe par application du premier principe industriel.
- Déterminer la puissance mécanique \mathcal{P} de la pompe par un bilan d'énergie mécanique.
- La loi de Bernoulli peut-elle être appliquée entre l'entrée et la sortie ?

11.23

Bilan thermique

Un gaz parfait de masse molaire M circule dans une canalisation cylindrique horizontale de section S . Le débit massique D_m est constant et on se place en régime stationnaire. La pression à l'entrée est aP_0 , à la sortie P_0 . La température d'injection est T_e .

- Déterminer la masse volumique μ_e et la vitesse d'injection \vec{V}_e du gaz à l'entrée.
- Par un bilan de quantité de mouvement, établir l'expression de la vitesse de sortie \vec{V}_s . En déduire T_s et μ_s .
- Par un bilan d'énergie totale, en déduire l'énergie thermique reçue par le fluide par unité de temps (c'est une puissance thermique). On note $C_{V,m}$ la capacité thermique molaire supposée indépendante de la température.

11.24

Sèche-cheveux

L'air est assimilé à un gaz parfait diatomique de rapport de capacités thermiques γ , de masse molaire M . On néglige les effets de la pesanteur. La section d'entrée S_e est très grande devant la section de sortie $S_s = S$ et on peut considérer que la vitesse d'entrée est négligeable devant celle de sortie : $V_e \ll V_s$. On impose un débit massique D_m , une température d'entrée $T_e = T_0$ et celle de sortie $T_s = T_0 + \Delta T$. La pression de l'air à la sortie vaut P_0 . Déterminer la puissance mécanique \mathcal{P}_m et la puissance thermique \mathcal{P}_{th} du sèche-cheveux.

11.25

Étude d'une confluence

Deux affluents se rejoignent en une seule rivière. Le lit de l'affluent 1 (respectivement 2) a pour largeur $L = 10$ m, l'eau y a une hauteur h et a pour champ uniforme de vitesses \vec{V}_1 (\vec{V}_2). Le lit de la rivière résultante a une largeur $2L = 20$ m et l'eau y a une hauteur $h = 2$ m. À proximité de la jonction, dans une zone appelée « zone de confluence », le champ des vitesses est non uniforme ; à partir d'une certaine distance on trouve une zone appelée « zone uniforme » où l'eau a pour champ uniforme de vitesses \vec{V} de norme V inconnue. L'eau est incompressible de masse volumique μ . On donne $V_1 = 6,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $V_2 = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on note g l'accélération de la pesanteur et P_0 la pression atmosphérique. La cote z est mesurée depuis le fond.

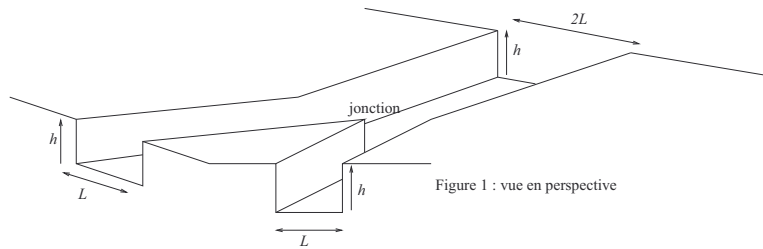


Figure 1 : vue en perspective

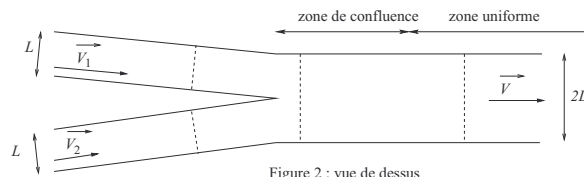


Figure 2 : vue de dessus

- Par un bilan de masse, déterminer l'expression de V en fonction de V_1 et V_2 . Calculer numériquement V .
- On travaille sur un système fluide s'étendant de part et d'autre de la jonction, comprenant en amont une partie de chacun des affluents et en aval une partie de la rivière allant jusqu'à la zone d'uniformité des vitesses. Justifier que la puissance des forces de pression est nulle.
- Quelles sont les autres forces qui travaillent ; préciser s'il s'agit de forces intérieures ou extérieures.
- Par un bilan d'énergie cinétique, déterminer la puissance de ces forces. Calculer numériquement cette puissance, commenter son signe ; en quoi se convertit-elle ?

Du mal à démarrer ?

11.1

La variation du nombre de voitures sur le tronçon $[x, x + dx]$ pendant dt est égale au nombre de voitures entrantes en x moins le nombre de voitures sortantes en $x + dx$.

11.2

(a) Application de la formule du débit. (b) L'intégrale de débit est faite sur y et z . (c) L'intégrale sur z peut être faite sur $[0, +\infty[$. (d) L'élément de surface en coordonnées cylindriques est $rdrd\theta$. (e)

Le débit massique se conserve à travers toute sphère de centre O et de rayon r .

11.3

La loi des gaz parfaits puis la loi de Laplace exprimées en pression et en masse volumique suffisent pour conclure.

11.4

La conservation du débit entre le bas et le haut de la cheminée permet de calculer v_1 .

11.5

Un bilan de voiture en régime non permanent dans un volume de contrôle qui s'étend de part et d'autre du bouchon permet d'écrire que l'augmentation du nombre de voitures accumulées dans le bouchon est égal au nombre de voitures entrées dans le volume.

11.6

Après avoir exprimé les trois débits en fonction des largeurs des lits, des hauteurs d'eau et des vitesses, la conservation du débit permet de conclure.

11.7

La loi de l'énergie cinétique (par exemple) donne l'expression de $v(z)$. La conservation du débit donne accès à $r(z)$. La quantité d'huile dans la coulée est calculée par une intégrale sur z .

11.8

Les débits sont calculés à travers des sections cylindriques, dont il faut définir précisément les rayons et hauteurs.

11.9

L'équation reliant S et v_1 nécessite un bilan de masse en régime non permanent sur un tronçon de longueur dx de l'artère : à la date t , sa section est $S(x, t)$, il entre une masse dm_e en x , il sort une masse dm_s en $x+dx$, et à la date $t+dt$, la section de l'artère est $S(x, t+dt)$. La réduction des deux équations aux dérivées partielles à une seule en v_1 nécessite l'utilisation du théorème de Schwartz.

11.10

Les hypothèses conduisent à l'élimination de presque tous les termes du premier principe industriel et le caractère isenthalpique de la détente en découle.

11.11

(a) La loi de Laplace permet le calcul de T_B . (b) La transformation (CD) est isenthalpique, on la décompose en un refroidissement à l'état liquide et une vaporisation partielle isobare isotherme, on en déduit x_D en utilisant le fait que l'enthalpie est une fonction d'état. (c) Le cycle se déploie à l'intérieur et au voisinage de la courbe de saturation. (d) L'énergie utile correspond à la transformation où le fluide reçoit de l'énergie thermique, l'énergie coûteuse correspond à la transformation où il reçoit du travail.

11.12

Les données de l'énoncé et la position des points de rosée et d'ébullition suffisent pour placer les quatre points. Aucun calcul n'est nécessaire pour déterminer les énergies utile et coûteuse, la lecture des valeurs de h permet de les déterminer par application du premier principe industriel.

11.13

La loi de Laplace donne la plupart des relations utiles. L'écriture du premier principe industriel sur les transformations (AB) et (CD) permet de traduire la restitution de travail du détenteur vers le compresseur ; celle sur (BC) permet de calculer q et la puissance thermique consommée.

11.14

(a) On applique le premier principe industriel. (b) On rappelle la seconde identité thermodynamique $dh = vdp + Tds$. (c) On utilise le débit massique.

11.15

La loi des gaz parfaits, celle de Laplace et l'expression du débit massique $D_m = \mu VS$ conduisent à la loi de la question (c). La maximisation du débit nécessite un calcul de dérivée.

11.16

(a) Les forces de pression compensent le poids. (b) La conservation du débit entre le cylindre d'aspiration de l'air et la couronne de sortie donne une première relation ; la loi de Bernoulli entre un point situé sous le ventilateur et un point de la couronne de sortie donne la seconde relation. (c) Un bilan d'énergie cinétique donne l'expression de la puissance du ventilateur.

11.17

(a) On utilise la loi de Bernoulli. (b) On utilise la conservation du débit. (c) Les forces qui s'exercent sur le fluide sont la force du tuyau et les forces de pression en A_1 et en A_2 .

11.18

Dans \mathcal{R} , on n'est pas en régime permanent. On passe dans \mathcal{R}^* en retranchant \vec{c} aux trois vitesses, la surface fictive est immobile, le fluide à gauche se déplace à $(v_0 + c)\vec{u}_x$, le fluide de droite à $c\vec{u}_x$. La suite de l'exercice est très guidée.

11.19

Le référentiel dans lequel on est en régime permanent est le « référentiel du surfeur », celui de la vague. On obtient les vitesses dans ce référentiel en retranchant \vec{c} à toutes les vitesses.

11.20

(a) On renvoie à la fiche méthode du cours. (b) Un bilan de quantité de mouvement donne l'expression de la force. (c) La puissance est le produit de la force par la vitesse de l'auget dans le référentiel terrestre. (d) L'énergie cinétique incidente est évaluée dans le référentiel terrestre. La maximisation du rendement nécessite une dérivation de fonction.

11.21

L'application de la loi de conservation du débit et de la loi de Bernoulli donne une première relation entre e , e_1 et e_2 . L'application de la loi de la quantité de mouvement au système formé de l'eau et de la plaque donne, en projection sur \vec{t} , l'autre relation entre les épaisseurs, et en projection sur \vec{n} l'expression de la force \vec{F} .

11.22

(a) La relation $H = U + PV$ permet d'exprimer la variation Δh en fonction de la différence de pressions. (b) L'eau reçoit les puissances de la pompe et des forces de pression à l'entrée et à la sortie. (c) Les pales de la pompe coupent les lignes de courant.

11.23

(a) La loi des gaz parfaits et l'expression du débit massique donne les expressions cherchées. (b) Le gaz subit les forces de pression à l'entrée et à la sortie de la canalisation. (c) La somme des variations de l'énergie interne (liée à la variation de température), de l'énergie cinétique (liée à la variation de vitesse) et de l'énergie potentielle (nulle) est égale à la somme des travaux des forces de pression et de l'énergie thermique cherchée.

11.24

Le bilan d'énergie totale met en évidence l'énergie mécanique et l'énergie thermique reçue par l'air.

11.25

La nullité de la puissance des forces de pression découle du résultat de la première question et du calcul intégral dans chaque bras. Le bilan d'énergie cinétique permet de montrer que la puissance des forces de viscosité est négative.

Corrigés des exercices

11.1

Travaillons sur le tronçon routier situé entre les abscisses x et $x + dx$ et entre les dates t et $t + dt$. À la date t , il y a $n(x, t) \cdot dx$ voitures sur ce tronçon, et à la date $t + dt$ $n(x, t + dt) \cdot dx$. La variation est due à l'entrée de $dN_e = D(x, t) \cdot dt$ voitures en amont du tronçon, et à la sortie de $dN_s = D(x + dx, t) \cdot dt$ voitures en aval. On peut donc écrire

$$n(x, t + dt) \cdot dx - n(x, t) \cdot dx = D(x, t) \cdot dt - D(x + dx, t) \cdot dt$$

En divisant par $dx \cdot dt$, il vient :

$$\frac{n(x, t + dt) - n(x, t)}{dt} = \frac{D(x, t) - D(x + dx, t)}{dx}$$

et en faisant le développement limité à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial D(x, t)}{\partial x}$$

11.2

a) Le débit massique est

$$D_m = \iint_S \mu_0 v_0 \vec{u}_x \cdot dS \vec{u}_x = \mu_0 v_0 S$$

En unités :

$$[\mu_0 v_0 S] = (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}) \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot \text{m}^2 = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Le débit massique est

$$D_m = \int_{y=0}^L \int_{z=0}^a \mu_0 v_0 \frac{z}{a} \vec{u}_x \cdot dy dz \vec{u}_x$$

$$D_m = \mu_0 v_0 [y]_0^L \left[\frac{z^2}{2a} \right]_0^a = \frac{\mu_0 v_0 L a}{2}$$

c) À travers une largeur L , le débit massique est

$$D_m = \int_{y=0}^L \int_{z=0}^{+\infty} \mu_0 e^{-\frac{z}{\delta}} v_0 \vec{u}_x \cdot dy dz \vec{u}_x$$

$$D_m = \mu_0 v_0 [y]_0^L \left[-\delta e^{-\frac{z}{\delta}} \right]_0^{+\infty} = \mu_0 v_0 L \delta$$

Le débit par unité de largeur est $\frac{D_m}{L} = \mu_0 v_0 \delta$.

d) Le débit volumique est

$$D_m = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \mu_0 v_0 \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \vec{u}_z \cdot r dr d\theta \vec{u}_z$$

$$D_m = \mu_0 v_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi}$$

$$D_m = \mu_0 v_0 \frac{\pi R^2}{2}$$

e) La conservation du débit s'écrit

$$D_m = \mu(r) v_0 \cdot 4\pi r^2 \text{ donc } \mu(r) = \frac{D_m}{4\pi r^2 v_0}$$

11.3

La longueur du cylindre à la date t

$$L(t) = L - v_0 t - 2v_0 t = L - 3v_0 t$$

Les deux cylindres se rejoignent à $t_1 = \frac{L}{3v_0}$, on suppose donc $t < t_1$. La masse se conserve dans le cylindre à toute date, donc

$$\mu_0 \pi R^2 L = \mu(t) \pi R^2 (L - 3v_0 t) \text{ donc } \mu(t) = \mu_0 \frac{L}{L - 3v_0 t}$$

La loi de Laplace s'écrit ici

$$P(t) \mu^{-\gamma}(t) = P_0 \mu_0^{-\gamma} \text{ donc } P(t) = P_0 \left(\frac{\mu(t)}{\mu_0} \right)^\gamma$$

$$\text{soit } P(t) = P_0 \left(\frac{L}{L - 3v_0 t} \right)^\gamma$$

11.4

La loi des gaz parfaits s'écrit

$$\begin{cases} P_0 M = \mu_0 R T_0 \\ P_0 M = \mu_1 R T_1 \end{cases} \text{ donc } \mu_1 = \frac{\mu_0}{\alpha}$$

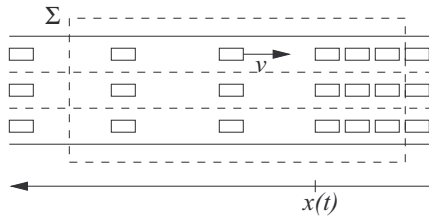
En régime permanent, il y a conservation du débit massique entre le bas et le haut de la cheminée, soit

$$\mu_0 v_0 \pi (2R)^2 = \frac{\mu_0}{\alpha} v_1 \pi R^2$$

donc $v_1 = 4\alpha v_0$. On constate l'effet accélérateur (facteur 4) de la réduction de la section et ralentisseur (facteur $\alpha < 1$) du refroidissement qui provoque une augmentation de la masse volumique.

11.5

Choisissons comme ligne de contrôle Σ un rectangle situé de part et d'autre du front.



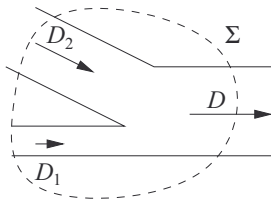
Pendant dt , un véhicule entre dans Σ s'il est situé à moins de vdt du bord gauche. Comme il y a trois véhicules en moyenne dans un tronçon de 200 m d'autoroute avant le bouchon, le nombre de véhicules entrant est $\delta N_e = \frac{3vdt}{200}$. La différence entre le nombre de véhicules dans Σ à la date t et à la date $t + dt$ est égal au nombre de véhicules supplémentaires accumulés dans le bouchon. La ligne de front s'est déplacée de dx , ce qui représente $dN = \frac{3dx}{10}$ véhicules. La loi de conservation du nombre de véhicules s'écrit $\delta N_e = dN$, soit

$$\frac{3vdt}{200} = \frac{3dx}{10} \text{ donc } \frac{dx}{dt} = \frac{v}{20}$$

soit $v = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 5,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

11.6

Choisissons une surface de contrôle fermée coupant les deux affluents et le fleuve après confluence.



En régime permanent, le débit sortant est égal à la somme des débits entrants donc $D = D_1 + D_2 = 4D_1$. En notant d_1 et d_2 les largeurs des affluents, on en déduit le système

$$\begin{cases} D_1 = \mu_0 v_1 d_1 H \\ 3D_1 = \mu_0 \frac{v_1}{2} d_2 H \\ 4D_1 = \mu_0 \beta v_1 (d_1 + d_2) H \end{cases}$$

En faisant le rapport des deux premières égalités, il vient $d_2 = 6d_1$ donc la troisième s'écrit $4D_1 = 7\mu_0\beta v_1 d_1 H$. En divisant cette égalité par la première, on en déduit $\beta = \frac{4}{7}$.

11.7

a) Le débit mesuré à travers le disque de sortie du robinet vaut

$$D = \mu v_0 \cdot \pi R^2 \text{ donc } v_0 = \frac{D}{\mu \pi R^2}$$

b) La loi de l'énergie cinétique entre $z = 0$ et z s'écrit

$$\frac{1}{2} m v^2(z) - \frac{1}{2} m v_0^2 = mgz \text{ donc } v(z) = \sqrt{v_0^2 + 2gz}$$

c) Le débit se conserve sur toute section du tube de courant, donc

$$D = \mu v(z) \pi r^2(z) \text{ donc } r(z) = \sqrt{\frac{D}{\mu \pi \sqrt{v_0^2 + 2gz}}}$$

En supposant $v_0 \approx 0$, cette expression se simplifie en

$$r(z) \approx \sqrt{\frac{D}{\mu \pi \sqrt{2g}}} \cdot z^{-\frac{1}{4}}$$

d) La masse d'huile restant à se répandre est celle de la colonne, soit

$$m = \int_{z=0}^H \mu \pi r^2(z) dz = \frac{D}{\sqrt{2g}} \int_{z=0}^H z^{-\frac{1}{2}} dz$$

$$m = \frac{D}{\sqrt{2g}} [2\sqrt{z}]_0^H = D \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

11.8

a) Le débit volumique se conserve à travers toute section du tube de courant. Les sections en $r = a$ et $r = b^+$ ont la forme de cylindres de rayon r et de hauteur $h(r)$. On a donc

$$D = \mu v(a) \cdot 2\pi a h(a) = \mu v(r = b^+) \cdot 2\pi b h$$

$$\text{donc } \begin{cases} h(a) = \frac{D}{2\pi a v a \mu} \\ v(r = b^+) = \frac{D}{2\pi b h \mu} \end{cases}$$

b) De même, la conservation du débit en r s'écrit

$$D = \mu v(r) \cdot 2\pi r h(r) \text{ donc}$$

$$\frac{\mu v(r) h(r)}{\eta} = \frac{D}{2\pi r \eta}$$

Le ressaut apparaît donc pour

$$b = \frac{D}{100\pi \eta} = 16 \text{ cm}$$

11.9

a) Le cours stipule que « le débit volumique à travers un tube de courant indéformable est le même en tout point » et l'hypothèse d'indéformabilité est fautive ici.

- b) On fait un bilan de masse pendant dt pour la section d'artère comprise entre x et $x + dx$. Les masses entrante en x et sortante en $x + dx$ à t sont

$$\begin{cases} dm_e = \mu_0 S(x, t) v_1(x, t) dt \\ dm_s = \mu_0 S(x + dx, t) v_1(x + dx, t) dt \end{cases}$$

Les masses dans le tronçon d'artère aux dates t et $t + dt$ sont

$$\begin{cases} m(t) = \mu_0 S(x, t) dx \\ m(t + dt) = \mu_0 S(x, t + dt) dx \end{cases}$$

Le bilan de masse s'écrit

$$m(t + dt) - m(t) = dm_e - dm_s$$

d'où, en divisant par $\mu_0 dx dt$

$$\frac{S(x, t + dt) - S(x, t)}{dt} = - \frac{S(x + dx, t) v_1(x + dx, t) - S(x, t) v_1(x, t)}{dx}$$

soit, en faisant les développements limités à l'ordre 1 en dx et en dt :

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial [S(x, t) v_1(x, t)]}{\partial x}$$

- c) En remplaçant $S(x, t)$, on en déduit

$$\frac{\partial [S_0 + s_1(x, t)]}{\partial t} = - \frac{\partial [S_0 v_1(x, t) + s_1(x, t) v_1(x, t)]}{\partial x}$$

Avec l'approximation demandée, on en déduit :

$$\frac{\partial s_1(x, t)}{\partial t} = -S_0 \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x}$$

- d) C'est la loi de la quantité de mouvement : l'accélération de la tranche de fluide est provoquée par la différence de pression entre ses deux faces.
e) La relation proposée donne

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{1}{S_0 \mathcal{D}} \frac{\partial s_1}{\partial x}$$

On peut donc éliminer ce terme avec l'équation mécanique, d'où

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{1}{S_0 \mathcal{D}} \frac{\partial s_1}{\partial x}$$

On écrit le système en (s_1, v_1) :

$$\begin{cases} \frac{\partial s_1}{\partial t} = -S_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ -\mu_0 S_0 \mathcal{D} \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial s_1}{\partial x} \end{cases}$$

On dérive la première relation par rapport à x , la seconde par rapport à t et on utilise le théorème de Schwartz $\frac{\partial^2 s_1}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 s_1}{\partial t \partial x}$ pour éliminer s_1 , d'où

$$-\mu_0 S_0 \mathcal{D} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -S_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}$$

soit $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \mu_0 \mathcal{D} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0$. Cette équation importante est l'équation d'Alembert, qui régit les phénomènes de propagation d'ondes sans atténuation.

11.10

- a) Appliquons le premier principe industriel. La canalisation est horizontale donc $\Delta(gz) = 0$. Elle est calorifugée donc $q = 0$. Elle se fait à très faible vitesse donc $\Delta ec = 0$. La paroi poreuse ne présente aucune pièce mobile donc $w_u = 0$. On en déduit $\Delta h = 0$ ce qui prouve que la détente est isenthalpique.
b) Pour un gaz parfait, $\Delta h = c_p \Delta T$ donc $T_s = T_e$, la détente isenthalpique est aussi isotherme.
c) La détente de Joule Gay-Lussac (détente adiabatique dans le vide) est isoénergétique, et donc elle-aussi isotherme pour les gaz parfaits. Un gaz parfait vérifie ainsi les deux **lois de Joule** : U et H ne dépendent que de la température, et les deux détentes de Joule permettent de tester expérimentalement ces lois.

11.11

- a) Entre D et A, le fluide est diphasé et reste à pression constante ; or c'est un corps pur donc l'isobare de vaporisation est aussi une isotherme et $T_D = T_A = 280$ K. Entre A et B, la vapeur forme un gaz parfait et subit une détente adiabatique réversible. La loi de Laplace donne donc

$$P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma = P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma \text{ donc}$$

$$T_B = T_A \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 383 \text{ K}$$

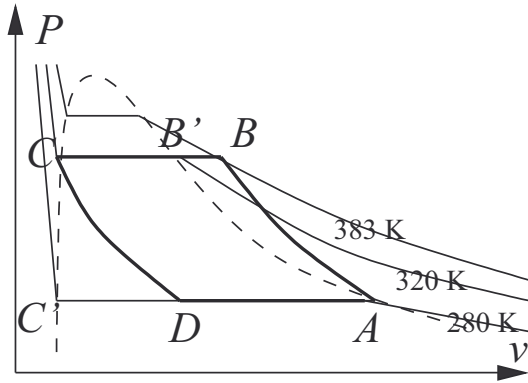
- b) A est le point de rosée donc $x_A = 1$. C est le point d'ébullition donc $x_C = 0$. La transformation (CD) est isenthalpique. L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut la décomposer en (CC') refroidissement à l'état liquide de T_C à $T_{C'} = T_D$ puis (C'D) vaporisation partielle isobare et isotherme.

$$\Delta h = \Delta h_{CC'} + \Delta h_{C'D} = 0 \text{ soit}$$

$$c_\ell (T_{C'} - T_C) + x_D \Delta_{vap} h = 0 \text{ donc}$$

$$x_D = \frac{c_\ell (T_C - T_D)}{\Delta_{vap} h} = 0,40$$

- c) On veille à respecter $P_B = 3P_A$ et la position de D à $4/10^e$ sur le palier de changement d'état conformément au théorème des moments.



d) L'énergie utile est l'énergie thermique apportée à l'air de la pièce ou à l'eau de la piscine donc $-q_{BC}$. En appliquant le premier principe industriel entre ces deux points, et en décomposant la transformation en $(BB'C)$:

$$q_{BC} = \Delta h_{BB'} + \Delta h_{B'C} = c_p(T_{B'} - T_B) + \Delta_{liq} h$$

La capacité thermique à pression constante d'un système de n moles de gaz parfait est $C_p = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1}$ donc

$$c_p = \frac{C_p}{m} = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} = 582 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

L'enthalpie massique de liquéfaction est opposée à celle de vaporisation donc

$$q_{BC} = 582 \cdot (320 - 383) - 1,43 \cdot 10^5 = -1,80 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

L'énergie gratuite est celle reçue par le fluide de la part de l'eau du lac donc

$$q_{DA} = \Delta h_{DA} = (1 - x_D) h_{vap} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

L'énergie coûteuse est le travail reçu de la part du compresseur (lui-même alimenté par une source électrique) donc $w_u(AB)$. Insistons ici sur le fait que $w_{AB} \neq w_u(AB)$, le travail total étant la somme du travail exercé par les parties mobiles du compresseur et des travaux des forces de pression à l'entrée et à la sortie du compresseur. En appliquant le premier principe industriel :

$$w_u(AB) = \Delta h_{AB} = c_p(T_B - T_A) = 0,60 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

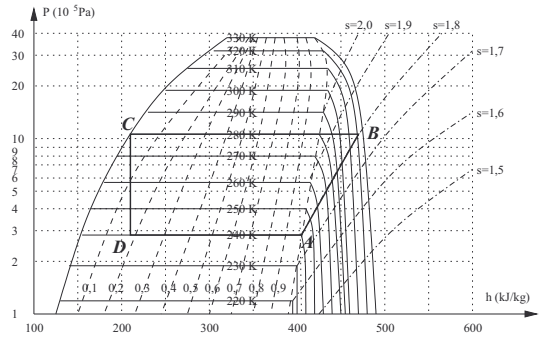
On vérifie que la somme des variations d'enthalpie massique est nulle, conformément au caractère de fonction d'état de h . L'efficacité est le rapport entre l'énergie utile et l'énergie coûteuse :

$$\eta = \frac{-q_{BC}}{w_u(AB)} = 3,0$$

Elle est supérieure à 1, on a en effet une énergie utile supérieure à l'énergie coûteuse car on a bénéficié d'une énergie gratuite.

11.12

a) Le point de rosée A est à l'extrémité droite du palier de vaporisation à 240 K. De A à B, on suit la ligne isentropique jusqu'à son intersection avec l'isotherme 320 K. De B à C, l'isobare est une horizontale et C est son intersection avec la courbe d'ébullition, à l'extrémité gauche du palier. De C à D, l'isenthalpique est une verticale. Comme (DA) est une vaporisation isobare elle est aussi isotherme et D est donc aussi sur l'isotherme à 240 K. Voici l'allure du cycle tracé sur le diagramme.



On peut lire directement sur le diagramme les valeurs numériques :

	A	B	C	D
P (bar)	2,9	11	11	2,9
T (K)	240	320	280	240
x	1	1	0	0,18
h (kJ/kg)	405	470	210	210

b) L'énergie utile est l'énergie thermique reçue du système qu'on réfrigère :

$$q_{DA} = \Delta h_{DA} = h_A - h_D = 195 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

L'énergie coûteuse est le travail utile reçu de la part du compresseur :

$$w_u(AB) = \Delta h_{AB} = h_B - h_A = 65 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

On en déduit

$$\eta = \frac{q_{DA}}{w_u(AB)} = 3,0$$

11.13

a) L'air assimilé à un gaz parfait subit une compression adiabatique réversible entre A et B donc la loi de Laplace donne

$$P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma = P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma \text{ donc}$$

$$T_B = T_A \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 459 \text{ K}$$

L'échauffement (BC) est isobare donc

$$P_C = P_B = 5P_A = 5,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Le travail utile récupéré par la turbine entre C et D étant intégralement restitué au compresseur, en appliquant le premier principe à ces deux unités :

$$w_u(AB) + w_u(CD) = 0 \Leftrightarrow \Delta h_{AB} + \Delta h_{CD} = 0 \text{ soit}$$

$$c_p [(T_B - T_A) + (T_D - T_C)] = 0 \text{ donc}$$

$$T_D = T_C - (T_B - T_A) = 1331 \text{ K}$$

La loi de Laplace entre C et D donne

$$P_D = P_C \left(\frac{T_C}{T_D} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 3,29 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

La loi de Laplace entre D et E donne

$$T_E = T_D \left(\frac{P_D}{P_E} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 947 \text{ K}$$

- b) Le premier principe industriel appliqué à la transformation (DE) dans la tuyère donne

$$h_D + 0 = h_E + \frac{1}{2} V_E^2 \text{ donc}$$

$$V_E = \sqrt{2\Delta h_{ED}} = \sqrt{2c_p(T_D - T_E)}$$

La capacité thermique à pression constante d'un système de n moles de gaz parfait est $C_p = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1}$ donc

$$c_p = \frac{C_p}{m} = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} = 1,00 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

On en déduit $V_E = 876 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (environ deux fois la vitesse du son).

- c) Le rendement est l'énergie utile, c'est-à-dire l'énergie cinétique du gaz expulsé par la tuyère, divisée par l'énergie coûteuse, c'est-à-dire l'énergie thermique reçue par le gaz entre B et C. En appliquant le premier principe industriel à cette transformation

$$q_{BC} = \Delta h_{BC} = c_p(T_C - T_B) = 1,04 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

donc $\rho = \frac{\frac{1}{2} V_E^2}{q_{BC}} = 37\%$. Les puissances sont égales aux énergies massiques multipliées par le débit massique :

$$\mathcal{P}_{\text{cin}} = D_m \cdot \frac{1}{2} V_E^2 = 15,3 \text{ MW}$$

$$\mathcal{P}_{\text{therm}} = D_m \cdot q_{BC} = 41,6 \text{ MW}$$

11.14

- a) Par application du premier principe industriel, la variation d'énergie cinétique est nulle, le travail utile est nul car il n'y a pas de pièce mobile et il n'y a pas de transfert thermique donc

$$(h_2 - h_1) + g(z_2 - z_1) = 0 \text{ soit } c_p(T_2 - T_1) + g(z_2 - z_1) = 0$$

La capacité thermique molaire à pression constante du gaz parfait est $C_{p,m} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ donc sa capacité massique est $c_p = \frac{C_{p,m}}{M}$ d'où

$$T_2 = T_1 - \frac{Mg(z_2 - z_1)}{\frac{\gamma R}{\gamma - 1}}$$

- b) L'entropie échangée est nulle car le transfert thermique est nul. L'entropie créée est donc égale à la variation d'entropie. Par application de la seconde identité thermodynamique :

$$dh = v dP + T ds \text{ donc } ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dP$$

La loi des gaz parfaits donne

$$PV = nRT \Rightarrow Pv = \frac{RT}{M} \text{ donc}$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{R}{M} \frac{dP}{P}$$

En intégrant entre les deux états

$$s_{\text{cr}} = \Delta s = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{M} \ln \frac{P_2}{P_1}$$

- c) L'entropie créée par unité de temps est

$$\dot{S} = D_m \cdot s_{\text{cr}}$$

11.15

- a) La loi de Laplace s'écrit

$$P\mu^{-\gamma} = P_0\mu_0^{-\gamma}$$

- b) Notons que la loi de Bernoulli n'est pas adaptée ici car le fluide, gaz parfait, n'est pas en écoulement incompressible. Par application du premier principe industriel entre l'abscisse 0 et l'abscisse x , la tuyère étant horizontale, sans partie mobile et adiabatique :

$$[h(x) - h(0)] + \left[\frac{1}{2}V^2(x) - \frac{1}{2}V_0^2 \right] = 0$$

La capacité thermique molaire à pression constante du gaz parfait est $C_{p,m} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ donc sa capacité massique est $c_p = \frac{C_{p,m}}{M}$ donc, en négligeant V_0 devant $V(x)$:

$$\frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}(T_0 - T(x)) = \frac{1}{2}V^2(x)$$

La loi de Laplace permet de relier pressions et températures :

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = T_0^\gamma P_0^{1-\gamma} \text{ donc } T = T_0 \frac{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

On en déduit

$$V(x) = \sqrt{\frac{2\gamma RT_0}{M(\gamma - 1)} \left(1 - \frac{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right)}$$

De plus $P_0 M = \mu_0 R T_0$ donc

$$V(x) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{P_0}{\mu_0} \left(1 - \frac{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{P_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right)}$$

- c) On a $D_m = \mu(L)S(L)V(L)$. D'après l'énoncé, $S(L) = S_1$. De plus, $\mu(L)$ est donné par la loi de la première question :

$$\mu(L) = \mu_0 \frac{P_1^{\frac{1}{\gamma}}}{P_0^{\frac{1}{\gamma}}} = \mu_0 u^{\frac{1}{\gamma}}$$

La vitesse s'exprime elle-aussi en fonction de γ grâce au résultat de la deuxième question :

$$V(L) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{P_0}{\mu_0}} \cdot \sqrt{1 - u^{1 - \frac{1}{\gamma}}}$$

En posant $C = \mu_0 S_1 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{P_0}{\mu_0}}$, on obtient bien la formule donnée par l'énoncé.

- d) On dérive l'expression par rapport à u et on écrit qu'elle est nulle lorsque D_m est maximal. On obtient, après calculs $u^{\frac{1}{\gamma}-1} = \frac{\gamma+1}{2}$ donc

$$P = P_0 \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

11.16

- a) L'hydroglisseur est soumis à son poids et aux forces de pression de l'air. Celles-ci se compensent à l'horizontale. En négligeant s devant S , la condition d'équilibre s'écrit, en projection sur un axe vertical :

$$+P_i S - P_a S - Mg = 0 \text{ donc } P_i = P_a + \frac{Mg}{S}$$

- b) Il faut établir deux relations pour trouver ces deux inconnues. La première est la conservation du débit volumique, en faisant très attention au fait que la section de sortie est $2\pi R h$ (et non S) :

$$V_e s = V_s \cdot 2\pi R h$$

La seconde est l'application de la loi de Bernoulli entre un point situé dans le conduit d'arrivée de l'air juste après le ventilateur (à la pression P_i et à la vitesse V_e) et un point sur la même ligne de courant à la sortie (à la pression P_a et à la vitesse V_a). En négligeant les termes de pesanteur :

$$P_i + \frac{1}{2}\mu V_e^2 = P_a + \frac{1}{2}\mu V_s^2$$

En utilisant la relation de la première question et en remplaçant V_e par son expression en fonction de V_s , on en déduit

$$\frac{Mg}{S} + \frac{1}{2}\mu V_s^2 \frac{4\pi^2 R^2 h^2}{s^2} = \frac{1}{2}\mu V_s^2$$

donc $V_s = 4,27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $V_e = 4,02 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- c) Effectuons un bilan d'énergie mécanique entre l'entrée et la sortie du ventilateur, dans le conduit d'entrée de l'air de section s . On néglige les effets de la pesanteur donc l'énergie mécanique s'identifie à l'énergie cinétique. Le système ouvert Σ est constitué par l'air qui se trouve dans le conduit. Les actions qu'il subit sont les forces de pression extérieures, intérieures et celle du ventilateur. L'air étant supposé incompressible et le tuyau ayant une section constante, la vitesse se conserve de part et d'autre du ventilateur. Le bilan s'écrit donc

$$\frac{\left[Em_\Sigma(t + dt) + \frac{1}{2}\mu V_e s \cdot V_e^2 dt \right] - \left[Em_\Sigma(t) + \frac{1}{2}\mu V_e s \cdot V_e^2 dt \right]}{dt} =$$

$$+P_a s \cdot V_e - P_i s \cdot V_e + \mathcal{P}$$

$$\text{donc } \mathcal{P} = (P_i - P_a) \cdot s \cdot V_e = \frac{Mg V_e s}{S} = 4,1 \text{ kW}$$

Le coût énergétique est donc $\mathcal{E} = \mathcal{P} \cdot 3600 = 14,8 \text{ MJ}$.

11.17

a) Par application de la loi de Bernoulli :

$$P_1 + \mu \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \mu \frac{v_2^2}{2}$$

b) Par conservation du débit en régime permanent

$$\mu v_1 S_1 = \mu v_2 S_2$$

c) On travaille sur le système ouvert Σ du fluide dans le tuyau.

- À t , le système fermé associé est la réunion de $\Sigma(t)$ et de la masse entrante $dm_e = \mu v_1 S_1 dt$ à la vitesse $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_x$.
- À $t + dt$, le système fermé associé est la réunion de $\Sigma(t + dt)$ et de la masse sortante $dm_s = \mu v_2 S_2 dt$ à la vitesse $\vec{v}_2 = v_2 \cos \theta \vec{u}_x + v_2 \sin \theta \vec{u}_y$.

En régime permanent, la quantité de mouvement de $\Sigma(t)$ est égale à celle de $\Sigma(t + dt)$. La loi de la quantité de mouvement s'écrit donc

$$\vec{f}_{\text{tuy} \rightarrow \text{flu}} + P_1 S_1 \vec{u}_x - P_2 S_2 \cos \theta \vec{u}_x - P_2 S_2 \sin \theta \vec{u}_y = \frac{\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t)}{dt}$$

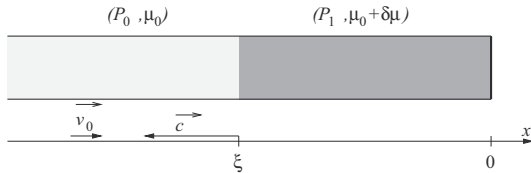
$$= \left[\mu S_2 v_2^2 \cos \theta - \mu S_1 v_1^2 \right] \vec{u}_x + \mu S_2 v_2^2 \sin \theta \vec{u}_y$$

On en déduit, d'après la troisième loi de Newton :

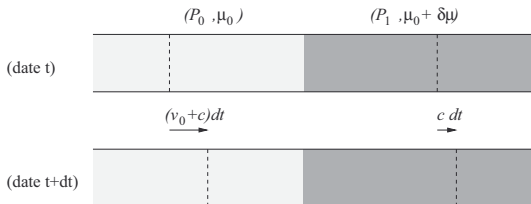
$$\vec{f}_{\text{flu} \rightarrow \text{tuy}} = -\vec{f}_{\text{tuy} \rightarrow \text{flu}} = \left[(P_1 + \mu v_1^2) S_1 - (P_2 + \mu v_2^2) S_2 \cos \theta \right] \vec{u}_x - \left[(P_2 + \mu v_2^2) S_2 \sin \theta \right] \vec{u}_y$$

11.18

a) Le schéma est le suivant.



b) On passe du référentiel \mathcal{R}_0 au référentiel \mathcal{R} en retranchant \vec{c} à toutes les vitesses. Ainsi, la surface fictive est immobile, le fluide semble arriver à la vitesse $(v_0 + c) \vec{u}_x$ à gauche et s'éloigner à la vitesse $c \vec{u}_x$ à droite.



c) La masse entrante est dm_e , la masse sortante est dm_s , et en régime permanent $dm_e = dm_s$, soit :

$$\mu_0 \cdot S(v_0 + c) dt = (\mu_0 + \delta \mu) \cdot S c dt \text{ donc (i) } \mu_0 v_0 = c \delta \mu$$

d) Les forces sont celles de pression. La loi de la quantité de mouvement s'écrit :

$$+P_0 S \vec{u}_x - P_1 S \vec{u}_x =$$

$$\frac{(\mu_0 + \delta \mu) \cdot S c dt \cdot [\vec{P}_\Sigma(t + dt) + (\mu_0 + \delta \mu) \cdot S c dt \cdot c \vec{u}_x]}{dt}$$

$$\frac{[\vec{P}_\Sigma(t) + \mu_0 \cdot S(v_0 + c) dt \cdot (v_0 + c) \vec{u}_x]}{dt}$$

En régime permanent, $\vec{P}_\Sigma(t + dt) = \vec{P}_\Sigma(t)$ et après simplification (ii) $(\mu_0 + \delta \mu) c^2 - \mu_0 (v_0 + c)^2 = P_0 - P_1$.

e) Le système évolue de façon isentropique en l'absence de forces de viscosité.

f) On assimile

$$\chi_S = \frac{1}{\mu} \frac{\mu_1 - \mu_0}{P_1 - P_0} \text{ donc (iii) } \delta \mu = \mu_0 \chi_S (P_1 - P_0)$$

g) En combinant les trois équations, il vient $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$.

h) Le gaz parfait en évolution isentropique suit la loi de Laplace

$$P V^\gamma = P_0 V_0^\gamma \text{ donc } P \mu^{-\gamma} = P_0 \mu_0^{-\gamma} \text{ donc } \mu = \mu_0 \frac{P_0^\gamma}{P^\gamma}$$

$$\text{donc } \chi_S = \frac{1}{\mu_0 \frac{P_0^\gamma}{P_0^\gamma}} \cdot \mu_0 \frac{1}{P_0^\gamma} \frac{P_0^{\gamma-1}}{P_0^\gamma} = \frac{1}{\gamma P_0}$$

On en déduit $c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}$. Or la loi des GP s'écrit $PM = \mu RT$ donc

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{7}{5} \cdot 8,314 \cdot 300}{0,029} = 347 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

C'est la vitesse du son, considéré à une discontinuité subite de pression.

11.19

Par formule de composition des vitesses, on passe du référentiel de la berge au référentiel du mascaret en ajoutant $+c\vec{u}_x$ à chaque vitesse : l'eau à gauche va à la vitesse $+c\vec{u}_x$ (donc dans le référentiel du surfeur elle vient vers lui), le mascaret est immobile et l'eau à droite va à la vitesse $(c - v_1)\vec{u}_x$ (donc dans le référentiel du surfeur elle s'éloigne de lui). On est en régime permanent, donc on peut écrire la conservation de la masse sous la forme $dm_s = dm_e$ soit

$$\mu c L h_0 dt = \mu (c - v_1) L h_1 dt \text{ soit } ch_0 = (c - v_1) h_1$$

On calcule le champ des pressions sur les faces verticales de gauche et de droite :

- à gauche, pour $z \in [0, h_0]$: $P(z) = P_0 + \mu g(h_0 - z)$
- à gauche, pour $z \in [h_0, h_1]$: $P(z) = P_0$
- à droite, pour $z \in [0, h_1]$: $P(z) = P_0 + \mu g(h_1 - z)$.

On applique la loi de la quantité de mouvement sur le système ouvert s'étendant de part et d'autre du mascaret :

$$\int_{y=0}^L \int_{z=0}^{h_0} (P_0 + \mu g(h_0 - z)) dy dz \vec{u}_x + \int_{y=0}^L \int_{z=h_0}^{h_1} P_0 dy dz \vec{u}_x -$$

$$\int_{y=0}^L \int_{z=0}^{h_1} (P_0 + \mu g(h_1 - z)) dy dz \vec{u}_x =$$

$$\frac{\mu(c - v_1)Lh_1 dt(c - v_1)\vec{u}_x - \mu c L h_0 dt c \vec{u}_x}{dt}$$

$$\text{donc } \mu g L \left[\frac{h_0^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} \right] = \mu L h_1 (c - v_1)^2 - \mu L h_0 c^2$$

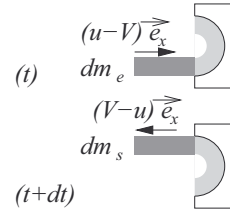
On résout le système et on trouve $c = \sqrt{\frac{gh_1(h_0 + h_1)}{2h_0}}$. Si le mascaret est de hauteur négligeable par rapport à la profondeur de l'eau, alors $h_1 \simeq h_0$ et $c \simeq \sqrt{gh}$.

11.20

a) Le référentiel adapté au problème est celui de l'auget, en translation à la vitesse $V\vec{u}_x$. Dans ce référentiel, on est en régime permanent. L'eau arrive, par composition des vitesses, à la vitesse relative $(u - V)\vec{u}_x$. Comme la section du jet de retour est la même que celle du jet incident, et comme l'eau est incompressible, la conservation du débit entraîne celle de la vitesse. Le jet de retour a donc une vitesse $-(u - V)\vec{u}_x$ dans le référentiel de l'auget, donc sa vitesse dans le référentiel terrestre est

$$-(u - V)\vec{u}_x + V\vec{u}_x = (2V - u)\vec{u}_x$$

b) On effectue un bilan de quantité de mouvement sur le système ouvert formé de l'eau ($\Sigma(t)$) dans l'auget et de la masse entrante dm_e à la date t , de l'eau dans l'auget ($\Sigma(t + dt)$) et de la masse sortante dm_s à la date $t + dt$.



Comme on néglige les forces de pression de l'air, ce système est soumis à la force exercée par l'auget sur l'eau. La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{f}_{\text{auget} \rightarrow \text{eau}} = \frac{[\vec{P}_{\Sigma}(t + dt) + dm_s(V - u)\vec{u}_x] - [\vec{P}_{\Sigma}(t) + dm_e(u - V)\vec{u}_x]}{dt}$$

On est en régime permanent donc

$$\vec{P}_{\Sigma}(t + dt) = \vec{P}_{\Sigma}(t)$$

Les masses entrante et sortante sont égales :

$$dm_e = dm_s = \mu(u - V)sd t$$

On en déduit

$$\vec{f}_{\text{auget} \rightarrow \text{eau}} = -2\mu s(u - V)^2 \vec{u}_x$$

et par principe d'action-réaction :

$$\vec{f}_{\text{eau} \rightarrow \text{auget}} = 2\mu s(u - V)^2 \vec{u}_x$$

c) La puissance de la force du jet est exprimée dans le référentiel terrestre :

$$\mathcal{P} = \vec{f}_{\text{eau} \rightarrow \text{auget}} \cdot \vec{V} = 2\mu s(u - V)^2 V$$

d) La puissance cinétique incidente est celle du jet. Pendant dt , une masse $\mu usdt$ d'eau est fournie à la vitesse u donc

$$\mathcal{P}_c = \frac{\frac{1}{2} \mu usdt \cdot u^2}{dt} = \frac{1}{2} \mu s u^3$$

Le rendement est donc

$$\rho = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_c} = \frac{2\mu s(u - V)^2 V}{\frac{1}{2} \mu s u^3}$$

$$\text{soit } \rho = 4 \frac{(u - V)^2 V}{u^3}$$

À V fixé, ρ est une fonction de u dont la dérivée est

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = \frac{4(u - V)V(3V - u)}{u^4}$$

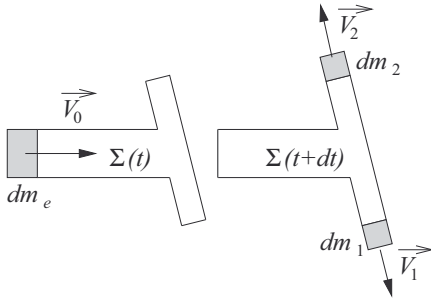
Elle est maximale quand cette dérivée est nulle donc pour $u = 3V$ et $\rho_{\text{max}} = \frac{16}{27}$. À u fixé, ρ est une fonction de V dont la dérivée est

$$\frac{\partial \rho}{\partial V} = \frac{4(u - V)(u - 3V)}{u^3}$$

Elle est maximale quand cette dérivée est nulle, donc là-aussi pour $u = 3V$ et $\rho_{\text{max}} = \frac{16}{27}$.

11.21

- a) Choisissons une surface de contrôle qui englobe les trois branches du jet. Le système étudié est formé de l'eau $\Sigma(t)$ contenue dans cette surface et de la masse entrante dm_e à la date t , et de l'eau $\Sigma(t+dt)$ contenue dans cette surface et les deux masses sortantes dm_1 et dm_2 à la date $t+dt$.



La conservation de la masse donne

$$m_{\Sigma}(t+dt) + dm_1 + dm_2 = m_{\Sigma}(t) + dm_e$$

$$\text{soit } \mu V_0 e L dt = \mu V_1 e_1 L dt + \mu V_2 e_2 L dt$$

$$\text{donc } e V_0 = e_1 V_1 + e_2 V_2$$

La loi de Bernoulli entre un point à l'entrée et un point à l'une des deux sorties donne

$$\begin{cases} P_0 + \frac{1}{2} \mu V_0^2 + 0 = P_0 + \frac{1}{2} \mu V_1^2 + 0 \\ P_0 + \frac{1}{2} \mu V_0^2 + 0 = P_0 + \frac{1}{2} \mu V_2^2 + 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } V_0 = V_1 = V_2 \text{ donc } e = e_1 + e_2$$

Le fluide étant non visqueux, la force exercée par le fluide sur la plaque est perpendiculaire à celle-ci, donc dirigée selon \vec{n} . Les forces de pression de l'air sur la face de droite de la plaque sont elles-aussi selon \vec{n} . La plaque étant immobile, \vec{F} est donc elle-aussi dans cette direction, soit

$$\vec{F} = -F \vec{n}$$

Considérons le système Σ' formé de la juxtaposition de la plaque et du système fluide Σ considéré ci-dessus. Les forces d'interaction entre la plaque et l'eau sont des forces intérieures et leur somme est donc nulle. L'intérêt de ce choix est que la somme des forces de pression de l'air est nulle car ce système baigne dans l'air à la pression uniforme P_0 . La seule force extérieure est donc \vec{F} puisqu'on néglige le poids. Appliquons maintenant la loi de la quantité de mouvement.

$$\vec{F} = \frac{[\vec{P}_{\Sigma'}(t+dt) + dm_1 \vec{V}_1 + dm_2 \vec{V}_2] - [\vec{P}_{\Sigma'}(t) + dm_e \vec{V}_0]}{dt}$$

$$\vec{F} = \mu V_0^2 e_1 L \vec{\tau} + \mu V_0^2 e_2 L (-\vec{\tau}) - \mu V_0^2 e L \vec{u}_x$$

En projetant sur l'axe $\vec{\tau}$, on obtient

$$\mu V_0^2 e_1 L - \mu V_0^2 e_2 L + \mu V_0^2 e L \sin \alpha = 0$$

$$\text{soit } e_1 - e_2 = e \sin \alpha$$

Le système se résout aisément :

$$\begin{cases} e = e_1 + e_2 \\ e_1 - e_2 = e \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{e}{2}(1 + \sin \alpha) \\ e_2 = \frac{e}{2}(1 - \sin \alpha) \end{cases}$$

- b) En projetant la loi de la quantité de mouvement sur l'axe \vec{n} :

$$-F = -\mu V_0^2 e L \cos \alpha \text{ donc } \vec{F} = -\mu V_0^2 e L \cos \alpha \vec{n}$$

11.22

- a) Appliquons le premier principe industriel. $\Delta u = 0$ et $h = u + Pv$ donc

$$\Delta h = \Delta u + v \Delta P = \frac{\Delta P}{\mu}$$

La pression à la sortie est $P_s = P_0$, et à l'entrée, si la vitesse reste faible, $P_e = P_0 + \mu g H$. On en déduit

$$\Delta h = -gH$$

La variation d'énergie cinétique est nulle car les sections sont égales et l'eau incompressible. Le premier principe s'écrit donc

$$-gH + 0 + g(h - (-H)) = w_u + 0$$

Pendant dt , la masse traitée par la pompe est $dm = D_0 dt$ donc le travail fourni par la pompe est

$$\delta W = dm \cdot w_u = D_0 g h dt$$

On en déduit la puissance

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = D_0 g h$$

- b) Faisons un bilan d'énergie mécanique. sur le système formé de l'eau $\Sigma(t)$ dans le corps de la pompe et de la masse entrante $dm_e = D_0 dt$ à la date t , et de l'eau $\Sigma(t+dt)$ dans le corps de la pompe et de la masse sortante $dm_s = D_0 dt$ à la date $t+dt$. Les altitudes sont $z_e = 0$ et $z_s = H$, les vitesses sont égales car la section est la même et le fluide est incompressible. En plus de la puissance de la pompe, il faut prendre en compte les puissances des forces de pression à l'entrée et à la sortie :

$$\mathcal{P}_e = (P_0 + \mu g H) S_0 \cdot V_e = \frac{(P_0 + \mu g H) D_0}{\mu}$$

$$\mathcal{P}_s = -P_0 S_0 \cdot V_s = -\frac{P_0 D_0}{\mu}$$

La loi de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} + \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_s &= \\ \frac{[Em_\Sigma(t+dt) + \frac{1}{2}D_0 dt V_s^2 + D_0 dt gz_s]}{dt} &= \\ \frac{[Em_\Sigma(t) + \frac{1}{2}D_0 dt V_e^2 + D_0 dt gz_e]}{dt} &= \\ \text{donc } \mathcal{P} + D_0 gH &= D_0 g(H+h) \\ \text{soit } \mathcal{P} &= D_0 gh \end{aligned}$$

- c) Les pales de la pompe sectionnent les lignes de courant et la loi de Bernoulli n'est pas applicable.

11.23

- a) La loi des gaz parfaits s'écrit

$$aP_0M = \mu_e RT_e \text{ donc } \mu_e = \frac{aP_0M}{RT_e}$$

Le débit massique vaut

$$D_m = \mu_e V_e S \text{ donc } V_e = \frac{D_m}{\mu_e S} = \frac{D_m RT_e}{aP_0MS}$$

- b) Le système étudié est formé du gaz $\Sigma(t)$ dans la canalisation et de la masse entrante $dm_e = D_m dt$ à la date t , et du gaz $\Sigma(t+dt)$ dans la canalisation et de la masse sortante $dm_s = D_m dt$ à la date $t+dt$. Il est soumis aux forces de pression à l'entrée et à la sortie. La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\begin{aligned} +aP_0S\bar{u}_x - P_0S\bar{u}_x &= \\ \frac{[\bar{P}_\Sigma(t+dt) + D_m dt V_s \bar{u}_x] - [\bar{P}_\Sigma(t) + D_m dt V_e \bar{u}_x]}{dt} &= \end{aligned}$$

On est en régime permanent donc $\bar{P}_\Sigma(t+dt) = \bar{P}_\Sigma(t)$. On en déduit

$$P_0S(a-1) = D_m(V_s - V_e) \text{ donc } V_s = V_e + \frac{P_0S(a-1)}{D_m}$$

La conservation du débit donne

$$D_m = \mu_s V_s S \text{ donc } \mu_s = \frac{D_m}{V_s S}$$

La loi des gaz parfaits donne

$$T_s = \frac{P_0M}{\mu_s R}$$

- c) La variation d'énergie interne du système est

$$\begin{aligned} dU &= [U_\Sigma(t+dt) + dU_s] - [U_\Sigma(t) + dU_e] \\ &= \frac{D_m dt}{M} C_{V,m}(T_s - T_e) \end{aligned}$$

La variation d'énergie cinétique est

$$\begin{aligned} dEc &= [Ec_\Sigma(t+dt) + dEc_s] - [Ec_\Sigma(t) + dEc_e] \\ &= \frac{1}{2} D_m dt (V_s^2 - V_e^2) \end{aligned}$$

La variation d'énergie potentielle de pesanteur est nulle car la canalisation est horizontale. Le travail reçu est celui des forces de pression

$$\delta W = aP_0S \cdot V_e dt - P_0S \cdot V_s dt$$

Le bilan d'énergie totale s'écrit

$$\begin{aligned} dU + dEc + dEp &= \delta W + \delta Q \\ \text{donc } \mathcal{P}_{th} &= \frac{\delta Q}{dt} = \\ D_m \left[\frac{C_{V,m}(T_s - T_e)}{M} + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} \right] &+ P_0S(V_s - V_e) \end{aligned}$$

11.24

Le débit d'air est

$$D_m = \mu_s S \cdot V_s$$

La loi des gaz parfaits s'écrit

$$PM = \mu RT \text{ donc } \mu_s = \frac{PM}{RT_s}$$

On en déduit que

$$V_s = \frac{D_m}{S\mu_s} = \frac{D_m RT_s}{SPM}$$

Appliquons le premier principe en système ouvert entre l'entrée et la sortie :

$$ec_s - ec_e + ep_s - ep_e + h_s - h_e = w_u + q$$

- La vitesse à l'entrée est presque nulle et elle vaut V_s à la sortie.
- Les altitudes sont les mêmes donc $ep_s = ep_e$.
- L'air étant assimilé à un gaz parfait :

$$h_s - h_e = c_p(T_s - T_e) = \frac{C_{Pm}}{M} \Delta T$$

- Le travail utile est $w_u = \frac{\mathcal{P}_m}{D_m}$ et l'énergie thermique massique $q = \frac{\mathcal{P}_{th}}{D_m}$.

On en déduit que

$$\frac{V_s^2}{2} + \frac{C_{pm}}{M} \Delta T = \frac{\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_{th}}{D_m}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \mathcal{P}_m = \frac{D_m V_s^2}{2} \\ \mathcal{P}_{th} = \frac{D_m C_{pm}}{M} = \frac{\gamma R D_m}{(\gamma - 1) M} \Delta T \end{cases}$$

11.25

a) On note Σ le système ouvert formé de l'eau dans la zone d'affluence. On forme un système fermé en adjoignant à $\Sigma(t)$ les deux masses d'eau entrantes dm_1 et dm_2 venant des deux affluents à gauche pendant dt , puis en adjoignant à $\Sigma(t + dt)$ la masse d'eau sortante dm_s par le grand canal à droite pendant dt . La loi de conservation de la masse s'écrit $dm_s = dm_1 + dm_2$ soit

$$\mu V \cdot 2Lh \cdot dt = \mu V_1 \cdot Lh \cdot dt + \mu V_2 \cdot Lh \cdot dt$$

$$\text{donc } V = \frac{V_1 + V_2}{2} = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Par application de la loi de Bernoulli entre un point à la surface de l'eau à l'altitude h où la vitesse vaut V_1 ou V_2 ou V selon la branche choisie et un point dans l'eau à l'altitude z où la vitesse vaut V_1 ou V_2 ou V , on a

$$P_0 + \mu \frac{V^2}{2} + \mu g h = P(z) + \mu \frac{V^2}{2} + \mu g \cdot 0$$

$$\text{donc } P(z) = P_0 + \mu g(h - z)$$

La somme des puissances des forces de pression sur les trois sections vaut

$$\mathcal{P}_1 = \int_{z=0}^h \int_{y=0}^L P(z) \cdot dy \cdot dz \cdot V_1$$

$$\mathcal{P}_2 = \int_{z=0}^h \int_{y=0}^L P(z) \cdot dy \cdot dz \cdot V_2$$

$$\mathcal{P} = - \int_{z=0}^{2h} \int_{y=0}^L P(z) \cdot dy \cdot dz \cdot V$$

$$\text{donc } \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P} = V_1 I_1 + V_2 I_2 - VI$$

Il est immédiat que $I = 2I_1 = 2I_2$ donc

$$\mathcal{P} = I \left(\frac{V_1 + V_2}{2} - V \right) = 0$$

c) Le champ des vitesses n'est pas uniforme dans la zone d'affluence : les particules de fluide venant de l'affluent 1 sont plus rapides que celles de l'affluent 2 ; or après cette zone, le champ redevient uniforme. Il y a donc eu homogénéisation par l'action des forces de viscosité \vec{f}_V (la transformation est donc irréversible et il y a eu création d'entropie). Ce sont des forces intérieures.

d) Par application de la loi de la puissance cinétique :

$$\frac{dEc}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}_V) \text{ soit}$$

$$\mathcal{P}(\vec{f}_V) = \frac{\left[Ec_{\Sigma}(t + dt) + \frac{1}{2}(\mu v \cdot 2Lh \cdot dt) v^2 \right]}{dt} -$$

$$\frac{\left[Ec_{\Sigma}(t) + \frac{1}{2}(\mu v_1 \cdot Lh \cdot dt) v_1^2 + \frac{1}{2}(\mu v_2 \cdot Lh \cdot dt) v_2^2 \right]}{dt}$$

On est en régime permanent donc $Ec_{\Sigma}(t + dt) = Ec_{\Sigma}(t)$. Par suite

$$\mathcal{P}(\vec{f}_V) = \frac{1}{2} \mu Lh (2v^3 - v_1^3 - v_2^3) = -300 \text{ kW}$$

Elle est négative, ce qui correspond bien à une dissipation, elle donne un peu d'échauffement, des remous, des vagues et du bruit.

Quatrième partie

Électromagnétisme

CHAPITRE 12

Transport de charges

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Densité volumique de charges.
- ◇ Densité volumique de courants.
- ◇ Bilan macroscopique de charges.
- ◇ Équation locale de conservation de la charge.
- ◇ Intensité du courant électrique.
- ◇ Modèle de Drude.
- ◇ Loi d'Ohm locale.
- ◇ Loi d'Ohm.
- ◇ Résistivité, conductivité, résistance.
- ◇ Effet Hall.
- ◇ Effet Joule.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Faire un bilan de charges.
- ◇ Décrire les courants électriques en régime stationnaire.
- ◇ Construire un modèle explicatif de la résistivité électrique.
- ◇ Exprimer la résistance électrique d'un conducteur.
- ◇ Décrire l'effet Hall.
- ◇ Faire un bilan de puissance Joule.

Les méthodes à retenir

Faire un bilan de charges.

Les grandeurs pertinentes sont la densité volumique de charges

$$\rho(M, t) = \frac{dq}{d\tau}$$

exprimée en coulomb par mètre cube et le vecteur densité de courant volumique

$$\vec{j}(M, t) = \frac{di}{dS} \vec{u}$$

exprimé en ampère par mètre carré (attention au piège !), ou encore en coulomb par seconde et par mètre carré. Un bilan de charge est un cas particulier de bilan, où la grandeur extensive est la charge en coulomb, et où le vecteur densité de courant volumique donne accès aux quantités entrantes et sortantes. La **loi locale de conservation de la charge** s'écrit

$$\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}(M, t) = 0$$

La charge totale dans un volume macroscopique \mathcal{V} est

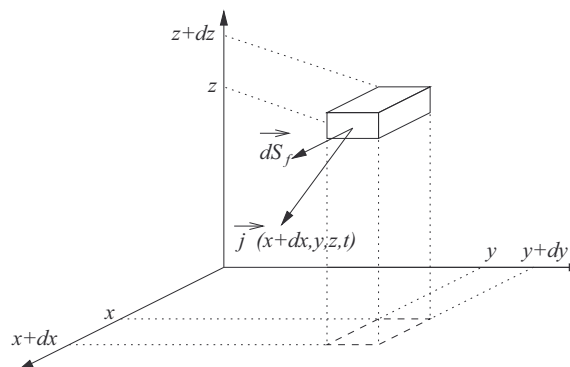
$$q(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(M, t) \cdot d\tau$$

Le courant traversant une surface macroscopique Σ orientée est

$$I(t) = \iint_{\Sigma} \vec{j}(M, t) \cdot \vec{dS}$$

Exemple :

On travaille en coordonnées cartésiennes sur un élément de volume parallélépipédique $d\tau = dx \times dy \times dz$



Le vecteur densité de courant volumique sur la facette avant (indexée f pour *front*) est $\vec{j}(x+dx, y, z, t)$, celui sur la facette arrière (indexée b pour *bottom*) $\vec{j}(x, y, z, t)$. Le vecteur surface sortant de la facette avant est $d\vec{S}_f = dy \cdot dz \vec{u}_x$, celui sortant de la facette arrière $d\vec{S}_b = -dy \cdot dz \vec{u}_x$. La charge sortant de la facette avant pendant dt est

$$dq_s = \vec{j}(x+dx, y, z, t) \cdot d\vec{S}_f \cdot dt = j_x(x+dx, y, z, t) \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

De même, la charge entrant par la facette arrière est

$$dq_e = -\vec{j}(x, y, z, t) \cdot d\vec{S}_b \cdot dt = -j_x(x, y, z, t) \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

La charge totale entrante par la paire de facettes avant-arrière est donc

$$dq_e - dq_s = -\frac{\partial j_x(x, y, z, t)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

En raisonnant de même sur les trois paires de facettes, on en déduit le bilan de charges sur l'élément $d\tau$ portant une charge $\rho \cdot d\tau$:

$$\rho(x, y, z, t + dt) dx dy dz - \rho(x, y, z, t) dx dy dz = - \left[\frac{\partial j_x(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial j_y(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial j_z(x, y, z, t)}{\partial z} \right] dx dy dz dt$$

En divisant par $dx dy dz dt$, on reconnaît à gauche

$$\frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t}$$

et à droite

$$\frac{\partial j_x(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial j_y(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial j_z(x, y, z, t)}{\partial z} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{vmatrix} = \text{div } \vec{j}$$

d'où l'équation locale de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}(M, t) = 0$$

↪ Exercices 12.1, 12.2, 12.3.

Décrire les courants électriques en régime stationnaire.

En régime stationnaire, l'équation de conservation de la charge donne $\text{div } \vec{j} = 0$. La forme macroscopique de cette relation est obtenue en appliquant le **théorème d'Ostrogradski** : soit Σ une surface fermée délimitant un volume \mathcal{V} , alors

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{j} d\tau = 0$$

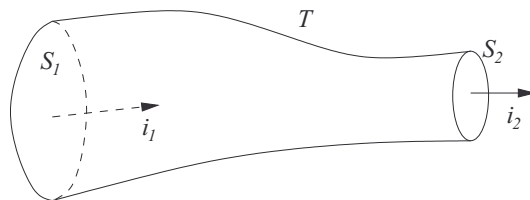
On dit que \vec{j} est à flux conservatif : l'intensité du courant entrant est toujours égale à celle du courant sortant d'une surface fermée.

Exemple :

Une **ligne de courant** est une ligne le long de laquelle \vec{j} est tangent en tout point ; un **tube de courant** \mathcal{T} est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un lacet. Si on ferme un tube de courant à chaque extrémité par des surfaces S_1 et S_2 , alors

$$\Sigma = \mathcal{T} \cup S_1 \cup S_2$$

forme une surface fermée.



En tout point du tube \mathcal{T} , \vec{j} est tangent à la surface donc orthogonal à la surface. Par suite :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{dS} + 0 + \iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0$$

En notant i_1 et i_2 les intensités traversant S_1 et S_2 , on en déduit que

$$-i_1 + i_2 = 0$$

donc l'intensité est uniforme en toute section d'un tube de courant.

↪ Exercice 12.4.

Construire un modèle explicatif de la résistivité électrique.La **loi d'Ohm locale** s'écrit

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

où γ est la **conductivité électrique** exprimée en Siemens par mètre ou $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Cette loi est la conséquence à l'échelle mésoscopique du comportement des porteurs de charge à l'échelle microscopique. Construire un modèle, c'est utiliser les lois mécaniques relatives aux porteurs de charge sous des hypothèses précisées et en déduire la loi d'Ohm par sommation sur les porteurs.

Exemple :

Le **modèle de Drude** est basé sur l'hypothèse qu'il existe n_0 porteurs de charge par unité de volume, de masse m et de charge q . Ils se déplacent sous l'action de la force de Lorentz et subissent une force de frottement fluide linéaire. La loi de la quantité de mouvement s'écrit donc

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

Si on peut négliger la force magnétique devant la force électrique, alors la vitesse limite atteinte (en régime permanent, $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$) par les porteurs est assimilée à leur vecteur vitesse moyenne

$$\langle \vec{v} \rangle = \vec{v}_{\text{lim}} = \frac{q\tau}{m} \vec{E}$$

En posant $\vec{E} = E\vec{u}$ et en considérant un élément de surface $d\vec{S} = dS\vec{u}$, les porteurs de charge qui le traversent pendant dt sont ceux situés dans un cylindre de base dS et de hauteur $\langle v \rangle dt$; il y en a donc $n_0 \langle v \rangle dt dS$, de charge totale $dq = n_0 \langle v \rangle dt dS q$, donc $\vec{j} = j\vec{u}$ avec

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \frac{dq}{dS} \vec{u} = \frac{dq}{dt dS} \vec{u} = \frac{n_0 \langle v \rangle dt dS q}{dt dS} \vec{u} \\ &= n_0 q \langle v \rangle \vec{u} = \frac{n_0 q^2 \tau}{m} \vec{E} \end{aligned}$$

donc $\gamma = \frac{n_0 q^2 \tau}{m}$.

↪ **Exercices 12.5, 12.6.**

Exprimer la résistance électrique d'un conducteur.

La **résistance électrique** R d'un conducteur ohmique est le rapport entre la tension électrique $u = V_A - V_B$ à ses bornes et l'intensité électrique i qui le traverse :

$$V_A - V_B = Ri$$

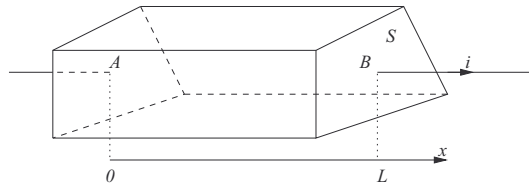
Deux méthodes conduisent à l'expression de R :

Méthode 1 Connaissant i , on exprime \vec{j} ($i = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$), on en déduit \vec{E} ($\vec{j} = \gamma\vec{E}$) puis le potentiel électrostatique V ($\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, V étant défini à une constante près, la référence est la masse où $V = 0$) et enfin $u = V_A - V_B$.

Méthode 2 Connaissant V , on exprime $u = V_A - V_B$, et on calcule \vec{E} ($\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$) puis \vec{j} ($\vec{j} = \gamma\vec{E}$) et i ($i = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$).

Exemple :

La résistance d'un conducteur ohmique prismatique, de longueur L et de section S peut être calculée par la première méthode. Soit i l'intensité traversant le conducteur, entrant par la face A et sortant par la face B.



Supposons le vecteur densité de courant volumique \vec{j} uniforme. Alors

$$\vec{j} = \frac{i}{S} \vec{u}_x \text{ donc } \vec{E} = \frac{i}{\gamma S} \vec{u}_x$$

La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ s'écrit ici $\vec{E} = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x$ donc

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{i}{\gamma S} \text{ donc } V(x) = -\frac{i}{\gamma S} x + K$$

On en déduit la tension électrique

$$u = V_A - V_B = V(0) - V(L) = \frac{iL}{\gamma S}$$

On en déduit $R = \frac{u}{i} = \frac{L}{\gamma S}$.

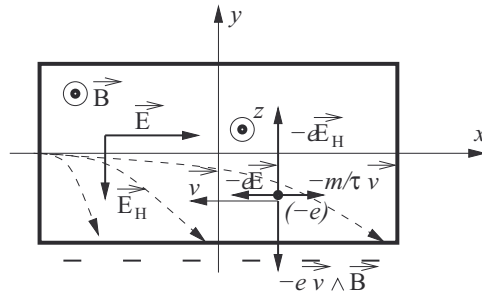
↪ Exercices 12.7, 12.8.

Décrire l'effet Hall.

Les modèles classiques de conduction électrique expliquent le courant électrique par le déplacement des électrons de conduction dans le sens opposé au courant sous l'action du champ électrique \vec{E} et des forces de frottement. Si on applique un champ magnétique extérieur \vec{B} , la force de Lorentz magnétique se superpose aux deux forces précédentes. Voici les étapes du raisonnement dans le cas d'un conducteur de section rectangulaire selon (y, z) parcouru par un courant électrique selon x , sous l'action d'un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

- La tension électrique appliquée aux bornes du conducteur crée un champ électrique $\vec{E} = E\vec{u}_x$.
- Un courant électrique s'instaure selon la loi d'Ohm locale.
- Dans un premier temps, les électrons sont déviés (flèches en pointillés sur la figure) par la force de Lorentz magnétique selon $-\vec{u}_y$.
- Leur accumulation crée un **champ électrique de Hall** \vec{E}_H selon $-\vec{u}_y$ qui se superpose au champ électrique \vec{E} .
- En régime permanent, les électrons retrouvent un mouvement moyen rectiligne uniforme selon \vec{u}_x avec un vecteur vitesse moyen $-\vec{v}\vec{u}_x$ tel que

$$-e\vec{E} - e\vec{E}_H - e\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m}{\tau} \vec{v} = \vec{0}$$



Dans cette géométrie simple, on en déduit $E_H = v \cdot B$.

Exemple :

En notant d la largeur selon y et ϵ l'épaisseur selon z du conducteur parallélépipédique, on établit (voir exercice 12.9) grâce au modèle de Drude l'expression complète du champ électrique de Hall \vec{E}_H

$$\vec{E}_H = -E_H \vec{u}_y \text{ avec } E_H = \frac{iB}{n_0 e \epsilon d}$$

On en déduit la tension électrique de Hall U_H associée, entre les faces opposées en $y = \pm \frac{d}{2}$:

$$U_H = \frac{iB}{n_0 e \epsilon}$$

La mesure de U_H grâce à un voltmètre et de i grâce à un ampèremètre donne ainsi accès à la valeur de B si on connaît celle du nombre d'électrons de conduction par mètre cube. C'est le principe du teslamètre à sonde à effet Hall.

↪ Exercices 12.9, 12.10.

Faire un bilan de puissance Joule.

La **puissance électrocinétique volumique** dissipée par **effet Joule** dans un conducteur ohmique est

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E}^2 = \frac{\vec{j}^2}{\gamma}$$

Elle est exprimée en watt par mètre cube. Faire un bilan de puissance Joule, c'est calculer la puissance totale dissipée par effet Joule par intégration tridimensionnelle dans un conducteur ohmique.

Exemple :

Pour une répartition uniforme de courant volumique dans un conducteur cylindrique d'axe (O, z) , de longueur L et de rayon a , parcouru par un courant d'intensité i , $\vec{j} = \frac{i}{\pi a^2} \vec{u}_z$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{Joule}} &= \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \frac{i^2}{\gamma \pi^2 a^4} r dr d\theta dz \\ \mathcal{P}_{\text{Joule}} &= \frac{i^2}{\gamma \pi^2 a^4} [z]_0^L [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a \\ &= \frac{L}{\gamma \pi a^2} i^2 = Ri^2 \end{aligned}$$

↪ Exercices 12.11, 12.12.

Énoncés des exercices

12.1

Bilan surfacique de charges (d'après Mines PSI (1) 2012)

Sur une plaque plane de très faible épaisseur, des charges sont réparties selon une densité surfacique $\sigma(x, y, t)$ exprimée en coulomb par mètre carré, leur déplacement est caractérisé par un vecteur densité de courant surfacique $\vec{j}_S(x, y, t)$ exprimé en ampère par mètre : sa direction est celle de déplacement des charges, et à travers une languette de largeur $d\ell$ perpendiculaire à cette direction circule un courant d'intensité $j_S \cdot d\ell$. Établir l'équation locale de conservation de la charge reliant les composantes j_x et j_y de \vec{j} et σ .

12.2

Bilan volumique radial de charges

Autour d'un axe (O, z) , on observe un mouvement radial de charges. Le vecteur densité de courant volumique s'écrit $\vec{j}(M, t) = j(r, t)\vec{u}_r$ en coordonnées cylindriques et la densité volumique de charges $\rho(M, t) = \rho(r, t)$.

- En travaillant sur l'élément de volume situé entre deux cylindres de hauteur H et de rayons r et $r + dr$, établir l'équation locale de conservation de la charge reliant $j(r, t)$ et $\rho(r, t)$.
- Exprimer l'intensité $i(r, t)$ traversant le cylindre de hauteur H et de rayon r dans le sens des r croissants.
- En régime permanent, quelle est la particularité de cette intensité ?

12.3

Bille radioactive

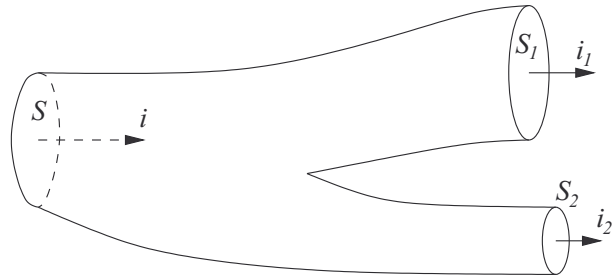
Une bille radioactive initialement neutre de rayon $R \approx 0$ émet de façon isotrope, à partir de la date $t = 0$, N particules par seconde de charge e , avec une vitesse de norme v_0 . On note $\vec{j}(r, t) = j(r, t)\vec{u}_r$ le vecteur densité de courant volumique et $\rho(r, t)$ la densité volumique de charges en un point M à la distance $r = OM$ du centre O de la bille et à la date t .

- Justifier l'existence, à la date t , d'un rayon critique $r_c(t)$ et l'exprimer.
- Déterminer la charge $Q(t)$ de la bille à la date t .
- En supposant que les particules se déplacent à une vitesse v_0 constante, Exprimer $j(r, t)$ et $\rho(r, t)$ pour $r < r_c(t)$.
- Vérifier la conservation de la charge totale du système.
- Pourquoi l'hypothèse de constance de la vitesse des particules est-elle discutable ?

12.4

Loi des nœuds

Un nœud d'un circuit électrique est modélisé par une jonction entre trois fils conducteurs canalisant le courant électrique. On note i , i_1 et i_2 les intensités des courants traversant les surfaces S , S_1 et S_2 selon le fléchage du schéma.



Montrer qu'en régime permanent $i = i_1 + i_2$.

12.5

Ordres de grandeur dans le modèle de Drude

Le cuivre pur a une conductivité $\gamma = 5,98 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, une masse volumique $\mu = 8,96 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et une masse molaire $M = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. Le nombre d'Avogadro vaut $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, la charge de l'électron $-e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et sa masse $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. On suppose que chaque atome de cuivre fournit un électron mobile de conduction. Calculer les valeurs numériques du nombre n_0 d'électrons mobiles par mètre cube, de la constante α de la force de frottement fluide linéaire subie par les électrons et de la constante de temps τ caractéristique de la convergence de la vitesse des électrons vers sa valeur limite.

12.6

Modèle de Drude collisionnel (ENS PC 2012)

Dans un métal, les porteurs de charge sont des électrons libres de charge $-e$ et de masse m , le métal en comporte n_0 par mètre cube. Ils sont susceptibles d'entrer en collision avec les atomes du réseau cristallin, les impuretés et défauts du métal. Après chaque collision, leur vitesse est distribuée de manière totalement aléatoire : si on note $\vec{V}_n(0)$ la vitesse d'un électron après le n ème choc à l'instant $t = 0$ pris à la date du choc, alors la moyenne sur un grand nombre N de chocs est nulle : $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \vec{V}_n(0) = \vec{0}$. La probabilité qu'un électron subisse une collision pendant l'intervalle de temps dt est $dp = \frac{1}{\tau_e} \cdot dt$. Entre deux collisions, les électrons ne subissent aucun frottement et sont soumis au champ électrique $\vec{E} = E\vec{u}$ uniforme et constant.

- a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la probabilité $P(t)$ qu'un électron n'ait subi aucune collision au cours des t secondes qui suivent sa dernière collision. En déduire l'expression de $P(t)$.
- b) On définit le **densité de probabilité** $\rho(t)$ par la relation $P(t) = \int_t^\infty \rho(t') dt'$ (ρ ne désigne donc pas ici la densité volumique de charges). Montrer que $\rho(t) = \frac{1}{\tau_e} e^{-\frac{t}{\tau_e}}$.
- c) Déterminer la vitesse $\vec{V}_n(t)$ d'un électron entre les collisions n et $n + 1$.
- d) En déduire la vitesse moyenne

$$\langle \vec{V}_n \rangle = \int_{t=0}^{+\infty} \vec{V}_n(t) \rho(t) dt$$

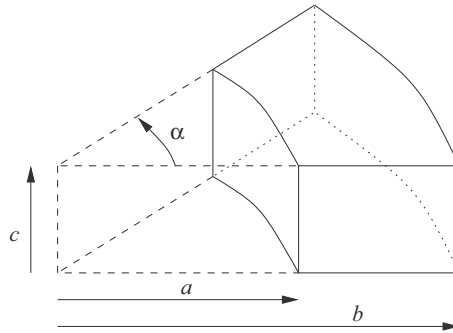
de la vitesse d'un électron au moment du $(n+1)$ ème choc puis sa valeur moyenne $\langle \vec{V} \rangle$ sur tous les électrons du métal.

- e) En déduire la loi d'Ohm locale dans ce modèle et donner l'expression de la conductivité γ .

12.7**Résistance toroïdale (Mines-Ponts PSI (1) 2014)**

Un conducteur ohmique de conductivité $\gamma \approx 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ a la forme d'une section torique de rayon intérieur a , extérieur b , de hauteur c , et d'angle α . On suppose que le potentiel ne dépend que de la variable θ et on impose un potentiel $V(\theta = 0) = u$ et $V(\theta = \alpha) = 0$. On donne l'expression du gradient et du Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$



Le potentiel vérifie l'équation de Laplace $\Delta V = 0$. Établir l'expression de $V(\theta)$ et en déduire l'expression de la résistance orthoradiale R entre la face avant et la face arrière du conducteur. Vérifier que si $b \approx a$, on retrouve la résistance du conducteur prismatique.

12.8**Conduction électrique dans un semi-conducteur (analyse documentaire) (CCP PSI (1) 2009).**

Dans un matériau semi-conducteur, un électron deviendra porteur de charge mobile s'il quitte la bande énergétique de valence de l'atome pour atteindre la bande de conduction. Ceci est possible grâce à l'agitation thermique au sein du matériau et on admet que la densité électronique vérifie la statistique de Boltzmann :

$$n_0 = n_{00} e^{-\frac{E_S}{k_B T}}$$

où $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann et E_S une énergie de référence. On mesure la résistivité $\rho = \frac{1}{\gamma}$ du silicium à très basse température :

T(K)	4,2	4,6	5,0	5,4	6,2	7,0	8,0	10,0	12,0
ρ ($\Omega \cdot \text{m}$)	$5,9 \cdot 10^5$	$6,0 \cdot 10^4$	$9,0 \cdot 10^3$	$1,75 \cdot 10^3$	125	16,5	2,35	0,15	0,024

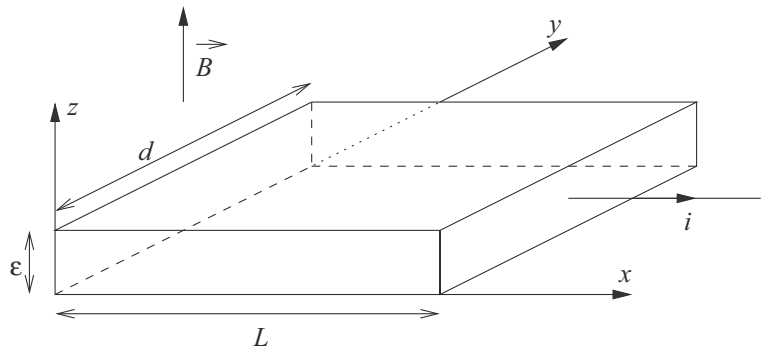
On notera α le coefficient de frottement et q la charge de l'électron.

- a) Pour un matériau conducteur classique, proposer une explication au fait que la résistivité augmente avec la température.
- b) Pour le matériau semi-conducteur silicium, justifier théoriquement que $\rho = \rho_0 e^{\frac{B}{T}}$ et vérifier expérimentalement la validité de cette expression ; préciser la valeur de E_S .
- c) Un semi-conducteur dopé est enrichi en atomes étrangers (appelés impuretés) répartis dans le matériau. Expliquer pourquoi la résistivité d'un semi-conducteur diminue lorsqu'il est :
 - i) « dopé N » si les impuretés libèrent des électrons de conduction supplémentaires
 - ii) « dopé P » si les impuretés capturent des électrons de conduction.

12.9

Modèle de Drude et effet Hall

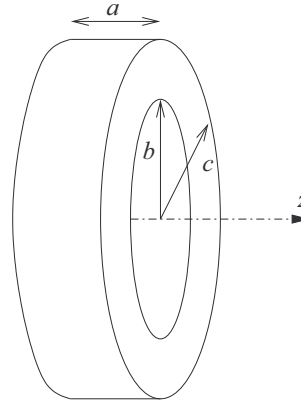
Un courant électrique d'intensité i circule dans un conducteur parallélépipédique de conductivité γ , de longueur L selon x et de section d selon y , ϵ selon z . À partir de $t = 0$, on applique un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ au conducteur. Les porteurs de charge sont les électrons libres, de masse m et de charge $-e$, on en trouve n_0 par mètre cube.



- a) Donner l'expression du vecteur densité de courant volumique \vec{j} supposé uniforme et du champ électrique \vec{E} régnant dans le conducteur pour $t < 0$.
- b) Dans le modèle de Drude le plus simple, les électrons sont en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v} sous l'action de la force de Lorentz et d'une force de frottement linéaire $-\alpha\vec{v}$. Exprimer ce vecteur vitesse pour $t < 0$.
- c) À partir de $t = 0$, justifier qualitativement que les électrons sont déviés et qu'ils vont s'accumuler sur l'une des faces du conducteur.
- d) Après le régime transitoire, l'accumulation d'électrons crée un champ électrique appelé champ de Hall \vec{E}_H qui se superpose au champ électrique initial \vec{E} . Donner l'expression de \vec{E}_H .

12.10**Disque de Corbino**

Un disque de Corbino est une pastille cylindrique trouée conductrice, comportant n_0 électrons de conduction par mètre cube, de conductivité $\gamma = \frac{n_0 e^2 \tau}{m}$, uniformément neutre ($\rho = 0$), d'épaisseur a , de rayons intérieur b et extérieur c .



- On applique une tension électrique $U = V(r = b) - V(r = c)$ entre les faces cylindriques interne et externe du conducteur. Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$, du vecteur densité volumique de courant $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ et du courant I traversant un cylindre de rayon r quelconque compris entre b et c .
- En déduire la résistance radiale R_0 de cet objet.
- On impose un champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme et constant. Écrire la loi de la quantité de mouvement pour un électron de charge $-e$, de masse m et de vitesse \vec{v} . En déduire, en régime permanent, la relation

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} + \vec{j} \wedge \frac{\vec{B}}{n_0 e}$$

- On suppose que \vec{E} reste selon \vec{u}_r et on pose

$$\vec{j} = j_r \vec{u}_r + j_\theta \vec{u}_\theta + j_z \vec{u}_z$$

Montrer que $j_z = 0$ et exprimer l'angle

$$\theta = (\vec{u}_r, \vec{j})$$

en fonction de γ , B , n_0 et e .

- Tracer l'allure des lignes de courant.
- Exprimer j_r et montrer que la résistance radiale s'écrit

$$R = R_0(1 + \epsilon)$$

Préciser l'expression de ϵ .

12.11

Bilan Joule dans un conducteur toroïdal

Dans le conducteur toroïdal de l'exercice 12.7 (on en reprend les notations) soumis à une tension u , le champ électrique orthoradial a pour expression

$$\vec{E} = \frac{u}{\alpha r} \vec{u}_\theta$$

Calculer la puissance dissipée par effet Joule et en déduire la résistance R .

12.12

Bilan Joule pour une répartition non uniforme de courants volumiques

Un conducteur cylindrique occupe le demi-espace $z \geq 0$. Soumis à une onde électromagnétique harmonique incidente en $z < 0$, un champ électrique sinusoïdal non uniforme se développe dans le conducteur :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \vec{u}_x e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$. On admet la validité de la loi d'Ohm locale. Déterminer la valeur moyenne dans le temps de la puissance dissipée par effet Joule dans une section $(x, y, z) \in [0, a] \times [0, a] \times [0, +\infty[$. Vérifier l'homogénéité du résultat.

Du mal à démarrer ?

12.1

Le raisonnement est analogue à celui du cours, mais il est à deux dimensions seulement : on remplace donc les charges traversant les facettes d'un parallélépipède par les charges traversant les côtés d'un rectangle.

12.2

La charge entre par le cylindre intérieur de rayon r et sort par le cylindre extérieur de rayon $r + dr$. Le volume délimité peut être calculé en faisant la différence entre ceux des deux volumes et en effectuant un développement limité au premier ordre.

12.3

Les bilans doivent être effectués entre les sphères de rayon r et $r + dr$. On rappelle que la surface d'une sphère de rayon a est $4\pi a^2$ et que le volume de la boule est $\frac{4}{3}\pi a^3$. Les développements limités doivent être arrêtés au premier ordre.

12.4

Le raisonnement est le même que celui du cours, appliqué à la surface fermée réunion de la surface latérale, des surfaces S_1 et S_2 .

12.5

Les ordres de grandeur sont tous calculés à partir des formules du cours ; en cas de blocage, il est assez facile de deviner la relation en travaillant sur les dimensions des grandeurs.

12.6

$P(t + dt)$ est la probabilité qu'aucun choc n'ait eu lieu entre $t = 0$ et $t + dt$: cet événement est la conjonction de l'absence de choc jusqu'à t puis de celle entre t et $t + dt$; l'équation différentielle en découle. La suite de l'exercice est purement calculatoire.

12.7

La méthode 2 du cours est parfaitement adaptée ici. La seule difficulté est de choisir la surface à travers laquelle on doit calculer le flux de \vec{j} pour exprimer l'intensité i totale : celle-ci est orthogonale à \vec{j} .

12.8

L'application du résultat du cours permet de démontrer la relation théorique. Pour valider une loi reliant deux grandeurs X et Y par un tableau de mesures, il faut transformer cette loi pour obtenir une loi affine puis valider le modèle par un tracé graphique ou par une régression linéaire.

12.9

L'étude de l'effet Hall est complémentaire du modèle de Drude : en présence comme en l'absence de champ magnétique, en régime permanent, les électrons ont un mouvement rectiligne uniforme sous l'action conjuguée du champ électrique électromoteur, du champ électrique de Hall, du champ magnétique et de la force de frottement fluide linéaire. La loi de la quantité de mouvement permet de conclure.

12.10

(a) La relation $\text{div } \vec{j}$ permet de déterminer $j(r)$ avec une constante d'intégration, on en déduit $E(r)$ puis $V(r)$, puis la valeur de la constante grâce aux conditions aux limites $V(b)$ et $V(c)$. (b) On en déduit $R_0 = \frac{V}{I}$. (c) La loi de la quantité de mouvement en \vec{v} est transformée en une équation en $\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$. (d) On projette la relation sur les trois axes de la base cylindrique. On remarquera que $\tan \theta = \frac{j_\theta}{j_r}$. (e) Les lignes ont la forme de branches de spirales. (f) Le raisonnement est analogue à celui de la question (a).

12.11

Un calcul classique d'intégrale triple suffit à conclure ; remarquons que calculer la puissance Joule et l'identifier à $\frac{U^2}{R}$ ou à Ri^2 donne une autre manière de calculer la résistance d'un conducteur.

12.12

Corrigés des exercices

12.1

On travaille sur un rectangle de surface $dS = dx \times dy$. La charge sortant par le côté d'abscisse $x + dx$ pendant dt est

$$dq_s = \vec{j}_S(x + dx, y, t) \cdot dy \cdot dt \vec{u}_x = j_x(x + dx, y, t) dy dt$$

De même, la charge entrant par le côté d'abscisse x est $dq_e = j_x(x, y, t) dy dt$. La charge totale entrant dans le rectangle par la paire de côtés est donc

$$dq_x = dq_e - dq_s = [j_x(x, y, t) - j_x(x + dx, y, t)] dy dt$$

$$\text{soit } dq_x = -\frac{\partial j_x(x, y, t)}{\partial x} dx dy dt$$

De même, celle entrant par l'autre paire de côtés est

$$dq_y = -\frac{\partial j_y(x, y, t)}{\partial y} dx dy dt$$

Le bilan de charges s'écrit donc

$$\begin{aligned} \sigma(x, y, t + dt) dx dy - \sigma(x, y, t) dx dy = \\ - \left[\frac{\partial j_x(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial j_y(x, y, t)}{\partial y} \right] dx dy dt \\ \text{soit } \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

12.2

a) La charge entrant par le cylindre intérieur est

$$dq_e = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} dt = \int_{z=0}^H \int_{\theta=0}^{2\pi} j(r, t) \vec{u}_r \cdot r d\theta dz \vec{u}_r dt$$

soit $dq_e = 2\pi r H j(r, t) dt$. De même, la charge sortant par le cylindre extérieur est

$$dq_s = 2\pi(r + dr) H j(r + dr, t) dt$$

La charge contenue par l'élément de volume entre les deux cylindres est

$$Q(t) = \rho(r, t) \cdot [\pi(r + dr)^2 H - \pi r^2 H] H$$

L'expression de la puissance volumique fait apparaître un cosinus carré fonction du temps, dont la valeur moyenne vaut $\frac{1}{2}$. La suite est un simple calcul d'intégrale triple. Pour l'homogénéité du résultat, on rappelle que H est l'unité de l'inductance et $S = \Omega^{-1}$ l'inverse de l'unité de la résistance.

$$Q(t) \approx 2\pi r H \rho(r, t) dr$$

Le bilan de charges s'écrit $Q(t + dt) - Q(t) = dq_e - dq_s$, soit

$$\begin{aligned} 2\pi r H [\rho(r, t + dt) - \rho(r, t)] dr = \\ 2\pi H [r \cdot j(r, t) - (r + dr) \cdot j(r + dr, t)] \\ r \frac{\rho(r, t + dt) - \rho(r, t)}{dt} = -\frac{(r + dr) \cdot j(r + dr, t) - r \cdot j(r, t)}{dr} \\ \text{soit } \frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j(r, t))}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

- b) L'intensité est $i(r, t) = \frac{dq_e}{dt} = 2\pi r H j(r, t)$.
c) En régime permanent, la dérivée temporelle dans l'équation de conservation de la charge est nulle, donc

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r j(r, t))}{\partial r} = 0 \text{ donc } \frac{d(r j(r))}{dr} = 0$$

donc $r j(r) = \text{cste}$; posons $r j(r) = \frac{i_0}{2\pi H}$. on en déduit que $i(r, t) = i_0$, elle est donc indépendante de r .

12.3

- a) Les particules les plus éloignées de la bille sont celles qui ont été émises à $t = 0$, elles ont donc parcouru $r_c(t) = v_0 t$. Pour $r > r_c(t)$, aucune particule n'est présente, donc $\rho(r, t) = 0$ et $\vec{j}(r, t) = \vec{0}$.
b) À la date t , $N \cdot t$ particules de charge e ont été émises donc $Q(t) = -Nte$.
c) Entre les sphères de rayon r et $r + dr$ se trouvent les particules émises entre t et $t + dt$ avec

$$v_0 = \frac{r}{t} \text{ et } v_0 = \frac{r + dr}{t + dt}$$

donc $r = v_0 t$ et $dt = \frac{dr}{v_0}$. On y trouve donc $N \cdot dt = \frac{N dr}{v_0}$ particules. Le volume compris entre les deux sphères est

$$\frac{4}{3} \pi (r + dr)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 \approx 4\pi r^2 dr$$

en faisant un développement limité à l'ordre 1. La densité volumique de charges est donc

$$\rho(r, t) = \frac{N dr \cdot e}{4\pi r^2 dr} = \frac{Ne}{4\pi r^2 v_0}$$

Pendant dt , les particules traversant la sphère de rayon r sont celles situées à une distance inférieure ou égale à $v_0 dt$, ce sont donc celles situées entre les sphères de rayon $r - v_0 dt$ et r , soit un volume

$$d\tau = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi(r - v_0 dt)^3 \approx 4\pi r^2 v_0 dt$$

soit une charge totale

$$dq = \rho(r, t) d\tau = Ne dt$$

L'intensité du courant est donc

$$i = \frac{dq}{dt} = Ne$$

d'où $j(r, t) = \frac{i}{4\pi r^2} = \frac{Ne}{4\pi r^2}$.

- d) La charge totale est la somme de la charge de la bille et de celle comprise dans l'espace entre $r = R \approx 0$ et $r = r_c$:

$$\begin{aligned} Q(t) + \iiint \rho(r, t) d\tau &= Q(t) + \int_{r=0}^{r_c} \frac{Ne}{4\pi r^2 v_0} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= -Net + Ne \frac{r_c}{v_0} = 0 \end{aligned}$$

La charge totale est donc nulle, et donc constante car la bille est initialement neutre.

- e) Les particules chargées positivement subissent les forces électriques, attractive de la part de la bille chargée négativement et répulsive de la part des autres particules chargées positivement ; elles subissent donc une accélération et leur vecteur vitesse ne peut pas rester constant.

12.4

Le courant est canalisé par les fils conducteurs, donc l'intensité qui traverse latéralement les parois est nulle. On applique la loi de conservation du flux à la surface fermée réunion de cette surface latérale, des surfaces S_1 , S_2 :

$$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} + 0 + \iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0$$

$$\text{soit } -i + i_1 + i_2 = 0$$

soit $i = i_1 + i_2$.

12.5

Un volume V de cuivre a une masse μV soit une quantité de matière $\frac{\mu V}{M}$, soient $N = \frac{\mu V \cdot N_A}{M}$ atomes. Chaque atome libérant un électron il y a donc une densité volumique d'électrons libres

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{\mu \cdot N_A}{M} = 8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

L'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse est donnée par la loi de la quantité de mouvement appliquée à l'électron dans le référentiel galiléen du matériau :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \alpha \vec{v}$$

$$\text{soit } \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m} \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

D'après le cours, la conductivité s'exprime par

$$\gamma = \frac{n_0 e^2}{\alpha} \text{ donc } \alpha = \frac{n_0 e^2}{\gamma} = 3,64 \cdot 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

La constante de temps est donc $\tau = \frac{m}{\alpha} = 2,51 \cdot 10^{-14} \text{ s}$.

12.6

- a) Pour qu'un électron n'ait pas subi de choc à la date $t + dt$, il faut qu'il n'en ait pas subi à la date t et qu'il n'en ait pas subi pendant l'intervalle de temps dt suivant, donc

$$P(t + dt) = P(t) \cdot (1 - dp) = P(t) \left(1 - \frac{1}{\tau_e} dt \right)$$

$$\text{donc } \frac{P(t + dt) - P(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_e} P(t)$$

d'où l'équation différentielle

$$\frac{dP(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_e} P(t) = 0$$

$$\text{donc } P(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Par définition, à $t = 0$, l'électron vient de subir le n ième choc donc $P(0) = 1$ donc $A = 1$ donc $P(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$.

- b) En dérivant l'intégrale fonction de sa borne inférieure,

$$\frac{dP}{dt} = -\rho(t)$$

$$\text{donc } \rho(t) = \frac{1}{\tau_e} e^{-\frac{t}{\tau_e}}$$

- c) On applique la loi de la quantité de mouvement à l'électron dans le référentiel galiléen du métal :

$$m \frac{d\vec{V}_n}{dt} = -e\vec{E}$$

$$\text{donc } \vec{V}_n(t) = \vec{V}_n(0) - \frac{e}{m} \vec{E} \cdot t$$

d) La vitesse moyenne est

$$\begin{aligned} \langle \vec{V}_n \rangle &= \int_{t=0}^{+\infty} \left[\vec{V}_n(0) - \frac{e}{m} \vec{E} t \right] \frac{1}{\tau_e} e^{-\frac{t}{\tau_e}} dt \\ &= \vec{V}_n(0) \int_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{\tau_e} e^{-\frac{t}{\tau_e}} dt - \frac{e}{m} \vec{E} \int_{t=0}^{+\infty} \frac{t}{\tau_e} e^{-\frac{t}{\tau_e}} dt \end{aligned}$$

Les deux intégrales se calculent sans difficulté, par intégration directe pour la première, par intégration par parties pour la seconde :

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{\tau_e} e^{-\frac{t}{\tau_e}} dt &= \left[-e^{-\frac{t}{\tau_e}} \right]_0^{+\infty} = 1 \\ \int_{t=0}^{+\infty} \frac{t}{\tau_e} e^{-\frac{t}{\tau_e}} dt &= \left[-te^{-\frac{t}{\tau_e}} \right]_0^{+\infty} + \int_{t=0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau_e}} dt \\ &= 0 + \left[-\tau_e e^{-\frac{t}{\tau_e}} \right]_0^{+\infty} = \tau_e \end{aligned}$$

d'où $\langle \vec{V}_n \rangle = \vec{V}_n(0) - \frac{e\tau_e}{m} \vec{E}$. La valeur moyenne de $\vec{V}_n(0)$ sur tous les électrons du métal est nulle, donc $\langle \vec{V} \rangle = -\frac{e\tau_e}{m} \vec{E}$.

e) En raisonnant comme dans le cours,

$$\vec{j} = n_0(-e) \langle \vec{V} \rangle = \frac{n_0 e^2 \tau_e}{m} \vec{E}$$

ce qui est bien la loi d'Ohm attendue, avec la conductivité

$$\gamma = \frac{n_0 e^2 \tau_e}{m}$$

12.7

Le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Laplace et il ne dépend que de θ , donc

$$\Delta V = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0$$

$$\text{donc } V(\theta) = A\theta + B$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} B = u \\ A\alpha + B = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} B = u \\ A = -\frac{u}{\alpha} \end{cases}$$

d'où $V(\theta) = -\frac{u}{\alpha}\theta + u$. On en déduit

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta = \frac{u}{\alpha r} \vec{u}_\theta$$

$$\text{donc } \vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma u}{\alpha r} \vec{u}_\theta$$

Le courant est donc orthoradial, et on calcule l'intensité du courant à travers une section orthogonale à \vec{j} , définie par $(r, z) \in [a, b] \times [0, c]$:

$$i = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{r=a}^b \int_{z=0}^c \frac{\gamma u}{\alpha r} \vec{u}_\theta \cdot dr dz \vec{u}_\theta$$

$$= \frac{\gamma u}{\alpha} [\ln r]_a^b [z]_0^c = \frac{\gamma c \ln \frac{b}{a}}{\alpha} u$$

C'est bien la loi d'Ohm avec $R = \frac{\alpha}{\gamma c \ln \frac{b}{a}}$. Si $b \approx a$, on pose

$b = a(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon = \frac{b-a}{a} \ll 1$ et le développement limité donne

$$R \approx \frac{\alpha}{\gamma c \varepsilon} = \frac{\alpha a}{\gamma c (b-a)}$$

et on retrouve la formule du cours pour un conducteur de section $S = c(b-a)$ et de longueur αa .

12.8

a) D'après le cours, la résistivité s'écrit

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha}{n_0 q^2}$$

Si elle augmente avec T , c'est que le coefficient de frottement α augmente, ce qu'on peut expliquer en considérant que les frottements sont dus aux chocs des porteurs de charge avec les atomes du cristal ; lorsque T augmente, ceux-ci sont plus agités, et la probabilité de choc augmente donc α et ρ augmentent.

b) En utilisant l'expression donnée par l'énoncé :

$$\rho = \frac{\alpha}{n_0 q^2 e^{-\frac{E_S}{k_B T}}} = \frac{\alpha}{n_0 q^2} e^{\frac{E_S}{k_B T}}$$

donc $\rho_0 = \frac{\alpha}{n_0 q^2}$ et $B = \frac{E_S}{k_B}$. Pour valider expérimentalement cette loi exponentielle, on la compose avec la fonction logarithme :

$$\ln \rho = \ln \rho_0 + \frac{B}{T}$$

donc $\ln \rho$ doit être une fonction affine de $\frac{1}{T}$. Le tableau de mesures ainsi transformé donne :

$\frac{1}{T} (K^{-1})$	0,238	0,217	0,200	0,185	0,161
$\ln \rho$	13,3	11,0	9,1	7,5	4,8

$\frac{1}{T} (K^{-1})$	0,143	0,125	0,100	0,083
$\ln \rho$	2,8	0,9	-1,9	-3,7

On peut tracer le graphe et vérifier l'alignement des points, ou effectuer une régression linéaire ; celle-ci donne un coefficient de régression linéaire $r = 0,99997$ ce qui valide le modèle, et une loi

$$\ln \rho = -12,85 + 109,9 \cdot \frac{1}{T}$$

Par identification à la loi théorique : $B = 109,9$ donc $E_S = k_B B = 1,52 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 9,48 \text{ meV}$.

c) Si le matériau est

- i) « dopé N », le nombre d'électrons de conduction augmente donc la résistivité diminue
- ii) « dopé P » alors la capture d'un électron de conduction par une impureté provoque un mouvement de proche en proche des différents électrons de conduction, la conductivité augmente et la résistivité diminue.

12.9

- a) $\vec{j} = \frac{i}{\epsilon d} \vec{u}_x$ et d'après la loi d'Ohm locale $\vec{E} = \frac{i}{\gamma \epsilon d} \vec{u}_x$.
- b) La densité volumique de courant est la résultante du mouvement individuel des électrons :

$$\vec{j} = n_0(-e)\vec{v} \text{ donc } \vec{v} = -\frac{i}{n_0 e \epsilon d} \vec{u}_x$$

De plus, en mouvement rectiligne uniforme, la loi de la quantité de mouvement appliquée à un électron dans le référentiel galiléen du laboratoire s'écrit

$$\vec{0} = -e\vec{E} - \alpha \vec{v}$$

- c) Les électrons subissent la force de Lorentz magnétique

$$\vec{f}_{L,m} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = -\frac{iB}{n_0 e d} \vec{u}_y$$

qui les dévie vers la face avant sur le schéma, où ils s'accumulent.

- d) Le champ créé par les électrons accumulés sur la face avant doit normalement être dirigé dans le sens $-\vec{u}_y$. Après le régime transitoire, les électrons retrouvent un mouvement rectiligne uniforme, donc par application de la loi de la quantité de mouvement :

$$\vec{0} = -e[\vec{E} + \vec{E}_H] - e\vec{v} \wedge \vec{B} - \alpha \vec{v}$$

D'après le résultat de la deuxième question, cette relation se simplifie : $\vec{0} = -e\vec{E}_H - e\vec{v} \wedge \vec{B}$ donc

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -\frac{iB}{n_0 e \epsilon d} \vec{u}_y$$

12.10

- a) La densité de charges est nulle donc l'équation de conservation de la charge s'écrit

$$\text{div } \vec{j} = 0 \text{ soit } \frac{1}{r} \frac{\partial(rj(r))}{\partial r} = 0$$

$$\text{soit } rj(r) = A \text{ et } j(r) = \frac{A}{r}$$

On en déduit

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{A}{\gamma r} \vec{u}_r$$

Le potentiel électrique s'écrit $V(r)$ avec

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \text{ soit } \frac{dV}{dr} = -\frac{A}{\gamma r}$$

$$\text{donc } V(r) = -\frac{A}{\gamma} \ln r + A'$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$V(b) - V(c) = U \text{ soit } \frac{A}{\gamma} \ln \frac{c}{b} = U \text{ donc } A = \frac{\gamma U}{\ln \frac{c}{b}}$$

On en déduit

$$\vec{j} = \frac{\gamma U}{r \ln \frac{c}{b}} \vec{u}_r \text{ et } \vec{E} = \frac{U}{r \ln \frac{c}{b}} \vec{u}_r$$

On en déduit l'intensité du courant en intégrant

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^a \frac{\gamma U}{r \ln \frac{c}{b}} r d\theta dz$$

$$\text{soit } I = \frac{2\pi \gamma a U}{\ln \frac{c}{b}}$$

- b) On en déduit

$$R_0 = \frac{U}{I} = \frac{\ln \frac{c}{b}}{2\pi \gamma a}$$

- c) La loi de la quantité de mouvement appliquée à l'électron s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

En régime permanent, l'accélération est nulle, et en multipliant la relation par $\frac{n_0 e \tau}{m}$ il vient

$$\vec{0} = -n_0 e \vec{v} - \frac{n_0 e^2 \tau}{m} \vec{E} + \frac{\tau e}{m} (-n_0 e \vec{v}) \wedge \vec{B}$$

On identifie

$$\vec{j} = -n_0 e \vec{v} \text{ et } \gamma = \frac{n_0 e^2 \tau}{m}$$

$$\text{donc } \gamma \vec{E} = \vec{j} + \frac{\gamma}{n_0 e} \vec{j} \wedge \vec{B}$$

et en divisant par γ , on obtient bien la relation attendue

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} + \vec{j} \wedge \frac{\vec{B}}{n_0 e}$$

d) La relation s'écrit

$$\begin{pmatrix} E(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{j_r}{\gamma} \\ \frac{j_\theta}{\gamma} \\ \frac{j_z}{\gamma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{B}{n_0 e} \end{pmatrix}$$

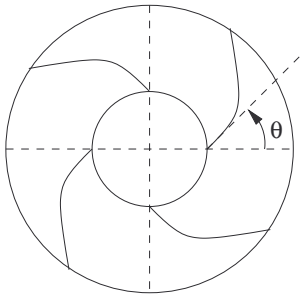
$$\text{soit } \begin{cases} E(r) = \frac{j_r}{\gamma} + \frac{j_\theta B}{n_0 e} \\ 0 = \frac{j_\theta}{\gamma} - \frac{j_r B}{n_0 e} \\ 0 = \frac{j_z}{\gamma} \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \frac{j_\theta}{\gamma} = \frac{j_r B}{n_0 e} \\ j_z = 0 \end{cases}$$

La première relation prouve que

$$\tan \theta = \frac{j_\theta}{j_r} = \frac{\gamma B}{n_0 e}$$

e) Les lignes de courant font donc un angle θ constant avec le rayon.



f) On déduit j_r du système précédent :

$$j_r = \frac{\gamma E}{1 + \frac{\gamma^2 B^2}{n_0^2 e^2}}$$

La figure est invariante par rotation d'angle θ , donc j_θ et j_r ne dépendent que de r . Le conducteur restant neutre, la loi de conservation de la charge s'écrit

$$\text{div } \vec{j} = 0 \text{ soit } \frac{1}{r} \frac{\partial(r j_r(r))}{\partial r} = 0 \text{ donc } \frac{1}{r} \frac{\partial(r E(r))}{\partial r} = 0$$

$$\text{donc } E(r) = \frac{C}{r}$$

De même qu'à la question (a), on obtient

$$E(r) = \frac{U}{r \ln \frac{c}{b}}$$

On en déduit

$$j(r) = \frac{\gamma U}{(1 + \epsilon) r \ln \frac{c}{b}} \text{ avec } \epsilon = \frac{\gamma^2 B^2}{n_0^2 e^2}$$

L'intensité du courant à travers un cylindre de rayon r vaut donc

$$I = \iint \vec{j} \cdot dS \vec{u}_r = \iint j(r) r d\theta dz$$

et par un calcul indentique à celui de la question (a)

$$I = \frac{2\pi\gamma a U}{(1 + \epsilon) \ln \frac{c}{b}}$$

On en déduit

$$R = \frac{U}{I} = (1 + \epsilon) \frac{\ln \frac{c}{b}}{2\pi\gamma a} = (1 + \epsilon) R_0$$

12.11

Par définition

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \int_{z=0}^c \int_{\theta=0}^\alpha \int_{r=a}^b \frac{\gamma u^2}{\alpha^2 r^2} r dr d\theta dz$$

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \frac{\gamma u^2}{\alpha^2} [z]_0^c [\theta]_0^\alpha [\ln r]_a^b = \frac{\gamma c \ln \frac{b}{a}}{\alpha} u^2$$

En utilisant la loi habituelle de l'électrocinétique :

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = u \cdot i = \frac{u^2}{R}$$

on retrouve l'expression de la résistance $R = \frac{\alpha}{\gamma c \ln \frac{b}{a}}$.

12.12

La valeur moyenne dans le temps de la puissance volumique est

$$\begin{aligned} \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle &= \langle \gamma \vec{E}^2 \rangle \\ &= \gamma E_0^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} \langle \cos^2 \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) \rangle = \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-\frac{2z}{\delta}} \end{aligned}$$

Par définition

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a \int_{z=0}^{+\infty} \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-\frac{2z}{\delta}} dx dy dz$$

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \frac{\gamma E_0^2}{2} [x]_0^a [y]_0^a \left[-\frac{\delta}{2} e^{-\frac{2z}{\delta}} \right]_0^{+\infty}$$

soit $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \frac{\gamma a^2 \delta E_0^2}{4}$. La dimension de γ est

$$[\delta] = \frac{1}{\sqrt{H \cdot m^{-1} \cdot S \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}}}$$

On montre en cours d'électricité de première année que $\frac{1}{R}$ est la constante de temps du circuit L, R, donc

$$\frac{H}{\Omega} = s \text{ soit } H \cdot S = s$$

donc $[\delta] = m$. Par suite, $[ab\delta] = m^3$ et d'après le cours

$$[\gamma E_0^2] = J \cdot m^{-3}$$

l'expression donnant $\mathcal{P}_{\text{Joule}}$ est donc bien homogène.

CHAPITRE 13

Champ électrique en régime stationnaire

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Équation de Maxwell-Gauss.
- ◇ Équation de Maxwell-Faraday.
- ◇ Potentiel scalaire électrique.
- ◇ Équation de Poisson.
- ◇ Distribution de charge.
- ◇ Caractère polaire de \vec{E} .
- ◇ Théorème de Gauss.
- ◇ Théorème de superposition.
- ◇ Énergie potentielle électrique.
- ◇ Théorème de Gauss gravitationnel.
- ◇ Champ électrique créé par un dipôle.
- ◇ Moment dipolaire électrique.
- ◇ Polarisabilité d'un atome.
- ◇ Capacité d'un condensateur.
- ◇ Densité volumique d'énergie électrique.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Exploiter les équations de Maxwell pour établir les lois du champ électrostatique.
- ◇ Analyser une carte de champ et de potentiel électrostatique.
- ◇ Exploiter l'équation de Poisson.
- ◇ Énoncer et appliquer le théorème de Gauss.
- ◇ Connaître les champs créés par des distributions particulières.
- ◇ Utiliser le théorème de superposition.
- ◇ Utiliser les propriétés des champs et potentiels pour l'étude du mouvement d'une particule chargée.
- ◇ Énoncer et appliquer le théorème de Gauss gravitationnel.
- ◇ Connaître le champ électrique créé par un dipôle et l'action d'un champ sur un dipôle.
- ◇ Exprimer la polarisabilité et l'énergie électrique d'un atome.
- ◇ Savoir calculer la capacité d'un condensateur.
- ◇ Exploiter l'expression de la densité volumique d'énergie électrique.

Les méthodes à retenir

Exploiter les équations de Maxwell pour établir les lois du champ électrostatique.

En régime stationnaire, le **champ électrique** \vec{E} , exprimé en volt par mètre ($V \cdot m^{-1}$), nommé dans ce cas **champ électrostatique**, est créé par les distributions de charge. Il est associé au potentiel scalaire électrostatique V exprimé en volt (V). On note ρ la **densité volumique de charge** exprimée en coulomb par mètre cube ($C \cdot m^{-3}$) et

$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$
$\vec{E} = -\text{grad } V$	$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

La divergence (div), le rotationnel (rot) et le Laplacien (Δ) sont des opérateurs de dérivation spatiale. Ils sont fournis par l'énoncé sauf en coordonnées cartésiennes, où on définit l'opérateur nabla

$$\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \text{avec } \text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}, \quad \text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}, \quad \Delta V = \vec{\nabla}^2 V$$

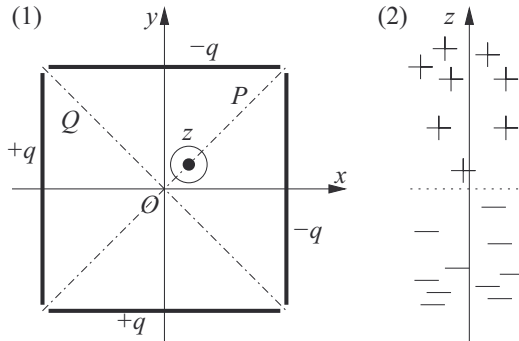
On doit retenir les trois propriétés topographiques suivantes, traduisant le caractère polaire de \vec{E} :

- le champ électrique « fuit » les charges positives et est « attiré » par les charges négatives ;
- le champ électrique est contenu dans les **plans de symétrie** des charges ;
- le champ électrique est orthogonal aux **plans d'antisymétrie** des charges.

De plus, si la distribution de charges est **invariante** par translation selon x , y ou z , ou rotation d'angle θ ou φ , alors le champ électrique ne dépend pas de la variable correspondante. Notons que les propriétés de symétrie et d'invariance des distributions de charge sont affirmées, sans démonstration ; un schéma peut aider à les identifier, mais il n'est pas demandé explicitement au concours.

Exemple :

Considérons les deux répartitions suivantes de charges. Dans le cas (1), elles sont réparties sur quatre plaques qui délimitent un espace vide. Dans le cas (2), la charge est répartie avec une répartition $\rho(x, y, z) = \rho_0 \frac{z}{a}$.



Dans le cas (1), le plan P est plan de symétrie des charges, le plan Q plan d'antisymétrie des charges (remarque : les plans (O, x, z) et (O, y, z) ne sont pas plans d'antisymétrie). Le champ électrique est sensiblement uniforme $\vec{E} = E_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_y \right)$, il est bien orthogonal à Q et inclus dans P. Comme il est uniforme, les dérivées de ses composantes par rapport à x , y et z sont toutes nulles, sa divergence est nulle (dans le vide, $\rho = 0$) et son rotationnel est nul. On en déduit le potentiel électrique :

$$V(x, y, z, t) = -E_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y \right) + K \text{ et } \Delta V = 0$$

Dans le cas (2), tout plan contenant (O, z) est plan de symétrie des charges. Le champ $\vec{E} = \rho_0 \frac{z^2}{2a\epsilon_0} \vec{u}_z$ est bien dans l'intersection de tous ces plans. On calcule sa divergence et son rotationnel :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \rho_0 \frac{z^2}{2a\epsilon_0} \end{vmatrix} = \rho_0 \frac{z}{a\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \rho_0 \frac{z^2}{2a\epsilon_0} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_0 \frac{z^2}{2a\epsilon_0} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

On en déduit le potentiel électrique :

$$V(x, y, z, t) = -\rho_0 \frac{z^3}{6a\epsilon_0} \text{ et } \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

↪ **Exercice 13.1.**

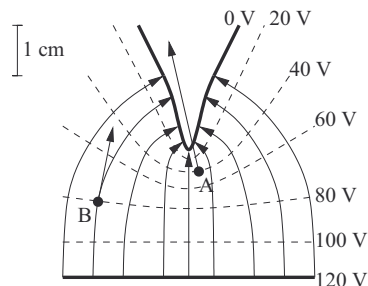
Analyser une carte de champ et de potentiel électrostatique.

Le calcul du champ électrique et du potentiel électrique associé est difficile dans le cas général. C'est pourquoi on les mesure expérimentalement ou on les calcule avec un logiciel de simulation, et on exploite graphiquement les relevés, cartes de champ et de potentiel. On doit retenir les trois propriétés topographiques suivantes :

- le champ électrique est tangent en tout point aux lignes de champ ;
- les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles ;
- plus les surfaces équipotentielles sont serrées, plus le champ électrique est intense.

Exemple :

Voici l'allure d'une carte de champ, faisant apparaître les lignes de champ en traits continus et les lignes équipotentielles dans le plan de la figure en traits pointillés, créée par une plaque et une pointe métalliques entre lesquelles on impose une différence de potentiel de 120 V.



On vérifie que les lignes équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ. Les équipotentielles sont plus serrées en A qu'en B. Le champ électrique est donc plus intense en A qu'en B. L'échelle fournie permet d'estimer les valeurs des champs :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_A \approx \frac{20 \text{ V}}{0,4 \text{ cm}} = 5,0 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1} \\ E_B \approx \frac{20 \text{ V}}{1,2 \text{ cm}} = 1,7 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1} \end{array} \right.$$

↪ Exercice 13.2.

Exploiter l'équation de Poisson.

 Le potentiel électrostatique vérifie l'**équation de Poisson**

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

qui se simplifie en $\Delta V = 0$ (**équation de Laplace**) dans les régions neutres, dans le vide en particulier. Cette équation, anodine en apparence, est difficile à résoudre dans le cas général. Retenons que

- les conditions aux limites imposent l'existence de surfaces équipotentielles ;
- la forme de ces surfaces oriente la résolution en cherchant une famille particulière de champ V ;
- la prise en compte des invariances permet de réduire les variables ($x, y, z, r, \theta, \varphi$) dont dépend V .

Exemple :

On fait le vide entre deux plaques parallèles infinies (A, x, y) et (B, x, y) distantes de d , la première est portée au potentiel uniforme $V(z = 0) = 0$ et l'autre au potentiel $V(z = d) = U$. L'invariance par translation selon \vec{u}_x et selon \vec{u}_y conduit à chercher le potentiel sous la forme $V(z)$ et l'équation de Laplace s'écrit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \text{ soit } \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \text{ donc } V(z) = az + b$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} 0 = b \\ U = ad + b \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{U}{d} \end{cases} \text{ donc } V(z) = U \frac{z}{d}$$

On en déduit

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z = -\frac{U}{d} \vec{u}_z$$

↔ **Exercices 13.3, 13.4, 13.5, 13.6.**

Énoncer et appliquer le théorème de Gauss.

Voici les étapes à suivre pour appliquer le théorème de Gauss.

- En identifiant les plans de symétrie et d'antisymétrie passant par M, déterminer la direction de \vec{E} .
- Son sens peut être deviné en retenant qu'il fuit les charges positives et est attiré par les charges négatives.
- Les invariances permettent de déterminer les variables dont \vec{E} dépend.
- On trace la surface de Gauss fermée Σ en vert, et en quelques points bien choisis, \vec{E} en rouge et $d\vec{S}$ en vert. Ils doivent être colinéaires ou bien orthogonaux. Il est possible qu'une des dimensions de Σ soit arbitrairement choisie.
- On calcule $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ en décomposant éventuellement Σ en surfaces ouvertes ; sur chacune d'elles :
 - lorsque $\vec{E} \perp d\vec{S}$, l'intégrale est nulle
 - lorsque \vec{E} est colinéaire à $d\vec{S}$,

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint E \cdot dS = E \cdot S$$

si la norme E est uniforme.

- On calcule $\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ en évaluant la charge intérieure à Σ par un calcul direct $Q_{\text{int}} = \rho \cdot V$ ou $Q_{\text{int}} = \sigma \cdot S$ si les densités de charge sont uniformes ou par un calcul d'intégrale sinon.
- On applique enfin le **théorème de Gauss**


$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

d'où on déduit $\vec{E}(M)$ après simplifications.

On peut retenir que le champ électrique est continu en général sauf à la traversée d'une plaque possédant une charge surfacique σ de part et d'autre de laquelle la discontinuité vaut $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Exemple :

Un nuage sphérique de centre O, de charge totale Q et de rayon R possède une densité volumique de charge uniforme ρ . Déterminons le champ électrique \vec{E} en M défini par $\vec{OM} = r \vec{u}_r$. Deux cas sont à considérer : $r < R$ et $r \geq R$.



Tout plan contenant (O, \vec{u}_r) est plan de symétrie des charges donc $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$. La distribution de charges est invariante par rotations d'angle θ et φ donc $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$. La surface de Gauss Σ est une sphère de rayon r et \vec{E} est colinéaire à \vec{dS} en tout point de Σ . Le flux est

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot 4\pi r^2$$

La charge intérieure vaut :

- $Q_{\text{int}} = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}$ si $r < R$;
- $Q_{\text{int}} = Q$ si $r \geq R$.

Le théorème de Gauss donne donc :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r & \text{si } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

On vérifie la continuité en $r = R$.

↪ **Exercices 13.7, 13.8, 13.9, 13.10.**

Connaître les champs créés par des distributions particulières.

La détermination et l'expression des champs suivants doit être mémorisée :

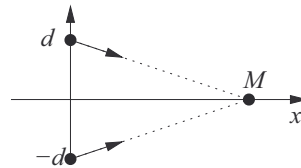
- une particule ponctuelle Q est placée en O ; en M défini par $\vec{OM} = r \vec{u}_r$, elle crée :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \text{ et } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- une bille sphérique de rayon b portant une charge totale Q (distribuée avec une symétrie sphérique) crée en un point M extérieur à la bille ($r > b$) le même champ et le même potentiel électrique que si toute la charge était concentrée au centre O de la bille (donnée au paragraphe précédent) ;
- un plan infini (O, x, y) portant une charge surfacique σ uniforme crée un champ électrique uniforme symétrique $\pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$; il présente une discontinuité à la traversée du plan.

Exemple :

Dans le plan (O, x, y) , plaçons une charge Q en $A(0, d)$ et une charge Q en $B(0, -d)$. Déterminons le champ électrique au point $M(x, 0)$,



Le champ électrique créé en M par une distribution de charges ponctuelles est la somme des champs créés par chaque charge en M. Il faut prendre garde au fait que les vecteurs unitaires \vec{u}_r entre A et M et entre B et M ne sont pas les mêmes. Il est pratique d'utiliser les notations suivantes :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{AM}\|^2} \cdot \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{BM}\|^2} \cdot \frac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|}$$

$$\text{avec } \vec{AM} = \begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BM} = \begin{pmatrix} x \\ -d \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_x$$

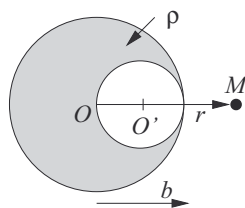
↪ Exercice 13.11.

Utiliser le théorème de superposition.

La linéarité des équations de Maxwell et celle de la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ entraînent le **théorème de superposition** : le champ électrique ou le potentiel créé par la superposition de deux (ou plus) distributions de charge est la somme des champs ou potentiels créés séparément par chaque distribution. Cette loi s'applique particulièrement bien lorsque les symétries sont brisées et que le théorème de Gauss semble inopérant.

Exemple :

Une bille de rayon b porte une charge volumique uniforme ρ . On creuse dans cette bille une cavité sphérique de centre O' , de rayon $\frac{b}{2}$ dont le diamètre est un rayon de la bille. Voici une vue en coupe :



Déterminons le champ électrique en M . Tout plan contenant (OM) est plan de symétrie des charges donc $\vec{E}(M) = E\vec{u}_r$. En revanche, il n'y a pas d'invariance par rotation donc le théorème de Gauss n'est pas adapté au problème. La bille évidée peut être considérée comme la superposition d'une bille (1) pleine de rayon b centrée en O et d'une bille (2) de centre O' et de rayon $\frac{b}{2}$ de charge volumique $-\rho$. Le théorème de superposition donne $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. En appliquant le théorème de Gauss à chaque distribution :

$$\vec{E} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi b^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r + \frac{-\rho \cdot \frac{4}{3}\pi (\frac{b}{2})^3}{4\pi\epsilon_0 (r - \frac{b}{2})^2} \vec{u}_r$$

↪ **Exercice 13.11.**

Utiliser les propriétés des champs et potentiels pour l'étude du mouvement d'une particule chargée.

Une distribution de charges immobiles crée un champ électrique \vec{E} et un potentiel électrique V . Une particule de masse m et de charge q placée en M subit une force électrique \vec{f} qui dérive d'une énergie potentielle E_{pe} données par

$$\vec{f} = q\vec{E}(M) \text{ et } E_{pe} = qV(M)$$

Les méthodes dynamiques et énergétiques habituelles permettent donc l'étude mécanique d'une particule ponctuelle chargée.

Exemple :

Une particule de masse m et de charge q est lancée depuis $O(0,0,0)$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ entre deux plaques infinies parallèles $z = -d$ et $z = d$ portant respectivement une densité surfacique de charges uniforme $-\sigma$ et $+\sigma$. L'application du théorème de superposition permet d'exprimer le champ électrique entre les plaques :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

L'application de la loi de la quantité de mouvement à la particule dans le référentiel galiléen du laboratoire, en négligeant le poids devant la force électrique, donne

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -\frac{q\sigma}{m\epsilon_0} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -\frac{q\sigma}{m\epsilon_0} t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = v_0 t \\ y = 0 \\ z = -\frac{q\sigma}{2m\epsilon_0} t^2 \end{cases}$$

La trajectoire est donc parabolique.

↪ Exercices 13.12, 13.13, 13.14.

Énoncer et appliquer le théorème de Gauss gravitationnel.

Il y a une analogie formelle entre la force de Coulomb exercée par une charge ponctuelle Q sur une charge ponctuelle q et la force de gravitation exercée par une masse M sur une masse m :

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \leftrightarrow \frac{-\mathcal{G}Mm}{r^2} \vec{u}_r$$

Dans le théorème de Gauss, on remplace donc le champ électrique \vec{E} par le champ gravitationnel \vec{g} , la charge Q par la masse M , et la constante $\frac{1}{\epsilon_0}$ par $-4\pi\mathcal{G}$, d'où

$$\oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}$$

Les règles d'application de ce théorème de Gauss gravitationnel sont les mêmes que pour son équivalent électrique.

Exemple :

Une planète sphérique de centre O, de rayon R et de masse M a une masse volumique $\mu = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ uniforme. Soit M un point repéré par $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$. Pour $r > R$, le théorème de Gauss gravitationnel appliqué sur une sphère de rayon r s'écrit

$$g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi \mathcal{G} M \text{ donc } \vec{g} = -\frac{\mathcal{G} M}{r^2} \vec{u}_r$$

Pour $r \leq R$, il s'écrit

$$g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi \mathcal{G} \mu \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ donc } \vec{g} = -\frac{\mathcal{G} M r}{R^3} \vec{u}_r$$

↪ Exercices 13.15, 13.16, 13.17.

Connaître le champ électrique créé par un dipôle et l'action d'un champ sur un dipôle.

Le **dipôle électrostatique** ou dipôle électrique est un bipoint de particules de charges $-q$ en N et $+q$ en P avec $NP = d$ constante. Le **moment dipolaire** est

$$\vec{P} = q \overrightarrow{NP}$$

Ce dipôle fixe crée un potentiel et un champ électrique particulier, et réciproquement il subit une action mécanique de la part d'un champ électrique extérieur (qu'il ne faut surtout pas confondre avec le champ propre).

La détermination du **champ électrique dipolaire** est une question de cours fréquente et difficile (elle est traitée à l'exercice 13.18). En voici les étapes.

a) On définit une base sphérique de centre O milieu de [NP] et $\vec{u}_z = \frac{\overrightarrow{NP}}{d}$. Un point M de l'espace est repéré par $r = OM$, φ angle du méridien et $\theta = (\vec{u}_z, \overrightarrow{OM})$.

b) On applique les symétries et invariances et on en déduit

$$V = V(r, \theta) \text{ et } \vec{E} = E_r(r, \theta) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta) \vec{u}_\theta$$

c) On détermine le potentiel électrique $V(M) = V_N(M) + V_P(M)$ par superposition et on donne sa valeur approchée $V(r, \theta)$ grâce à l'**approximation dipolaire** $d \ll r$.

d) On en déduit $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ en coordonnées sphériques.

Un dipôle électrique, de moment dipolaire \vec{P} , soumis à un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} subit une force appliquée à chacune des deux particules.

a) La somme des forces dérive d'une **énergie potentielle d'interaction**

$$Ep = -\vec{P} \cdot \vec{E}_{ext}$$

b) La force résultante s'écrit

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} (\vec{P} \cdot \vec{E}_{ext})$$

c) Le couple des forces a pour moment résultant

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{P} \wedge \vec{E}_{ext}$$

Deux grandes familles d'exercices se développent sur cette base :

- étude mécanique du déplacement d'un dipôle, en translation ou en rotation autour d'un axe passant par O ;
- étude qualitative du mouvement d'un dipôle dans un champ extérieur dont la carte de champ est fournie : le dipôle a tendance à s'**orienter** dans la direction et le sens du champ extérieur et à **migrer** vers les zones de champ fort.

Exemple :

(a) Soit un dipôle électrique \vec{P} de centre O, soumis à un champ électrique extérieur dont la valeur en O est \vec{E}_O . S'il est en rotation autour d'un axe Δ passant par O et orthogonal à (\vec{P}, \vec{E}_O) , alors la projection du moment des forces sur Δ est

$$\mathcal{M}_\Delta = [\vec{P} \wedge \vec{E}_O] \cdot \vec{u}_\Delta = P \cdot E_O \sin(\vec{P}, \vec{E}_O)$$

Posons $\theta = (\vec{P}, \vec{E}_O)$. Ce moment s'annule quand $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. L'énergie potentielle d'interaction est

$$Ep = -\vec{P} \cdot \vec{E}_O = -P \cdot E_O \cos(\theta)$$

Cette énergie potentielle est minimale pour $\theta = 0$ qui est donc une position d'équilibre stable. Elle est maximale pour $\theta = \pi$ qui est donc une position d'équilibre instable. Le dipôle tend donc bien à s'aligner avec le champ extérieur.

(b) Soit un dipôle aligné avec le champ extérieur. L'énergie potentielle d'interaction vaut donc $E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E}_0$. Elle diminue lorsque E_0 augmente, donc le dipôle se déplace vers les zones de champ fort.

↪ **Exercices 13.18, 13.19, 13.20, 13.21.**

Exprimer la polarisabilité d'un atome, l'énergie électrique d'un noyau.

Sous l'action d'un champ électrique extérieur, un dipôle électrique rigide s'oriente et migre. On peut ainsi expliquer la solvation des ions dans un solvant polaire. Mais un atome peut lui-même réagir à un champ électrique extérieur : sous l'action de ce champ, le nuage électronique chargé négativement est déplacé (et souvent déformé) tandis que le noyau positif est déplacé de façon opposée, formant ainsi un **dipôle électrique induit**. Si le moment dipolaire \vec{P} du dipôle induit est proportionnel au champ électrique extérieur, on définit la **polarisabilité** α par

$$\vec{P} = \alpha \vec{E}$$

Voici la méthode de calcul de cette polarisabilité.

- a) On définit un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} uniforme à l'échelle de l'atome.
- b) Sous l'action de ce champ extérieur, le noyau, de charge Ze , supposé ponctuel se déplace du centre N du nuage électronique à un point P .
- c) Au point P , on calcule le champ électrique $\vec{E}_n(P)$ créé par le nuage électronique (en l'absence du noyau) grâce au théorème de Gauss.
- d) À l'équilibre, la somme des forces qui s'exerce sur le noyau est nulle

$$Ze\vec{E}_{\text{ext}} + Ze\vec{E}_n(P) = \vec{0} \text{ soit } \vec{E}_n(P) = -\vec{E}_{\text{ext}}$$

On en déduit la position P (en supposant qu'il y a une unique position stable).

- e) On en déduit le moment dipolaire de l'atome

$$\vec{P} = Ze \cdot \overrightarrow{NP}$$

puis la polarisabilité α de l'atome.

Dans ce même type de modèle, on peut calculer l'énergie électrique d'un noyau atomique sphérique (voir exercice 13.23).

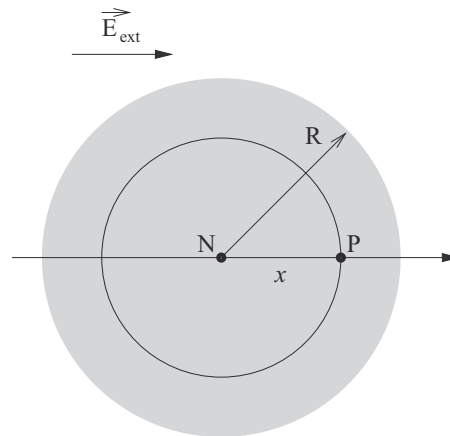
Exemple :

Dans un modèle semi-classique, on assimile l'atome d'hydrogène à un proton ponctuel de charge e et à un nuage électronique sphérique, de centre N, de rayon R, de densité volumique de charges uniforme $\rho = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

a) On plonge l'atome dans un champ électrique extérieur $\vec{E}_{\text{ext}} = E\vec{u}_x$.

b) Supposons que P reste à l'intérieur du nuage électronique, c'est-à-dire que NP = $x < R$.

Le champ électrique en P créé par le nuage électronique se calcule aisément grâce au théorème de Gauss, en choisissant comme surface de Gauss une sphère de rayon $r = x$.



$$E_n \cdot 4\pi x^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi x^3}{\epsilon_0} \text{ soit } \vec{E}_n = -\frac{ex}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_x$$

d) À l'équilibre mécanique du proton

$$\vec{E}_n + \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0} \text{ donc } ex = 4\pi\epsilon_0 R^3 \cdot E$$

e) On en déduit le moment dipolaire de l'atome

$$\vec{P} = e \cdot \vec{NP} = ex\vec{u}_x = 4\pi\epsilon_0 R^3 \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$$

On en déduit la polarisabilité

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R^3 = 3\epsilon_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

α est donc directement proportionnel au volume du nuage électronique, qu'on peut assimiler à celui de l'atome.

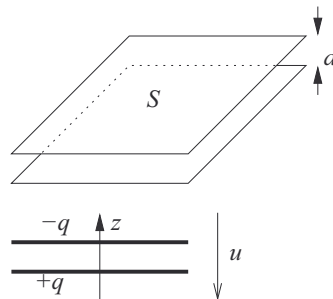
Savoir calculer la capacité d'un condensateur.

Le théorème de Coulomb établi dans l'exemple du paragraphe précédent permet d'assimiler un **condensateur** à deux plaques (1) et (2) métalliques en regard, formant deux surfaces équipotentielles aux potentiels V_1 et V_2 portant des charges opposées $q_1 = q$ et $q_2 = -q$. En posant $u = V_1 - V_2$, la **capacité** du condensateur est la grandeur C , exprimée en farad (F) définie par $q = Cu$. Deux méthodes de calcul se présentent.

- Connaissant q , on calcule \vec{E} grâce au théorème de Gauss, puis V grâce à la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, puis V_1 et V_2 , d'où u . On peut aussi calculer directement, le long d'une ligne de champ : $u = \int_1^2 \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell}$. On en déduit C .
- Dans la région vide de charges entre les deux plaques, on résout l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ avec les conditions aux limites $V = V_1$ sur la plaque 1 et $V = V_2$ sur la plaque 2. On en déduit $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ puis la densité surfacique de charges σ_1 en utilisant la relation admise $\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \vec{n}_1$ au voisinage immédiat de la surface de 1, \vec{n}_1 désignant le vecteur normal dirigé vers l'extérieur au point considéré. On calcule de même σ_2 . On en déduit les charges q et $-q$ en intégrant σdS sur 1 et sur 2. On en déduit C .

Exemple :

Un **condensateur plan** est formé de deux plaques parallèles de même surface S distantes de d supposé très petit devant sa largeur et sa longueur, ce qui permet d'assimiler le champ électrique qu'il crée à celui créé par deux plaques infinies.



Notons q la charge du condensateur et u la tension électrique aux bornes du condensateur.

Première méthode. La densité surfacique de charge, supposée uniforme, est $\pm\sigma = \pm\frac{q}{S}$. Par application du théorème de superposition, le champ électrique créé entre les plaques est

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z - \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

On en déduit le potentiel électrique

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Leftrightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{dV}{dz} \text{ donc } V(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + K$$

On en déduit la tension électrique

$$u = V(z=0) - V(z=d) = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{qd}{S\epsilon_0}$$

donc $C = \frac{q}{C} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$.

Deuxième méthode. Les plaques sont séparées par du vide. L'invariance de la distribution par translation selon x et y conduit à chercher le potentiel sous la forme $V(z)$ et l'équation de Poisson s'écrit donc

$$\Delta V = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2V}{dz^2} = 0 \text{ donc } V(z) = Az + B$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} u = A \cdot 0 + B \\ 0 = A \cdot d + B \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} B = u \\ A = -\frac{u}{d} \end{cases} \text{ et } V(z) = -u \frac{z}{d} + u$$

On en déduit

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z = \frac{u}{d} \vec{u}_z$$

Pour $z = 0^+$, le vecteur normal à la surface est $\vec{n} = \vec{u}_z$ et on identifie

$$\vec{E}(z=0^+) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \text{ soit } \frac{u}{d} \vec{u}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\text{soit } \frac{u}{d} = \frac{q}{\epsilon_0 S} \text{ donc } C = \frac{q}{u} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

↪ Exercices 13.24, 13.25.

Exploiter l'expression de la densité volumique d'énergie électrique.

L'énergie électrique volumique

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

exprimée en joule par mètre cube permet de développer trois types de calculs :

- a) calcul de l'énergie électrique U_e emmagasinée par un dispositif par intégrale triple sur l'espace ;
- b) calcul de la capacité d'un condensateur, en identifiant

$$U_e = \frac{1}{2} C U^2$$

- c) Calcul d'une force d'interaction électrique en identifiant

$$\vec{f} = -\text{grad } U_e$$

Exemple :

Pour un condensateur plan formé de deux plaques de surface $S = a \times b$ et distantes de d , l'énergie emmagasinée est

$$U_e = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^d \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{U^2}{d^2} dx dy dz$$

$$U_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{U^2}{d^2} \cdot abd = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 ab}{d} U^2$$

$$\text{soit } U_e = \frac{1}{2} C U^2$$

On retrouve donc l'expression de l'énergie électrique emmagasinée par un condensateur, obtenue en première année par un raisonnement électrocinétique.

↪ Exercices 13.26, 13.27.

Énoncés des exercices

13.1

Détermination directe d'un champ électrique

Une distribution de charge se développe autour d'un axe (O, z) , elle a pour densité volumique en coordonnées cylindriques

$$\rho = \rho_0 \frac{r_0}{r}$$

a) Justifier que

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r \text{ et } V = V(r)$$

b) Déterminer le potentiel $V(r)$ grâce à l'équation de Laplace en prenant $V(0) = 0$.

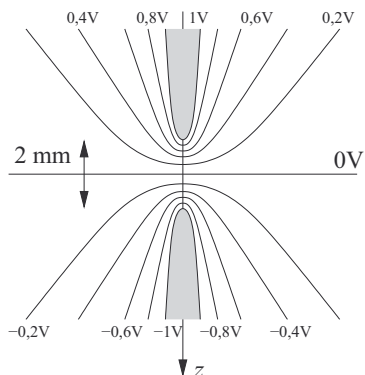
c) En déduire \vec{E} .

d) Vérifier l'équation de Maxwell-Gauss.

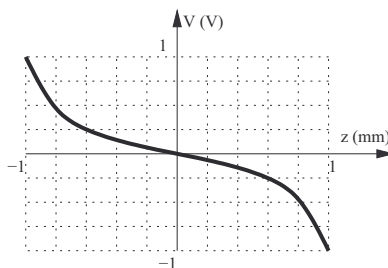
13.2

Champ disruptif (Centrale MP 2015 (sujet 0))

Un logiciel de simulation permet de tracer l'allure des lignes équipotentielles autour de deux électrodes portées aux potentiels respectifs -1 V et $+1 \text{ V}$.



Ce logiciel donne aussi le graphe des variations du potentiel V en fonction de z sur l'axe :



a) Où le champ électrique est-il maximal ?

b) Le champ disruptif est celui pour lequel on observe une étincelle correspondant à l'ionisation de l'air. Celui-ci vaut $E_r = 3,6 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Quelle tension doit-on appliquer aux bornes du dispositif pour atteindre ce champ au centre O du dispositif ?

13.3

Résolution de l'équation de Laplace en géométrie cylindrique

Deux cylindres infinis d'axe commun (O, z) , de rayons a et b avec $a < b$, sont portés aux potentiels respectifs $V(r = a) = 0$ et $V(r = b) = U$. Déterminer le potentiel électrique $V(r, \theta, z)$ pour $a < r < b$. En déduire le champ électrique entre les deux cylindres.

13.4

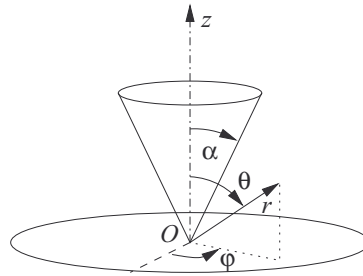
Résolution de l'équation de Laplace en géométrie sphérique

Deux sphères de même centre O , de rayons a et b avec $a < b$, sont portées aux potentiels respectifs $V(r = a) = 0$ et $V(r = b) = U$. Déterminer le potentiel électrique $V(r, \theta, \varphi)$ pour $a < r < b$. En déduire le champ électrique entre les deux sphères.

13.5

Résolution de l'équation de Laplace en géométrie conique

Un plan infini (O, x, y) est porté au potentiel U . Une plaque infinie en forme de cône de sommet O et d'axe (O, z) , de demi-angle au sommet α , est portée au potentiel nul.



- a) Un point M est repéré en coordonnées sphériques par $OM = r$ et les angles θ et φ , avec $\alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$. Justifier que $V(M) = V(r, \theta)$.
- b) Chercher V indépendant de r (c'est le cas sur les deux plaques formant des surfaces équipotentielles pour $\theta = \alpha$ et pour $\theta = \frac{\pi}{2}$) sous la forme $V(\theta)$. On donne $\int \frac{1}{\sin\theta} d\theta = \ln \left[\tan \frac{\theta}{2} \right]$.
- c) En déduire \vec{E} .

13.6

Potentiel créé par une distribution volumique antisymétrique

Dans l'espace (O, x, y, z) , une distribution volumique de charges est définie par

$$\rho(x, y, z) = \rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -a \\ -\rho_0 & \text{si } -a \leq x < 0 \\ +\rho_0 & \text{si } 0 \leq x < a \\ 0 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Déterminer le potentiel $V(x)$ et le champ électrique $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$ tels que $V(0) = 0$, que $\vec{E} = \vec{0}$ pour $x > a$, et que les deux fonctions $V(x)$ et $E(x)$ soient continues. Tracer les graphes correspondants.

13.7

Champ électrique créé par une plaque chargée en surface

Une plaque infinie (O, x, y) porte une densité surfacique de charge uniforme σ . Déterminer le champ électrique créé en un point $M(0, 0, z)$.



13.8

Champ électrique créé par une plaque épaisse

Une plaque épaisse infinie, située entre les plans $z = -a$ et $z = a$, porte une densité volumique de charge uniforme ρ . Déterminer le champ électrique créé en un point $M(0, 0, z)$.



13.9

Champ électrique créé par un fil rectiligne infini

Un fil rectiligne infini (O, z) porte une densité linéique de charge λ uniforme. Déterminer le champ électrique en M situé à la distance r du fil.



13.10

Champ électrique créé par un cylindre chargé en volume et en surface

Un cylindre infini d'axe (O, z) et de rayon b porte une charge volumique uniforme $\rho > 0$ et sa surface est recouverte d'une charge surfacique uniforme $\sigma < 0$.

- La charge totale de toute section de hauteur H du cylindre est nulle. En déduire la relation entre σ , ρ et b .
- Déterminer le champ électrique en M situé à la distance r de l'axe.



13.11

Carré de charges

Quatre charges sont placées aux sommets d'un carré $(ABCD)$ dans le plan (O, x, y) avec $A(a, 0)$, $B(0, a)$, $C(-a, 0)$ et $D(0, -a)$. Déterminer le champ électrique en O si on place respectivement les charges $(+q, +q, -q, -q)$ puis si on place $(+q, -q, +q, -q)$.



13.12

Mouvement d'une particule dans un puits de potentiel.

Une particule de masse m et de charge q , est astreinte à se déplacer sur un axe (O, x) . Une charge $Q > 0$ est fixée en $x = a > 0$. L'ensemble est plongé dans un champ électrique uniforme et constant $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_x$ avec $E_0 > 0$.

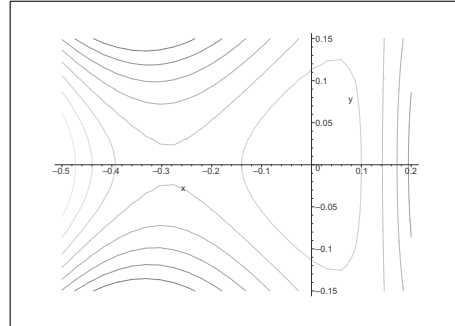
- À quelle condition $x = 0$ est-elle une position d'équilibre stable pour la particule ?
- Étudier dans ce cas les petites oscillations autour de $x = 0$ de la particule.

13.13

Piège à trois particules (analyse documentaire)

Trois charges positives identiques Q sont fixes aux sommets d'un triangle équilatéral (A,B,C) de centre O avec $OA = OB = OC = a$.

- a) Justifier qualitativement que le centre O du triangle est une position d'équilibre instable pour un électron.
- b) Une particule de charge $q = 1,0\text{ C}$ et de masse $m = 1,0\text{ kg}$ est placée en O et lancée avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = -v_0 \vec{u}_x$. Voici l'allure des lignes équipotentielles dans le plan contenant (A,B,C) tracées avec $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} = 1,0\text{ V}\cdot\text{m}$ et $a = 1,0\text{ m}$:



On donne quelques valeurs de V sur l'axe (O, x) :

x (m)	-0,47	-0,44	-0,39	-0,28	-0,14	0	0,10	0,14	0,17
V (V)	2,99	3,00	3,01	3,019	3,01	3,00	3,01	3,02	3,03

Le pas de potentiel entre deux lignes successives est $0,01\text{ V}$. Déterminer la valeur maximale de v_0 qui permet à la particule de rester piégée.

13.14

Piégeage d'une particule (Mines-Ponts MP (2) 2015)

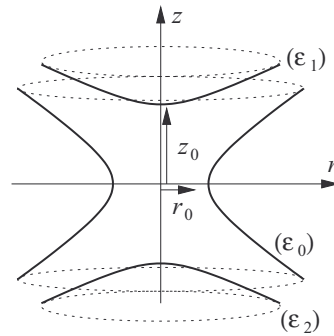
Un système de trois plaques est disposé autour de l'origine O d'un référentiel (O, x, y, z) . Une première plaque possède la symétrie de révolution autour de (O, z) , son équation cartésienne est

$$(\mathcal{E}_0) : x^2 + y^2 - 2z^2 = r_0^2$$

Les deux autres plaques sont les deux nappes de l'hyperboloïde de révolution

$$\begin{cases} (\mathcal{E}_1) : x^2 + y^2 - 2z^2 = -2z_0^2 \text{ avec } z > 0 \\ (\mathcal{E}_2) : x^2 + y^2 - 2z^2 = -2z_0^2 \text{ avec } z < 0 \end{cases}$$

Les deux paramètres sont reliés par $2z_0 = r_0\sqrt{2}$. \mathcal{E}_0 est portée au potentiel V_0 , \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont à la masse.



Une particule ponctuelle de charge q subit une force électrique de la forme

$$\vec{F} = a(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y) + bz\vec{u}_z$$

- Établir la relation entre a et b .
- Montrer que le potentiel électrique s'écrit

$$V(x, y, z) = \alpha + \beta(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

et exprimer α en fonction de V_0 et β en fonction de r_0 et V_0 .

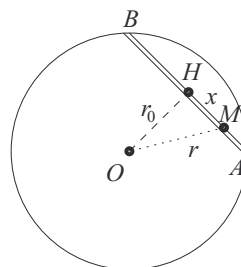
- Montrer que $O(0, 0, 0)$ est une position d'équilibre et justifier que cet équilibre est instable.



13.15

Tunnel gravitationnel (Mines-Ponts PSI (1) 2011)

Un tunnel est creusé en ligne droite entre deux points A et B de la surface d'une planète sphérique de centre O, de rayon R, de masse M et de masse volumique $\mu = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ uniforme. On fait le vide dans ce tunnel et on considère un train de masse m glissant sans frottement dans ce tunnel. Sa position est repérée par son abscisse $x = \overline{HM}$ où H est le point le plus proche du centre de la planète, on pose $r_0 = \overline{OH}$, $a = x_A = \overline{HA}$ et $r = \overline{OM}$.



- a) Déterminer le champ gravitationnel en M en fonction de r , en déduire la force de gravitation subie par le train.
- b) En déduire l'énergie potentielle gravitationnelle du train et l'exprimer en fonction de x .
- c) Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le train est abandonné sans vitesse initiale en A. Établir l'expression de $x(t)$ et en déduire la durée du voyage de A à B.
- d) Comparer cette durée avec la période d'un satellite évoluant à très basse altitude, en mouvement circulaire uniforme de rayon $r \simeq R$.

13.16

Énergie potentielle gravitationnelle d'un astre sphérique (Mines-Ponts PSI (1) 2010)

Un astre sphérique de masse M , de rayon R et de masse volumique uniforme μ est construit par agglomération couche après couche : lorsque le rayon de l'astre vaut r , la matière formant la couche $[r, r + dr]$ située à une distance infinie de l'astre est attirée et se dépose à la surface de l'astre, jusqu'à ce que r atteigne R .

- a) Exprimer le volume $d\tau$ et la masse dm de la couche $[r, r + dr]$ en fonction de μ , r et dr (on se limitera au terme du premier ordre en dr).
- b) Donner l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle de cette couche à l'infini et à la surface de l'astre. En déduire la variation d'énergie potentielle dE_p de l'astre quand son rayon augmente de r à $r + dr$.
- c) En déduire l'énergie potentielle gravitationnelle de l'astre en fonction de \mathcal{G} , M et R .

13.17

Pression au cœur d'une étoile (Mines-Ponts PSI (1) 2010)

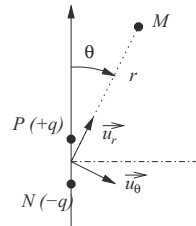
Une étoile de masse M , de rayon R , de masse volumique μ uniforme possède un champ de pression $P(r)$ et un champ gravitationnel $g(r)$. La pression est nulle à la surface de l'étoile. Déterminer la pression P_0 au centre de l'étoile en fonction de \mathcal{G} , M et R .

13.18

Champ électrique créé par un dipôle électrique

Un dipôle électrique est l'association de deux charges ponctuelles $-q$ et $+q$ distantes de d . Celles-ci sont placées en $N(0, 0, -d/2)$ et $P(0, 0, d/2)$. Un point M est repéré en coordonnées sphériques, à une distance $r \gg d$ du centre O du repère.

- a) Justifier que $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta$. Voici la figure vue dans le plan méridien :



- b) Exprimer le potentiel V_P créé en M par la charge $+q$ en P. On fera le développement limité en $\frac{d}{r}$. Exprimer de même V_N .
- c) En déduire le potentiel V en M puis le champ électrique \vec{E} créé par le dipôle électrique en M.

13.19

Mise en évidence du caractère polaire d'un solvant

Quand on approche une tige chargée d'un filet d'eau qui coule, celui-ci est dévié vers la tige, alors qu'avec un filet de cyclohexane, il n'y a pas de déviation. Expliquer ce phénomène.

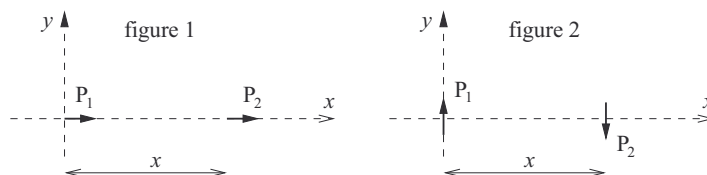
13.20

Interaction de deux dipôles parallèles, coaxiaux

Le champ électrique créé par un dipôle électrique de moment dipolaire \vec{P} , de centre O, en un point M de l'espace vaut, dans l'approximation dipolaire

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{P}}{r^3} \right) \text{ avec } \vec{r} = \vec{OM}$$

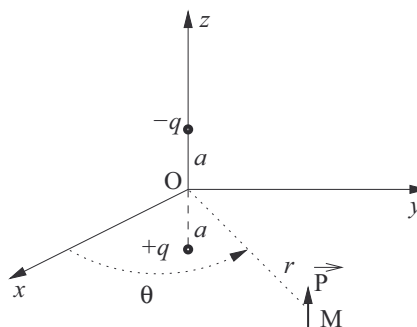
- a) Deux dipôles identiques sont placés de façon coaxiale à une distance x l'un de l'autre sur un axe (O, x) (figure 1). Ils sont astreints à se déplacer en translation sur cet axe. Donner l'expression de la force exercée par le dipôle 1, supposé fixe, sur le dipôle 2.
- b) Deux dipôles identiques sont placés avec des moments dipolaires anticolinéaires, à une distance x l'un de l'autre sur un axe (O, x) (figure 2). Ils sont astreints à se déplacer en translation sur cet axe. Donner l'expression de la force exercée par le dipôle 1, supposé fixe, sur le dipôle 2.
- c) Quelle est la force d'interaction entre deux dipôles dont les centres sont placés en $O_1(0,0,0)$ et en $O_2(x,0,0)$, de moments dipolaires respectifs $\vec{P}_1 = P\vec{u}_y$ et $\vec{P}_2 = P\vec{u}_z$?



13.21

Dipôle en mouvement entre deux charges dans un plan

Un dipôle électrique, de moment dipolaire \vec{P} , est astreint à se déplacer dans un plan auquel \vec{P} reste orthogonal. De part et d'autre de ce plan se trouvent deux charges $-q$ et $+q$, placées symétriquement, à la distance $2a$ l'une de l'autre.



On note M le milieu du dipôle mobile, on repère sa position en coordonnées polaires par r et θ , on note m sa masse et on suppose que la distance entre les deux charges qui le composent est très petite devant a .

- Donner l'expression du champ électrique \vec{E} en M en fonction de r .
- En déduire l'expression de l'énergie potentielle d'interaction $Ep(r)$ entre le dipôle mobile et ce champ.
- Justifier que le dipôle subit une force centrale conservative et rappeler les noms des deux grandeurs constantes \vec{L}_O et \mathcal{E}_0 .
- Donner l'expression de l'énergie potentielle effective

$$Ep_{\text{eff}}(r) = \frac{L_O^2}{2mr^2} + Ep(r)$$

et tracer à l'aide d'un grapheur l'allure de la courbe représentative en fonction de $u = \frac{r}{a}$ quand

$$\frac{L_O^2}{2ma^2} = 1,0 \text{ J et } \frac{qaPm}{\pi\epsilon_0 L_O^2} = 10$$

En déduire la nature du mouvement possible et indiquer si un mouvement circulaire est possible.

13.22

Polarisabilité complexe d'un atome

Dans le modèle du cours, le noyau d'un atome est assimilé à un point matériel de masse m_p , de charge Ze , et le nuage électronique à une sphère de centre N, de rayon R, de masse m_N , de charge $-Ze$ et de densité volumique de charge ρ uniforme. Sous l'action d'un champ électrique extérieur, le noyau se déplace du centre du nuage jusqu'à un point P de ce nuage, avec $NP = r < R$

- Donner l'expression de ρ et déterminer le champ électrique $\vec{E}_n(P)$ créé par le nuage au point P, en l'absence du noyau.
- Montrer que la force d'interaction entre le noyau et le nuage s'assimile à celle d'un ressort reliant N et le noyau, de longueur à vide nulle, et de constante de raideur K qu'on exprimera en fonction de Z, e et ϵ_0 .
- Lorsque le noyau est en mouvement dans le nuage électronique, on suppose qu'il subit une force de frottement linéaire

$$\vec{f} = -h\vec{v}$$

La masse du noyau étant très grande devant celle du nuage, on suppose que le noyau est immobile et que c'est le nuage électronique qui se déplace, en subissant la même force de frottement, la force électrique du champ extérieur et la force d'interaction électrique avec le noyau modélisée par l'action du ressort. Le champ électrique extérieur varie sinusoidalement :

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \cos(\omega t)$$

Déterminer la polarisabilité complexe $\underline{\alpha}$ de l'atome en régime sinusoidal forcé.



13.23

Énergie du noyau

Dans le modèle de Thomson, le noyau d'un atome du numéro atomique Z est assimilé à un nuage sphérique de rayon R , de charge Ze et de densité volumique uniforme

$$\rho = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

On constitue ce noyau en rassemblant autour d'un point O de l'espace des éléments de matière de charge infinitésimale venant de l'infini.

- On suppose que le noyau, en cours de formation, possède un rayon $r < R$. Quelle est sa charge $q(r)$?
- On note $\mathcal{E}(r)$ son énergie électrique. On fait augmenter son rayon de dr en apportant une charge dq de l'infini à la surface sphérique du noyau en construction. Déterminer l'augmentation d'énergie $d\mathcal{E}$ en fonction de r , dr , R , e , Z et ϵ_0 .
- En déduire l'expression de l'énergie \mathcal{E} du noyau en fonction de R , e , Z et ϵ_0 .



13.24

Condensateur cylindrique

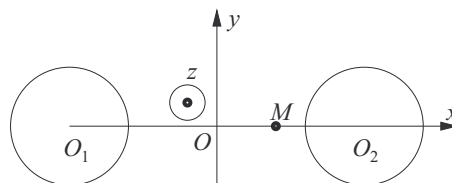
Un condensateur cylindrique est formé de deux plaques cylindriques coaxiales d'axe (O, z) , de rayons respectifs a_1 et a_2 avec $a_1 < a_2$ et de même hauteur H . On suppose que les dimensions sont telles qu'on peut négliger les effets de bord, c'est-à-dire qu'on peut assimiler les propriétés électrostatiques du dispositif à celles d'un ensemble de cylindres infinis. Déterminer la capacité C de ce condensateur.



13.25

Condensateur à cylindres parallèles

Deux plaques cylindriques parallèles d'axes (O_1, z) et (O_2, z) de même rayon a sont distantes de $2D = O_1O_2$. Un point M du plan contenant les deux axes, et situé entre les deux cylindres, est repéré par ses coordonnées $M(x, z)$, l'origine O du repère étant le milieu de $[O_1O_2]$.



- Un cylindre infini, d'axe z , de rayon a , possède une densité de charge surfacique uniforme σ . Déterminer le potentiel électrique $V(r)$ en un point situé à une distance r de son axe.
- Le cylindre 1 du dispositif possède une densité de charge surfacique uniforme σ , le 2 une densité $-\sigma$. Déterminer le potentiel électrique $V(x)$ en M .
- En déduire la tension électrique u entre les deux plaques en supposant qu'elles sont elles-mêmes des surfaces équipotentielles.
- La capacité linéique est la capacité équivalente C d'un tronçon de longueur H selon z de ce dispositif, divisée par H , soit $\Gamma = \frac{C}{H}$. Déterminer l'expression de Γ .

13.26

Énergie électrique d'un nuage électronique

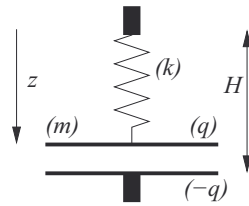
Un électron de charge $-e$ est assimilé à un nuage sphérique de rayon R et de densité volumique de charge uniforme ρ .

- a) Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ pour $r \leq R$ et pour $r > R$.
- b) En déduire l'énergie électrique totale de cette distribution.

13.27

Position d'équilibre d'une plaque chargée (résolution de problème)

Dans le dispositif suivant, la plaque inférieure possède une charge $-q$ et est fixe, la plaque supérieure possède une charge $+q$ et est mobile en translation sur l'axe z , sa masse est m et le ressort est de constante de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 . La surface commune des plaques est S et on pourra supposer qu'elles sont très proches l'une de l'autre.



Déterminer la valeur de z à l'équilibre de la plaque.

Du mal à démarrer ?

13.1 L'équation de Laplace écrite en coordonnées cylindriques s'intègre en deux temps. Les constantes d'intégration se calculent en utilisant la condition $V(0) = 0$.

13.2 Le champ est maximal là où les lignes équipotentielles sont les plus serrées. La valeur du champ électrique est $\frac{dV}{dz}$ sur l'axe, on la calcule dans le cas de la simulation où la tension est de 2 V, et on en déduit celle assurant le champ disruptif en calculant le coefficient multiplicatif.

13.3 Les propriétés de symétrie et d'invariance permettent d'écrire $V = V(z)$, l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques s'intègre en tenant compte des conditions aux limites en $r = a$ et en $r = b$. On en déduit \vec{E} .

13.4 Les propriétés de symétrie et d'invariance permettent d'écrire $V = V(r)$, l'équation de Laplace en coordonnées sphériques s'intègre en tenant compte des conditions aux limites en $r = a$ et en $r = b$. On en déduit \vec{E} .

13.5 Les invariances du problème permettent d'éliminer la variable φ . L'équation de Laplace en coordonnées sphériques s'intègre en utilisant la primitive donnée par l'énoncé et en tenant compte des conditions aux limites en $\theta = \alpha$ et en $\theta = \frac{\pi}{4}$. On en déduit \vec{E} .

13.6 On résout l'équation de Laplace dans chaque zone, on en déduit le potentiel en fonction de deux constantes, et le champ

électrique par dérivation. Il y a donc a priori 8 constantes à déterminer. Il y a 6 continuités à assurer (V et \vec{E} en $-a$, 0 et a) et les deux nullités de champ pour $x < -a$ et $x > a$, ce qui donne bien 8 relations. On en déduit les 8 constantes.

13.7 La surface de Gauss est un cylindre ou un parallélépipède rectangle traversant la plaque de façon symétrique entre $-z$ et $+z$.

13.8 La surface de Gauss est un cylindre ou un parallélépipède rectangle traversant la plaque de façon symétrique entre $-z$ et $+z$. Deux cas sont à considérer : quand $z > a$, la charge intérieure est celle située entre $-a$ et a et quand $z < a$, la charge intérieure est celle située entre $-z$ et $+z$.

13.9 La surface de Gauss est un cylindre de rayon r et de hauteur H arbitraire, qui doit nécessairement se simplifier dans le théorème de Gauss.

13.10 La surface de Gauss est un cylindre de rayon r et de hauteur H arbitraire, qui doit nécessairement se simplifier dans le théorème de Gauss. Quand $r < b$, la charge surfacique n'est pas contenue dans la surface de Gauss, quand $r > b$, la charge intérieure est nulle d'après la première question.

13.11 Le théorème de superposition et l'expression du champ créé par une charge ponctuelle permettent de déterminer le champ électrique dans le premier cas. Dans le second, les symétries et antisymétries entraînent la nullité du champ.

- 13.12** C'est un problème à un degré de liberté pour une particule soumise à un ensemble de forces conservatives, on se ramène donc à l'étude de l'énergie potentielle $E_p(x) = q \cdot (V_0(x) + V(x))$: une position est position d'équilibre si sa dérivée est nulle, elle est stable si la dérivée seconde est positive en cette valeur. L'étude des petites oscillations autour de la position d'équilibre nécessite l'écriture du développement limité au second ordre de $E_p(x)$ au voisinage de 0. L'énergie mécanique est ainsi la somme d'un trinôme du second degré en x et de $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$. Elle est constante, sa dérivée par rapport au temps est nulle, on en déduit l'équation d'oscillateur harmonique vérifiée par x , d'où ω_0 et la période propre T_0 .
- 13.13** (a) L'instabilité en O peut être justifiée en analysant le sens des forces qui agissent si on déplace l'électron vers les $x > 0$ ou vers les $x < 0$. (b) Le puits de potentiel est visible sur le graphe. Le col en $x = -0,28$ peut être franchi si la barrière de potentiel de l'ordre de 0,019 V est dépassée, ce qui permet de calculer le majorant de l'énergie cinétique de la particule, puis sa vitesse.
- 13.14** (a) \vec{F} permet d'exprimer \vec{E} qui doit vérifier l'équation de Maxwell-Gauss. (b) On calcule V à partir de \vec{E} en résolvant un système d'équations aux dérivées partielles. (c) L'analyse d'équilibre et de stabilité peut être menée en supposant tout à tour que la particule se déplace sur l'axe (O, x) puis sur l'axe (O, y) ; l'étude des dérivées de l'énergie potentielle par rapport à x puis par rapport à y permet de conclure.
- 13.15** (a) On applique le théorème de Gauss gravitationnel. (b) On exprime $E_p(r)$ en écrivant $mg(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr}$. Le théorème de Pythagore permet d'exprimer r en fonction de x . (c) C'est un problème à un degré de liberté avec des forces conservatives, la méthode énergétique est donc pertinente. (d) La troisième loi de Kepler donne immédiatement la réponse.
- 13.16** Comme l'énergie potentielle gravitationnelle est nulle à l'infini, la variation d'énergie potentielle est égale à l'énergie potentielle de la masse dm située à la distance r du centre de l'astre de rayon r .
- 13.17** On conjugue l'expression de $g(r)$ donnée par le théorème de Gauss gravitationnel et la loi de la statique des fluides $-\text{grad } P + \mu \vec{g} = \vec{0}$.
- 13.18** (a) Le plan de la figure est plan de symétrie des charges. (b) La distance PN qui intervient dans l'expression du potentiel créé

par la charge ponctuelle est calculée en utilisant les coordonnées des deux points. Pour le développement limité, on rappelle que si $\varepsilon \ll 1$ alors $(1 + \varepsilon)^r \approx 1 + r\varepsilon$. (c) Par superposition, $V = V_P + V_N$.

- 13.19** Un schéma peut être utile pour expliquer le mouvement des molécules d'eau assimilables à des dipôles soumis au champ électrique créé par la tige.
- 13.20** Dans tout l'exercice, on calcule le champ \vec{E}_1 créé par le dipôle 1 à l'endroit où est placé le dipôle 2, puis l'énergie potentielle de ce dipôle 2 sous l'action de \vec{E}_1 grâce à la formule du cours, puis la force en calculant le gradient.
- 13.21** Le calcul du champ électrique par superposition des champs créés par les deux charges doit être mené sans approximation. On en déduit l'énergie potentielle puis l'énergie potentielle effective, et on pourra se référer au cours de première année sur les forces centrales pour la condition $E_{p_{\text{eff}}}(r) \leq \varepsilon_0$.
- 13.22** Le calcul qui conduit à K est le même que dans l'exemple du cours. La loi de la quantité de mouvement traduite en formalisme complexe permet d'exprimer $\vec{r} = \frac{\vec{pN}}{m}$ en fonction de \vec{E} puis d'en déduire le moment dipolaire complexe et enfin la polarisabilité complexe.
- 13.23** L'augmentation de l'énergie est estimée en faisant la différence entre l'énergie potentielle de la charge qui va se déposer, lorsqu'elle est à l'infini, et lorsqu'elle est à la surface de la sphère.
- 13.24** L'application du théorème de Gauss donne \vec{E} , on en déduit V puis la tension électrique entre les cylindres, puis $C = \frac{q}{U}$.
- 13.25** (a) On applique le théorème de Gauss pour calculer \vec{E} , on en déduit V . (b) Par superposition des potentiels électriques, V est la somme de celui calculé pour chaque cylindre, grâce au résultat de la première question. Il faut prendre garde au fait que r s'exprime en fonction de x , et n'est pas le même pour les deux cylindres. (c) $u = V(-D + a) - V(D - a)$. (d) On en déduit $C = \frac{q}{U}$.
- 13.26** (a) On détermine \vec{E} dans chaque cas grâce au théorème de Gauss. (b) On intègre l'énergie électrique volumique dans les deux zones : $r \in [0, R]$ et $r \in]R, +\infty[$.
- 13.27** La plaque est soumise à trois forces conservatives, son poids, la force de rappel élastique et la force électrique qui dérive de l'énergie du condensateur $\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$, et C dépend de z .

Corrigés des exercices

13.1

- a) Soit O le projeté orthogonal de M sur l'axe. Le plan (O, \vec{u}_r , \vec{u}_z) et le plan (O, \vec{u}_r , \vec{u}_θ) sont des plans de symétrie des charges. Le champ électrique est donc contenu dans leur intersection et $\vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$. La distribution de charges est invariante par translation selon \vec{u}_z et par rotation d'angle θ donc $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.

- b) L'équation de Laplace s'écrit

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ soit}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho_0 r_0}{\varepsilon_0 r}$$

$$\text{soit } \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho_0 r_0}{\varepsilon_0}$$

$$\text{donc } r \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho_0 r_0}{\epsilon_0} r + A$$

$$\text{soit } \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho_0 r_0}{\epsilon_0} + \frac{A}{r}$$

$$\text{donc } V(r) = -\frac{\rho_0 r_0}{\epsilon_0} r + A \ln r + B$$

Pour $r = 0$, $\ln r \rightarrow \infty$ donc $A = 0$. La condition $V(r = 0) = 0$ entraîne $B = 0$ donc

$$V(r) = -\frac{\rho_0 r_0}{\epsilon_0} r$$

c) La relation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ s'écrit

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\rho_0 r_0}{\epsilon_0} \vec{u}_r$$

d) On vérifie que

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE(r))}{\partial r} = \frac{\rho_0 r_0}{\epsilon_0 r} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

13.2

- a) Le champ est maximal là où les équipotentielles sont les plus serrées. C'est donc entre les deux électrodes, sur l'axe de symétrie du dispositif, et au voisinage de ces électrodes, ce qui est confirmé par le fait que la pente de V en fonction de z devient très forte quand z se rapproche de -1 ou de $+1$ mm.
- b) Au centre du dispositif, le champ électrique est dirigé selon \vec{u}_z car tout plan contenant l'axe (O, z) est plan de symétrie des charges. Sa valeur est

$$\vec{E}(0, 0, 0) = -\frac{dV}{dz}(0, 0, 0) \vec{u}_z$$

Lorsque la tension entre les électrodes vaut

$$V(z = 1 \cdot 10^{-3}) - V(z = -1 \cdot 10^{-3}) = 1 - (-1) = 2 \text{ V}$$

la lecture graphique de la pente de V en fonction de z donne

$$E(0) = -\frac{-0,25 \text{ V}}{8 \text{ mm}} = 31 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Les équations de Maxwell étant linéaires, le coefficient de multiplication du champ électrique est égal à celui des potentiels. Pour obtenir le champ disruptif $E_r = 3,6 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, il faut donc une tension

$$U = \frac{3,6 \cdot 10^6}{31} \times 2 \text{ V} = 2,3 \cdot 10^5 \text{ V}$$

13.3

Le potentiel étant indépendant de θ et de z sur les deux plaques, on peut chercher $V(r)$. La nullité du Laplacien de V dans l'espace vide entre les cylindres s'écrit alors

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \text{ donc } r \frac{dV}{dr} = A$$

$$\text{soit } \frac{dV}{dr} = \frac{A}{r} \text{ donc } V(r) = A \ln r + B$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} A \ln a + B = 0 \\ A \ln b + B = U \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} A = \frac{U}{\ln \frac{b}{a}} \\ B = -\frac{U \ln a}{\ln \frac{b}{a}} \end{cases}$$

On en déduit $V(r) = U \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}}$ et

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = -\frac{U}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{u}_r$$

13.4

Le potentiel étant indépendant de θ et de φ sur les deux plaques, on peut chercher $V(r)$. La nullité du Laplacien de V dans l'espace vide entre les sphères s'écrit alors

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \text{ donc } r^2 \frac{dV}{dr} = A$$

$$\text{soit } \frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2} \text{ donc } V(r) = -\frac{A}{r} + B$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} -\frac{A}{a} + B = 0 \\ -\frac{A}{b} + B = U \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} A = U \frac{ab}{b-a} \\ B = U \frac{b}{b-a} \end{cases}$$

On en déduit $V(r) = U \frac{b(r-a)}{r(b-a)}$ et

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = -\frac{Uab}{r^2(b-a)} \vec{u}_r$$

13.5

- a) Sur les deux plaques, le potentiel est indépendant de φ , il y a symétrie de révolution autour de l'axe (O, z) , et il est légitime de chercher V indépendant de φ . De même, sur les plaques, V est indépendant de r .

b) L'équation de Laplace s'écrit donc, dans la région vide de charges

$$\Delta V = 0 \text{ soit } \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\text{donc } \sin \theta \frac{dV}{d\theta} = A \text{ et } \frac{dV}{d\theta} = \frac{A}{\sin \theta}$$

$$\text{donc } V(\theta) = A \ln \left[\tan \frac{\theta}{2} \right] + B$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} A \ln \left[\tan \frac{\alpha}{2} \right] + B = 0 \\ A \ln \left[\tan \frac{\frac{\pi}{4}}{2} \right] + B = U \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} A = -\frac{U}{\ln \left[\tan \frac{\alpha}{2} \right]} \\ B = U \end{cases}$$

$$\text{On en déduit } V(\theta) = U \left[1 - \frac{\ln \left[\tan \frac{\theta}{2} \right]}{\ln \left[\tan \frac{\alpha}{2} \right]} \right].$$

c) On en déduit enfin

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} \vec{u}_\theta = -\frac{U}{r \sin \theta \ln \left[\tan \frac{\alpha}{2} \right]} \vec{u}_\theta$$

13.6

On résout l'équation de Laplace dans chaque portion.

• Pour $x \in [0, a[$ (zone 3) :

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \text{ donc } V(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{x^2}{2} + A_3 x + B_3$$

La condition $V(0) = 0$ entraîne $B_3 = 0$ donc

$$V(x) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{x^2}{2} + A_3 x$$

On en déduit que

$$V(a) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{a^2}{2} + A_3 a$$

$$\text{et } E(a) = -\frac{dV}{dx}(x=a) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} a - A_3$$

• Pour $x \in [a, +\infty[$ (zone 4) :

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \text{ donc } V(x) = A_4 x + B_4$$

Le champ électrique étant nul pour $x > a$, $-\frac{dV}{dx} = A_4 = 0$ donc $V(x) = B_4$ et $E(x) = 0$. En $x = a$, on assure la continuité de V et de E :

$$\begin{cases} -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{a^2}{2} + A_3 a = B_4 \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0} a - A_3 = 0 \end{cases} \text{ donc}$$

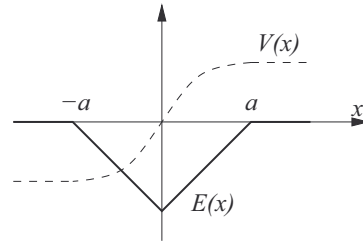
$$\begin{cases} B_4 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{a^2}{2} \\ A_3 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} a \end{cases} \text{ donc}$$

• On détermine de même $V(x)$ et $E(x)$ pour $x \in [-a, 0[$ (zone 2) et pour $x \in]-\infty, a[$, on peut aussi utiliser l'antisymétrie de la distribution de charges.

Voici le tableau récapitulatif :

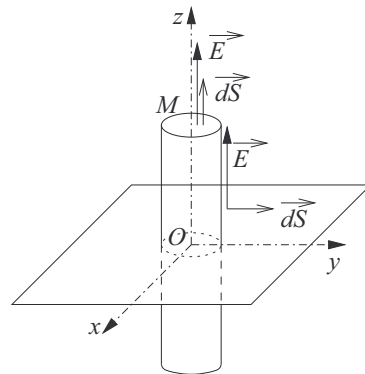
	$V(x)$	$E(x)$
$x < -a$	$-\frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0}$	0
$-a \leq x < 0$	$\frac{\rho_0(x^2 + 2ax)}{2\epsilon_0}$	$-\frac{\rho_0(x+a)}{\epsilon_0}$
$0 \leq x < a$	$\frac{\rho_0(-x^2 + 2ax)}{2\epsilon_0}$	$\frac{\rho_0(x-a)}{\epsilon_0}$
$a \leq x$	$\frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0}$	0

Voici l'allure des courbes représentatives :



13.7

Les plans (O, x, z) et (O, y, z) sont plans de symétrie des charges donc $\vec{E} = E(x, y, z) \vec{u}_z$. La distribution de charges est invariante par translation selon \vec{u}_x et selon \vec{u}_y donc $\vec{E} = E(z) \vec{u}_z$. La surface de Gauss est un cylindre de section S dont les couvercles supérieur et inférieur sont situés symétriquement en $\pm z$. Le plan $z = 0$ étant plan de symétrie des charges, $\vec{E}(-z) = -E(z) \vec{u}_z$.



Le flux se décompose en trois termes, et la charge intérieure est celle contenue par la surface S délimitée sur la plaque. Le théorème de Gauss s'écrit donc

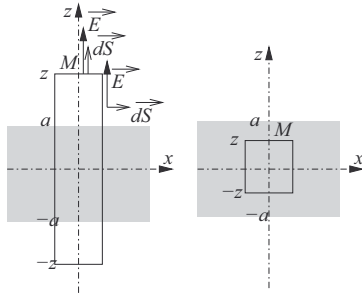
$$\iint_{\text{sup}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{inf}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$\text{soit } E \cdot S + 0 + E \cdot S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

donc $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$ si $z > 0$ et $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$ si $z < 0$.

13.8

Les symétries et les invariances sont les mêmes qu'à l'exercice 13.7 donc $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$. La surface de Gauss est un cylindre de section S dont les couvercles supérieur et inférieur sont situés symétriquement en $\pm z$. Le plan $z = 0$ étant plan de symétrie des charges, $\vec{E}(-z) = -E(z)\vec{u}_z$. Deux cas sont à distinguer pour $z > 0$: $z > a$ ou $z \leq a$.



Le flux se décompose en trois termes :

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{sup}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{inf}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= ES + 0 + ES = 2ES$$

La charge intérieure s'exprime distinctement dans les deux cas. Si $z > a$, elle est restreinte au cylindre de base S situé entre $-a$ et a :

$$Q_{\text{int}} = \rho \cdot 2a \cdot S \text{ donc}$$

$$2ES = \frac{\rho \cdot 2aS}{\epsilon_0} \text{ et } \vec{E} = \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

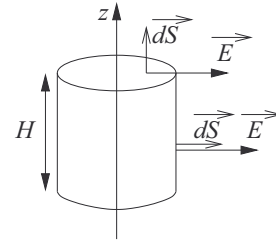
Si $0 \leq z \leq a$, c'est la charge contenue dans le cylindre situé entre $-z$ et $+z$:

$$Q_{\text{int}} = \rho \cdot 2z \cdot S \text{ donc}$$

$$2ES = \frac{\rho \cdot 2zS}{\epsilon_0} \text{ et } \vec{E} = \frac{\rho z}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

13.9

En coordonnées cylindriques, en notant O le projeté orthogonal de M sur l'axe, les plans $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont plans de symétrie des charges donc $\vec{E} = E(r, \theta, z)\vec{u}_r$. La distribution de charges est invariante par translation selon \vec{u}_z et par rotation d'angle θ donc $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. La surface de Gauss est le cylindre de rayon r et de hauteur H arbitraire.



Le flux se décompose en trois termes et la charge intérieure est celle située sur la hauteur H du fil. Le théorème de Gauss s'écrit donc

$$\iint_{\text{sup}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{inf}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\lambda \cdot H}{\epsilon_0}$$

$$\text{soit } 0 + E \cdot 2\pi r H + 0 = \frac{\lambda \cdot H}{\epsilon_0}$$

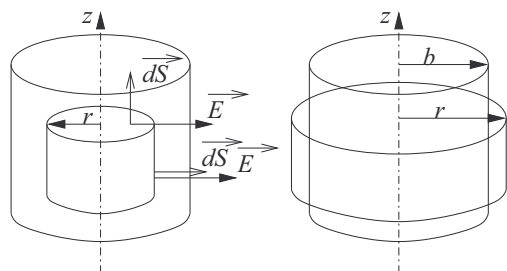
$$\text{donc } \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{u}_r$$

13.10

a) La charge sur une hauteur H est la somme de la charge située dans le volume et de celle située sur la surface, donc

$$\rho \cdot \pi b^2 H + \sigma \cdot 2\pi b H = 0 \text{ donc } \sigma = -\frac{\rho b}{2}$$

b) En coordonnées cylindriques, en notant O le projeté orthogonal de M sur l'axe, les plans $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont plans de symétrie des charges donc $\vec{E} = E(r, \theta, z)\vec{u}_r$. La distribution de charges est invariante par translation selon \vec{u}_z et par rotation d'angle θ donc $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. La surface de Gauss est le cylindre de rayon r et de hauteur H arbitraire. Deux cas sont à considérer : $r < b$ et $r > b$.



Le flux se décompose en trois termes :

$$\begin{aligned} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{sup}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{inf}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= 0 + E \cdot 2\pi r H + 0 \end{aligned}$$

Si $r \leq b$, la charge intérieure est celle située dans le cylindre de hauteur H et de rayon r :

$$Q_{\text{int}} = \rho \cdot \pi r^2 H \text{ donc}$$

$$E \cdot 2\pi r H = \frac{\rho \cdot \pi r^2 H}{\epsilon_0} \text{ et } \vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r$$

Si $r > b$, la charge intérieure est nulle d'après l'hypothèse de l'énoncé donc $\vec{E} = \vec{0}$.

13.11

Par théorème de superposition, le champ électrique est la somme des quatre champs. Les quatre distances sont égales : $AO = BO = CO = DO = a$ et les vecteurs unitaires sont selon $\pm \vec{u}_x$ et $\pm \vec{u}_y$. On en déduit

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} [-\vec{u}_x - \vec{u}_y - \vec{u}_x - \vec{u}_y]$$

$$\text{soit } \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \\ \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \end{pmatrix}$$

Dans le second cas, les trois plans $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $(O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont plans de symétrie des charges, le champ électrique devant être inclus dans ces trois plans, il est nécessairement nul.

13.12

a) La méthode énergétique est adaptée à cet exercice car la particule est soumise à deux forces conservatives et le problème est à un degré de liberté. L'énergie potentielle de la particule est $E_p = q(V(x) + V_0(x))$ où $V(x)$ est le potentiel électrique créé par Q :

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(a-x)}$$

et $V_0(x)$ celui associé à \vec{E}_0 :

$$E_0 \vec{u}_x = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0 \text{ donc } E_0 = -\frac{dV_0}{dx}$$

$$\text{donc } V_0(x) = -E_0 x$$

On en déduit que

$$E_p(x) = q \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(a-x)} - E_0 x \right]$$

$$\frac{dE_p}{dx} = q \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(a-x)^2} - E_0 \right]$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0(a-x)^3}$$

$x = 0$ est position d'équilibre si $\frac{dE_p}{dx}(x=0) = 0$ soit

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = E_0$$

Cette position est stable si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x=0) > 0$. Or

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x=0) = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{2qE_0}{a}$$

Cette quantité est donc positive si $q > 0$.

b) Le développement limité au second ordre de $E_p(x)$ au voisinage de $x = 0$ s'écrit, selon la formule de Taylor :

$$E_p(x) \simeq E_p(0) + \frac{dE_p}{dx}(x=0) \cdot x + \frac{d^2E_p}{dx^2}(x=0) \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\text{soit } E_p(x) \simeq E_p(0) + \frac{2qE_0}{a} \cdot \frac{x^2}{2}$$

L'énergie cinétique de la particule est $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$. Son énergie mécanique a donc pour valeur approchée au voisinage de $x = 0$ (correspondant aux « petites oscillations ») :

$$E_m = E_p + E_c \simeq E_p(0) + \frac{2qE_0}{a} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

En l'absence de force dissipative, E_m est constante donc sa dérivée par rapport au temps est nulle, soit

$$0 + \frac{2qE_0}{a} \cdot \frac{2\dot{x}x}{2} + \frac{1}{2} m \cdot 2\dot{x}\ddot{x} = 0$$

$$\text{donc } \frac{2qE_0}{a} x + m \cdot \ddot{x} = 0$$

$$\text{soit } \ddot{x} + \frac{2qE_0}{ma} x = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2qE_0}{ma}}$ donc de période

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{ma}{2qE_0}}$$

13.13

- a) L'électron est à égale distance des trois charges Q, les trois plans orthogonaux au plan de la figure et contenant une des médianes du triangle équilatéral sont plans de symétrie des charges, ainsi que le plan de la figure. Le champ électrique est dans leur intersection, il est donc nul, et la force électrique subie par un électron en O est nulle, c'est donc bien une position d'équilibre. Sur l'axe x, dès que l'électron se déplace vers les x > 0, il s'approche de A donc la force d'attraction dirigée vers les x croissants augmente et il s'éloigne de B et de C donc la force d'attraction dirigée vers les x décroissants diminue : il y a donc rupture d'équilibre, la force d'attraction par A est plus forte que celle par B et C, la force est donc dans le même sens que le déplacement, O est donc une position d'équilibre instable.
- b) On voit distinctement le col de potentiel au voisinage de $x^* = -0,28$ m et la ligne de potentiel $V = 3,01$ V qui délimite la cuvette de potentiel bidimensionnelle centrée en O où le potentiel ne vaut que 3,00 V. Si la particule est lancée dans le sens des x décroissants à partir de O, avec une vitesse qui lui permet de dépasser le col en x^* , on constate que le potentiel décroît ensuite sur l'axe. En particulier, lorsque $x < -0,50$ m, la particule est à gauche des trois particules car elle est en dehors du triangle qui s'arrête en $x_B = x_C = -0,50$ m. Elle est alors repoussée par les trois charges fixes, et sera donc éjectée. La particule ne doit donc jamais atteindre x^* . Par conservation de l'énergie mécanique entre O et x^* :

$$q \cdot V(0) + \frac{1}{2}mv_0^2 = q \cdot V(x^*) + \frac{1}{2}mv^{*2}$$

$$\text{donc } q(3,00 - 3,019) + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^{*2}$$

L'énergie cinétique étant toujours positive, cette équation est impossible si $q(3,00 - 3,019) + \frac{1}{2}mv_0^2 < 0$ donc si $\frac{1}{2}mv_0^2 < 0,019q$ soit

$$v_0 < \sqrt{\frac{0,038q}{m}} = 0,195 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

13.14

- a) La force électrique est $\vec{F} = q\vec{E}$ donc $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}$. Or la région est vide de charges donc $\text{div } \vec{E} = 0$ donc $\text{div } \vec{F} = 0$ soit

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} ax \\ ay \\ bz \end{vmatrix} = 0 \text{ soit } a + a + b = 0$$

donc $2a + b = 0$.

- b) La relation $\vec{E} = -\text{grad } V$ entraîne

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{ax}{m} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{ay}{m} \\ \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{2az}{m} \end{cases} \text{ donc}$$

$$V(x, y, z) = -\frac{ax^2}{2m} - \frac{ay^2}{2m} + \frac{az^2}{m} + \alpha = \alpha - \frac{a}{2m}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

qui est bien de la forme attendue avec $\beta = -\frac{a}{2m}$. Pour trouver les constantes d'intégration α et β , utilisons les conditions aux limites. Sur la plaque \mathcal{E}_0 , $x^2 + y^2 - 2z^2 = r_0^2$ et le potentiel est nul ; sur la plaque \mathcal{E}_1 , $x^2 + y^2 - 2z^2 = -2z_0^2 = -r_0^2$ et le potentiel vaut V_0 donc

$$\begin{cases} \alpha + \beta r_0^2 = 0 \\ \alpha - \beta r_0^2 = V_0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \alpha = \frac{V_0}{2} \\ \beta = -\frac{V_0}{2r_0^2} \end{cases}$$

- c) En O(0,0,0), $\vec{F} = \vec{0}$ donc la particule est en équilibre. Pour justifier la stabilité, on peut déplacer la particule sur l'axe z en maintenant $x = y = 0$ ou la déplacer sur x en maintenant $y = z = 0$. L'énergie potentielle est $Ep = qV$, et on ignore a priori le signe de q. Calculons les dérivées première et seconde de Ep :

$$\begin{cases} \frac{\partial Ep}{\partial z} = -4q\beta z \\ \frac{\partial Ep}{\partial x} = 2q\beta x \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \frac{\partial^2 Ep}{\partial z^2} = -4q\beta \\ \frac{\partial^2 Ep}{\partial x^2} = 2q\beta \end{cases}$$

On constate donc que l'une de ces deux dérivées secondes est négative, ce qui prouve que l'équilibre est instable dans l'une des deux directions.

13.15

- a) Tout plan contenant \vec{u}_r est plan de symétrie des masses donc $\vec{g} = g(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r$. La distribution de masses est invariante par rotations d'angle θ ou φ donc $\vec{g} = g(r)\vec{u}_r$. Comme M est intérieur à la planète, $r < R$, la surface de Gauss est la sphère de rayon r et le théorème de Gauss gravitationnel s'écrit

$$g(r) \cdot 4\pi r^2 = -4\pi \mathcal{G} \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{donc } \vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M}{R^3} r \vec{u}_r$$

On en déduit

$$\vec{f} = m\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{R^3} r \vec{u}_r$$

- b) Cette force est conservative et dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle Ep avec

$$\vec{f} = -\text{grad } Ep \text{ soit } -\frac{\mathcal{G}Mm}{R^3} r = -\frac{dEp}{dr}$$

$$\text{donc } Ep = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}Mm}{R^3} r^2$$

Le théorème de Pythagore donne $r^2 = r_0^2 + x^2$ donc

$$Ep(x) = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}Mm}{R^3} r_0^2 + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}Mm}{R^3} x^2$$

- c) En l'absence de force dissipative, l'énergie mécanique du train $Em = Ep(x) + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ est constante donc sa dérivée par rapport au temps est constante, soit

$$\frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}Mm}{R^3} \cdot 2\dot{x}x + \frac{1}{2} m \cdot 2\dot{x}\dot{x} = 0$$

$$\text{soit } \ddot{x} + \frac{\mathcal{G}M}{R^3} x = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R^3}}$. On en déduit, en utilisant les conditions initiales :

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t)$$

La durée du voyage est la première date à laquelle x atteint $-a$, donc la première date positive à laquelle le cosinus atteint -1 soit

$$t_V = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{R^3}{\mathcal{G}M}}$$

- d) Par application de la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M} \text{ donc } T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\mathcal{G}M}} = 2t_V$$

13.16

- a) La couche a pour surface $4\pi r^2$ et pour épaisseur dr donc

$$d\tau = 4\pi r^2 dr \text{ et } dm = \mu d\tau$$

- b) La masse de l'astre est $m(r) = \mu \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$. Lorsque la couche est à l'infini, son énergie potentielle gravitationnelle est nulle ; lorsqu'elle est déposée à la surface de l'astre, elle est à la distance r du centre donc

$$dEp = -\frac{\mathcal{G}m(r)dm}{r} = -\frac{\mathcal{G}\mu^2 \cdot 16\pi^2 r^4 dr}{3}$$

- c) On intègre entre $r = 0$ et $r = R$:

$$Ep = \int_{r=0}^R -\frac{\mathcal{G}\mu^2 \cdot 16\pi^2 r^4 dr}{3}$$

$$Ep = -\frac{\mathcal{G}\mu^2 \cdot 16\pi^2 R^5}{15}$$

$$\text{avec } \mu = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\text{donc } Ep = -\frac{3\mathcal{G}M^2}{5R}$$

13.17

Le théorème de Gauss gravitationnel permet de déterminer le champ gravitationnel pour $r \in [0, R]$. En choisissant pour surface de Gauss une sphère de rayon r :

$$\oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi \mathcal{G}M_{\text{int}}$$

$$\text{soit } -g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi \mathcal{G} \cdot \mu \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{donc } g(r) = \frac{4}{3} \pi \mathcal{G} \mu r = \frac{\mathcal{G}M}{R^3} r$$

La loi de la statique des fluides donne

$$\frac{dP}{dr} = -\mu g(r) = -\frac{3\mathcal{G}M^2}{4\pi R^6} r$$

En intégrant entre ($r = 0, P = P_0$) et ($r = R, P = 0$) :

$$[0 - P_0] = -\frac{3\mathcal{G}M^2}{4\pi R^6} \left[\frac{R^2}{2} - 0 \right]$$

$$\text{donc } P_0 = \frac{3\mathcal{G}M^2}{8\pi R^4}$$

13.18

- a) Le plan ($O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta$) est plan de symétrie des charges (il les contient toutes les deux), donc le champ électrique est inclus dans ce plan et la composante de \vec{E} selon \vec{u}_φ est nulle. La distribution est invariante par rotation d'angle φ donc \vec{E} ne dépend pas de cette variable.

- b) Par définition, $V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{P}\|}$. Dans la base cartésienne de la figure :

$$P \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{d}{2} \end{vmatrix}, M \begin{vmatrix} r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{vmatrix} \text{ et } \vec{P}\vec{M} = \begin{vmatrix} r \sin \theta \\ r \cos \theta - \frac{d}{2} \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \|\vec{P}\vec{M}\| = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + \left(r \cos \theta - \frac{d}{2} \right)^2}$$

$$\text{soit } \|\vec{P}\vec{M}\| = \sqrt{r^2 - dr \cos \theta + \frac{d^2}{4}}$$

On en déduit

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

En faisant le développement limité au premier ordre en $\frac{d}{r}$, le terme $\frac{d^2}{4r^2}$ est négligé car du second ordre et

$$V_P \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right]$$

De même

$$V_N \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right]$$

- c) Le théorème de superposition permet de sommer les potentiels :

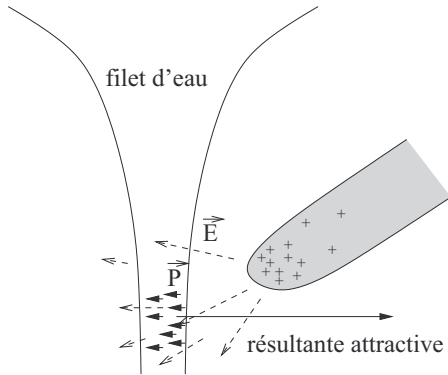
$$V(M) = V_P + V_N = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Le champ électrique est donc

$$\vec{E} = -\text{grad } V = \begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{qd \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

13.19

Les molécules d'eau, assimilées à des dipôles électriques (l'atome d'oxygène est plus électronégatif que les atomes d'hydrogène) sont soumises à l'action du champ électrique non uniforme créé par la tige chargée.



D'après le cours, les dipôles s'orientent dans le sens de \vec{E} et se déplacent vers les zones de champ maximum, donc vers la tige, d'où le déplacement attractif du filet d'eau. Les molécules de cyclohexane ne sont, elles, pas polaires (et très faiblement polarisables), il n'y a donc pas de déviation.

13.20

- a) Le champ électrique \vec{E}_1 créé par le dipôle 1 de moment dipolaire $\vec{P}_1 = P\vec{u}_x$ au niveau du dipôle 2 repéré par $\vec{O}_1\vec{O}_2 = x\vec{u}_x$ est

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3Px}{x^5} x\vec{u}_x - \frac{P}{x^3} \vec{u}_x \right)$$

$$\vec{E}_1 = \frac{2P}{4\pi\epsilon_0 x^3} \vec{u}_x$$

On en déduit l'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle 2 et le champ électrique créé par le dipôle 1

$$E_p = -\vec{P}_2 \cdot \vec{E}_1 = -\frac{2P^2}{4\pi\epsilon_0 x^3}$$

On en déduit

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p = -\frac{dE_p}{dx} \vec{u}_x \text{ soit}$$

$$\vec{F} = -\frac{3P}{2\pi\epsilon_0 x^4} \vec{u}_x$$

- b) Le champ électrique \vec{E}_1 créé par le dipôle 1 de moment dipolaire $\vec{P}_1 = P\vec{u}_y$ au niveau du dipôle 2 repéré par $\vec{O}_1\vec{O}_2 = x\vec{u}_x$ est

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(0\vec{u}_x - \frac{P}{x^3} \vec{u}_y \right)$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0 x^3} \vec{u}_y$$

On en déduit l'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle 2 et le champ électrique créé par le dipôle 1

$$E_p = -\vec{P}_2 \cdot \vec{E}_1 = -\frac{P^2}{4\pi\epsilon_0 x^3}$$

On en déduit

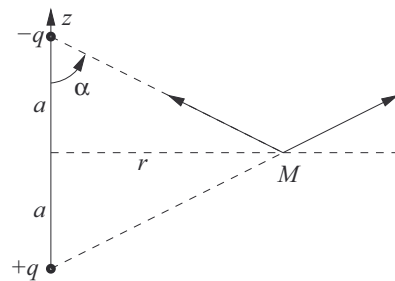
$$\vec{F} = -\text{grad } E_p = -\frac{dE_p}{dx} \vec{u}_x \text{ soit}$$

$$\vec{F} = -\frac{3P}{\pi\epsilon_0 x^4} \vec{u}_x$$

- c) Le champ électrique \vec{E}_1 est le même qu'à la question (b), il est orthogonal à \vec{P}_2 donc E_p est uniformément nul et la force est nulle.

13.21

- a) Le point M est dans le plan d'antisymétrie des deux charges, donc \vec{E} est orthogonal à ce plan, soit $\vec{E} = E\vec{u}_z$. On somme les champs créés par les deux charges.



$$\vec{E} = 2 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2)} \cos \alpha \vec{u}_z$$

$$\vec{E} = \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$$

b) L'énergie potentielle est

$$Ep(r) = -\vec{P} \cdot \vec{E} = -\frac{2qaP}{4\pi\epsilon_0(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

c) L'énergie potentielle ne dépend que de r , c'est donc un mouvement à force centrale conservative et les deux grandeurs constantes sont le moment cinétique en O

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

et l'énergie mécanique \mathcal{E}_0 .

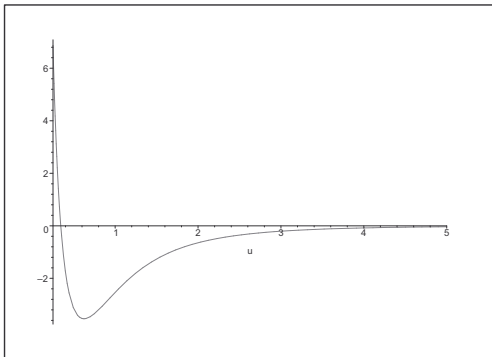
d) On exprime

$$Ep_{\text{eff}}(r) = \frac{L_O^2}{2ma^2} \left[\frac{1}{\frac{r^2}{a^2}} - \frac{qaPm}{\pi\epsilon_0 L_O^2 \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Les hypothèses simplificatrices donnent

$$Ep_{\text{eff}}(u) = \frac{1}{u^2} - \frac{10}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Voici l'allure de la courbe obtenue par un grapheur.



D'après le cours de première année, les valeurs possibles pour r sont définies par

$$Ep_{\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}_0$$

Si l'énergie \mathcal{E}_0 est négative, on a donc un état lié, si \mathcal{E}_0 est positive, on a un état de diffusion, et si \mathcal{E}_0 correspond au minimum de la courbe, on a un mouvement circulaire.

13.22

a) La densité étant uniforme,

$$\rho = \frac{-Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

b) Le champ électrique créé en P par le nuage électronique est donné par le théorème de Gauss.

$$4\pi r^2 E(P) = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$\text{donc } \vec{E}(P) = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \vec{u}_r$$

$$\text{et } \vec{F} = Ze\vec{E}(P) = -\frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{NP}$$

qui est bien une force de rappel de ressort de constante de raideur

$$K = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

c) La loi de la quantité de mouvement appliquée au nuage électronique s'écrit

$$m_N \frac{d\vec{v}}{dt} = -ZeE_0 \vec{u}_x \cos(\omega t) - K\vec{r} - \hbar\vec{\nu}$$

On passe en formalisme complexe et on pose $\vec{r} = \vec{PN}$, donc

$$m_N (i\omega)^2 \vec{r} = -ZeE_0 \vec{u}_x e^{i\omega t} - K\vec{r} - i\omega \hbar \vec{r}$$

$$\text{soit } \vec{r} = -\frac{Ze\vec{E}}{(K - \omega^2 m_N) + i\hbar\omega}$$

On en déduit le moment dipolaire

$$\vec{P} = Ze\vec{NP} = -Ze\vec{r} \text{ soit}$$

$$\vec{P} = \frac{Z^2 e^2}{(K - \omega^2 m_N) + i\hbar\omega} \vec{E}$$

On en déduit la polarisabilité complexe

$$\alpha = \frac{Z^2 e^2}{(K - \omega^2 m_N) + i\hbar\omega}$$

13.23

a) La charge du noyau est

$$q(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Zer^3}{R^3}$$

b) La charge dq qui fait augmenter le rayon de dr est celle d'une couche sphérique de surface $4\pi r^2$ et d'épaisseur dr , donc

$$dq = \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{3Zer^2 dr}{R^3}$$

À l'infini, l'énergie de cette charge est nulle. Lorsqu'elle se dépose à la surface du noyau en formation, son énergie est l'énergie potentielle d'interaction

$$d\mathcal{E} = \frac{q(r) \cdot dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{3Z^2 e^2 r^4 dr}{4\pi\epsilon_0 R^6}$$

qui correspond à l'augmentation d'énergie du noyau.

c) On calcule l'intégrale

$$\mathcal{E} = \int_{r=0}^R \frac{3Z^2 e^2 r^4 dr}{4\pi\epsilon_0 R^6}$$

$$\mathcal{E} = \frac{3Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R^6} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R$$

soit $\mathcal{E} = \frac{3Z^2 e^2}{20\pi\epsilon_0 R}$

13.24

Soit q la charge du cylindre (1) et $-q$ celle du cylindre (2). Soit M un point entre les deux cylindres, repéré par sa distance à l'axe $r \in]a_1, a_2[$. La distribution de charges est symétrique par rapport à $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et (si les cylindres étaient infinis) par rapport à $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ donc $\vec{E} = E(r, \theta, z)\vec{u}_r$. La distribution de charges est invariante (si les cylindres étaient infinis) par translation selon \vec{u}_z et par rotation d'angle θ donc $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. La surface de Gauss est le cylindre de hauteur H . Le flux est celui à travers sa surface latérale en admettant que celui à travers les couvercles supérieur et inférieur est nul (ce serait le cas si les cylindres étaient infinis). La charge intérieure est égale à celle du cylindre (1) intérieur, soit q . L'application du théorème de Gauss donne donc

$$E(r) \cdot 2\pi r H = \frac{q}{\epsilon_0} \text{ donc } \vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r H} \vec{u}_r$$

On en déduit le potentiel

$$\vec{E} = -\text{grad } V \Leftrightarrow \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r H} = -\frac{dV}{dr}$$

$$\text{donc } V(r) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln r + K$$

On en déduit la tension électrique

$$u = V(a_1) - V(a_2) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln \frac{a_2}{a_1}$$

$$\text{donc } C = \frac{q}{u} = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln \frac{a_2}{a_1}}$$

13.25

a) Les symétries et invariances habituelles du cylindre infini entraînent que $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Par application du théorème de Gauss sur un cylindre de rayon r et de hauteur H arbitraire :

$$E(r) \cdot 2\pi r H = \frac{\sigma \cdot 2\pi a H}{\epsilon_0} \text{ donc } \vec{E} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

On en déduit le potentiel

$$\vec{E} = -\text{grad } V \Leftrightarrow \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} = -\frac{dV}{dr}$$

$$\text{donc } V(r) = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0} \ln r + K$$

b) Par théorème de superposition, le potentiel est la somme des deux potentiels. Les rayons correspondants sont $r_1 = D + x$ et $r_2 = D - x$. On en déduit

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0} \ln r_1 + K_1 + \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \ln r_2 + K_2$$

$$= \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \ln \frac{D-x}{D+x} + K_1 + K_2$$

c) L'expression de $V(x)$ obtenue à la question précédente n'est valable que dans l'espace situé sur l'axe x entre les deux cylindres. La tension électrique est donc mesurée entre $x = -D + a$ et $x = D - a$:

$$u = V(-D + a) - V(D - a) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \left[\ln \frac{2D-a}{a} - \ln \frac{a}{2D-a} \right]$$

$$\text{soit } u = \frac{2\sigma a}{\epsilon_0} \ln \frac{2D-a}{a}$$

d) La charge portée par le cylindre (1) de hauteur H est $q = \sigma \cdot 2\pi a H$. On en déduit la relation entre q et u en éliminant σ :

$$u = \frac{q}{\pi H \epsilon_0} \ln \frac{2D-a}{a}$$

$$\text{donc } C = \frac{q}{u} = \frac{\pi H \epsilon_0}{\ln \frac{2D-a}{a}}$$

$$\text{donc } \Gamma = \frac{C}{H} = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{2D-a}{a}}$$

13.26

a) Les symétries et invariances de la distribution sphérique de charges donnent $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. Le théorème de Gauss appliqué à une sphère de rayon r donne

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} & \text{si } r \leq R \\ \frac{-e}{\epsilon_0} & \text{si } r > R \end{cases}$$

$$\text{donc } E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & \text{si } r \leq R \\ \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{si } r > R \end{cases}$$

- b) Calculons les énergies pour les deux zones. L'intégrale triple en distribution sphérique peut se ramener à une intégrale simple sur r :

$$\iiint u_e(r) d\tau = \int_r \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

Pour $r \leq R$:

$$U_{\text{int}} = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} \int_{r=0}^R r^4 dr$$

$$U_{\text{int}} = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} \cdot \frac{R^5}{5}$$

$$U_{\text{int}} = \frac{e^2}{40\pi\epsilon_0 R}$$

Pour $r > R$:

$$U_{\text{ext}} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{r=R}^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

$$U_{\text{ext}} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

On en déduit

$$U_e = U_{\text{int}} + U_{\text{ext}} = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

13.27

La plaque est soumise à son poids qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur $Ep_p = -mgz$, de la force de rappel élastique qui dérive de l'énergie potentielle élastique $Ep_\ell = \frac{1}{2}k(z-\ell_0)^2$ et de la force électrique qui dérive de l'énergie électrique emmagasinée par le condensateur équivalent

$$Ep_e = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$\text{avec } C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{H-z}$$

$$\text{donc } Ep_e = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} (H-z)$$

Ce problème est à un degré de liberté, l'équilibre est donc atteint lorsque

$$\frac{d(Ep_p + Ep_\ell + Ep_e)}{dz} = 0$$

$$\text{soit } -mg + k(z-\ell_0) - \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} = 0$$

$$\text{donc } z_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k} + \frac{q^2}{2k\epsilon_0 S}$$

CHAPITRE 14

Champ magnétique en régime stationnaire

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Équation de Maxwell-Ampère.
- ◇ Équation de Maxwell-Thomson.
- ◇ Conservation du flux magnétique.
- ◇ Lignes de champ magnétique.
- ◇ Théorème d'Ampère.
- ◇ Force de Laplace sur un conducteur filiforme.
- ◇ Induction.
- ◇ Loi de Faraday.
- ◇ Énergie magnétique.
- ◇ Énergie magnétique volumique.
- ◇ Inductance propre.
- ◇ Inductance mutuelle.
- ◇ Aimant permanent.
- ◇ Dipôle magnétique.
- ◇ Actions subies par un dipôle magnétique.
- ◇ Exprimer le champ magnétique d'une superposition de dipôles.
- ◇ Étudier l'évolution d'un dipôle magnétique dans un champ extérieur.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Exploiter les équations de Maxwell pour établir les lois du champ magnétostatique.
- ◇ Analyser une carte de champ magnétique.
- ◇ Énoncer et appliquer le théorème d'Ampère.
- ◇ Connaître les champs créés par des distributions particulières de courants.
- ◇ Utiliser le théorème de superposition.
- ◇ Utiliser les propriétés des champs pour l'étude du mouvement d'une particule chargée.
- ◇ Calculer et exploiter les forces de Laplace sur un conducteur filiforme.
- ◇ Énoncer et exploiter la loi de Faraday.
- ◇ Calculer auto-inductance L et mutuelle inductance M dans des cas simples.
- ◇ Calculer l'énergie magnétique et retrouver les expressions de L et de M .

Les méthodes à retenir

Exploiter les équations de Maxwell pour établir les lois du champ magnétostatique.

En régime stationnaire, le **champ magnétique** \vec{B} , exprimé en Tesla (T), nommé dans ce cas **champ magnétostatique**, est créé par les distributions de courant. On note \vec{j} la **densité volumique de courant** exprimée en ampère par mètre carré ($A \cdot m^{-2}$). Le champ magnétostatique vérifie l'équation de **Maxwell-Thomson** (MT) et l'équation de **Maxwell-Ampère** (MA) :

$$(MT) : \operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ et } (MA) : \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

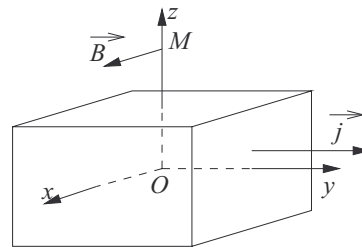
On doit retenir les trois propriétés topographiques suivantes, traduisant le caractère axial de \vec{B} .

- Le champ magnétique créé par un courant électrique vérifie la règle de la main droite : celle-ci est traversée par le courant, le courant sort par les doigts, et la paume est tournée vers un point M de l'espace, alors le champ magnétique en M a la direction et le sens du pouce tendu à angle droit par rapport aux autres doigts.
- Le champ magnétique est contenu dans les plans d'antisymétrie des courants ;
- Le champ magnétique est orthogonal aux plans de symétrie des courants.

Notons que les propriétés de symétrie des répartitions de courants sont affirmées, sans démonstration ; un schéma peut aider à les identifier, mais il n'est pas demandé explicitement au concours.

Exemple :

Un courant volumique de densité uniforme $\vec{j} = j\vec{u}_y$, traverse le volume situé entre les plans $z = -a$ et $z = a$, supposé infini selon x et y . On cherche le champ magnétique en un point $M(0, 0, z)$.



Le plan (O, y, z) est plan de symétrie des courants, donc $\vec{B} = B(x, y, z)\vec{u}_x$. Notons qu'il est contenu dans le plan (O, x, z) qui est plan d'antisymétrie des courants. La règle de la main droite indique que si la main droite est couchée à plat dans le plan (O, x, y) , les doigts dirigés vers les y croissants, et la paume tournée vers le haut, le pouce indique que \vec{B} est bien dirigé dans la direction et le sens de \vec{u}_x . La distribution de courants est invariante par translation selon \vec{u}_x et selon \vec{u}_y , donc $\vec{B} = B(z)\vec{u}_x$. On vérifie que l'équation de Maxwell-Thomson est vérifiée :

$$\operatorname{div} \vec{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial B(z)}{\partial x} + 0 + 0 = 0$$

L'équation de Maxwell-Ampère donne, pour $0 \leq z \leq a$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ B'(z) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \mu_0 j \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } B'(z) = \mu_0 j \text{ et } B(z) = \mu_0 j z + K$$

et pour $z > a$:

$$\begin{vmatrix} 0 \\ B'(z) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } B'(z) = 0 \text{ et } B(z) = L$$

Pour trouver les deux constantes, on remarque que pour $z = 0$, les plans (O, x, y) et (O, y, z) sont tous deux plans de symétrie des courants, donc $\vec{B} = \vec{0}$, donc $K = 0$. On en déduit $B(z = a^-) = \mu_0 j a$ et en admettant la continuité de B en $z = a$, $L = B(z = a^+) = \mu_0 j a$.

↪ **Exercices 14.1, 14.2.**

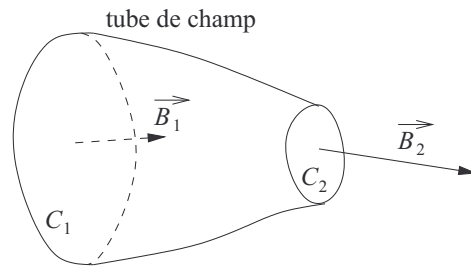
Analyser une carte de champ magnétique.

La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Thomson (après application du théorème d'Ostrogradski) s'écrit : si Σ est une surface fermée alors

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

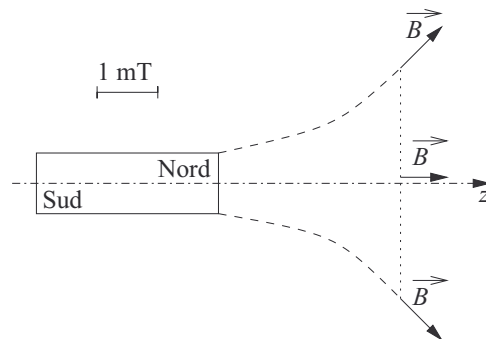
On dit que \vec{B} est à **flux conservatif** et on en tire deux conséquences importantes. La première est que le flux de \vec{B} à travers une surface tendue sur un contour fermé est indépendante de la surface choisie.

La seconde est que lorsqu'un tube de champ magnétique s'appuie sur un contour \mathcal{C}_1 à une extrémité et \mathcal{C}_2 à l'autre, si S_1 est une surface tendue sur \mathcal{C}_1 et S_2 sur \mathcal{C}_2 , alors le flux entrant à travers S_1 est égal au flux sortant à travers S_2 . On en déduit la propriété suivante, importante pour l'interprétation des cartes de champ magnétique : lorsqu'un tube de champ se resserre, la valeur moyenne du champ magnétique qui le traverse augmente.



Exemple :

Voici l'allure des lignes de champ créées par un aimant cylindrique de rayon $r = 1,0$ cm, dans un plan quelconque contenant l'axe de révolution z du cylindre :



Déterminons l'ordre de grandeur du champ magnétique B_1 au niveau du pôle nord de l'aimant.

Le champ magnétique étant à flux conservatif, son flux à travers la section $S_1 = \pi r^2$ de sortie du pôle nord est égal à celui à travers la section $S_2 = \pi R^2$ à l'extrémité droite du tube. On lit sur le graphe, à l'échelle :

$$R \approx 5 \times r \text{ et } B_2 \approx 0,75 \text{ mT}$$

On en déduit

$$B_1 \cdot \pi r^2 = B_2 \cdot \pi R^2 \text{ donc } B_1 = B_2 \frac{R^2}{r^2} = 25B_2 \approx 19 \text{ mT}$$

↔ **Exercice 14.3.**

Énoncer et appliquer le théorème d'Ampère.

La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire est le **théorème d'Ampère** : si \mathcal{C} est un contour fermé orienté,

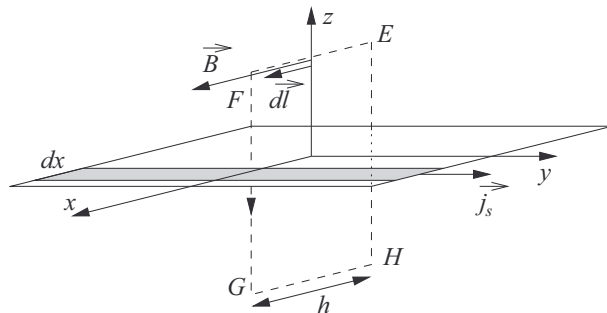
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Il faut respecter les étapes suivantes pour bien appliquer ce théorème. Soit M un point de l'espace où on cherche le champ magnétique créé par une distribution de courants.

- Les règles de symétrie et d'invariance permettent de déterminer la direction et les variables dont dépend le champ magnétique \vec{B} . La règle de la main droite permet de prévoir son sens.
- On choisit un contour d'Ampère \mathcal{C} et on l'oriente dans le sens de \vec{B} en M. En tout point de ce contour, \vec{B} doit être tangent ou normal. On trace \mathcal{C} en vert sur le schéma.
- L'orientation choisie pour \mathcal{C} permet de définir un sens positif pour les courants enlacés.
- En quelques points bien choisis de \mathcal{C} , on trace \vec{B} en rouge et $d\vec{\ell}$ en vert.
- On calcule la circulation de \vec{B} sur le contour en décomposant éventuellement l'intégrale en plusieurs morceaux.
- On exprime l'intensité du courant enlacé par une somme algébrique (courants filiformes) ou intégrale (courants surfaciques ou volumiques).
- On écrit le théorème d'Ampère et on en déduit \vec{B} après éventuelle simplification par des termes arbitrairement choisis.

Exemple :

Une nappe de courant plane infinie est définie sur le plan (O, x, y) par le vecteur densité surfacique de courant $\vec{j}_S = j_S \vec{u}_y$ dont la norme est le rapport entre l'intensité du courant di et la largeur dx d'une languette : $j_S = \frac{di}{dx}$.



Cherchons le champ magnétique \vec{B} en un point $M(0,0,z)$ avec $z > 0$. Le plan (O, y, z) est plan de symétrie des courants donc $\vec{B} = B(x, y, z) \vec{u}_x$. La règle de la main droite indique que la composante du champ sur \vec{u}_x est positive. La distribution de courants est invariante par translations selon \vec{u}_x et selon \vec{u}_y donc $\vec{B} = B(z) \vec{u}_x$. On choisit pour contour d'Ampère un rectangle (EFGH) de largeur h arbitraire selon x et dont le côté (EF) passant par M est à la cote z et dont le côté opposé (GH) est à la cote $-z$. Le plan (O, x, y) étant plan de symétrie des courants, $\vec{B}(-z) = -\vec{B}(z)$. Il est orienté dans le sens indiqué sur la figure, et on compte positivement les courants enlacés orientés dans le sens de \vec{u}_y . La circulation se décompose en quatre termes :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_E^F B \cdot d\ell + \int_F^G 0 + \int_G^H B \cdot d\ell + \int_H^E 0 = 2Bh$$

Le courant enlacé est celui circulant dans une largeur $\Delta y = h$ donc

$$I_{\text{enlacé}} = +j_S \cdot \Delta x = j_S h$$

Le théorème d'Ampère donne donc

$$2Bh = \mu_0 j_S h \text{ donc } \vec{B} = \mu_0 j_S \vec{u}_x$$

↪ Exercices 14.4, 14.5.

Connaître les champs créés par des distributions particulières de courants.

Le champ magnétique créé par les distributions suivantes doit être mémorisé, et il faut savoir l'établir rapidement.

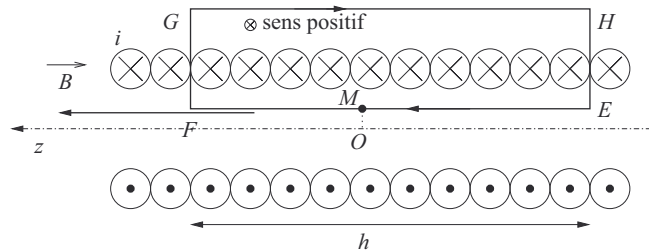
- Un fil rectiligne infini selon (O, z) parcouru par un courant d'intensité I crée un champ magnétique orthoradial $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ en coordonnées cylindriques.
- Un cylindre infini de rayon R et d'axe (O, z) , parcouru par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = \frac{1}{\pi R^2} \vec{u}_z$, crée un champ magnétique orthoradial

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{u}_z & \text{si } r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_z & \text{si } r > R \end{cases}$$

- Un solénoïde infini d'axe (O, z) , comportant n spires par mètre et parcouru par un courant d'intensité I crée un champ magnétique nul à l'extérieur (résultat admis) et uniforme à l'intérieur $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$.
- Une bobine torique comportant N spires, parcourue par un courant d'intensité I , crée un champ magnétique nul à l'extérieur du tore et orthoradial à l'intérieur $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$.

Exemple :

Un solénoïde infiniment long est formé d'un bobinage comportant n spires presque circulaires par mètre. Ce bobinage est parcouru par un courant d'intensité I . On admet la nullité du champ magnétique à l'extérieur et on cherche le champ magnétique en un point M à l'intérieur, repéré en coordonnées cylindriques par $\vec{OM} = r \vec{u}_r$, où O est le projeté orthogonal de M sur l'axe z du cylindre. Voici une vue en coupe du dispositif.



Le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie des courants donc $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{u}_z$. La distribution de courants est invariante par translation selon \vec{u}_z et rotation d'angle θ donc $\vec{B} = B(r) \vec{u}_z$. La règle de la main droite indique que \vec{B} est dans le sens de \vec{u}_z . Le contour d'Ampère est le rectangle (EFGH), orienté dans ce sens, de largeur h arbitraire. La circulation de \vec{B} est la somme de quatre termes :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_E^F \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_F^G 0 + \int_G^H \vec{0} \cdot d\vec{\ell} + \int_H^E 0 = B \cdot h$$

Le courant enlacé est celui qui circule dans les $n \cdot h$ spires situées dans la largeur h , donc $I_{\text{enlacé}} = nhI$. Le théorème de Gauss donne donc

$$Bh = \mu_0 nhI \text{ donc } \vec{B} = \mu_0 nI \vec{u}_z$$

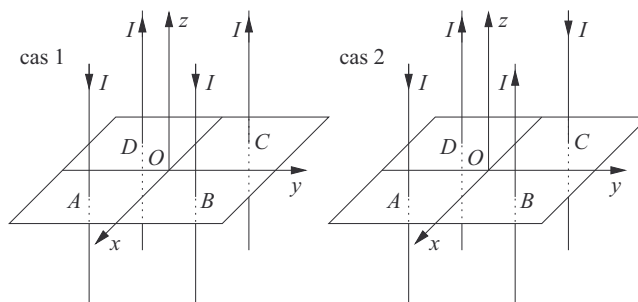
↪ Exercices 14.6, 14.7.

Utiliser le théorème de superposition.

La linéarité des équations de Maxwell entraîne la loi suivante, appelée « **théorème de superposition** » : le champ magnétique créé par la superposition de deux distributions de courants est la somme des champs créés séparément par chacune des distributions. Cette loi permet de déterminer le champ dans des cas où la distribution ne semble présenter aucune symétrie et/ou invariance particulière.

Exemple :

Le champ créé par un ensemble de fils rectilignes infinis est la somme des champs créés par chacun des fils. Dans les deux cas suivants, déterminons le champ magnétique au centre O du carré (on pose $OA = OB = OC = OD = a$).



Dans les deux cas, (O, x, y) est plan d'antisymétrie des courants donc \vec{B} est dans ce plan. Dans le premier cas, (O, x, z) est plan de symétrie des courants donc $\vec{B} = B\vec{u}_y$. L'application du théorème d'Ampère à un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité I donne $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ à une distance r de ce fil. Le vecteur \vec{u}_θ n'est pas le même en O pour les quatre fils :

$$\vec{B}_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_y \right]$$

$$\vec{B}_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_y \right]$$

$$\vec{B}_C = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_y \right]$$

$$\vec{B}_D = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_y \right]$$

La somme de ces champs en O est donc

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{\pi a} \vec{u}_y$$

Dans le second cas, les trois plans (O, x, y) , (O, x, z) et (O, y, z) sont plans d'antisymétrie des courants, \vec{B} devant être inclus dans ces trois plans simultanément, il est donc nul.

→ Exercices 14.7, 14.8.

Utiliser les propriétés des champs pour l'étude du mouvement d'une particule chargée.

Une particule ponctuelle de masse m et de charge q évoluant dans un champ magnétique \vec{B} à la vitesse \vec{v} subit la **force de Lorentz magnétique** $\vec{f}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Cette force a une puissance nulle $\mathcal{P}(\vec{f}_L) = \vec{f}_L \cdot \vec{v} = 0$. La prise en compte de cette force dans un problème de mécanique ne pose pas de difficulté particulière. On doit retenir que le mouvement d'une particule injectée à la vitesse initiale \vec{v}_0 perpendiculairement à un champ magnétique uniforme \vec{B} a (si seule la force de Lorentz s'exerce) un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = \frac{m\|\vec{v}_0\|}{|q|\|\vec{B}\|}$.

Exemple :

La démonstration du résultat énoncé ci-dessus n'est pas explicitement au programme. On se contente d'admettre que le mouvement est circulaire de rayon R , de centre O et on détermine la valeur du rayon. La puissance de la force de Lorentz étant nulle, la loi de la puissance cinétique prouve que $\frac{dE_c}{dt} = 0$ donc le mouvement est uniforme à la vitesse $v_0 = \|\vec{v}_0\|$. La loi de la quantité de mouvement appliquée à la particule dans le référentiel galiléen du laboratoire et projetée dans la base cylindrique donne

$$\vec{OM} = R\vec{u}_r, \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta, \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r, \quad \vec{B} = -B_0\vec{u}_z$$

$$\text{donc } \begin{cases} v_0 = R\dot{\theta} \\ -qv_0B_0 = -mR\dot{\theta}^2 = -m\frac{v_0^2}{R} \end{cases}$$

$$\text{donc } R = \frac{mv_0}{qB_0}$$

↪ Exercices 14.9, 14.10.

Calculer et exploiter les forces de Laplace sur un conducteur filiforme.

La force de Laplace qui s'exerce sur un tronçon élémentaire de conducteur filiforme parcouru par un courant d'intensité i est

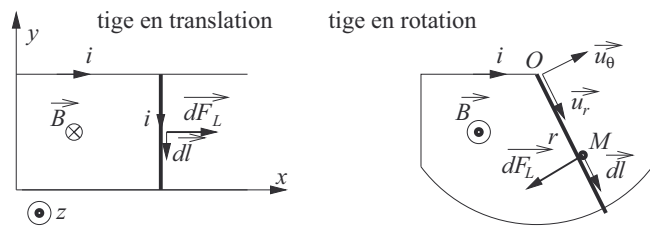
$$d\vec{F}_L = i\vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$

où $\vec{d\ell}$ est le vecteur tronçon de fil orienté dans le sens de i . La force résultante de Laplace sur un barreau en mouvement de translation, ou le moment résultant des forces de Laplace pour une tige en rotation autour d'un axe nécessite donc un calcul d'intégrale. Pour une répartition volumique de courants, on définit la **densité volumique de force de Laplace** : un élément de volume $d\tau$ traversé par un courant de densité volumique \vec{j} subit une force $d\vec{F}_L$ et la force volumique est

$$\frac{d\vec{F}_L}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Exemple :

Les deux cas les plus fréquents sont décrits sur les schémas suivants. Le premier est le dispositif des rails de Laplace où une tige de longueur L se déplace en translation selon x ; dans le second, une tige de longueur L est en rotation autour de l'axe (O, z) .



La force de Laplace s'exerçant sur la tige en translation est

$$\int_{y=L}^0 i (dy \vec{u}_y) \wedge (-B \vec{u}_z) = -iB[y]_L^0 \vec{u}_x = iBL \vec{u}_x$$

Dans le second cas, le moment en O de la force de Laplace élémentaire s'exerçant sur un tronçon de longueur $d\ell = dr$ en M point de la tige de rayon r est

$$\begin{aligned} d\vec{\mathcal{M}}_O &= \vec{OM} \wedge [i \vec{d\ell} \wedge \vec{B}] \\ &= r \vec{u}_r \wedge [(i dr \vec{u}_r) \wedge (B \vec{u}_z)] \\ &= (r \vec{u}_r) \wedge (-iB dr \vec{u}_\theta) = -iB r dr \vec{u}_z \end{aligned}$$

Son moment par rapport à l'axe $\Delta = (O, z)$ est sa projection sur cet axe, soit $d\mathcal{M}_\Delta = -iB r dr$. Le moment résultant sur la tige en rotation est donc

$$\mathcal{M}_\Delta = \int_{r=0}^L -iB r dr = -iB \frac{L^2}{2}$$

↪ Exercices 14.11, 14.12, 14.13, 14.14.

Énoncer et exploiter la loi de Faraday.

La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday fait apparaître

- la circulation du champ électrique \vec{E} le long du lacet \mathcal{C} qui s'identifie à une force électromotrice exprimée en volt :

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

- la dérivée par rapport au temps du flux du champ magnétique à travers la surface S tendue sur le contour \mathcal{C}

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

On reconnaît la **loi de Faraday** énoncée en première année

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Elle s'applique dans le cas des circuits filiformes et peut être appliquée dans les deux cas suivants :

- le circuit est fixe et le champ magnétique est variable
- le circuit est mobile ou déformable et le champ magnétique est permanent.

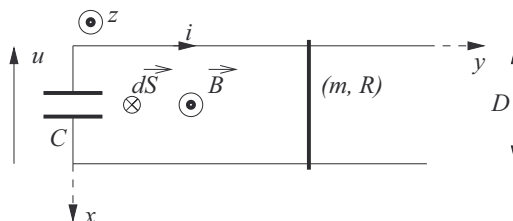
Voici les étapes à respecter.

- On dresse un arbre des conséquences en commençant par la source d'énergie du système et en citant à chaque fois la loi physique correspondante.
- On oriente le circuit (i) et le vecteur surface cohérent avec cette orientation.
- On écrit l'équation mécanique.
- On calcule le flux du champ magnétique, on en déduit e , on dessine le circuit électrique équivalent du problème en prenant e dans le sens de i . On en déduit l'équation électrique.
- On vérifie la cohérence des équations : l'équation électrique (homogène à une tension) multipliée par l'intensité et l'équation mécanique (homogène à une force) multipliée par la vitesse doivent faire apparaître dans la première la puissance d'induction, et dans la seconde la puissance de la force de Laplace avec un signe opposé.
- On exploite les équations en résolvant une équation différentielle, en cherchant une solution en régime sinusoïdal forcé (grandeurs complexes), etc.

On vérifiera, le cas échéant, la **loi de Lenz** qui dit que les effets de l'induction tendent à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

Exemple :

Dans le dispositif suivant, on néglige l'autoinductance du circuit, ce qui revient à négliger le champ magnétique propre du circuit devant le champ magnétique extérieur \vec{B} uniforme. À $t = 0$, la tige (de masse m et de résistance R) est immobile et le condensateur est chargé avec une tension U_0 . La tige glisse sans frottements sur les rails horizontaux.



(a) L'arbre des conséquences est le suivant : (i) le condensateur se décharge dans le circuit ($i = -C \frac{dU}{dt}$) (ii) le courant circule (loi des mailles) (iii) la tige subit une force de Laplace ($\vec{F}_L = i \vec{D} \wedge \vec{B}$) (iv) la tige bouge (loi de la quantité de mouvement) (v) le flux de \vec{B} à travers le circuit varie ($\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$) (vi) une force électromotrice d'induction apparaît ($e = -\frac{d\Phi}{dt}$) et elle s'insère dans le circuit électrique.

(b) Le circuit est orienté dans le sens du courant généré par le condensateur initialement chargé.

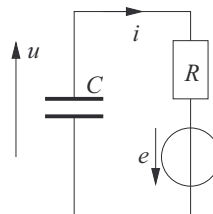
(c) La loi de la quantité de mouvement appliquée à la tige soumise à la force de Laplace dans le référentiel galiléen du laboratoire donne

$$-iDB = m\ddot{y}$$

(d) On a

$$\Phi = \iint -B \cdot d\vec{S} = -BDy \text{ et } e = -\frac{d\Phi}{dt} = BD\dot{y}$$

Le circuit électrique équivalent est



La loi des mailles s'écrit

$$u + e = Ri \text{ avec } i = -C \frac{du}{dt} \text{ donc } u + BD\dot{y} = -RC \frac{du}{dt}$$

(e) La multiplication de l'équation mécanique par \dot{y} et de l'équation électrique par i donne le système

$$\begin{cases} -iDB\dot{y} = m\dot{y}\dot{y} \\ ui + BD\dot{y}i = Ri^2 \end{cases} \text{ donc } \mathcal{P}_{\text{induction}} = -\mathcal{P}_{\text{Laplace}}$$

(f) L'équation mécanique s'écrit

$$BCD \frac{du}{dt} = m\dot{y} \text{ donc } BCD(u - U_0) = m\dot{y}$$

et en substituant \dot{y} dans l'équation électrique, on en déduit l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$:

$$u + \frac{B^2D^2C}{m}(u - U_0) = -RC \frac{du}{dt}$$

↪ Exercices 14.15, 14.16, 14.17.

Calculer auto-inductance L et mutuelle inductance M dans des cas simples.

Lorsque deux circuits électriques filiformes 1 et 2 sont placés côte-à-côte, parcourus par les courants d'intensités respectives i_1 et i_2 , quatre flux magnétiques sont à considérer :

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1} \\ \Phi_2 = \Phi_{1 \rightarrow 2} + \Phi_{2 \rightarrow 2} \end{cases}$$

On définit l'**auto-inductance** L_1 pour le circuit 1 ou L_2 pour le circuit 2 :

$$\Phi_{1 \rightarrow 1} = L_1 i_1 \text{ et } \Phi_{2 \rightarrow 2} = L_2 i_2$$

et la **mutuelle inductance** M :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2 \text{ et } \Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$$

Le calcul d'une auto-inductance se ramène donc à la détermination du flux du champ magnétique créé par un circuit à travers lui-même ; le calcul d'une mutuelle inductance se ramène donc à la détermination du flux du champ magnétique créé par un circuit à travers un second circuit. Dans ce second cas, le calcul de l'un des flux est souvent plus simple que celui du flux réciproque.

Exemple :

Un solénoïde de longueur D et de rayon R comporte N spires. On le suppose suffisamment long pour pouvoir négliger les effets de bord et considérer que le champ magnétique qu'il crée est le même que s'il était infini. Lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité i :

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z = \mu_0 \frac{N}{D} i \vec{u}_z$$

Il est uniforme et le flux à travers une des spires circulaires est

$$\Phi_1 = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{N}{D} i \cdot \pi R^2$$

On en déduit le flux à travers les N spires

$$\Phi = N\Phi_1 = \mu_0 \frac{N^2}{D} i \cdot \pi R^2$$

$$\text{donc } L = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{D}$$

↪ Exercices 14.18, 14.19, 14.20.

Calculer l'énergie magnétique et retrouver les expressions de L et de M .

Une analyse électrocinétique d'un circuit à deux inductances L_1 et L_2 couplées par une mutuelle inductance M donne l'expression suivante de l'énergie électrocinétique :

$$\mathcal{E}_{ec} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

Ces expressions conduisent à deux types d'études.

- L'étude électrocinétique de deux circuits couplés peut être conclue par un bilan de puissance dans lequel on distingue l'énergie magnétique de la première bobine, celle de la seconde bobine et l'énergie de couplage.
- Par calcul direct de l'énergie magnétique emmagasinée dans les bobines

$$U_m = \iiint u_m d\tau = \iiint \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} d\tau$$

on peut déterminer les valeurs des auto-inductances L_1 et L_2 en identifiant U_m et \mathcal{E}_{ec} .

Exemple :

L'énergie magnétique d'un solénoïde comportant N spires, de longueur D , de rayon R et parcouru par un courant d'intensité i est

$$U_m = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^D \frac{\mu_0^2 N^2 i^2}{2\mu_0} r dr d\theta dz$$

$$U_m = \frac{\mu_0^2 N^2 i^2}{2\mu_0} \cdot \pi R^2 D = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{D} i^2$$

On identifie $U_m = \mathcal{E}_{ec}$ soit

$$\frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{D} i^2 = \frac{1}{2} L i^2$$

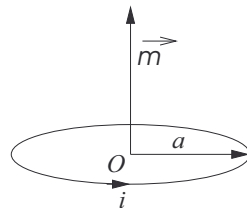
et on retrouve l'expression de l'inductance propre de la bobine cylindrique

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{D}$$

↪ Exercices 14.21, 14.22, 14.23, 14.24, 14.25, 14.26.

Exprimer le champ magnétique d'une superposition de dipôles.

Un **dipôle magnétique** est une petite spire de courant élémentaire de surface $S \approx \pi a^2$ et d'intensité i .



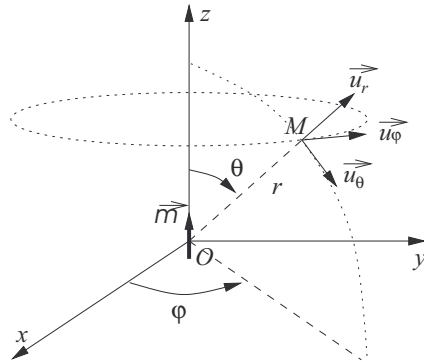
Son **moment dipolaire magnétique** est

$$\vec{m} = i \vec{S}$$

Il est exprimé en ampère mètre carré.

Dans l'**approximation dipolaire**, le champ magnétique créé par ce dipôle en M défini par $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ et $r \gg a$ est exprimé en coordonnées sphériques dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{2\mu_0 m \cos\theta}{4\pi r^3} \\ \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi r^3} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Un aimant permanent peut être assimilé à la superposition d'un très grand nombre de dipôles magnétiques. Le champ est donc, par linéarité des équations de Maxwell, la somme discrète ou intégrale des champs dipolaires. C'est ce type de calcul qui donne l'essentiel des exercices.

Mentionnons les principales difficultés.

- a) Il faut prendre garde au fait que pour un point M de l'espace, vis-à-vis de chaque dipôle, les vecteurs de base, les valeurs de r et de θ ne sont pas les mêmes, ce qui complique la sommation.
- b) Pour un nombre fini de dipôles (\vec{m}_i) , et on effectue une somme simple des champs (\vec{B}_i) qu'ils créent :

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$$

- c) Pour une infinité de dipôles, on les rassemble sur un élément différentiel de volume $d\tau$, on évalue le moment dipolaire \vec{dm} et la contribution \vec{dB} des dipôles qui s'y trouvent et on effectue une somme intégrale de ces champs élémentaires :

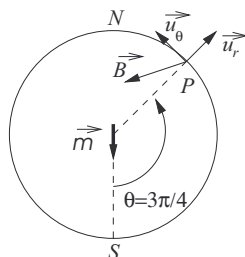
$$\vec{B} = \iiint \vec{dB}$$

Exemple :

Le champ magnétique terrestre peut être assimilé à celui créé par un dipôle magnétique au centre de la Terre, de moment dipolaire

$$\vec{m} = m\vec{u}_{NS} \text{ avec } m = 7,8 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

et \vec{u}_{NS} vecteur unitaire dirigé du pôle nord vers le pôle sud. Soit un point P en France, sur le 45ième parallèle.



Les paramètres sont $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $r = R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$, les vecteurs de la base sphérique sont $\vec{u}_r = \vec{u}_V$ selon la verticale et $\vec{u}_\theta = \vec{u}_H$ horizontal, tangent au méridien terrestre, dirigé vers le nord. Par application de la formule du cours :

$$\vec{B} = B_V \vec{u}_V + B_H \vec{u}_H \text{ avec}$$

$$\begin{cases} B_V = \frac{2\mu_0 m \cos \frac{3\pi}{4}}{4\pi R_T^3} = -4,2 \cdot 10^{-5} \text{ T} \\ B_H = \frac{\mu_0 m \sin \frac{3\pi}{4}}{4\pi R_T^3} = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ T} \end{cases}$$

Ces valeurs sont conformes à la mesure expérimentale.

↪ Exercices 14.27, 14.28, 14.29, 14.30, 14.31, 14.32.

Étudier l'évolution d'un dipôle magnétique dans un champ extérieur.

Un dipôle magnétique de centre O, de moment dipolaire \vec{m} placé dans un champ magnétique extérieur \vec{B}_{ext} subit un ensemble de forces de Laplace. Leur résultante dérive de l'énergie potentielle E_p leur moment résultant en O est $\vec{\mathcal{M}}_O$:

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}} \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

Il est très important de ne pas confondre le champ extérieur (créé par un dispositif extérieur) et le champ magnétique propre créé par le dipôle lui-même (hors sujet ici).

Deux grandes familles d'exercices se développent sur cette base :

- étude mécanique du déplacement d'un dipôle, en translation ou en rotation autour d'un axe passant par O ;
- étude qualitative du mouvement d'un dipôle dans un champ extérieur dont la carte de champ est fournie : le dipôle a tendance à s'**orienter** dans la direction et le sens du champ extérieur et à **migrer** vers les zones de champ fort.

Exemple :

(a) Soit un dipôle magnétique \vec{m} de centre O, soumis à un champ magnétique extérieur dont la valeur en O est \vec{B}_O . S'il est en rotation autour d'un axe Δ passant par O et orthogonal à (\vec{m}, \vec{B}_O) , alors la projection du moment des forces sur Δ est

$$\mathcal{M}_\Delta = [\vec{m} \wedge \vec{B}_O] \cdot \vec{u}_\Delta = m \cdot B_O \sin(\vec{m}, \vec{B}_O)$$

Posons $\theta = (\vec{m}, \vec{B}_O)$. Ce moment s'annule quand $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. L'énergie potentielle d'interaction est

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_O = -m \cdot B_O \cos(\theta)$$

Cette énergie potentielle est minimale pour $\theta = 0$ qui est donc une position d'équilibre stable. Elle est maximale pour $\theta = \pi$ qui est donc une position d'équilibre instable. Le dipôle tend donc bien à s'aligner avec le champ extérieur. (b) Soit un dipôle aligné avec le champ extérieur. L'énergie potentielle d'interaction vaut donc $E_p = -m \cdot B_O$. Elle diminue lorsque B_O augmente, donc le dipôle se déplace vers les zones de champ fort.

↪ Exercices 14.33, 14.34, 14.35, 14.36.

Énoncés des exercices

14.1

Champ magnétique créé par un cylindre infini.

Un cylindre infini d'axe (O, z) et de rayon b est parcouru par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j \vec{u}_z$. Un point M de l'espace est repéré en coordonnées cylindriques par $\vec{OM} = r \vec{u}_r$, où O est le projeté orthogonal de M sur l'axe.

- Donner l'expression de l'intensité électrique I traversant le cylindre entier.
- Justifier que $\vec{B}(r = 0) = \vec{0}$.
- Déterminer $\vec{B}(r)$ pour $r \leq b$ par application de l'équation de Maxwell-Ampère.
- En déduire l'expression de $\vec{B}(r)$ pour $r > b$ en admettant la continuité du champ magnétique en $r = b$.

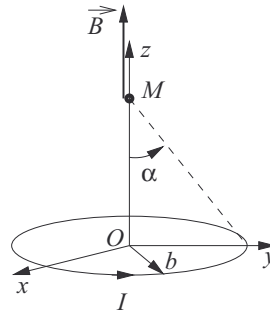
14.2

Champ magnétique au voisinage de l'axe d'une spire circulaire

Une spire circulaire de centre O , de rayon b et d'axe (O, z) est parcourue par un courant d'intensité I . Le champ magnétique en un point M situé sur l'axe (O, z) est

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2b} \sin^3 \alpha \vec{u}_z$$

où α est le demi-angle au sommet du cône sous lequel on voit la spire depuis M .



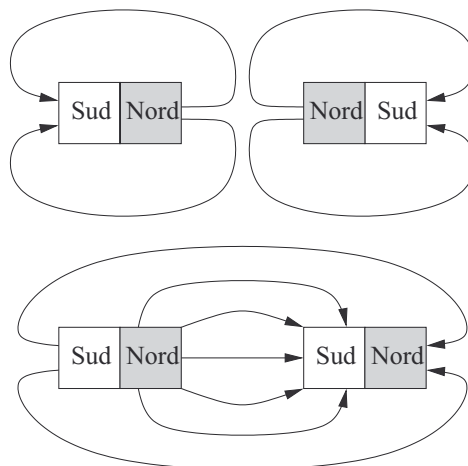
- Justifier que le champ magnétique en M est selon \vec{u}_z .
- Exprimer le champ magnétique en M en fonction de z .
- Un point P est situé à proximité de M : en coordonnées cylindriques, $\vec{MP} = r\vec{u}_r$ avec $r \ll b$ et $r \ll z$. Justifier que $\vec{B}(P)$ a une composante nulle selon \vec{u}_θ .
- On cherche l'expression approchée du champ magnétique en P sous la forme

$$\vec{B}(P) \simeq B_r(r, z)\vec{u}_r + B_z(z)\vec{u}_z$$

Déterminer complètement ce champ en fonction de r , z et des autres paramètres.

14.3
Analyse de cartes de champ

Voici l'allure des cartes de champ magnétique créé par deux aimants droits identiques juxtaposés, nord contre nord dans le premier cas, nord contre sud dans le second cas.



Dans chaque cas, dans la zone délimitée par les lignes de champ périphériques, où trouve-t-on le champ magnétique de norme maximale ? minimale ?

14.4
Champ magnétique créé par une nappe épaisse de courant

Un courant volumique de densité uniforme $\vec{j} = j\vec{u}_y$ traverse le volume situé entre les plans $z = -a$ et $z = a$, supposé infini selon x et y . Déterminer le champ magnétique \vec{B} en $M(0, 0, z)$ avec $z \geq 0$ grâce au théorème d'Ampère.

14.5
Distributions cylindriques de courant

Dans cet exercice, un point M est repéré en coordonnées cylindriques par $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ où O est le projeté orthogonal de M sur l'axe z .

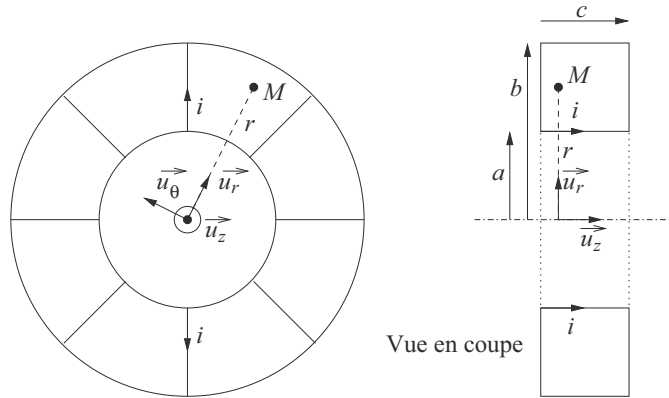
- Un fil rectiligne infini (O, z) est parcouru par un courant d'intensité I . Déterminer $\vec{B}(M)$.
- Un cylindre infini de rayon b est parcouru par un courant de densité volumique $\vec{j} = j\vec{u}_z$ uniforme. Déterminer $\vec{B}(M)$ en distinguant deux cas. Est-il continu ?
- Un cylindre infini de rayon b est parcouru par un courant de densité volumique $\vec{j} = j_0 \frac{r}{b} \vec{u}_z$. Déterminer $\vec{B}(M)$ en distinguant deux cas. Est-il continu ?
- Une plaque cylindrique infinie de rayon b est parcourue par un courant de densité surfacique $\vec{j}_S = \frac{1}{2\pi b} \vec{u}_z$. Déterminer $\vec{B}(M)$ en distinguant deux cas. Est-il continu ?

14.6

Champ de la bobine torique

Une bobine torique est constituée par l'enroulement de N spires sur le pourtour d'un tore défini en coordonnées cylindriques par

$$(r, \theta, z) \in [a, b] \times [0, 2\pi] \times [0, c]$$

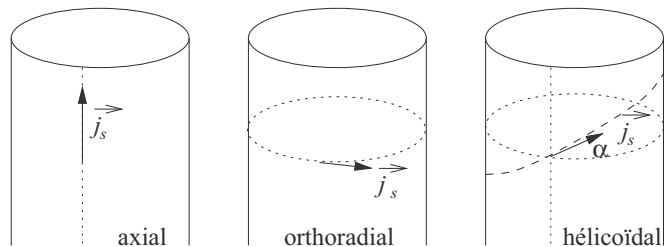


Le bobinage est parcouru par un courant d'intensité i , selon des spires quasiment rectangulaires, dans le sens de \vec{u}_z en $r = a$ et dans le sens inverse en $r = b$. Déterminer le champ magnétique en un point M intérieur au tore repéré par $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$.

14.7

Champ créé par une nappe surfacique cylindrique de courant

Une plaque cylindrique infinie d'axe z et de rayon b est parcourue par un courant surfacique de densité $\vec{j}_S = j_S \vec{u}$ avec $j_S = \frac{di}{d\ell}$ où di est l'intensité du courant traversant une bandelette de largeur $d\ell$ perpendiculairement au vecteur unitaire \vec{u} .



Un point M est repéré en coordonnées cylindriques par $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ où O est le projeté orthogonal de M sur l'axe z .

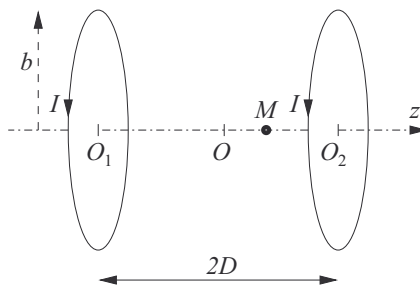
- Le courant est axial : $\vec{j}_S = j_S \vec{u}_z$. Déterminer $\vec{B}(M)$ en distinguant $r < b$ et $r > b$.
- Le courant est orthoradial : $\vec{j}_S = j_S \vec{u}_\theta$. Déterminer $\vec{B}(M)$ pour $r < b$ en admettant (comme pour le solénoïde) que $\vec{B}(r) = \vec{0}$ pour $r > b$.
- Le courant est hélicoïdal : $\vec{j}_S = j_S \cos \alpha \vec{u}_\theta + j_S \sin \alpha \vec{u}_z$. Déterminer $\vec{B}(M)$ en distinguant $r < b$ et $r > b$.

14.8
Bobines de Helmholtz (Mines-Ponts PSI (2) 2008)

Le champ magnétique créé par une spire circulaire de centre O , d'axe (O, z) , de rayon b , parcourue par un courant d'intensité I en un point M sur son axe est une fonction de z avec $\overrightarrow{OM} = z\vec{u}_z$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2b} \cdot F(z) \vec{u}_z \text{ avec } F(z) = \left(1 + \frac{z^2}{b^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

On dispose deux spires identiques sur le même axe, leurs centres O_1 et O_2 sont distants de $2D$ et O est le milieu de $[O_1, O_2]$.



Un point M sur l'axe est repéré par $\overrightarrow{OM} = z\vec{u}_z$.

- a) Exprimer le champ magnétique $\vec{B}(z)$ créé par l'association des deux bobines sous la forme

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2b} \cdot G(z) \vec{u}_z$$

- b) Le dispositif des **bobines de Helmholtz** correspond à $2D = b$. On donne le développement limité à l'ordre 4 :

$$\left[1 + \left(u \pm \frac{1}{2}\right)\right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{8}{5\sqrt{5}} \left(1 \mp \frac{6}{5}u \pm \frac{32}{25}u^3 - \frac{144}{125}u^4 + o(u^4)\right)$$

En déduire le développement limité de $G(z)$ à l'ordre 4 en $\frac{z}{b}$.

- c) Conclure sur l'intérêt de ce dispositif et déterminer l'intervalle $[-\alpha b, \alpha b]$ des valeurs de z pour lesquelles le champ magnétique s'écarte de moins de 2% de sa valeur $B(z=0)$ au centre. Préciser la valeur numérique de α .
- d) Pourquoi la très faible fluctuation de B sur l'axe z au voisinage de $z=0$ s'accompagne-t-elle d'une très faible fluctuation radiale selon r , distance de M à l'axe ?
- e) Dans le dispositif des bobines de Helmholtz, le sens du courant dans la spire de gauche est inversé et $2D = b\sqrt{3}$. On donne le développement limité

$$\left[1 + \left(u \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{8\sqrt{7}}{49} \left(1 \mp \frac{6\sqrt{3}}{7}u + \frac{48}{49}u^2 - \frac{240}{343}u^4 \pm \frac{1056\sqrt{3}}{2401}u^5 + o(u^5)\right)$$

Montrer que ce dispositif crée un champ magnétique très proche du champ de rampe $\vec{B} = az\vec{u}_z$.

14.9

Mouvement hélicoïdal d'une particule chargée

Une particule de masse m et de charge $q > 0$ est injectée avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0z}\vec{u}_z$ depuis l'origine O du repère (O, x, y, z) en présence d'un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$.

- En travaillant dans la base cartésienne, écrire les équations différentielles vérifiées par $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
- Résoudre ces équations et montrer que le mouvement est hélicoïdal, composé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = \frac{mv_{0x}}{qB_0}$ et d'un mouvement de déplacement rectiligne uniforme à la vitesse v_{0z} selon z .
- Exprimer le pas de l'hélice, c'est-à-dire la distance de déplacement selon z à chaque tour.

14.10

Mouvement dans un champ non uniforme

Une particule de masse m et de charge q est lancée avec la vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ depuis le point $M_0(a, 0, 0)$. Elle est soumise au champ magnétique créé par un fil rectiligne infini selon (O, z) parcouru par un courant d'intensité I . Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

14.11

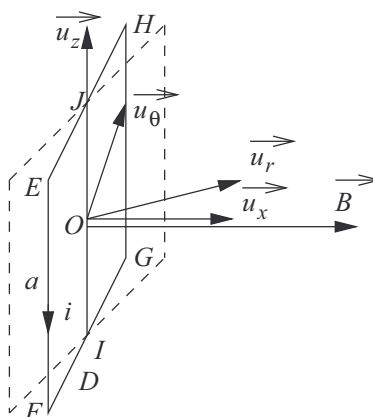
Action mécanique d'un fil sur un autre fil parallèle

Deux fils rectilignes infinis parallèles sont distants de $d = 1,0$ m. Ils sont parcourus par des courants de même intensité I et de même sens. La force subie par un tronçon de longueur $L = 1,0$ m d'un des fils est égale $2,0 \cdot 10^{-7}$ N. Déterminer la valeur de I .

14.12

Principe de l'ampèremètre à cadre mobile

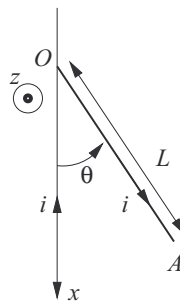
Une spire forme un cadre rectangulaire (EFGH), de centre O , est en rotation autour de l'axe (O, z) passant par I milieu de $[FG]$ et J milieu de $[HE]$. Sa rotation est mesurée par l'angle θ entre \vec{u}_x et le vecteur \vec{u}_r normal au plan de la spire. La spire est parcourue par un courant d'intensité i . Elle est plongée dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_x$ uniforme et constant. Le cadre est soumis, en plus des forces de Laplace, à l'action d'un couple de rappel de torsion élastique dont le moment par rapport à l'axe $\Delta = (O, z)$ est $\Gamma_r = -C \cdot (\theta_0 - \theta)$.



On mesure l'angle θ à l'équilibre mécanique. Déterminer l'expression de i en fonction de θ , θ_0 , $L = EF = GH$, $D = FG = HE$, B et C .

14.13
Équilibre d'une tige dans un champ non uniforme

Une tige [OA] de masse m et de longueur L est en rotation autour de l'axe $\Delta = (O, z)$ horizontal. Son moment d'inertie est $J_{\Delta} = \frac{1}{3}mL^2$. Elle est parcourue par un courant d'intensité i dirigée de O vers A. Son inclinaison par rapport à la verticale est mesurée par l'angle θ . Un fil rectiligne selon l'axe (O, x) vertical est parcouru par un courant de même intensité i dirigée vers le haut. À l'équilibre de la tige, donner l'expression de i en fonction de θ , L , m et g .


14.14
Pression dans un plasma

Un plasma totalement ionisé, est neutre et comporte n ions positifs X^+ et autant d'électrons par m^3 . La masse des électrons est négligeable devant celle des ions et ce plasma forme un fluide globalement à l'équilibre, de géométrie cylindrique de rayon b , d'axe Oz et entouré de vide. Le plasma est traversé par un courant volumique uniforme de densité $\vec{j} = j\vec{u}_z$. Ce courant est essentiellement électronique. En un point $M(r, \theta, z)$, on définit la pression $P(r)$ et le champ magnétique $\vec{B}(r)$.

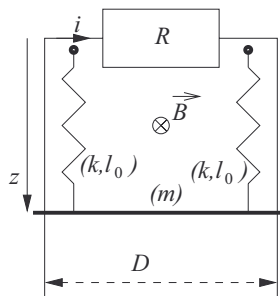
- Établir l'expression de $\vec{B}(r)$.
- En déduire l'expression de $P(r)$.
- Le fluide d'ions est assimilé à un gaz parfait de température uniforme T . On note $k_B = \frac{R}{N_A}$ la constante de Boltzmann. Exprimer la vitesse $v(r)$ des électrons. Que remarque-t-on quand r tend vers b ?
- Lorsque le courant cesse de circuler, expliquer pourquoi ce modèle peut expliquer le coup de tonnerre après un éclair.



14.15

Translation verticale d'une tige

Une tige de masse m et de largeur D coulisse avec un frottement $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ en restant au contact de deux rails verticaux. Elle est retenue par deux ressorts de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 et reliée à une résistance R . Le dispositif est soumis à un champ magnétique \vec{B} uniforme perpendiculaire au plan des rails. On néglige le champ propre créé par le circuit devant \vec{B} .



- Établir l'équation mécanique et l'équation électrique vérifiées par $i(t)$ et $z(t)$.
- Faire un bilan de puissance en nommant toutes les formes d'énergie en jeu.
- Déterminer le temps caractéristique d'amortissement des oscillations en régime pseudo-périodique.

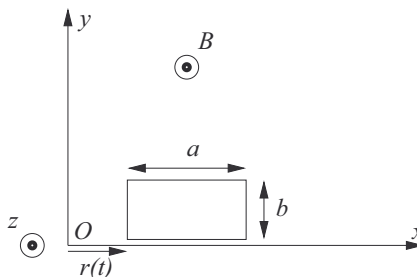


14.16

Translation horizontale d'une spire rectangulaire (résolution de problème)

Une spire rectangulaire, de longueur a , de largeur b , d'inductance L , de résistance négligeable et de masse m glisse sans frottement sur une table horizontale (O, x, y) où règne un champ magnétique vertical non uniforme

$$\vec{B} = B_0 \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) \vec{u}_z$$

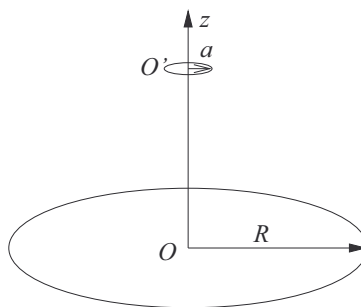


On lance la spire du bord de la table $r(0) = 0$ avec une vitesse initiale $\dot{r}(0) = V_0$. À la date τ , la vitesse de la spire s'annule. Déterminer L . La spire repartira-t-elle ?

14.17

Lévitiation d'une spire

Une grande spire plate de centre O , d'axe (O, z) et de rayon R , placée à l'horizontale, est alimentée par un générateur de courant d'intensité I qu'on allume à $t = 0$. Une petite spire de rayon $a \ll R$, de masse m , de centre C , est astreinte à se déplacer sans frottement de façon coaxiale : O' se déplace sur la droite (O, z) , elle reste parallèle à la grande spire (son axe de révolution est donc aussi (O, z)) et on note $z = OO'$.



Le champ magnétique créé en un point M repéré en coordonnées cylindriques par $\overrightarrow{OM} = z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$ au voisinage de l'axe ($r \ll z$) est

$$\vec{B}(r, z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} (z^2 + R^2)^{-3/2} \left[\vec{u}_z + \frac{3rz}{2(z^2 + R^2)} \vec{u}_r \right]$$

On veut montrer que la petite spire peut rester en lévitation au dessus de la grande. **Partie 1 : lévitation à la fermeture : étude qualitative.** L'interrupteur est fermé à la date $t = 0$, le courant dans la grande spire augmente donc brutalement et le champ magnétique dans la petite spire passe donc de $\vec{0}$ à la valeur donnée.

- Par application de la loi de Lenz, déterminer le sens du courant induit dans la petite spire.
- En considérant les forces de Laplace s'exerçant sur chaque tronçon de la petite spire, en déduire que la petite spire est projetée vers le haut.

Partie 2 : lévitation sous l'action d'un champ magnétique variable. On considère dans cette question que la grande spire est alimentée par un courant sinusoïdal : $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. On note R' la résistance de la petite spire. On suppose que la petite spire est en équilibre de lévitation à la cote z pratiquement constante : on pourra donc considérer que la composante verticale B_z du champ magnétique est quasiment uniforme et on la notera $B_z(t) = B_0 \cos(\omega t)$.

- On néglige l'inductance L de la petite spire. Déterminer l'intensité $i(t)$ dans la petite spire, en déduire l'expression de la résultante des forces de Laplace $\vec{F}_L(t)$, sa valeur moyenne dans le temps et dire si la lévitation est possible.
- On ne néglige plus L mais on suppose que $L\omega \ll R'$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$, montrer qu'elle admet la solution approchée $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ avec $\varphi = \frac{L\omega}{R'}$, en déduire l'expression de la résultante des forces de Laplace $\vec{F}_L(t)$, sa valeur moyenne dans le temps et dire si la lévitation est possible.

14.18

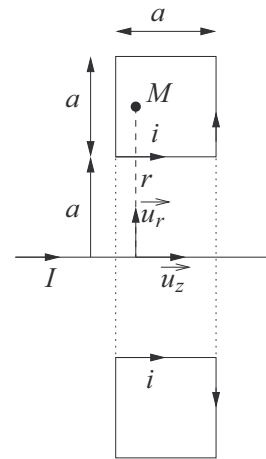
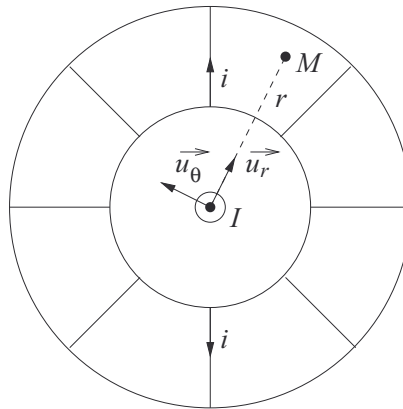
Mutuelle-inductance entre un solénoïde et une spire plate

Une spire plate circulaire de rayon R et comportant N tours est coaxiale et placée au centre d'un solénoïde comportant $10N$ spires, de longueur D et de rayon $2R$. Déterminer la mutuelle inductance M entre les deux circuits.

14.19

Pince ampèremétrique

Un bobinage torique comporte N spires enroulées sur un tore de section carrée de rayon intérieur a , de rayon extérieur $2a$, d'épaisseur a , d'axe (O, z) . Un point M intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques : $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ avec $r \in [a, 2a]$ et $z \in [0, a]$. Un fil rectiligne infini de même axe (O, z) est parcouru par un courant d'intensité I . On note i l'intensité du courant circulant dans la bobine torique.



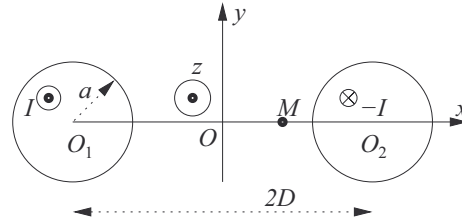
Vue en coupe

- Déterminer l'expression du champ magnétique sous la forme $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$ en un point M intérieur au tore en fonction de i, I, N et r .
- En déduire le flux Φ de \vec{B} à travers le bobinage et les expressions des coefficients d'autoinductance L du bobinage et de mutuelle inductance M entre le fil et le bobinage.
- Expliquer comment ce dispositif peut former une pince ampèremétrique en régime sinusoïdal forcé, la mesure de i donnant accès à l'intensité I inconnue.

14.20

Inductance d'une ligne bifilaire

Un ligne bifilaire est formée de deux fils cylindriques infinis parallèles de rayon a parcourus par des intensités opposées $+I$ et $-I$.



- a) Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(x)$ en un point M situé dans le plan contenant les axes parallèles des deux fils, entre les deux fils, en fonction de son abscisse x .
- b) Calculer le flux de ce champ magnétique à travers le rectangle défini par

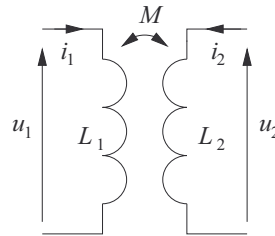
$$[x, z] \in [-D + a, D - a] \times [0, H]$$

- c) En déduire l'inductance linéique $\Lambda = \frac{L}{H}$ de la ligne bifilaire.

14.21

Énergie électrocinétique de deux circuits couplés

Deux circuits électriques sont couplés par mutuelle inductance. Les notations sont celles du schéma suivant.



- a) Donner l'expression des tensions u_1 et u_2 en fonction des intensités.
- b) En déduire les puissances électrocinétiques reçues par les deux bobines.
- c) En déduire l'expression de l'énergie magnétique \mathcal{E}_m du système des deux bobines.

14.22

Calcul d'une mutuelle inductance par une méthode énergétique

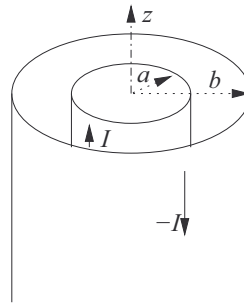
Deux solénoïdes sont coaxiaux, d'axe z . Le premier est de longueur D , de rayon R et comporte N_1 spires. Il est placé à l'intérieur du second de longueur D , de rayon R , et qui comporte N_2 spires. Déterminer l'énergie magnétique du dispositif en fonction des intensités i_1 et i_2 . En déduire les expressions de L_1 , L_2 et M .



14.23

Inductance linéique d'un câble coaxial

Un câble coaxial infini d'axe (O, z) est formé de deux cylindres coaxiaux de rayons a et b avec $a < b$. Un courant d'intensité I monte le long du cylindre intérieur (l'âme) et un courant d'intensité $-I$ descend le long du cylindre extérieur (la gaine).



- Un point M est repéré par $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$. Déterminer le champ magnétique \vec{B} en ce point en distinguant trois cas.
- En déduire l'expression de l'énergie magnétique U_m pour un tronçon de hauteur H de ligne.
- En déduire l'inductance linéique $\Lambda = \frac{1}{H}$ de ce câble coaxial.



14.24

Démonstration de l'inégalité de couplage

Soient deux circuits d'inductances respectives L_1 et L_2 couplés par une mutuelle inductance M .

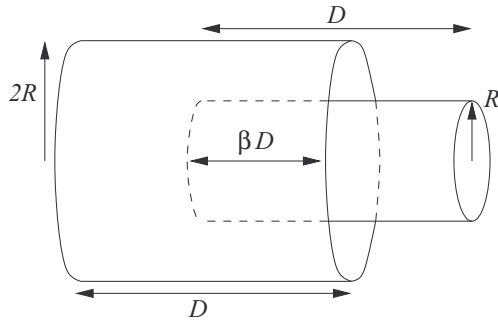
- Exprimer l'énergie électrocinétique \mathcal{E}_{ec} de ce système en fonction de i_1 et i_2 .
- Pourquoi cette énergie est-elle nécessairement positive ?
- En factorisant \mathcal{E}_{ec} par l'énergie magnétique dans le circuit 1 s'il était seul et en posant $y = \frac{i_2}{i_1}$, en déduire l'inégalité de couplage

$$M^2 \leq L_1 L_2$$

14.25

Calcul d'un coefficient de couplage

Deux solénoïdes de même longueur D , comportant N spires, de rayons respectifs $r_1 = 2R$ et $r_2 = R$, sont coaxiaux et partiellement imbriqués, sur une longueur βD avec $\beta < 1$. On suppose $R \ll D$.



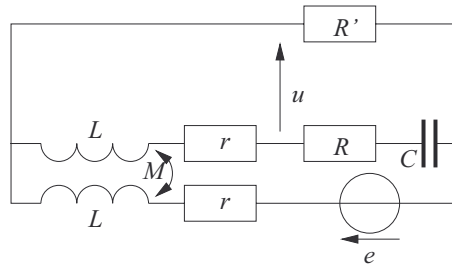
Déterminer, en précisant les approximations effectuées, une estimation du coefficient de couplage

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \in [0, 1]$$

14.26

Pont de mesure d'une mutuelle-inductance

Dans le circuit suivant, on cherche à déterminer la valeur de M . Le générateur délivre une tension sinusoïdale de pulsation ω . On règle les valeurs de R et de C jusqu'à l'équilibre du pont, correspondant à $u = 0$, mesuré au voltmètre.

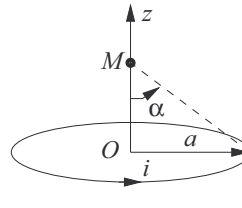


Donner l'expression de M . À quelle condition le couplage est-il parfait ?

14.27

Cohérence entre les expressions du champ sur l'axe

Le champ créé par une spire circulaire de rayon a , parcourue par un courant d'intensité i en un point M sur son axe est fonction du demi-angle au sommet α du cône sous lequel on voit la spire depuis M.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2a} \sin^3 \alpha \vec{u}_z$$

- Justifier que \vec{B} est selon \vec{u}_z .
- Dans l'approximation dipolaire, vérifier la cohérence entre cette expression et celle du dipôle magnétique.

14.28

Magnéton de Bohr

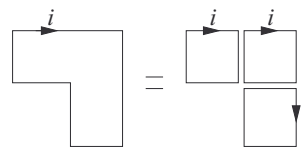
Un électron de charge $-e = -1,60 \cdot 10^{-19}$ C et de masse $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon r , à la vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T}$, effectuant donc T tours par seconde. On admet ici que l'énergie cinétique minimale d'un tel système est $\frac{1}{2}\hbar\omega$ où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ et $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J·s est la constante de Planck. Supposons que l'électron possède exactement cette énergie cinétique minimale.

- Donner l'expression de la quantité $r^2\omega$ en fonction de m_e et \hbar .
- L'électron en mouvement rapide forme un courant circulaire d'intensité i . Donner l'expression de i et en déduire le moment magnétique μ_B de ce dipôle magnétique en fonction de e , T et r .
- En déduire que μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ et calculer sa valeur numérique.

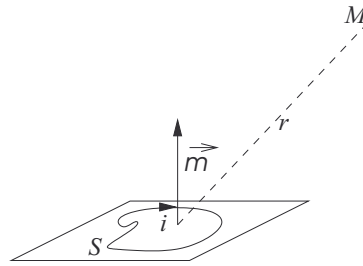
14.29

Spire plane de forme quelconque

Une spire plane parcourue par un courant d'intensité i crée un champ magnétique \vec{B} en un point M situé à une distance r de la spire très supérieure à la largeur maximale de la spire (on est donc dans l'approximation dipolaire). En s'inspirant du schéma suivant



justifier que \vec{B} est indépendante de sa forme et ne dépend que de sa surface.


14.30
Champ créé par des objets tournants

- Un fil circulaire de centre O , d'axe (O, z) et de rayon a porte une charge régulièrement répartie q . Il tourne autour de son axe à la vitesse angulaire ω . On pose $r = 10a$ et on se place dans l'approximation dipolaire. Déterminer le champ magnétique créé par ce dispositif en un point P sur son axe avec $\overrightarrow{OP} = r\vec{u}_z$ puis en Q dans son plan avec $\overrightarrow{OQ} = r\vec{u}_x$.
- Un disque de centre O , d'axe (O, z) et de rayon a porte une charge régulièrement répartie de densité surfacique σ . Il tourne autour de son axe à la vitesse angulaire ω . On pose $r = 10a$ et on se place dans l'approximation dipolaire. Déterminer le champ magnétique créé par ce dispositif en un point P sur son axe avec $\overrightarrow{OP} = r\vec{u}_z$ puis en Q dans son plan avec $\overrightarrow{OQ} = r\vec{u}_y$.
- Un cylindre creux de centre O , d'axe (O, z) , de rayon $\frac{a}{2}$ et de hauteur $2a$ porte une charge régulièrement répartie de densité surfacique σ . Il tourne autour de son axe à la vitesse angulaire ω . On pose $r = 5a$ et on se place dans l'approximation dipolaire pour le calcul du champ créé. Déterminer le champ magnétique créé par ce dispositif en un point P sur son axe avec $\overrightarrow{OP} = r\vec{u}_z$.

14.31
Champ magnétique de Mercure

Le champ magnétique sur la planète Mercure de rayon $R_M = 2500$ km est la somme de trois contributions :

- le champ propre créé par Mercure \vec{B}_M
- le champ créé par le Soleil \vec{B}_S
- le champ créé par le vent électronique solaire \vec{B}_E .

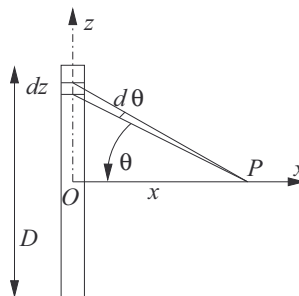
On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

- Le flux d'électrons solaires est isotrope Justifier que $\vec{B}_E = \vec{0}$.
- Le champ propre mercurien est assimilé à celui créé par un dipôle magnétique de moment dipolaire magnétique $\vec{m}_0 = m_0\vec{u}_z$ où \vec{u}_z est le vecteur unitaire axial de Mercure, placé au centre de Mercure. Rappeler l'expression du champ magnétique \vec{B}_M en coordonnées sphériques en fonction de l'angle θ .
- On mesure un champ magnétique $B_M = 0,5\text{T}$ sur l'équateur mercurien ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Calculer la valeur de m_0 .
- Le champ magnétique solaire est supposé uniforme sur Mercure : $\vec{B}_S = B_S\vec{u}_z$. Montrer qu'il est possible que $B_\theta = 0$ en tout point de la surface de Mercure.

14.32

Champ créé par un solénoïde long

Un solénoïde de centre O , d'axe z de longueur D et de rayon a comporte n spires par mètre et est parcouru par un courant i d'intensité i . Un point P est situé dans le plan médiateur (O, x, y) du solénoïde, $\vec{OP} = x\vec{u}_x$ avec $x \gg a$. On est donc dans l'approximation dipolaire pour chaque spire.



- Justifier que le champ magnétique en P s'écrit $\vec{B} = B_z \vec{u}_z$.
- La variable d'intégration est θ . Chaque spire est repérée par sa cote z . Préciser la relation entre z et θ , en déduire la relation entre dz , $d\theta$ et θ .
- Déterminer le nombre dN de spires comprises entre θ et $\theta + d\theta$. En déduire la contribution dB_z de la composante selon z du champ magnétique créé en P par ces spires.
- En déduire l'expression de B_z .

14.33

Oscillations harmoniques d'une boussole

Une boussole est assimilée à une tige orientée dans le sens sud, nord (le vecteur unitaire dans cette direction et ce sens est noté \vec{u}) en rotation autour d'un axe Δ vertical. Son moment d'inertie est noté J_Δ , son moment dipolaire $\vec{m} = m\vec{u}$. On place la boussole dans un champ magnétique extérieur horizontal uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_x$. On pose $\theta = (\vec{u}_x, \vec{u})$. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$. En déduire la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

14.34

Interaction dipôle-dipôle

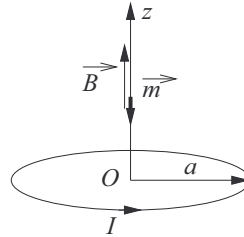
Dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on fixe un dipôle magnétique de centre O et de moment dipolaire $\vec{m} = m\vec{u}_y$. Un autre dipôle (1) de centre P a un moment dipolaire de même norme m , on prend $\vec{OP} = x\vec{u}_x$ et $\vec{m}_1 = m\vec{u}_1$. On note θ l'angle (\vec{u}_x, \vec{u}_1) .

- Exprimer le champ magnétique \vec{B} créé au point P par le dipôle fixe.
- Le dipôle (1) possède un centre P fixe, et est libre de tourner autour de l'axe (P, z) . Déterminer la valeur de θ correspondant à une orientation d'équilibre stable.
- Avec la valeur de θ déterminée à la question précédente, le dipôle (1) est maintenant astreint à se déplacer en translation sur l'axe x . Déterminer l'expression de la force subie par (1), qui dérive de l'énergie potentielle d'interaction. Comparer cette force à une force centrale newtonienne.

14.35
Translation d'un dipôle dans un champ non uniforme (analyse documentaire)

Un dipôle magnétique de masse m_0 et de moment dipolaire $\vec{m} = -m\vec{u}_z$ est libre de se déplacer en translation sur l'axe (O, z) vertical orienté vers le haut. Une spire circulaire de rayon a , d'axe (O, z) , parcourue par un courant d'intensité I , est placée dans le plan horizontal (O, x, y) . Elle crée un champ magnétique non uniforme sur l'axe vertical :

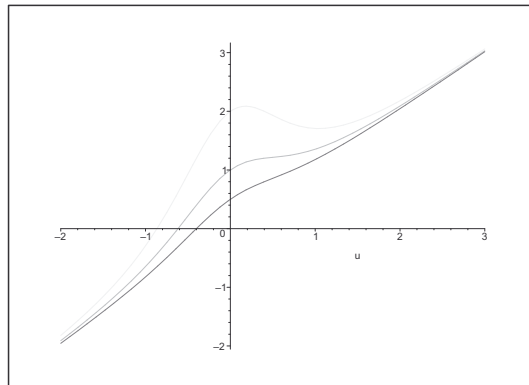
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2} (z^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \vec{u}_z$$



- Quel est le moment résultant des forces de Laplace que subit le dipôle ?
- Donner l'expression de l'énergie potentielle de la résultante des forces que subit le dipôle en fonction de z .
- Voici l'allure des graphes de la fonction

$$f_\alpha(u) = \alpha(1 + u^2)^{-\frac{3}{2}} + u$$

pour trois valeurs du paramètre : $\alpha = 0,5$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.



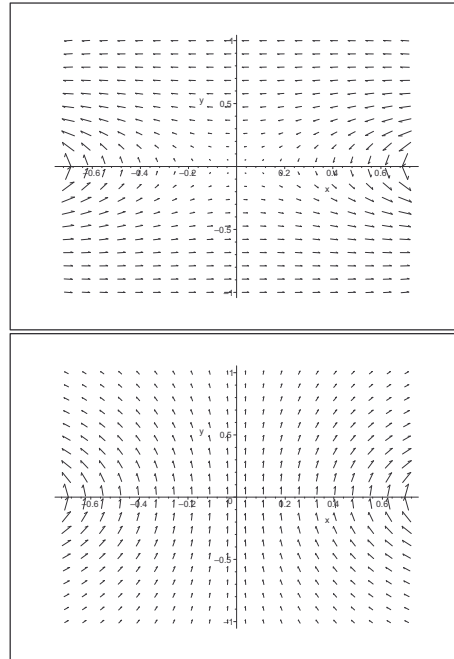
En déduire une estimation de l'intensité I^* minimale pour laquelle il existe une position d'équilibre stable du dipôle soumis à l'action de la spire, on exprimera I^* en fonction de μ_0 , a , m et g .

- Pour $I \approx 2I^*$, quelle est la valeur approchée de $\frac{z_{\text{eq}}}{a}$? Pourquoi qualifie-t-on cet équilibre de méta-stable ?
- Pour $I = \frac{m_0 g a^2}{2\mu_0 m}$, quelle est l'accélération du dipôle si on l'abandonne sans vitesse initiale depuis $z = a$?

14.36

Mouvement d'un dipôle dans un champ (analyse documentaire)

Voici les cartes des champs magnétiques créés dans un plan (O, x, y) par deux fils rectilignes infinis parallèles, perpendiculaires au plan, selon z , parcourus par un courant de même intensité, dans le même sens pour l'un, dans des sens opposés pour l'autre.



- Identifier la carte correspondant à des courants de même sens, celui correspondant à des courants de sens opposés.
- On place au centre du dispositif (dans l'un puis dans l'autre cas) un dipôle magnétique dont le moment est $\vec{m} = m\vec{u}_x$ (m pouvant être positif ou négatif). Est-il en équilibre vis à vis de la rotation ? Est-il en équilibre vis-à-vis de la translation ? Le cas échéant, ces équilibres sont-ils stables ?

Du mal à démarrer ?

14.1 Les propriétés de symétrie et d'invariance conduisent à exprimer le champ magnétique selon une seule composante et ne dépendant que d'une variable. L'application de l'équation de Maxwell-Ampère en coordonnées cylindriques conduit à une équation différentielle du premier ordre et les conditions aux limites permettent sa résolution complète.

14.2 Cet exercice donne l'une des principales applications de l'équation de Maxwell-Thomson.

14.3 L'étude de l'écartement des lignes de champ et le principe de superposition permettent de conclure.

14.4 Le raisonnement est analogue à celui développé pour le calcul du champ créé par une nappe surfacique plane de courant. Le courant enlacé n'est pas le même selon que $z \leq a$ ou $z > a$.

14.5 Ces quatre situations ont en commun le contour d'Ampère, un cercle d'axe (O, z) et de rayon r , et se distinguent par le calcul du courant enlacé.

14.6 Le contour d'Ampère est le cercle d'axe (O, z) passant par M . La détermination du courant enlacé doit être faite avec soin.

14.7 Le cas du courant axial est classique. Le cas du courant orthoradial est analogue à celui du solénoïde. L'application du théo-

rème de superposition dans le cas hélicoïdal est un modèle du genre.

14.8 Cet exercice assez calculatoire illustre la création d'un champ presque uniforme et celle d'une rampe linéaire de champ dont les applications en mécanique des particules sont importantes. L'une des clés du calcul est le choix de la variable réduite u . Pour la question (d), on utilisera l'équation de Maxwell-Thomson.

14.9 Cette démonstration complète (hors programme de première année) demande beaucoup de soin dans la mise en équations et un peu de virtuosité dans la résolution. La mise en équations ne pose pas de problème particulier, on peut primitiver l'une d'elles par rapport au temps, sans oublier la constante, pour éliminer x ou y .

14.10 Le calcul du champ magnétique est un cas de cours. Après avoir montré que le mouvement se fait dans le plan (O, x, z) , l'application de la loi de la quantité de mouvement permet de conclure.

14.11 L'application du théorème d'Ampère donne le champ magnétique et le calcul de la force de Laplace est une application directe de la formule du cours.

14.12 L'application de la loi du moment cinétique au cadre nécessite le calcul préalable des forces de Laplace puis de leurs moments grâce au bras de levier (programme de première année).

14.13 On calcule le champ magnétique créé par le fil vertical en tout point de la tige, puis la force de Laplace élémentaire pour un tronçon de fil, puis son moment en O , puis le moment total des forces de Laplace par intégration. À l'équilibre, la somme de ce moment et de celui du poids est nul.

14.14 La détermination du champ magnétique utilise le théorème d'Ampère, celle de la pression la loi de la statique des fluides. La détermination de la vitesse se fait en deux temps, en déterminant d'abord la densité volumique d'ions $n(r)$ égale à celle des électrons, puis en reliant cette densité à la pression grâce à la loi des gaz parfaits.

14.15 (a) La loi de la quantité de mouvement, dans laquelle il faut penser à prendre en compte la force de Laplace donne l'équation mécanique. La loi des mailles, dans laquelle il faut prendre en compte la force électromotrice d'induction, donne l'équation électrique. (b) Le bilan de puissance est obtenu en suivant la méthode décrite dans le cours. (c) En éliminant i entre les deux équations, on obtient une équation différentielle du second ordre en z du type oscillateur amorti linéairement.

14.16 La mise en équations électrique et mécanique permet de relier l'intensité $i(t)$ dans la spire et la position $r(t)$. Il faut prendre garde à la non uniformité du champ magnétique dans le calcul des forces de Laplace et dans celui du flux. On obtient, après réduction des équations, une équation du type oscillateur harmonique qui permet de conclure.

14.17 La partie 1 utilise largement la loi de Lenz. Dans la partie 2, on détermine i par application de la loi de Faraday, puis on exprime la résultante des forces de Laplace en intégrant sur le pourtour de la petite spire. La lévitation est possible si la valeur

moyenne des forces de Laplace est non nulle, de composante positive sur z .

14.18 Il faut calculer le flux du champ créé par le solénoïde à travers la spire, et non l'inverse.

14.19 Le lacet d'Ampère est le cercle de rayon r passant par M qui enlace I une fois et $i N$ fois.

14.20 On applique le théorème de superposition pour calculer le champ magnétique, somme des champs créés par les deux cylindres. On prendra garde au fait que la distance de M à l'axe des deux cylindres n'est pas le même, et à l'orientation des deux champs.

14.21 Les équations électriques de tension multipliées par les intensités font apparaître des puissances, dérivées par rapport au temps des énergies électrocinétiques.

14.22 Le calcul du champ magnétique ne pose pas de difficulté, on obtient trois termes en l'élevant au carré pour exprimer l'énergie magnétique volumique et en intégrant sur le volume. On identifie chacun de ces trois termes à son équivalent électrocinétique.

14.23 (a) Le calcul du champ magnétique est une application immédiate du théorème d'Ampère. (b) Le calcul de U_m nécessite une intégration spatiale sur r , θ et z . (c) En identifiant U_m à $\frac{1}{2}LI^2$, on en déduit L .

14.24 L'énoncé est parfaitement guidé. La positivité de l'énergie est la conséquence de celle de la grandeur volumique u_m .

14.25 On pourra supposer que le champ magnétique créé par un solénoïde est uniforme à l'intérieur du cylindre qu'il délimite, et nul partout ailleurs. Le nombre de spires de 2 traversées par \vec{B}_1 dépend de β .

14.26 Après avoir fléché le circuit, on exprime que $u = 0$ en décomposant cette tension avec la partie gauche puis avec la partie droite de la maille (il est inutile d'écrire la loi des mailles dans la maille comportant le générateur). En passant en grandeurs complexes et en éliminant i grâce à la loi des nœuds, on obtient un système en $(\underline{i}_1, \underline{i}_2)$ qui permet de conclure.

14.27 L'approximation dipolaire permet d'identifier $\sin \alpha$ et $\tan \alpha$.

14.28 En mouvement circulaire uniforme, $\vec{v} = r\omega\vec{u}_\theta$.

14.29 Les courants de deux côtés contigus s'annulent, pas ceux sur le contour du grand circuit.

14.30 La question (a) donne l'expression du moment dipolaire de l'équivalent d'une spire circulaire. À la question (b), on peut sommer les moments des spires concentriques et calculer le champ magnétique. À la question (c), on doit sommer les champs créés par les spires coaxiales.

14.31 (a) On utilise le théorème d'Ampère. (b) On utilise la formule du cours. (c) C'est une simple application numérique. (d) On doit décomposer le vecteur \vec{u}_z sur les axes sphériques puis utiliser le théorème de superposition.

14.32 Tout l'exercice se ramène à l'expression des différents paramètres de la formule du champ magnétique créé par la spire élémentaire en fonction de θ . On utilise principalement les relations de trigonométrie.

14.33 La loi du moment cinétique suffit pour conclure.

14.34 (a) Le champ magnétique est donné par la formule du cours dans laquelle on doit identifier r , θ , et surtout les vecteurs de la base sphérique en fonction de ceux de la base cartésienne. (b) On analyse l'énergie potentielle en fonction de θ , à x fixé. (c) On analyse l'énergie potentielle en fonction de x , θ étant égal à la valeur trouvée à la question (b).

14.35 L'énergie potentielle est la somme de l'énergie d'interaction entre \vec{B} et \vec{m} et de l'énergie potentielle de pesanteur. On doit ensuite identifier l'expression obtenue à $f_\alpha(u)$ en définissant α et u .

14.36 L'étude de l'équilibre et de sa stabilité peut être menée en trois temps. On étudie d'abord le pivotement du dipôle selon le principe d'alignement du dipôle au champ. On déplace ensuite le dipôle sur x à partir de O et on cherche si, en migrant vers les zones de champ fort, il est ramené ou éloigné de O. Enfin, on procède de même en déplaçant le dipôle sur y .

Corrigés des exercices

14.1

a) Par intégration :

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot \pi b^2$$

b) Les plans $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont plans de symétrie des courants, \vec{B} étant orthogonal à ces deux plans, il est nul.

c) Le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des courants donc $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$. La distribution de courants est invariante par translation selon \vec{u}_z et par rotation d'angle θ donc $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$. La seule composante non nulle de \vec{B} est B_θ et elle ne dépend que de r . L'équation de Maxwell-Ampère en coordonnées cylindriques et en régime permanent s'écrit donc

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rB(r))}{\partial r} \vec{u}_z = \mu_0 j \vec{u}_z$$

$$\text{donc } \frac{\partial(rB(r))}{\partial r} = \mu_0 j r$$

$$\text{donc } rB(r) = \mu_0 j \frac{r^2}{2} + A \text{ et } B(r) = \mu_0 j \frac{r}{2} + \frac{A}{r}$$

La condition aux limites est $B(0) = 0$ donc $A = 0$ et $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta$ pour $r \leq b$. On en déduit $B(r = b^-) = \frac{\mu_0 j b}{2}$.

d) Pour $r > b$, les symétries et invariances sont les mêmes mais $\vec{j} = \vec{0}$, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit donc

$$\frac{\partial(rB(r))}{\partial r} = 0 \text{ donc } rB(r) = K \text{ et } B(r) = \frac{K}{r}$$

La continuité du champ en $r = b$ entraîne

$$B(r = b^-) = B(r = b^+) \text{ soit } \frac{\mu_0 j b}{2} = \frac{K}{b}$$

$$\text{donc } K = \frac{\mu_0 j b^2}{2}$$

$$\text{donc } \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 j b^2}{2r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \text{ pour } r > b.$$

14.2

a) Les plans (O, x, z) et (O, y, z) sont plans d'antisymétrie des courants, le champ magnétique est donc dans leur intersection donc $\vec{B}(M)$ est selon \vec{u}_z .

b) On a $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}}$ donc

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2b} \left(1 + \frac{z^2}{b^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \vec{u}_z$$

c) Le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie des courants donc \vec{B} est inclus dans ce plan et sa composante sur \vec{u}_θ est nulle.

d) L'équation de Maxwell-Thomson $\text{div} \vec{B} = 0$ donne ici, en coordonnées cylindriques, en utilisant $B_\theta = 0$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

L'énoncé suppose que B_z ne dépend que de z , donc sa valeur en P est la même qu'en M et $B_z = \frac{\mu_0 I}{2b} \left(1 + \frac{z^2}{b^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$ donc

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} - \frac{3\mu_0 I}{4b} \cdot \frac{2z}{b^2} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{b^2}\right)^{-\frac{5}{2}} = 0$$

$$\text{donc } rB_r = \frac{3\mu_0 z I}{2b^3} \left(1 + \frac{z^2}{b^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{r^2}{2} + K(z)$$

$$\text{donc } B_r = \frac{3\mu_0 I z r}{4b^3} \left(1 + \frac{z^2}{b^2}\right)^{-\frac{5}{2}} + \frac{K(z)}{r}$$

En M, $r = 0$ et \vec{B} est selon \vec{u}_z donc $B_r = 0$ donc le terme $\frac{K(z)}{r}$

(qui divergerait sinon) est nul et $K(z) = 0$. On en déduit que

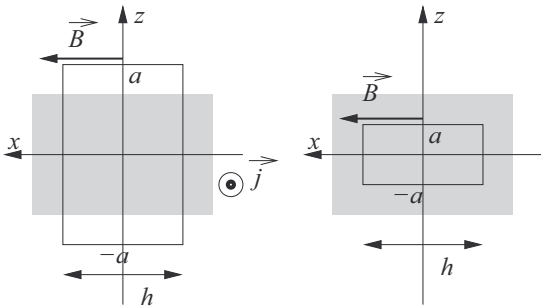
$$\vec{B}(P) = \begin{cases} B_r = \frac{3\mu_0 I z r}{4b^3} \left(1 + \frac{z^2}{b^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \\ B_\theta = 0 \\ B_z = \frac{\mu_0 I}{2b} \left(1 + \frac{z^2}{b^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

14.3

Dans le premier cas, nord contre nord, au centre O du dispositif, les champs créés par les deux aimants sont opposés donc le champ est nul. C'est au niveau des pôles sud que les lignes de champ magnétique sont les plus serrées, et que le champ est maximal. Dans le second cas, nord contre sud, dans l'espace central, les champs magnétiques sont de même direction et de même sens, et c'est au niveau du pôle nord de l'aimant de gauche et au niveau du pôle sud de celui de droite que les lignes sont les plus serrées, donc que le champ est maximal. C'est au dessus et en dessous des aimants que les lignes sont les plus espacées et que le champ est minimal.

14.4

Les notations, les symétries et les invariances sont les mêmes que dans l'exemple de la première fiche méthode (équations de Maxwell) et $\vec{B} = B(z)\vec{u}_x$. Le contour d'Ampère est le rectangle de largeur h arbitraire, situé entre $+z$ et $-z$.



La circulation de \vec{B} sur ce rectangle est

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot h + 0 + B \cdot h + 0 = 2Bh$$

Le courant enlacé n'est pas le même dans les deux cas. Si $0 \leq z \leq a$, le rectangle, de surface $h \cdot 2z$ est complètement plongé dans le conducteur et $I_{\text{enlacé}} = 2zhj$. Le théorème d'Ampère donne donc

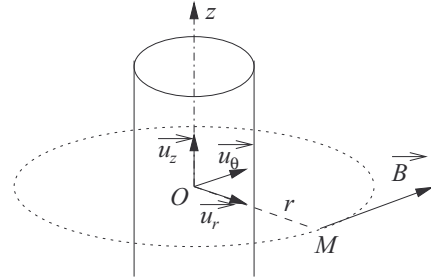
$$2Bh = \mu_0 \cdot 2zhj \text{ donc } \vec{B} = \mu_0 j z \vec{u}_x$$

Si $z > a$, le courant ne passe qu'à travers la surface $h \cdot 2a$ et $I_{\text{enlacé}} = 2ahj$. Le théorème d'Ampère donne donc

$$2Bh = \mu_0 \cdot 2ahj \text{ donc } \vec{B} = \mu_0 j a \vec{u}_x$$

14.5

Dans les trois cas, le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des courants donc $\vec{B} = B(r, \theta, z)\vec{u}_\theta$. Les distributions de courant sont invariantes par translation selon \vec{u}_z et par rotation d'angle θ donc $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$. Le contour d'Ampère est à chaque fois le cercle de centre O et de rayon r .



La circulation de \vec{B} est

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) \cdot 2\pi r$$

a) Le courant enlacé est I et le théorème d'Ampère s'écrit donc

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \text{ donc } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

b) Si $r \leq b$, le contour d'Ampère est complètement plongé dans le cylindre donc $I_{\text{enlacé}} = \pi r^2 j$ et le théorème d'Ampère donne

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \pi r^2 j \text{ donc } \vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta$$

Si $r > b$, le cylindre de rayon b est complètement enlacé dans le contour d'Ampère donc $I_{\text{enlacé}} = \pi b^2 j$ et le théorème d'Ampère donne

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \pi b^2 j \text{ donc } \vec{B} = \frac{\mu_0 j b^2}{2r} \vec{u}_\theta$$

On remarque que le champ magnétique est continu en $r = b$.

c) On raisonne comme dans la question précédente, mais il faut faire un calcul intégral pour mesurer l'intensité du courant enlacé. Pour éviter de confondre variable d'intégration et borne, notons R la variable rayon. Si $r \leq b$:

$$\begin{aligned} I_{\text{enlacé}} &= \int_{R=0}^r \int_{\theta=0}^{2\pi} j_0 \frac{R}{b} \vec{u}_z \cdot R dR d\theta \vec{u}_z \\ &= j_0 \left[\frac{R^3}{3b} \right]_0^r [0]_0^{2\pi} = \frac{2j_0 \pi r^3}{3b} \end{aligned}$$

Si $r > b$:

$$I_{\text{enlacé}} = \int_{R=0}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} j_0 \frac{R}{b} \vec{u}_z \cdot R dR d\theta \vec{u}_z$$

$$= j_0 \left[\frac{R^3}{3b} \right]_0^b [\theta]_0^{2\pi} = \frac{2j_0 \pi b^2}{3}$$

L'application du théorème d'Ampère donne donc

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 j_0 r^2}{3b} & \text{si } r \leq b \\ \frac{\mu_0 j_0 b^2}{3r} & \text{si } r > b \end{cases}$$

On remarque que le champ magnétique est continu en $r = b$.

- d) Si $r < b$, le contour d'Ampère est à l'intérieur de la plaque cylindrique donc $I_{\text{enlacé}} = 0$ et $\vec{B} = \vec{0}$. Si $r > b$, le contour enlace la totalité de la plaque et $I_{\text{enlacé}} = j_s \cdot 2\pi b = I$ donc le théorème d'Ampère donne

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

La discontinuité du champ magnétique en $r = b$ est

$$\delta B = B(r = b^+) - B(r = b^-) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} = \mu_0 j_s$$

14.6

Pour M intérieur au tore, le plan de coupe de la figure (O, $\vec{u}_r \vec{u}_z$) est plan de symétrie des courants donc $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$. La distribution de courants est invariante par rotation d'angle θ donc $\vec{B} = B(r, z) \vec{u}_\theta$. Le contour d'Ampère est le cercle de rayon r qui passe par M. La circulation de \vec{B} est

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot 2\pi r$$

Le courant enlacé est celui circulant, vers l'avant de la figure, dans les N spires à leur passage en $r = a$ donc

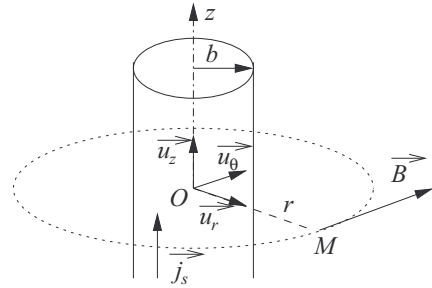
$$I_{\text{enlacé}} = N \cdot i$$

Le théorème d'Ampère donne donc

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 N i \text{ donc } \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

14.7

- a) Le plan (O, \vec{u}_r, \vec{u}_z) est plan de symétrie des courants donc $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$. La distribution de courant est invariante par translation selon \vec{u}_z et par rotation d'angle θ donc $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$. Le contour d'Ampère est le cercle de centre O et de rayon r .



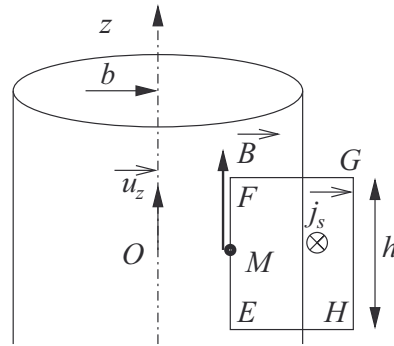
La circulation de \vec{B} est

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot 2\pi r$$

Si $r < b$, le contour d'Ampère est à l'intérieur de la plaque et le courant enlacé est nul donc $\vec{B} = \vec{0}$. Si $r > b$, le contour d'Ampère enlace la plaque toute entière de périmètre $\ell = 2\pi b$ donc $I_{\text{enlacé}} = j_s \ell = j_s \cdot 2\pi b$. Le théorème d'Ampère donne donc

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 j_s \cdot 2\pi b \text{ donc } \vec{B} = \frac{\mu_0 j_s b}{r} \vec{u}_\theta$$

- b) Le plan (O, $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$) est plan de symétrie des courants donc $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{u}_z$. La distribution de courants est invariante par translation selon \vec{u}_z et par rotation d'angle θ donc $\vec{B} = B(r) \vec{u}_z$. Choisissons comme contour d'Ampère le rectangle (EFGH) de hauteur h arbitraire.



La circulation de \vec{B} est

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_E^F \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_F^G 0 + \int_G^H \vec{0} \cdot d\vec{\ell} + \int_H^E 0 = Bh$$

Le courant enlacé est celui circulant à travers la bandelette de largeur h , soit $j_s h$. Le théorème d'Ampère donne :

$$Bh = \mu_0 j_s h \text{ donc } \vec{B} = \mu_0 j_s \vec{u}_z$$

Cette expression est cohérente avec celle $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$ du solénoïde, le produit ni s'assimilant bien à la densité surfacique de courant orthoradial.

- c) Cette distribution de courants est la superposition d'un courant surfacique axial de densité $j_S \sin \alpha \vec{u}_z$ et d'un courant surfacique orthoradial de densité $j_S \cos \alpha \vec{u}_\theta$. Le théorème de superposition donne donc, en utilisant les résultats des deux premières questions :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 j_S \cos \alpha \vec{u}_z & \text{si } r < b \\ \frac{\mu_0 j_S \sin \alpha b}{r} \vec{u}_\theta & \text{si } r > b \end{cases}$$

14.8

- a) Par théorème de superposition :

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2b} [F(D+z) + F(-D+z)] \vec{u}_z$$

$$\text{donc } G(z) = F(D+z) + F(-D+z)$$

- b) Avec $D = \frac{b}{2}$, on peut écrire

$$G(z) = \left[1 + \left(\frac{z}{b} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} + \left[1 + \left(\frac{z}{b} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$$

En posant $u = \frac{z}{b}$ et en utilisant les développements limités donnés par l'énoncé, les termes d'ordre 1 et 3 s'éliminent et

$$G(z) = \frac{8}{5\sqrt{5}} \left(2 - \frac{288}{125} u^4 + o(u^4) \right)$$

- c) En $B = 0$, $G(0) = \frac{16}{5\sqrt{5}}$. On en déduit l'écart relatif

$$\begin{aligned} \frac{|B(z) - B(0)|}{B(0)} &= \frac{|G(z) - G(0)|}{G(0)} \\ &= \frac{\left| \frac{16}{5\sqrt{5}} \left(1 + \frac{144}{125} u^4 \right) - \frac{16}{5\sqrt{5}} \right|}{\frac{16}{5\sqrt{5}}} = \frac{144}{125} u^4 \end{aligned}$$

Cet écart est inférieur à 2% si

$$u < \sqrt[4]{\frac{0,02 \times 125}{144}} \text{ soit } z < 0,363b$$

donc $\alpha = 0,363$. Ce dispositif assure donc un champ presque constant sur une largeur importante entre les bobines.

- d) D'après l'équation de Maxwell-Thomson en coordonnées cylindriques

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Au voisinage de 0 :

$$B_z \approx \beta \left(1 - \frac{144z^4}{125b^4} \right) \text{ avec } \beta = \frac{16\mu_0 I}{10b\sqrt{5}}$$

$$\text{donc } \frac{\partial B_z}{\partial z} \approx -4\beta \frac{144z^3}{125b^4}$$

$$\text{donc } rB_r \approx 2\beta \frac{144z^3}{125b^4} r^2 + K$$

En $r = 0$, $B_r = 0$ donc $K = 0$ et

$$B_r \approx 2\beta \frac{144z^3}{125b^4} r$$

B_r reste donc très faible quand r et z sont proches de 0.

- e) Pour $D = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, et en tenant compte du changement de signe de I dans la spire de gauche :

$$G(z) = -F(D+z) + F(-z+D)$$

$$= - \left[1 + \left(\frac{z}{b} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} + \left[1 + \left(\frac{z}{b} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$$

En utilisant les développements limités fournis par l'énoncé, on constate que les termes d'ordre 0, 2 et 4 s'éliminent et

$$G(z) = \frac{8\sqrt{7}}{49} \left(\frac{12\sqrt{3}}{7} u + \frac{2108\sqrt{3}}{2401} u^5 + o(u^5) \right)$$

Le terme d'ordre 5 est négligeable devant celui d'ordre 1 si $z \ll b$ et

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 I}{2b} \cdot \frac{8\sqrt{7}}{49} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{z}{b} \vec{u}_z$$

qui est bien une rampe linéaire de champ.

14.9

- a) On dresse la liste des vecteurs de la cinématique et de la dynamique :

$$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, \vec{v} \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix}, \vec{a} \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}, \vec{B} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{f}_L = q\vec{v} \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \vec{B} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} qB_0 \dot{y} \\ -qB_0 \dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la particule dans le référentiel galiléen du laboratoire donne le système

$$\begin{cases} qB_0 \dot{y} = m\ddot{x} \\ -qB_0 \dot{x} = m\ddot{y} \\ 0 = m\ddot{z} \end{cases}$$

b) L'équation en z s'intègre indépendamment des deux autres :

$$\dot{z} = v_{0z} \text{ et } z(t) = v_{0z} t$$

On primitive la deuxième équation différentielle en tenant compte des conditions initiales :

$$-qB_0 x = m\dot{y}$$

et on injecte dans la première multipliée par m :

$$-q^2 B_0^2 x = m^2 \ddot{x} \text{ soit } \ddot{x} + \frac{q^2 B_0^2}{m^2} x = 0$$

C'est une équation d'oscillateur harmonique qui s'intègre en tenant compte des conditions initiales et en posant $\omega_0 = \frac{qB_0}{m}$:

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \text{ et } \dot{x} = v_{0x} \cos(\omega_0 t)$$

En intégrant la première équation :

$$qB_0 y = m\dot{x} - mv_{0x} \text{ donc } \omega_0 y = \dot{x} - v_{0x}$$

et on en déduit

$$y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_0} [\cos(\omega_0 t) - 1]$$

Soit P le projeté orthogonal de M sur le plan (O, x, y) , les équations horaires de son mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} x_P(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ y_P(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_0} [\cos(\omega_0 t) - 1] \end{cases}$$

En définissant le point $\Omega \begin{cases} x_\Omega = 0 \\ y_\Omega = \frac{v_{0x}}{\omega_0} \end{cases}$, on constate que la distance ΩP vaut

$$\Omega P = \sqrt{(x_P - x_\Omega)^2 + (y_P - y_\Omega)^2} = \frac{v_{0x}}{\omega_0} = \frac{mv_{0x}}{qB_0}$$

P est donc animé d'un mouvement circulaire uniforme de centre Ω et de rayon $R = \frac{mv_{0x}}{qB_0}$. L'équation horaire $z(t)$ correspond à un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_{0z} . C'est donc un mouvement hélicoïdal.

c) La période du mouvement circulaire est

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi m}{qB_0}$$

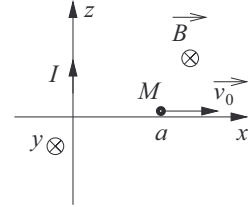
donc le pas de l'hélice est

$$v_{0z} T_0 = \frac{2\pi m v_{0z}}{qB_0} = 2\pi R \frac{v_{0z}}{v_{0x}}$$

14.10

Le champ magnétique dans le plan (O, x, z) , plan de symétrie du courant, est dirigé selon \vec{u}_y . Par application du théorème d'Ampère sur un cercle d'axe (O, z) et de rayon x :

$$B \cdot 2\pi x = \mu_0 I \text{ donc } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{u}_y$$



La position et la vitesse initiale sont incluses dans le plan, le champ magnétique est orthogonal au plan, donc la force de Lorentz est dans ce plan et la particule reste donc dans le plan (O, x, z) . La loi de la quantité de mouvement appliquée à la particule dans le référentiel galiléen s'écrit

$$q\vec{v} \begin{vmatrix} q\dot{x} & 0 \\ 0 & \wedge \vec{B} \\ q\dot{z} & 0 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ \ddot{z} \end{vmatrix}$$

soit $\begin{cases} -\frac{\mu_0 I q}{2\pi x} \dot{z} = m\ddot{x} \\ 0 = 0 \\ \frac{\mu_0 I q}{2\pi x} \dot{x} = m\ddot{z} \end{cases}$

Posons $\beta = \frac{\mu_0 I q}{2\pi m}$, le système s'écrit donc

$$\begin{cases} -\beta \dot{z} = x\ddot{x} \\ \beta \frac{\dot{x}}{x} = \ddot{z} \end{cases}$$

La seconde équation s'intègre entre $t = 0$ et t :

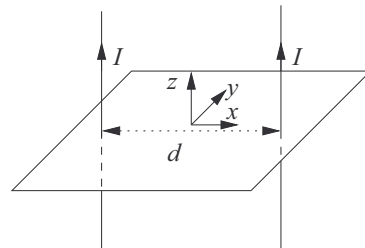
$$\beta [\ln x - \ln a] = [\dot{z} - 0] \text{ soit } \beta \ln \frac{x}{a} = \dot{z}$$

En injectant dans la première équation, on en déduit l'équation différentielle

$$-\beta^2 \ln \frac{x}{a} = x\ddot{x}$$

14.11

Les notations sont celles du schéma suivant.



Le champ magnétique exercé par un fil sur l'autre est celui créé à la distance d , soit $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{u}_y$. La force de Laplace subie par le tronçon de fil concerné est

$$\vec{F}_L = IL\vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{u}_y = -\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi d} \vec{u}_x$$

On en déduit

$$I = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\mu_0 dL}} = \sqrt{\frac{1}{dL}} = 1,00 \text{ A}$$

Ce résultat numérique qui tombe juste correspond en fait à la définition de l'ampère.

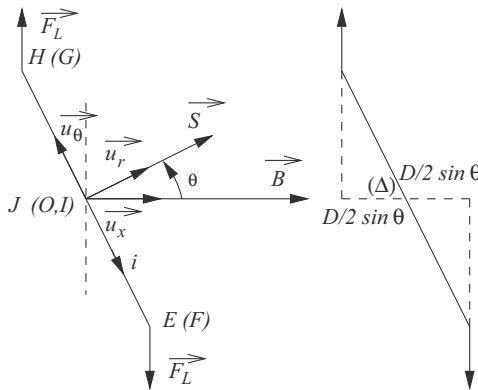
14.12

Les forces de Laplace sur les côtés (FG) et (HE) sont parallèles à l'axe de rotation du cadre donc leur moment est nul. Déterminons les forces de Laplace sur les deux autres côtés.

$$\begin{cases} \vec{F}_{EF} = -iL\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_x = -iLB\vec{u}_y \\ \vec{F}_{GH} = iL\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_x = iLB\vec{u}_y \end{cases}$$

Les bras de levier de ces deux forces sont égaux à

$$d = \frac{D}{2} \sin \theta$$



À l'équilibre la somme des moments est nulle

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{EF}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{GH}) + \Gamma_r &= 0 \text{ soit} \\ -iLB \frac{D}{2} \sin \theta - iLB \frac{D}{2} \sin \theta - C(\theta_0 - \theta) &= 0 \\ \text{donc } i &= \frac{C(\theta_0 - \theta)}{LBD \sin \theta} \end{aligned}$$

14.13

Le champ magnétique créé par le fil vertical en un point du plan de la figure est $\vec{B} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi y} \vec{u}_z$. Pour un point M de la tige

repéré par $\vec{OM} = r\vec{u}_r$, $y = r \sin \theta$ donc $\vec{B}(r) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi r \sin \theta} \vec{u}_z$. La force de Laplace subie par un tronçon de tige de longueur dr autour de M est donc

$$d\vec{F}_L = i dr \vec{u}_r \wedge \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i^2 dr}{2\pi r \sin \theta} \vec{u}_\theta$$

Son moment élémentaire en O est donc

$$d\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_L = \frac{\mu_0 i^2 dr}{2\pi \sin \theta} \vec{u}_z$$

Sa projection sur l'axe Δ est donc

$$d\mathcal{M}_\Delta = \frac{\mu_0 i^2 dr}{2\pi \sin \theta}$$

et le moment résultant des forces de Laplace est donc

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_L) = \int_{r=0}^L d\mathcal{M}_\Delta = \frac{\mu_0 i^2 L}{2\pi \sin \theta}$$

Le poids s'exerce en G avec $\vec{OG} = \frac{L}{2} \vec{u}_r$. Le bras de levier est donc $d = \frac{L}{2} \sin \theta$ et son moment est

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mg \frac{L}{2} \sin \theta$$

À l'équilibre de la tige, la somme des moments est nulle donc

$$\frac{\mu_0 i^2 L}{2\pi \sin \theta} - mg \frac{L}{2} \sin \theta = 0$$

$$\text{soit } i = \sqrt{\frac{\pi mg}{\mu_0}} \sin \theta$$

14.14

a) La distribution de courants est symétrique par rapport à $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et invariante par translation selon \vec{u}_z et par rotation d'angle θ donc $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$. L'application du théorème d'Ampère à un contour circulaire de rayon r donne

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 j \cdot \pi r^2 \text{ donc } \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta$$

b) Chaque particule de fluide est en équilibre sous l'action des forces de pression de résultante volumique $-\text{grad } P$ et des forces volumiques de Laplace de résultante volumique $\vec{j} \wedge \vec{B}$. À l'équilibre, on a donc

$$-\frac{dP}{dr} \vec{u}_r + j \vec{u}_z \wedge B(r) \vec{u}_\theta = \vec{0}$$

$$\text{donc } \frac{dP}{dr} = -jB(r) = -\frac{\mu_0 j^2 r}{2}$$

$$\text{donc } P(r) = K - \frac{\mu_0 j^2 r^2}{4}$$

Le cylindre est entouré de vide donc $P(b) = 0$ donc

$$K = \frac{\mu_0 j^2 b^2}{4}$$

$$\text{et } P(r) = \frac{\mu_0 j^2 (b^2 - r^2)}{4}$$

- c) Soit $n(r)$ le nombre d'électrons par mètre cube. Il est égal au nombre d'ions par mètre cube. La loi des gaz parfaits s'écrit

$$P(r)V = \frac{n(r)V}{\mathcal{N}_A} RT \text{ donc } P(r) = n(r)k_B T$$

On en déduit que

$$n(r) = \frac{\mu_0 j^2 (b^2 - r^2)}{4k_B T}$$

Le courant étant électronique, $\vec{j} = n(r) \cdot (-e)\vec{v}(r)$ donc

$$\vec{v}(r) = -\frac{j}{en(r)}\vec{u}_z = -\frac{4k_B T}{\mu_0 e j (b^2 - r^2)}\vec{u}_z$$

Remarquons que cette expression diverge quand r tend vers b , ce qui est normal car la densité particulaire tend vers 0 (à l'approche du vide), et pour assurer \vec{j} uniforme, il faudrait que la vitesse soit infinie, c'est donc une anomalie de ce modèle.

- d) La pression est décroissante du cœur du cylindre ($r = 0$) vers l'extérieur ($r = b$) et quand le courant cesse de fonctionner, le cylindre a tendance à exploser, d'où l'onde de choc sonore.

14.15

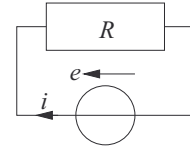
- a) L'arbre des conséquences est le suivant : (i) le poids fait chuter la tige (ii) l'aire du rectangle augmente (iii) le flux de \vec{B} varie (iv) une force électromotrice d'induction apparaît (v) un courant circule (vi) la force de Laplace est ajoutée aux autres forces dans l'équation mécanique. L'orientation de i dans le circuit permet de calculer la force de Laplace et l'équation mécanique s'écrit, en projection sur l'axe z :

$$m\ddot{z} = mg - 2k(z - \ell_0) - \alpha\dot{z} + iDB$$

Le flux du champ magnétique, en tenant compte de l'orientation du circuit et celle associée du vecteur \vec{dS} vaut

$$\Phi = B \cdot Dz \text{ donc } e = -\frac{d\Phi}{dt} = -BD\dot{z}$$

Le circuit électrique équivalent est



La loi des mailles s'écrit donc

$$e = Ri \text{ soit } -BD\dot{z} = Ri$$

- b) En multipliant l'équation mécanique par \dot{z} et l'équation électrique par i , il vient

$$\begin{cases} m\dot{z}\ddot{z} = mg\dot{z} - 2k(z - \ell_0)\dot{z} - \alpha\dot{z}^2 + iDB\dot{z} \\ -BD\dot{z}i = Ri^2 \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + k(z - \ell_0)^2 \right] = -\alpha\dot{z}^2 + iDB\dot{z} \\ -BD\dot{z}i = Ri^2 \end{cases}$$

On remarque que la puissance d'induction

$$\mathcal{P}_{\text{ind}} = -BD\dot{z}i$$

est opposée à la puissance de la force de Laplace

$$\mathcal{P}_L = iDB\dot{z}$$

En soustrayant les deux égalités, on en déduit

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + k(z - \ell_0)^2 \right] = -\alpha\dot{z}^2 - Ri^2$$

On peut donc dire que la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique de la tige, somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$, de l'énergie potentielle de pesanteur $-mgz$ (l'axe z est dirigé vers le bas) et de l'énergie potentielle élastique $k(z - \ell_0)^2$ (il y a 2 ressorts) est égale à la somme des puissances négatives des deux phénomènes dissipatifs, celle du frottement mécanique $-\alpha\dot{z}^2$ et celle de l'effet Joule $-Ri^2$.

- c) En éliminant i grâce à l'équation électrique, l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ est

$$\ddot{z} + \left(\frac{\alpha}{m} + \frac{B^2 D^2}{mR} \right) \dot{z} + \frac{2k}{m} z = \frac{2k}{m} \left(\ell_0 + \frac{mg}{2k} \right)$$

En régime pseudo-périodique, on a une équation d'oscillateur amorti autour de la position d'équilibre

$$z_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}$$

Le temps caractéristique d'amortissement est l'opposé de l'inverse de la partie réelle de la solution de l'équation caractéristique :

$$\tau = \frac{2}{\frac{\alpha}{m} + \frac{B^2 D^2}{mR}}$$

14.16

L'arbre des conséquences est le suivant : (i) la spire est lancée (ii) elle se déplace donc vers des zones où le champ magnétique est plus fort en norme (iii) le flux de \vec{B} varie (iv) une force électromotrice d'induction apparaît (v) un courant apparaît (vi) une force de Laplace apparaît et perturbe le mouvement de la spire. Orientons arbitrairement la spire dans le sens horaire et notons i l'intensité du courant. La somme des forces de Laplace sur les deux côtés parallèles à (O, x) est nulle. La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$m\ddot{r} = +ibB_0 \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) - ibB_0 \left(1 + \frac{r+a}{\lambda}\right)$$

soit $m\ddot{r} = -ibB_0 \frac{a}{\lambda}$

Le flux de \vec{B} à travers le rectangle est, en tenant compte de l'orientation opposée de \vec{B} et de \vec{dS} :

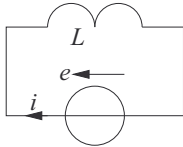
$$\Phi = - \int_{x=r}^{r+a} \int_{y=0}^b B_0 \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) dx dy$$

$$\Phi = -B_0 ab \left[1 + \frac{2r+a}{2\lambda}\right]$$

La loi de Faraday donne

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = B_0 ab \dot{r}$$

Le circuit électrique équivalent est



L'équation électrique s'écrit donc

$$B_0 ab \dot{r} = L \frac{di}{dt}$$

On intègre cette équation entre $(t = 0, r = 0, i = 0)$ et (t, r, i) :

$$\frac{B_0 ab}{\lambda} r(t) = Li(t) \text{ donc } i(t) = \frac{B_0 ab r(t)}{L\lambda}$$

On remplace dans l'équation mécanique :

$$m\ddot{r} = - \frac{a^2 b^2 B_0^2}{L\lambda^2} r$$

$$\text{donc } \ddot{r} + \frac{a^2 b^2 B_0^2}{mL\lambda^2} r = 0$$

C'est une équation d'oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_0 = \frac{abB_0}{\lambda\sqrt{mL}}$$

En tenant compte des conditions initiales

$$r(t) = \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

La vitesse \dot{r} s'annule quand $\cos(\omega_0 t) = 0$, ce qui arrive pour la première fois à la date

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi\lambda\sqrt{mL}}{2abB_0}$$

On en déduit

$$L = \frac{4\tau^2 a^2 b^2 B_0^2}{\pi^2 \lambda^2 m}$$

À cette date, \dot{r} est nul et r est maximal donc i aussi : les forces de Laplace vont donc agir et ramener la spire dans le sens des x décroissants. On peut donc considérer qu'il y a conversion alternative d'énergie cinétique $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ en énergie magnétique $\frac{1}{2}Li^2$.

14.17

Partie 1 : lévitation à la fermeture : étude qualitative.

- a) Le flux à travers la petite spire augmente dans le sens de \vec{u}_z donc le courant induit créera un contre-champ, dirigé selon $-\vec{u}_z$, donc dans le sens contraire à celui de la grande spire, selon $-\vec{u}_\theta$. On remarque que la petite spire présente à la grande spire une face Nord, et que la grande présente à la petite une face Nord, donc les spires auront tendance à se repousser.
- b) La force de Laplace sur un tronçon $d\vec{\ell} = ad\theta\vec{u}_\theta$ de la petite spire s'écrit

$$d\vec{F}_L = -i ad\theta\vec{u}_\theta \wedge B_0 \left[\vec{u}_z + \frac{3az}{2(z^2 + R^2)} \vec{u}_r \right]$$

$$d\vec{F}_L = -iaB_0 d\theta \vec{u}_r + \frac{3zi a^2 B_0}{2(z^2 + R^2)} d\theta \vec{u}_z$$

en notant $B_0 = \frac{\mu_0 I R^2}{2} (z^2 + R^2)^{-3/2}$. Le premier terme tend à comprimer la spire (conforme à la loi de Lenz, pour diminuer le flux croissant vers le haut), et la résultante est nulle en intégrant sur la spire. Le second terme est bien dirigé vers le haut et sa résultante est $\frac{3zi a^2 B_0 \pi}{(z^2 + R^2)} \vec{u}_z$ (conforme à la loi de Lenz, la spire fuyant vers les zones de champ magnétique moindre pour diminuer le flux). Si l'augmentation de I est rapide, i sera grand et la force de répulsion peut être supérieure au poids.

Partie 2 : lévitation sous l'action d'un champ magnétique variable.

a) On oriente i dans le sens de \vec{u}_0 . Posons $S = R^3(z^2 + R^2)^{-3/2}$. On calcule le flux de \vec{B} créé par la grande spire à travers la petite spire puis la fém d'induction :

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_0}{2R} \cos(\omega t) S$$

$$\text{donc } e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2R} \sin(\omega t) S$$

Le schéma électrique équivalent de la petite spire comporte la fém d'induction et la résistance R' donc

$$i(t) = \frac{e}{R'} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2RR'} \sin(\omega t) S$$

La résultante des forces de Laplace vaut

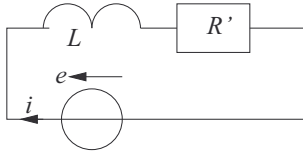
$$\vec{F}_L = \frac{\mu_0 I R^2}{2} (z^2 + R^2)^{-3/2} \cdot \frac{-3zi a^2 \pi}{(z^2 + R^2)} \vec{u}_z$$

$$\text{soit } \vec{F}_L = F_0 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

Sa valeur moyenne dans le temps est donc nulle car

$$\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$$

b) Si on ne néglige pas l'inductance de la bobine, le schéma électrique équivalent de la petite spire comporte la fém d'induction, la résistance R' et l'inductance L .



L'équation différentielle s'écrit

$$L \frac{di}{dt} + R' i = e = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2R} \sin(\omega t) S$$

La solution est proposée est conforme au régime sinusoïdal forcé et s'écrit

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi) = I_m \sin(\omega t) \cos \varphi - I_m \sin \varphi \cos(\omega t)$$

Or φ est un petit angle donc

$$i(t) \approx I_m \sin(\omega t) - I_m \varphi \cos(\omega t)$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, il vient :

$$L I_m \omega \cos(\omega t) + L I_m \omega \varphi \sin(\omega t) - R' I_m \cos(\omega t) + R' I_m \sin(\omega t) =$$

$$\frac{\mu_0 I_0 \omega}{2R} \sin(\omega t) S$$

Or $\varphi = \frac{L\omega}{R'}$ donc l'équation se simplifie et devient

$$\left(R' + \frac{L^2 \omega^2}{R'} \right) I_m \sin(\omega t) = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2R} \sin(\omega t) S$$

$$\text{donc } I_m = \frac{\mu_0 I_0 \omega R'}{2R(R'^2 + L^2 \omega^2)} S$$

On en déduit la résultante des forces de Laplace :

$$\vec{F}_L = \frac{\mu_0 I_0 R^2}{2} (z^2 + R^2)^{-3/2} \cdot \frac{-3zi a^2 \pi}{(z^2 + R^2)} \vec{u}_z$$

$$\text{soit } \vec{F}_L = -F_1 \cos(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) \vec{u}_z$$

$$\text{avec } F_1 = \frac{3\mu_0^2 I_0^2 \omega R' \pi a^2 z R^4}{4(R'^2 + L^2 \omega^2)(z^2 + R^2)^4}$$

$$\text{or } \cos(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$\sin(\omega t) \cos(\omega t) \cos \varphi - \cos^2(\omega t) \sin \varphi$$

$$\text{donc } \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) \rangle =$$

$$-\frac{1}{2} \sin \varphi \approx -\frac{\varphi}{2} = -\frac{L\omega}{2R'}$$

Par suite, la valeur moyenne des forces de Laplace s'écrit

$$\langle \vec{F}_L \rangle = F_1 \frac{L\omega}{2R'} \vec{u}_z$$

La force moyenne est donc dirigée vers le haut, et peut compenser le poids, d'où l'effet de lévitation.

14.18 Le champ magnétique créé par le solénoïde est uniforme

$$\vec{B}_{\text{sol}} = \mu_0 \frac{10N}{D} i_{\text{sol}} \vec{u}_z$$

Son flux à travers la spire est donc

$$\Phi_{\text{sol} \rightarrow \text{sp}} = N \cdot \mu_0 \frac{10N}{D} i_{\text{sol}} \cdot \pi R^2$$

$$\text{soit } \Phi_{\text{sol} \rightarrow \text{sp}} = \mu_0 \frac{10N^2 \pi R^2}{D} i_{\text{sol}}$$

$$\text{donc } M = \mu_0 \frac{10N^2 \pi R^2}{D} i_{\text{sol}}$$

14.19

a) L'application du théorème d'Ampère le long d'un lacet circulaire de rayon r orienté dans le sens de \vec{u}_0 donne :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 [I + Ni]$$

$$\text{soit } \vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} [I + Ni] \vec{u}_0$$

- b) Le flux du champ magnétique total à travers une spire carrée du bobinage est

$$\Phi_1 = \int_{r=a}^{2a} \int_{z=0}^a \frac{\mu_0}{2\pi r} [I + Ni] dr dz$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 a \ln 2 [I + Ni]}{2\pi}$$

On en déduit le flux total

$$\Phi = N\Phi_1 = \frac{N\mu_0 a \ln 2 [I + Ni]}{2\pi}$$

soit $\Phi = Li + MI$ avec

$$\begin{cases} L = \frac{N^2 \mu_0 a \ln 2}{2\pi} \\ M = \frac{N\mu_0 a \ln 2}{2\pi} \end{cases}$$

- c) La force électromotrice d'induction qui prend naissance dans le bobinage torique est

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} - M\frac{dI}{dt}$$

Si on note R la résistance du bobinage, alors la loi des mailles donne

$$e = Ri \text{ soit } -M\frac{dI}{dt} = L\frac{di}{dt} + Ri$$

En régime sinusoïdal forcé de pulsation ω , on peut passer en grandeurs complexes :

$$-jM\omega \underline{I} = jL\omega \underline{i} + R\underline{i}$$

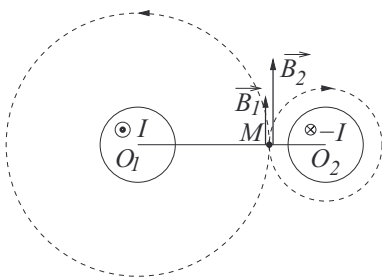
et en passant aux modules

$$i_{\max} = \frac{M\omega I_{\max}}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}$$

La mesure de l'amplitude i_{\max} du courant dans le bobinage torique donne donc accès à celle I_{\max} dans le fil, on a donc une mesure ampèremétrique sans avoir besoin de couper le fil pour y insérer un ampèremètre en série.

14.20

- a) Le point M est soumis à la superposition des champs magnétiques créés par les deux fils. On applique le théorème d'Ampère pour chacun d'eux en choisissant pour contours d'Ampère des cercles de centres respectifs O_1 et O_2 , de rayons $r_1 = D + x$ et $r_2 = D - x$.



L'application du théorème d'Ampère donne

$$\begin{cases} 2\pi(D+x)B_1 = \mu_0 I \\ 2\pi(D-x)B_2 = \mu_0 I \end{cases} \text{ donc } \vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{D+x} + \frac{1}{D-x} \right] \vec{u}_y$$

- b) On calcule le flux par une intégrale double.

$$\Phi = \int_{x=-D+a}^{D-a} \int_{z=0}^H \vec{B}(x) \cdot dx dz \vec{u}_y$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 IH}{2\pi} [\ln(D+x) - \ln(D-x)]_{-D+a}^{D-a} = \frac{\mu_0 H \ln \frac{2D-a}{\ln a}}{\pi} I$$

- c) On en déduit

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 H \ln \frac{2D-a}{\ln a}}{\pi} \text{ et } \Lambda = \frac{L}{H} = \frac{\mu_0 \ln \frac{2D-a}{\ln a}}{\pi}$$

14.21

- a) Les lois de l'électrocinétique s'écrivent

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

- b) En multipliant la première égalité par i_1 et la seconde par i_2 :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 = u_1 i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + M i_1 \frac{di_2}{dt} \\ \mathcal{P}_2 = u_2 i_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} i_2 + M i_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

- c) En sommant les deux équations :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right]$$

et le terme entre crochets est l'énergie électrocinétique du système des deux bobines.

14.22

Le champ magnétique dans le cylindre est la somme des deux champs :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 (N_1 i_1 + N_2 i_2)}{D} \vec{u}_z$$

On en déduit l'énergie magnétique

$$U_m = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \cdot \pi R^2 D = \frac{\mu_0 \pi R^2}{2D} (N_1^2 i_1^2 + 2N_1 N_2 i_1 i_2 + N_2^2 i_2^2)$$

$$U_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi R^2 N_1^2}{D} i_1^2 + \frac{\mu_0 \pi R^2 N_1 N_2}{D} i_1 i_2 + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi R^2 N_2^2}{D} i_2^2$$

On identifie cette énergie magnétique à l'énergie électrocinétique

$$\mathcal{E}_{ec} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

$$\text{donc } \begin{cases} L_1 = \frac{\mu_0 \pi R^2 N_1^2}{D} \\ M = \frac{\mu_0 \pi R^2 N_1 N_2}{D} \\ L_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi R^2 N_2^2}{D} \end{cases}$$

14.23

- a) Le dispositif est invariant par translation selon \vec{u}_z et par rotation d'angle θ donc $\vec{B} = \vec{B}(r)$. Le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des charges donc $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$. Le contour d'Ampère \mathcal{C} est donc un cercle de rayon r et la circulation est

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) \cdot 2\pi r$$

Si $r < a$, on est à l'intérieur des deux cylindres et le courant enlacé est nul donc $\vec{B} = \vec{0}$. Si $r > b$, \mathcal{C} enlace les deux cylindres parcourus par des courants opposés donc $I_{\text{enlacé}} = 0$ et $\vec{B} = \vec{0}$. Si $a < r < b$, le théorème d'Ampère s'écrit

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I \text{ donc } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- b) On intègre l'énergie volumique magnétique dans l'espace qui sépare les deux cylindres.

$$U_m = \int_{r=a}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^H \frac{\mu_0^2 I^2}{8\mu_0 \pi^2 r^2} r dr d\theta dz$$

$$U_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} [\ln r]_a^b [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^H$$

$$U_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 H \ln \frac{b}{a}}{2\pi} I^2$$

- c) On identifie U_m et $\mathcal{E}_{ec} = \frac{1}{2} LI^2$ donc

$$L = \frac{\mu_0 H \ln \frac{b}{a}}{2\pi} \text{ et } \Lambda = \frac{L}{H} = \frac{\mu_0 \ln \frac{b}{a}}{2\pi}$$

14.24

- a) L'énergie électrocinétique est

$$\mathcal{E}_{ec} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

- b) On identifie cette énergie à l'énergie magnétique U_m , qui est elle-même l'intégrale volumique de $\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$, quantité positive.

- c) En suivant les indications de l'énoncé, on factorise par $\frac{1}{2} L_1 i_1^2$:

$$\mathcal{E}_{ec} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \left[1 + \frac{2M}{L_1} \frac{i_2}{i_1} + \frac{L_2}{L_1} \left(\frac{i_2}{i_1} \right)^2 \right]$$

et en posant $u = \frac{i_2}{i_1}$:

$$\mathcal{E}_{ec} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \left[1 + \frac{2M}{L_1} u + \frac{L_2}{L_1} u^2 \right]$$

Ce trinôme du second degré doit être positif ou nul pour toute valeur de u , son discriminant est donc négatif ou nul :

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4M^2}{L_1^2} - 4 \frac{L_2}{L_1} \leq 0$$

$$\text{soit } M^2 \leq L_1 L_2$$

14.25

On suppose que le champ magnétique créé par un solénoïde est nul à l'extérieur du cylindre qu'il délimite, même sur son axe. Calculons le flux du champ magnétique créé par 1 à travers 2. On a

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N}{D} i_1 \vec{u}_z$$

Le nombre de spires de 2 à l'intérieur de 1 est

$$N_{21} = \frac{\beta D}{D} \cdot N = \beta N$$

On en déduit

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_{21} \cdot B_1 \cdot \pi r_2^2$$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 \beta N^2 \pi R^2}{D} i_1$$

On en déduit

$$M = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{i_1} = \frac{\mu_0 \beta N^2 \pi R^2}{D}$$

Les inductances propres des deux solénoïdes sont

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\mu_0 N^2 \pi (2R)^2}{D} \\ L_2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{D} \end{cases}$$

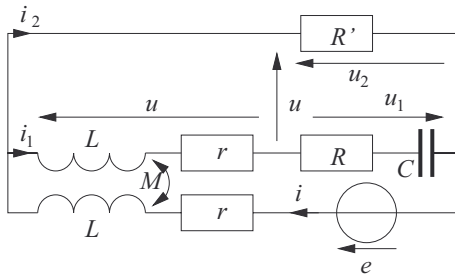
On en déduit le coefficient de couplage

$$k = \frac{\frac{\mu_0 \beta N^2 \pi R^2}{D}}{\sqrt{\frac{\mu_0 N^2 \pi 4R^2}{D} \cdot \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{D}}}$$

$$\text{soit } k = \frac{\beta}{2}$$

14.26

Le circuit est fléché en notant i l'intensité de la branche du bas, de droite à gauche en convention générateur, i_1 de gauche à droite dans la branche du milieu, i_2 de gauche à droite dans la branche du haut. La loi des nœuds donne $i = i_1 + i_2$. La tension u est nulle à l'équilibre du pont. On peut décomposer cette tension de deux manières distinctes.



En grandeurs temporelles :

$$\begin{cases} u = 0 = L \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + r i_1 \\ u = u_2 + u_1 = 0 = R' i_2 - u_C - R i_1 \end{cases}$$

En régime sinusoïdal forcé, on peut passer en formalisme complexe :

$$\begin{cases} jL\omega \underline{i_1} - jM\omega \underline{i_2} + r \underline{i_1} = 0 \\ R' \underline{i_2} - \frac{1}{jC\omega} \underline{i_1} - R \underline{i_1} = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} jL\omega \underline{i_1} - jM\omega \underline{i_2} - jM\omega \underline{i_2} + r \underline{i_1} = 0 \\ \underline{i_2} = \frac{1}{jR'C\omega} \underline{i_1} + \frac{R}{R'} \underline{i_1} \end{cases}$$

$$\text{donc } \left[jL\omega - jM\omega - jM\omega \frac{R}{R'} - \frac{M}{R'C} + r \right] \underline{i_1} = 0$$

Si $\underline{i_1} = 0$, le générateur est éteint, ce qui est exclu. On en déduit que le coefficient complexe est nul, donc sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles :

$$\begin{cases} -\frac{M}{R'C} + r = 0 \\ L\omega - M\omega - M\omega \frac{R}{R'} = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } M = rR'C \text{ et } L = M \left(\frac{R}{R'} + 1 \right) = rC(R + R')$$

Le couplage est parfait si

$$M^2 = L^2 \text{ soit } r^2 R'^2 C^2 = r^2 C^2 (R + R')^2 \text{ soit } R'^2 = (R + R')^2$$

$$\text{donc } R = 0$$

14.27

- a) Tout plan contenant (O, z) est plan d'antisymétrie des courants, donc contient le champ magnétique. $\vec{B}(M)$ est donc dans leur intersection donc $\vec{B} = B \vec{u}_z$.
- b) Le point M est repéré en coordonnées sphériques par $r = z$, $\theta = 0$ et $\vec{u}_r = \vec{u}_z$. Par application de la formule du cours :

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 m}{4\pi z^3} \vec{u}_z$$

Or $m = i\pi a^2$ donc

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 a^2 i}{2z^3} \vec{u}_z$$

Dans l'approximation dipolaire, $a \ll z$ donc $\alpha \ll 1$ et

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha = \frac{a}{z}$$

La formule de l'énoncé donne donc

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2a} \cdot \frac{a^3}{z^3} \vec{u}_z$$

qui est égale à l'expression précédente.

14.28

- a) En mouvement circulaire uniforme :

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r \text{ et } \vec{v} = r\omega \vec{u}_\theta \text{ donc } Ec = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

D'après l'énoncé :

$$Ec = \frac{1}{2} \hbar \omega \text{ soit } \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \hbar \omega \text{ donc } r^2 \omega = \frac{\hbar}{m_e}$$

- b) L'électron effectue 1 tour en T secondes, donc en un point donné de la trajectoire circulaire, on observe un débit de charge dont la valeur absolue est

$$i = \frac{e}{T} \text{ donc } \mu_B = iS = \frac{e}{T} \cdot \pi r^2 = \frac{e\pi r^2}{T}$$

- c) La période T est liée à la vitesse angulaire ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ donc } \mu_B = \frac{e\pi r^2 \omega}{2\pi} = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

14.29

Les côtés contigus des dipôles magnétiques présentent des courants dont les intensités s'annulent deux à deux, à l'exception des côtés du bord, dont la juxtaposition forme bien la boucle parcourue par i . Le moment magnétique du grand circuit est donc bien égal à la somme des moments des petits dipôles qui le pavent. Par théorème de superposition, le champ magnétique créé en M par le grand circuit en M est la somme des champs créés en M par chacun des petits dipôles. Dans l'approximation dipolaire, la taille de ce grand circuit est très petite devant r , il en est donc de même de tous les petits dipôles. Le champ est donc indépendant de la position relative de tous les petits dipôles, donc indépendant de la forme du grand circuit.

14.30

- a) La rotation du cercle provoque celle des charges. Estimons la charge qui passe par un point de contrôle à proximité du cercle en rotation. Pendant dt , celui-ci tourne de $d\theta = \omega dt$. La charge qui passe par le point est donc

$$dq = q \cdot \frac{\omega dt}{2\pi} \text{ donc } i = \frac{dq}{dt} = \frac{q\omega}{2\pi}$$

Le moment dipolaire de cette spire est donc

$$\vec{m} = i\vec{S} = \frac{q\omega}{2\pi} \cdot \pi a^2 \vec{u}_z$$

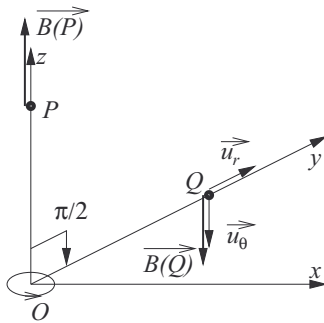
$$\text{soit } \vec{m} = \frac{q\omega a^2}{2} \vec{u}_z$$

Le point P est repéré en coordonnées sphériques par $r = 10a$, $\theta = 0$ et $\vec{u}_r = \vec{u}_z$ donc

$$\vec{B}(P) = \frac{2\mu_0 m}{4\pi(10a)^3} \vec{u}_z$$

$$\text{soit } \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 q\omega}{4000\pi a} \vec{u}_z$$

Le point Q est repéré en coordonnées sphériques par $r = 10a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{u}_r = \vec{u}_y$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z$.



La formule du cours donne

$$\vec{B}(Q) = -\frac{\mu_0 m}{4\pi(10a)^3} \vec{u}_z$$

$$\text{soit } \vec{B}(P) = -\frac{\mu_0 q\omega}{8000\pi a} \vec{u}_z$$

- b) On peut décomposer ce disque en couronnes concentriques $[r, r + dr]$ et intégrer pour calculer le moment dipolaire de ce disque. Chaque couronne est assimilable au fil décrit à la question (a). Comme on est dans l'approximation dipolaire, et que toutes ces couronnes ont le même centre O, on peut sommer leurs moments dipolaires. La charge de la couronne est

$$dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$$

En utilisant le résultat de la première question, son moment dipolaire est donc

$$\vec{dm} = \frac{dq\omega a^2}{2} \vec{u}_z = \sigma\pi r dr \omega a^2 \vec{u}_z$$

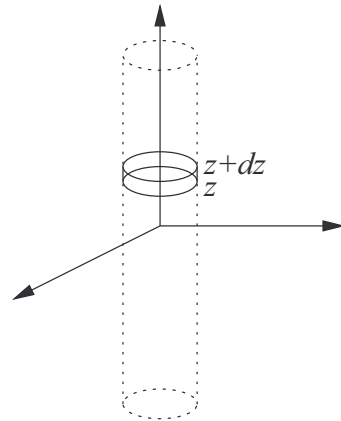
$$\text{soit } \vec{dm} = \sigma\pi a^2 \omega r dr \vec{u}_z$$

$$\text{donc } \vec{m} = \int_{r=0}^a \sigma\pi a^2 \omega r dr \vec{u}_z$$

$$\vec{m} = \frac{\sigma\pi a^4 \omega}{2} \vec{u}_z$$

En posant $q = \sigma\pi a^2$, charge totale du disque, il crée les mêmes champs en P et en Q qu'à la question (a).

- c) On peut décomposer ce disque en couronnes coaxiales $[z, z + dz]$. Cette fois, les différentes couronnes n'ont plus le même centre. La distance r séparant leur centre du point P est variable, de $6a$ pour la couronne la plus basse en $z = -a$ à $4a$ pour la couronne la plus haute en $z = a$. On doit donc sommer directement les champs élémentaires.



La couronne porte une charge

$$dq = \sigma \cdot 2\pi \frac{a}{2} dz$$

et son moment dipolaire est

$$\vec{dm} = \frac{\sigma\pi a^3 \omega dz}{4} \vec{u}_z$$

Le point M depuis le centre de cette spire est repéré par $r = 5a - z$, $\vec{u}_r = \vec{u}_z$ et $\theta = 0$. Par application de la formule du cours on en déduit

$$\vec{dB} = \frac{2\mu_0 \sigma\pi a^3 \omega dz}{16\pi(5a - z)^3} \vec{u}_z$$

$$\vec{dB} = \beta(5a - z)^{-3} dz \vec{u}_z$$

$$\text{avec } \beta = \frac{\mu_0 \sigma a^3 \omega}{8}$$

On en déduit

$$\vec{B} = \beta \vec{u}_z \int_{z=-a}^a (5a-z)^{-3} dz$$

$$\vec{B} = \beta \vec{u}_z \left[\frac{(5a-z)^{-2}}{2} \right]_{-a}^a$$

$$\text{soit } \vec{B} = \frac{5\beta}{72a^2} \vec{u}_z$$

14.31

a) Tout plan passant par M et le centre du Soleil est plan de symétrie des courants. Le champ magnétique est orthogonal simultanément à tous ces plans, donc $\vec{B}_E = \vec{0}$.

b) On a

$$\vec{B}_M \begin{vmatrix} \frac{2\mu_0 m_0 \cos \theta}{4\pi r^3} \\ \frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi r^3} \\ 0 \end{vmatrix}$$

c) Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi R_M^3} \vec{u}_\theta$$

$$\text{donc } m_0 = \frac{4\pi B_M R_M^3}{\mu_0} = 7,8 \cdot 10^{25} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

d) On projette :

$$\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$$

On en déduit

$$\vec{B}_S \begin{vmatrix} B_S \cos \theta \\ -B_S \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

et en sommant, on constate que \vec{B}_θ est nul en tout point de la surface de Mercure si

$$\frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi R_M^3} - B_S \sin \theta = 0$$

$$\text{soit } B_S = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi R_M^3} = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

14.32

a) Le plan (O, x, y) est plan de symétrie des courants donc $\vec{B} = B_z \vec{u}_z$.

b) On a

$$\tan \theta = \frac{z}{x} \text{ donc } z = x \tan \theta$$

En dérivant par rapport à θ :

$$\frac{dz}{d\theta} = x(1 + \tan^2 \theta) = \frac{x}{\cos^2 \theta}$$

c) Par définition de n :

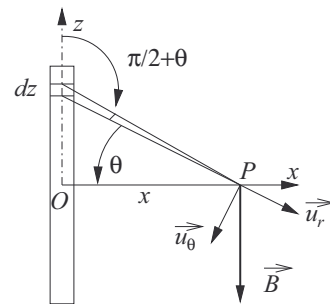
$$n = \frac{dN}{dz} \text{ donc } dN = n \cdot dz$$

$$\text{soit } dN = \frac{nxd\theta}{\cos^2 \theta}$$

Le moment dipolaire de la tranche considérée est

$$\vec{dm} = dNi \cdot \pi a^2 \vec{u}_z$$

Vu depuis le centre de cette spire de centre M, le point P est repéré par $r = MP = \frac{x}{\cos \theta}$, l'angle entre l'axe de la spire (O, z) et le vecteur \vec{MP} est $\frac{\pi}{2} + \theta$.



Les vecteurs de la base sphérique sont

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x - \cos \theta \vec{u}_z \end{cases}$$

On en déduit la composante de $d\vec{B}$ sur l'axe z :

$$dB_z = -dB_r \sin \theta - dB_\theta \cos \theta$$

$$\text{avec } \begin{cases} dB_r = \frac{2\mu_0 dNi\pi a^2 \cos(\frac{\pi}{2} + \theta)}{4\pi \frac{x^3}{\cos^3 \theta}} \\ dB_\theta = \frac{\mu_0 dNi\pi a^2 \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)}{4\pi \frac{x^3}{\cos^3 \theta}} \end{cases}$$

$$\text{donc } dB_z = \frac{\mu_0 ni a^2}{4x^2} [2\sin^2 \theta - \cos^2 \theta] \cos \theta d\theta$$

d) On en déduit par intégration

$$B_z = B_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} [2\sin^2 \theta - \cos^2 \theta] \cos \theta d\theta$$

$$\text{avec } B_0 = \mu_0 ni a^2 4x^2 \text{ et } \tan \alpha = \frac{D}{x}$$

$$B_z = B_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} [3\sin^2 \theta - 1] \cos \theta d\theta$$

$$\text{donc } B_z = B_0 [\sin^3 \theta - \sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$\text{soit } B_z = B_0 [2\sin^3 \alpha - 2\sin \alpha]$$

14.33

La boussole est soumise à l'action du champ magnétique extérieur, donc le moment résultant est

$$\vec{M}_O = (m\vec{u}) \wedge (B\vec{u}_x) = -mB \sin \theta \vec{u}_z$$

et la loi du moment cinétique en projection sur l'axe Δ donne

$$J_\Delta \ddot{\theta} = -mB \sin \theta$$

La position d'équilibre stable est $\theta = 0$ car l'énergie potentielle d'interaction est

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos \theta$$

qui est minimale en $\theta = 0$. On fait donc l'approximation des petits angles et on obtient l'équation d'oscillateur harmonique :

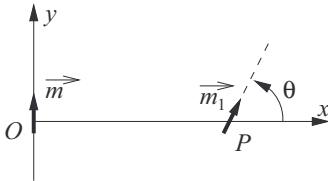
$$\ddot{\theta} + \frac{mB}{J_\Delta} \theta = 0$$

La pulsation propre vaut

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mB}{J_\Delta}} \text{ donc } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mB}}$$

14.34

a) Les notations sont celles du schéma suivant.



Le point P est repéré en coordonnées sphériques depuis le dipôle fixe par $r = x$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{u}_r = \vec{u}_x$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_y$. Par application de la formule du cours

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 m}{4\pi x^3} \vec{u}_y$$

b) L'énergie potentielle d'interaction entre \vec{B} et \vec{m}_1 est

$$E_p = -\vec{m}_1 \cdot \vec{B} = - \begin{vmatrix} m \cos \theta \\ m \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0 m}{4\pi x^3} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{soit } E_p = \frac{\mu_0 m^2}{4\pi x^3} \sin \theta$$

On en déduit

$$\begin{cases} \frac{dE_p}{d\theta} = \frac{\mu_0 m^2}{4\pi x^3} \cos \theta \\ \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = -\frac{\mu_0 m^2}{4\pi x^3} \sin \theta \end{cases}$$

La dérivée première est nulle pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. La dérivée seconde est négative pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ qui est donc une position d'équilibre instable et positive pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$ qui est une position d'équilibre stable. On vérifie donc sur cet exemple que le dipôle 1 s'oriente dans la direction et le sens du champ créé par le dipôle fixe.

c) On a maintenant $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $\vec{m}_1 = -m\vec{u}_y$. L'énergie potentielle d'interaction s'écrit donc

$$E_p(x) = -\frac{\mu_0 m^2}{4\pi x^3}$$

La force dérive de l'énergie potentielle donc

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -\frac{dE_p}{dx} \vec{u}_x$$

$$\text{soit } \vec{f} = -\frac{3\mu_0 m^2}{4\pi x^4} \vec{u}_x$$

C'est une force centrale sur l'axe x , attractive mais non newtonienne car elle varie comme $\frac{1}{x^4}$ alors qu'une force newtonienne varie comme $\frac{1}{x^2}$

14.35

a) Le moment est nul car \vec{B} et \vec{m} sont colinéaires.

b) Par application de la formule du cours, l'énergie potentielle d'interaction du dipôle avec le champ de la spire est

$$E_{pB} = -\vec{m} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0 m I a^2}{2} (z^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}}$$

On lui ajoute l'énergie potentielle de pesanteur

$$E_{pP} = m_0 g z$$

c) On doit faire coïncider l'expression de l'énoncé et celle de l'énergie potentielle. On fait apparaître le terme $1 + u^2$ en factorisant $(z^2 + a^2)$ par a^2 :

$$E_p(z) = E_{pB}(z) + E_{pP}(z) \text{ soit}$$

$$E_p(z) = \frac{\mu_0 m I a^2}{2} \cdot (a^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{-\frac{3}{2}} + m_0 g z$$

On pose donc $u = \frac{z}{a}$ donc $z = au$, d'où

$$E_p(u) = \frac{\mu_0 m I}{2a} (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}} + m_0 g a u$$

$$\text{soit } E_p(u) = m_0 g a \left[\frac{\mu_0 m I}{2m_0 g a^2} (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}} + u \right]$$

$$\text{soit } E_p(u) = m_0 g a \cdot f_\alpha(u) \text{ avec } \alpha = \frac{\mu_0 m I}{2m_0 g a^2}$$

Plus α est faible plus la courbe se rapproche de la droite $f(u) = u$. La courbe du bas (la plus foncée) correspond donc à $\alpha = 0,5$, celle du milieu à $\alpha = 1$ et celle du haut à $\alpha = 2$. Il existe une position d'équilibre stable si la courbe représentative de l'énergie potentielle présente une cuvette de potentiel. C'est le cas pour $\alpha = 2$ et pas pour $\alpha = 0,5$. L'apparition de la cuvette semble correspondre à α un peu supérieur à 1, soit

$$\frac{\mu_0 m I}{2m_0 g a^2} > 1 \text{ soit } I > \frac{2m_0 g a^2}{\mu_0 m}$$

$$\text{donc } I^* = \frac{2m_0 g a^2}{\mu_0 m}$$

- d) Le minimum de la fonction est obtenu pour $u = 1$ soit $\frac{z_{\text{eq}}}{a} \approx 1$. Ce n'est pas un minimum absolu, et si on donne une énergie cinétique suffisante au dipôle en $z_{\text{eq}} = a$, il peut franchir le col de potentiel pour $z \approx 0$ et tomber sans retour vers les $z < 0$. C'est pourquoi on parle de métastabilité.
- e) La somme des forces dérive de l'énergie potentielle donc

$$F(z) = -\frac{dEp}{dz} = -\frac{dEp}{du} \cdot \frac{du}{dz} = -m_0 g a f'_\alpha(u) \cdot \frac{1}{a}$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée au dipôle donne, en $u = 0$:

$$-m_0 g f'_\alpha(0) = m_0 \ddot{z} \text{ donc } \ddot{z} = -g f'_\alpha(0)$$

On lit la pente de la courbe sur le graphe en $z = a$ pour $\alpha = 0,5$, soit $f'_{0,5}(a) \approx 0,6$ donc $\ddot{z} \approx -0,6g$.

14.36

- a) Le plan de la figure est, dans les deux cas, plan d'antisymétrie des courants, donc le champ magnétique est dans ce plan. Si les courants sont dans le même sens, l'axe médiateur (y) est plan de symétrie des courants, donc le champ

lui est orthogonal, donc selon (x), ce qui correspond à la première carte. Si les courants sont dans des sens opposés, l'axe médiateur (y) est plan d'antisymétrie des courants, donc le champ est dans ce plan, donc selon (y), ce qui correspond à la seconde carte.

- b) Dans le premier cas, le champ magnétique au centre est nul, donc le dipôle ne pivote pas et est en équilibre.
- Si on le déplace légèrement vers la droite, il entre en interaction avec un champ magnétique selon $-\vec{u}_y$, il s'oriente donc dans ce sens en pivotant de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens horaire. Il tend ensuite à migrer vers les zones de champ fort et se déplace vers la droite. L'équilibre est donc instable selon x . Le raisonnement est identique si on le déplace vers la gauche.
 - Si on le déplace légèrement vers le haut, il entre en interaction avec un champ magnétique selon \vec{u}_x , il ne pivote donc pas. Il tend ensuite à migrer vers les zones de champ fort et se déplace vers le haut. L'équilibre est donc instable selon y . Le raisonnement est identique si on le déplace vers le bas.

Dans le second cas, le champ au centre est selon \vec{u}_y , donc le dipôle s'oriente dans ce sens en pivotant de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique. Après ce pivotement, étudions l'équilibre selon les deux axes.

- Si on le déplace légèrement vers la droite, il entre en interaction avec un champ magnétique selon \vec{u}_y , donc il ne pivote pas. Il tend à migrer vers les zones de champ fort et se déplace vers la droite. L'équilibre est donc instable selon x . Le raisonnement est identique si on le déplace vers la gauche.
- Si on le déplace légèrement vers le haut, il entre en interaction avec un champ magnétique selon \vec{u}_y , donc il ne pivote pas. Il tend à migrer vers les zones de champ fort et se se déplace vers le bas. L'équilibre est donc stable selon y . Le raisonnement est identique si on le déplace vers le bas.

CHAPITRE 15

Équations de Maxwell

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Équations de Maxwell, forme locale.
- ◇ Loi locale de conservation de la charge.
- ◇ Équations de Maxwell, forme intégrale.
- ◇ Courant de déplacement.
- ◇ Vecteur de Poynting électromagnétique.
- ◇ Équation locale de Poynting.
- ◇ ARQS magnétique.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Établir et utiliser la loi de conservation de la charge.
- ◇ Énoncer les formes intégrales des équations de Maxwell.
- ◇ Savoir interpréter et exploiter l'équation locale de Poynting.
- ◇ Énoncer l'ARQS et traduire les équations de Maxwell dans ce cas.
- ◇ Une initiation aux courants de Foucault.

Les méthodes à retenir

Établir et utiliser la loi de conservation de la charge.

La forme générale des équations de Maxwell est :

$$\begin{array}{ll} \text{M. Gauss} & \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{M. Faraday} & \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{M. Thomson} & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \text{M. Ampère} & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}$$

avec $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ (**permittivité diélectrique du vide**) et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ (**perméabilité magnétique du vide**). On pose

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

\vec{j}_D est le vecteur **densité de courant de déplacement**. Ce terme rend cohérentes les équations de Maxwell avec une des lois fondamentales de la physique : **la loi de conservation de la charge** :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Cette relation prouve qu'en régime variable, la densité de charge ρ et celle de courant \vec{j} ne sont pas indépendantes.

Exemple :

Une distribution de charges et de courants possède une symétrie cylindrique. Dans le système de coordonnées cylindriques, leurs expressions sont : $\rho(r, z, \theta, t) = \rho_0 \frac{R}{\tau r}$ et $\vec{j}(r, z, \theta, t) = -J \vec{u}_r$. Les constantes J , τ et R sont liées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r(-J))}{\partial r} = -\frac{J}{r} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \frac{R}{\tau r} \end{array} \right. \quad \text{donc } -J + \rho_0 \frac{R}{\tau} = 0$$

$$\text{soit } J = \rho_0 \frac{R}{\tau}$$

↪ Exercices 15.1, 15.2.

Énoncer les formes intégrales des équations de Maxwell.

L'application du théorème d'Ostrogradski et du théorème de Stokes conduisent aux formes intégrales des équations de Maxwell.

$$\begin{array}{ll} \text{Gauss : } \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} & \text{Flux : } \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \text{Faraday : } \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} & \text{Ampère g}^{\text{al}} : \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlacé} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt} \end{array}$$

Exemple :

En **régime stationnaire**, les dérivées par rapport au temps sont nulles. On remarque ainsi que le théorème de Gauss vu en électrostatique

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

est toujours vrai, alors que le théorème d'Ampère vu en magnétostatique

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlacé}$$

n'est a priori valable que dans le cas du régime stationnaire. On verra en fin de ce chapitre qu'il reste valable en régime quasi stationnaire (ARQS magnétique).

↪ **Exercice 15.3.**

Savoir interpréter et exploiter l'équation locale de Poynting.

Le **vecteur de Poynting** électromagnétique est

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Il est exprimé en joule par seconde et par mètre carré. Son flux à travers une surface S est la puissance électromagnétique transportée :

$$\mathcal{P} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}$$

Le sens physique de $\vec{\Pi}$ apparaîtra plus nettement dans le chapitre 17. La relation suivante est l'**équation locale de Poynting** exprimée ici dans le cas général :

$$-\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \text{div } \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\text{avec } u_{em} = u_e + u_m \text{ et } \begin{cases} u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \\ u_m = \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \end{cases}$$

Voici quelques axes d'interprétation de cette relation.

- u_{em} est l'**énergie volumique électromagnétique**.
- $\vec{j} \cdot \vec{E}$ est la **puissance volumique électrocinétique**.
- L'équation est donc homogène à une puissance volumique.
- Son sens physique peut être résumé ainsi : la **diminution d'énergie volumique** par unité de temps (terme de gauche) est due à la **somme** de la **perte par rayonnement électromagnétique** (la divergence est positive quand le champ de vecteur « diverge », ou qu'il est dirigé vers l'extérieur) et de l'**énergie consommée par mise en mouvement des charges** (\vec{j}) sous l'action du champ électrique (\vec{E}).

L'équation locale de Poynting est conséquence des équations de Maxwell, sa vérification permet donc de valider les calculs effectués dans une situation donnée, et elle permet surtout de donner un sens physique énergétique aux différents termes apparaissant dans les grandeurs électromagnétiques exprimées.

Exemple :

Dans le vide, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$ donc l'équation locale de Poynting s'écrit

$$-\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \text{div } \vec{\Pi}$$

On verra dans le chapitre 17 une famille importante de solutions des équations de Maxwell appelées ondes planes progressives harmoniques. Injectons dans les équations de Maxwell les champs suivants

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t - kx) \\ \vec{B} = B_0 \vec{u}_z \cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

Il est immédiat que $\text{div } \vec{E} = 0$ et $\text{div } \vec{B} = 0$. Les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère s'écrivent

$$\begin{cases} kE_0 \cos(\omega t - kx) = \omega B_0 \cos(\omega t - kx) \\ -kB_0 \cos(\omega t - kx) = \epsilon_0 \mu_0 \omega E_0 \cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \\ kE_0 = \omega B_0 \end{cases}$$

On pose $c = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ qu'on identifiera à la vitesse de la lumière dans l'étude des ondes électromagnétiques, et on en déduit

$$\omega = kc \text{ et } E_0 = cB_0$$

L'énergie électromagnétique vaut alors

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) + \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t - kx)$$

$$\text{soit } u_{em} = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

On remarque qu'il y a équipartition de l'énergie volumique entre composante électrique et composante magnétique. Le vecteur de Poynting vaut

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

On calcule les deux termes de l'équation de Poynting

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -2\epsilon_0 E_0^2 \omega \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) \\ \text{div } \vec{\Pi} = 2 \frac{E_0^2}{\mu_0 c} k \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

Ces deux termes sont bien égaux car

$$\frac{1}{\mu_0 c} = \epsilon_0 c \text{ et } \omega = kc$$

↪ **Exercices 15.4, 15.5.**

Énoncer l'ARQS et traduire les équations de Maxwell dans ce cas.

ARQS est l'acronyme de Approximation des Régimes Quasi Stationnaires. Dans l'ARQS, on suppose que la durée caractéristique τ de propagation des perturbations est négligeable devant le temps caractéristique de variation des grandeurs. On montre que sous cette hypothèse

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \vec{j}$$

Les équations s'écrivent alors

$$\begin{array}{ll} \text{M. Gauss} & \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{M. Faraday} & \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{M. Thomson} & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \text{M. Ampère} & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array}$$

Les **formes intégrales** de ces équations dans l'ARQS s'écrivent

$$\begin{array}{ll} \text{Gauss} & \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \\ \text{Faraday} & \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Flux} & \oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \text{Ampère} & \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \end{array}$$

Tous les acquis du chapitre 14 sont donc valables dans l'ARQS pour la détermination du champ magnétique avec le théorème d'Ampère. En revanche, il apparaît que le champ électrique est créé non seulement par les charges (sa divergence est proportionnelle à ρ) mais aussi par les variations de \vec{B} (son rotationnel est non nul si \vec{B} dépend du temps). Il est donc possible d'observer un champ électrique en l'absence de toute charge. Dans ce cas, on utilise les règles de calcul suivantes.

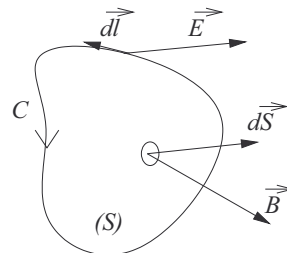
- Les variables dont \vec{E} dépend sont réduites en utilisant les propriétés d'invariance de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.
- On calcule le champ magnétique $\vec{B}(t)$ par application du théorème d'Ampère.
- \vec{E} appartient aux plans d'antisymétrie de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et est perpendiculaire aux plans de symétrie de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (c'est une conséquence de l'opérateur rotationnel qui lie \vec{E} à $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$).
- On peut calculer \vec{E} par application de l'équation locale de Maxwell-Faraday

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- On peut aussi calculer \vec{E} par application de la forme intégrale de cette équation

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Le calcul est mené comme pour le théorème d'Ampère, on choisit un contour orienté \mathcal{C} , on calcule la circulation de \vec{E} sur ce contour puis le flux de \vec{B} à travers la surface S , orientée de façon cohérente avec l'orientation de \mathcal{C} selon la règle du tire-bouchon, tendue sur \mathcal{C} .

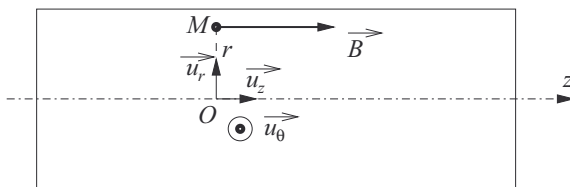


Exemple :

Un solénoïde infini comportant n spires par mètre est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ variable dans le temps. Le champ magnétique qu'il crée est nul à l'extérieur et uniforme à l'intérieur ; le résultat établi en magnétostatique est valable dans l'ARQS :

$$\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z \text{ donc } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \vec{u}_z$$

Cherchons le champ électrique en un point M repéré en coordonnées cylindriques par $\vec{OM} = r \vec{u}_r$.



Le solénoïde étant infini, il y a invariance de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ par rotation d'angle θ et par translation selon \vec{u}_z donc $\vec{E} = \vec{E}(r, t)$. Le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, \vec{E} est orthogonal à ce plan donc $\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$. En utilisant l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, on en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rE(r, t))}{\partial r} = \mu_0 n \frac{di(t)}{dt}$$

$$\text{donc } rE(r, t) = -\mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \frac{r^2}{2} + K$$

En $r = 0$, si E n'est pas infini, on obtient $K = 0$. On en déduit

$$\vec{E}(r, t) = -\mu_0 n \frac{di(t)}{dt} \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$$

↪ Exercices 15.6, 15.7.

Une initiation aux courants de Foucault. Présentons un phénomène important, *non explicitement au programme*, mais formant une synthèse remarquable des acquis de l'électromagnétisme. Lorsqu'un **bloc de métal** conducteur est soumis à un champ magnétique variable $\vec{B}(t)$, un champ électrique \vec{E} est créé dans le bloc, ce qui provoque l'apparition de courant électrique dont la densité volumique est donnée par la **loi d'Ohm locale** $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Ce sont les **courants de Foucault**.

Il y a donc dissipation d'énergie électromagnétique par effet Joule, la densité volumique de puissance associée est

$$\frac{d\mathcal{P}_1}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\vec{j}^2}{\gamma} = \gamma \vec{E}^2$$

La méthode de calcul de \vec{j} et de $\frac{d\mathcal{P}_1}{d\tau}$ est donc centrée sur la détermination du champ électrique :

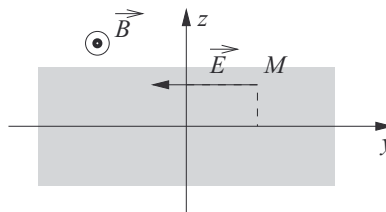
- la direction et les variables dont \vec{E} dépend sont en général donnés par l'énoncé
- on détermine \vec{E} en intégrant l'équation de Maxwell-Faraday connaissant \vec{B} (notons qu'on néglige en général le champ magnétique créé par les courants de Foucault devant le champ magnétique extérieur $\vec{B}(t)$)
- on en déduit $\vec{j} = \gamma \vec{E}$
- on calcule la puissance volumique dissipée par effet Joule, puis la puissance totale dissipée dans le bloc par intégration sur son volume, et éventuellement sa valeur moyenne en régime sinusoïdal forcé (la valeur moyenne d'un cosinus carré vaut $\frac{1}{2}$)
- on conclut sur le caractère souhaitable des courants de Foucault (freinage d'un autobus ou d'un poids lourd) ou sur l'opportunité de lutter contre eux (feuilletage du bloc).

Exemple :

L'espace situé entre $z = -a$ et $z = +a$ est occupé par un métal conducteur de conductivité γ . Il est soumis à un champ magnétique

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

devant lequel on néglige le champ magnétique créé par les courants de Foucault.



Le système est invariant par translation selon \vec{u}_x et \vec{u}_y , donc $\vec{E} = \vec{E}(z)$. En un point $M(x, y, z)$, avec $-a \leq z \leq a$, le plan (M, x, z) est plan de symétrie de $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, donc $\vec{E} = E(z)\vec{u}_y$. En coordonnées cartésiennes, l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E(z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(-B_0\omega \sin(\omega t)) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On en déduit

$$-\frac{dE}{dz} = B_0\omega \sin(\omega t)$$

$$\text{donc } E(z) = -B_0\omega \sin(\omega t)z + K$$

La valeur moyenne de \vec{E} est nulle (il n'y a pas de champ électrique permanent) donc $K = 0$. On en déduit

$$\begin{cases} \vec{E} = -B_0\omega \sin(\omega t)z\vec{u}_y \\ \vec{j} = \gamma\vec{E} = -\gamma B_0\omega \sin(\omega t)z\vec{u}_y \end{cases}$$

$$\text{donc } \frac{d\mathcal{P}_j}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) z^2$$

On en déduit la valeur moyenne

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}_j}{d\tau} \right\rangle = \frac{1}{2} \gamma B_0^2 \omega^2 z^2$$

et la puissance moyenne dissipée par effet Joule sur un cube de côté $2a$:

$$\langle \mathcal{P}_j \rangle = \int_{x=-a}^a \int_{y=-a}^a \int_{z=-a}^a \frac{1}{2} \gamma B_0^2 \omega^2 z^2 dx dy dz$$

$$\langle \mathcal{P}_j \rangle = \frac{4\gamma B_0^2 \omega^2 a^5}{3}$$

↪ Exercice 15.8, 15.9, 15.10.

Énoncés des exercices

15.1

Démonstration de la loi de conservation à partir des équations de Maxwell

Si \vec{A} est un champ vectoriel quelconque, on donne la loi d'analyse vectorielle

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$$

et la propriété de commutation de Schwartz

$$\frac{\partial(\operatorname{div} \vec{A})}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

Démontrer l'équation de conservation de charges à partir des équations de Maxwell.

15.2

Démonstration de la loi de conservation par bilan de charges

Soit Σ une surface fermée délimitant le volume \mathcal{V} . On donne la loi d'analyse vectorielle suivante, appelée théorème d'Ostrogradski :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{A} d\tau$$

On note $\rho(M, t)$ la densité volumique de charge et $\vec{j}(M, t)$ le vecteur densité volumique de courant en M à la date t .

- Exprimer la charge totale $Q(t)$ dans \mathcal{V} par une intégrale triple.
- Exprimer l'intensité totale $I(t)$ du courant qui traverse Σ par une intégrale double.
- Traduire la loi de conservation de la charge par une relation entre $Q(t)$ et $I(t)$.
- En utilisant le théorème d'Ostrogradski, en déduire la relation

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left[\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] d\tau = 0$$

- Cette relation étant valable pour tout volume \mathcal{V} , en déduire l'équation locale de conservation de la charge.

15.3

Théorème d'Ampère généralisé

Un câble cylindrique de rayon R et d'axe (O, z) , conducteur ohmique de conductivité γ , est parcouru par un courant électrique de densité volumique $\vec{j} = j(r, t)\vec{u}_z$. On note $\vec{B} = B(t)\vec{u}_\theta$ le champ magnétique à la surface de ce conducteur. Établir la relation entre $B(t)$ et l'intensité totale $i(t)$ circulant dans le câble.

15.4**Démonstration de l'équation locale de Poynting**

On donne la formule d'analyse vectorielle : si \vec{F} et \vec{G} sont deux champs vectoriels, alors

$$\operatorname{div} (\vec{F} \wedge \vec{G}) = \vec{G} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F} - \vec{F} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{G}$$

et le théorème d'Ostrogradski : si Σ est une surface fermée et \mathcal{V} le volume intérieur à cette surface, alors pour tout champ vectoriel \vec{F}

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{F} d\tau$$

- Démontrer l'équation locale de Poynting.
- Soit \mathcal{V} le volume intérieur à une surface fermée Σ . Définir les énergies

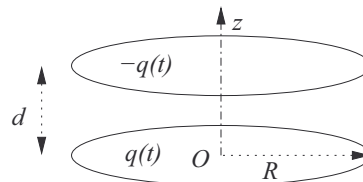
$$U_m \text{ et } U_e$$

respectivement magnétique et électrique à l'intérieur de \mathcal{V} .

- On suppose l'espace vide de charges. Établir la relation entre le flux de $\vec{\Gamma}$ sortant de Σ , U_e et U_m .
- Interpréter physiquement cette relation.

15.5**Étude électromagnétique de la charge d'un condensateur**

Un condensateur est formé de deux disques parallèles coaxiaux et de même rayon R , distants de $d \ll R$, séparés par du vide. On note $q(t)$ la charge de la plaque inférieure en $z = 0$ et $-q(t)$ la charge de la plaque supérieure en $z = d$. Les densités surfaciques de charge sont uniformes sur les plaques.



Un point M entre les plaques est repéré en coordonnées cylindriques par

$$\overrightarrow{OM} = z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$$

- a) On néglige les effets de bord, c'est-à-dire qu'on suppose que le champ électrique est le même que si les plaques étaient infinies. Donner l'expression de $\vec{E}(M, t)$.
- b) On suppose que le champ magnétique entre les plaques s'écrit

$$\vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{u}_\theta$$

Déterminer l'expression de $B(r, t)$ grâce à l'équation de Maxwell-Ampère.

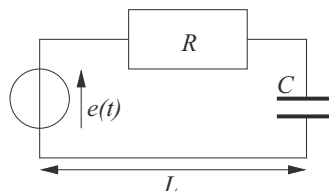
- c) Justifier que dans le modèle choisi, le condensateur est nécessairement alimenté par un générateur de courant d'intensité I constante.
- d) Vérifier la validité de l'équation locale de Poynting sous ces hypothèses.
- e) Calculer la puissance électromagnétique traversant la « bêche », c'est-à-dire le cylindre de rayon R qui ferme l'espace vide entre les plaques. Peut-on l'associer à l'énergie électrocinétique du condensateur

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C u^2(t) = \frac{q^2(t)}{2C} ?$$

15.6

ARQS dans un circuit électrique

Un circuit électrique dans une séance de travaux pratiques comporte un générateur basse fréquence fonctionnant en régime sinusoïdal de fréquence f et de période T , un résistor et un condensateur. Il mesure une trentaine de centimètres : $L \approx 0,3$ m.



On rappelle qu'en ordres de grandeur, $\left\| \frac{\partial \vec{Y}}{\partial X} \right\| \approx \frac{odg(\|\vec{Y}\|)}{odg(X)}$.

- a) Donner l'ordre de grandeur de

$$\left\| \frac{\mu_0 \vec{J}_D}{\text{rot } \vec{B}} \right\|$$

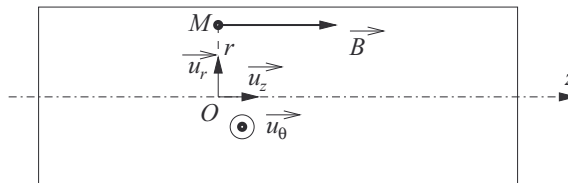
en fonction des ordres de grandeur du champ électrique E , du champ magnétique B , de L et de la période T .

- b) Donner l'ordre de grandeur de $\frac{E}{B}$ en fonction de L et de T .
- c) On pose $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, vitesse de la lumière et on admet que la vitesse de propagation des ondes de courant électrique et de tension électrique est de l'ordre de grandeur de c . Pour quelle valeur maximale de la fréquence f l'ARQS est-elle vérifiée dans ce circuit ?

15.7

Champ électrique dans un solénoïde : méthode intégrale

Un solénoïde infini comportant n spires par mètre est parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I \cos(\omega t)$ variable dans le temps. Le champ magnétique qu'il crée est nul à l'extérieur.



- a) Établir l'expression du champ magnétique $\vec{B}(t)$ à l'intérieur du solénoïde. En déduire celle de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ en fonction de μ_0, I, n, ω et t .
- b) Les symétries et invariances permettent de chercher le champ électrique sous la forme $\vec{E} = E(r, t)\vec{u}_\theta$. Le contour \mathcal{C} choisi est le cercle de centre O et de rayon r . Par application de la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer $E(r, t)$.
- c) On considère un tronçon du solénoïde de longueur D. On note R son rayon. Calculer l'énergie électrique $U_e(t)$ et l'énergie magnétique $U_m(t)$ ainsi que leurs valeurs moyennes dans le temps. On précise les densités volumiques d'énergie

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2 \text{ et } u_m = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

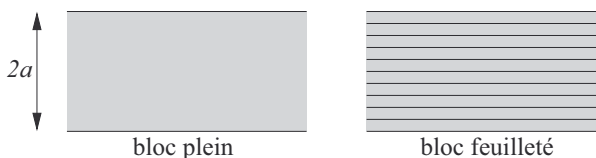
15.8

Intérêt du feuilletage

Un bloc de métal d'épaisseur $2a$ selon z , de largeur $b \gg a$ selon x et de longueur $L \gg a$ selon y est soumis à un champ magnétique variable $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{u}_x$. En reprenant le calcul détaillé dans l'exemple du cours, on démontre que la puissance moyenne dissipée par effet Joule par les courants de Foucault vaut

$$\frac{\gamma B_0^2 \omega^2 L (2a)^3}{6}$$

On feuillette le bloc en le coupant en N tranches d'épaisseur $\frac{2a}{N}$ séparées par une très mince couche d'isolant.



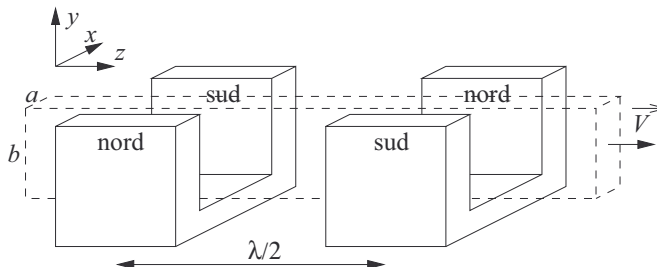
Expliquer l'intérêt de ce feuilletage.



15.9

Freinage par courants de Foucault (CCP PC 1999)

Une plaque de métal est en mouvement de translation à la vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_z$ dans un réseau d'aimants en U distants de $\frac{\lambda}{2}$.



- a) Justifier qualitativement que le champ magnétique ressenti par un point M de la plaque peut être assimilé à

$$\vec{B}(M, t) = B_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x$$

Donner les expressions de ω et de k en fonction de V et de λ .

- b) La plaque est d'épaisseur a selon x , de largeur $b \gg a$ selon y et de longueur infinie selon z . Sa conductivité est γ et on néglige le champ magnétique créé par les courants qui s'y développent devant \vec{B} . Déterminer l'expression de la densité volumique de courants de Foucault sous la forme $\vec{j} = j(x, z, t) \vec{u}_y$.
- c) En déduire la valeur moyenne de la puissance dissipée par effet Joule $\langle \frac{d\mathcal{P}_1}{dz} \rangle$ par unité de longueur selon z .
- d) Exprimer la densité volumique des forces de Laplace au sein du conducteur. En déduire la force de Laplace par unité de longueur $\frac{d\vec{F}_L}{dz}$ et la force de Laplace \vec{F}_L sur une longueur λ du dispositif.
- e) Expliquer pourquoi on parle de « freinage par courants de Foucault ». Donner un schéma de fonctionnement d'un système adapté au freinage de la roue d'un camion. Quel est l'intérêt de ce dispositif par rapport à un frein classique avec frottement d'une plaquette sur un disque ?



15.10

Chauffage par induction (E3A PSI 2004)

Un solénoïde cylindrique d'axe (O, z) de rayon r_0 comportant n spires par mètre est parcouru par un courant variable dont l'intensité est $i(t) = I \cos(\omega t)$. On admet que le champ magnétique propre créé par le solénoïde est uniforme à l'intérieur ($r < r_0$) et que le champ électrique est orthoradial :

$$\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z \text{ et } \vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$$

- a) Déterminer le champ \vec{E} à l'intérieur du solénoïde.
- b) On place un cylindre long de conductivité γ , de hauteur h et de rayon $r_1 < r_0$ à l'intérieur du solénoïde et de même axe. Déterminer la densité de courant \vec{j} créée par le champ électrique \vec{E} en supposant que son expression est celle obtenue à la première question. Quel est l'effet observable associé à ces courants ?
- c) Déterminer le champ magnétique \vec{B}_i créé sur l'axe par les courants de Foucault et donner la condition sous laquelle ce champ est négligeable devant celui créé par le solénoïde.
- d) Pourquoi le métal chauffe-t-il plus fortement à sa surface et peut-il même entrer en fusion ?

Du mal à démarrer ?

15.1 Il suffit d'éliminer \vec{B} dans l'équation de Maxwell-Ampère par composition par l'opérateur divergence.

15.2 La charge Q est l'intégrale triple de ρ dans \mathcal{V} , l'intensité I est l'intégrale double de \vec{j} à travers Σ . La sortie de la charge Idt correspond à la diminution de Q .

15.3 La relation $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ permet de faire apparaître $i(t)$ dans le terme de flux de \vec{E} dans le théorème d'Ampère généralisé.

15.4 Le calcul est bien guidé, il faut manier adroitement les équations de Maxwell.

15.5 (a) C'est une révision du cours d'électrostatique. (b) On utilise l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques. (c) L'équation de Maxwell-Faraday permet de montrer que $q''(t) = 0$. (d) On calcule $\vec{\Pi}$, sa divergence en coordonnées cylindriques, u_{em} et sa dérivée par rapport au temps, et on remarque que $\vec{j} = \vec{0}$ entre les plaques. (e) La puissance est le flux du vecteur de Poynting.

15.6 L'ordre de grandeur de $\frac{E}{B}$ est calculé à partir de l'équation de Maxwell-Faraday. La durée τ est calculée en considérant que la perturbation électrique au niveau du générateur doit parcourir L à la vitesse c pour atteindre le condensateur.

15.7 (a) Il faut revenir au chapitre 14 en cas de difficulté. (b) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est en tout point analogue au théorème d'Ampère, mais il faut ici calculer la circulation de \vec{E} et le flux de \vec{B} . (c) Un calcul d'intégrale triple permet de conclure.

15.8 Il suffit d'utiliser la formule fournie en remplaçant une plaque d'épaisseur $2a$ par N plaques d'épaisseur $\frac{2a}{N}$, puis de faire le rapport entre les puissances moyennes dissipées dans le bloc massif et le bloc feuilleté.

15.9 Les calculs sont très techniques, mais ne demandent pas de prise d'initiative particulière. Après avoir calculé $\vec{E}(x, z, t)$ par intégration de l'équation de Maxwell-Faraday, on en déduit $\vec{j}(x, z, t)$ grâce à la loi d'Ohm locale, on exprime la puissance volumique $\vec{j} \cdot \vec{E}$ et la densité volumique de force de Laplace $\vec{j} \wedge \vec{B}$.

15.10 On calcule le champ \vec{E} comme dans l'exemple du cours. On en déduit \vec{j} grâce à la loi d'Ohm locale. Le calcul de \vec{B}_i peut être mené en assimilant le cylindre de métal parcouru par des courants de Foucault orthoradiaux à un distribution de solénoïdes concentriques situés dans les tranches $[r, r + dr]$ puis en sommant les champs magnétiques qu'ils créent.

Corrigés des exercices

15.1 L'équation de conservation de la charge relie ρ , qui figure dans l'équation de Maxwell-Gauss et \vec{j} qui figure dans l'équation de Maxwell-Ampère. Il faut donc éliminer \vec{B} , on compose donc cette dernière équation avec l'opérateur divergence :

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} (\vec{j}) + \epsilon_0 \mu_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{soit } 0 = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\operatorname{div} \vec{E})}{\partial t}$$

$$\text{soit } 0 = \mu_0 \left[\operatorname{div} \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right)}{\partial t} \right]$$

ce qui donne bien l'équation de conservation de la charge après simplifications.

15.2

a) Par définition de la densité volumique de charge :

$$Q(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot d\tau$$

b) Par définition de \vec{j} :

$$I = \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

c) La charge $I dt$ qui sort de \mathcal{V} pendant dt équivaut à la diminution de dQ donc

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

d) Le théorème d'Ostrogradski permet donc d'écrire

$$-\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot d\tau \right] = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j} \cdot d\tau$$

$$\text{soit } -\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j} \cdot d\tau$$

$$\text{soit } \iiint_{\mathcal{V}} \left[\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] d\tau = 0$$

e) Cette égalité est valable pour toute surface Σ et tout volume \mathcal{V} associé. Le terme intégré est donc uniformément nul, ce qui donne bien l'équation de conservation de la charge.

15.3 Appliquons le théorème d'Ampère généralisé sur le disque \mathcal{D} de rayon R tendu sur le cercle \mathcal{C} qui enlace le câble. On a

$$i(t) = I_{\text{enlacé}} = \iint_{\mathcal{D}} \vec{j}(r, t) \cdot d\vec{S}$$

Le flux du champ électrique à travers le disque est

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_{\mathcal{D}} \vec{E}(r, t) \cdot d\vec{S} = \frac{i(t)}{Y}$$

La circulation du champ magnétique est

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(t) \cdot 2\pi r$$

On en déduit

$$B(t) \cdot 2\pi r = \mu_0 i(t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{di(t)}{dt}$$

15.4

a) Appliquons la propriété d'analyse vectorielle au vecteur de Poynting :

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} \right]$$

Les rotationnels de \vec{E} et de \vec{B} sont donnés par les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère, d'où :

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = - \left[\vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

On en déduit l'équation locale de Poynting.

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = - \left[\vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \right] \text{ avec } u_{em} = u_e + u_m$$

$$\text{et } \begin{cases} u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \\ u_m = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \end{cases}$$

b) Les énergies sont les intégrales triples des énergies volumiques, leur somme est l'énergie électromagnétique :

$$U_{em} = U_e + U_m \text{ avec } \begin{cases} U_e = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 d\tau \\ U_m = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 d\tau \end{cases}$$

c) L'application du théorème d'Ostrogradski à l'équation locale de Poynting dans le vide, donc avec $\vec{j} \cdot \vec{E} = 0$ en tout point donne :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = -\frac{dU_{em}}{dt}$$

d) C'est l'équation intégrale de Poynting. Considérons les deux cas :

- si le flux sortant de Σ est **négatif**, alors le système \mathcal{V} **reçoit** de la puissance électromagnétique : il la convertit en augmentant son énergie électrique U_e et magnétique U_m par augmentation des champs électrique et magnétique ;
- si le flux sortant de Σ est **positif**, alors le système \mathcal{V} **perd** de la puissance électromagnétique ; il y a conversion d'énergie électromagnétique en énergie rayonnée.

15.5

a) Par application du théorème de superposition, le champ électrique est la somme des champs créés par deux plaques infinies parallèles. On a montré au chapitre 13 que ce champ est $\pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z$ où σ est la densité surfacique de charge, ici $\sigma = \frac{q}{S}$ avec $S = \pi R^2$. On en déduit

$$\vec{E} = +\frac{q(t)}{2\varepsilon_0 S} \vec{u}_z - \frac{-q(t)}{2\varepsilon_0 S} \vec{u}_z$$

$$\text{soit } \vec{E} = \frac{q(t)}{\varepsilon_0 S} \vec{u}_z$$

b) L'espace entre les plaques est vide donc $\vec{j} = \vec{0}$. On exprime le rotationnel en coordonnées cylindriques et l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB(r, t))}{\partial r} \vec{u}_z = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{q'(t)}{\varepsilon_0 S} \vec{u}_z$$

$$\text{soit } \frac{\partial(rB(r, t))}{\partial r} = \frac{\mu_0 q'(t)}{S} r$$

$$\text{donc } rB(r, t) = \frac{\mu_0 q'(t)}{2S} r^2 + K$$

En $r = 0$, on obtient $K = 0$ d'où

$$B(r, t) = \frac{\mu_0 q'(t)}{2S} r$$

- c) Le champ électrique est uniforme donc son rotationnel est nul et l'équation de Maxwell-Ampère donne

$$\vec{0} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{donc } \frac{\mu_0 q''(t)}{2S} r = 0 \text{ donc } q''(t) = 0$$

soit $q'(t) = \text{Cste}$. Or l'intensité du courant qui alimente le condensateur est $i(t) = \frac{dq}{dt}$ donc elle est constante : $i(t) = I$.

- d) Le vecteur de Poynting vaut

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{q(t)}{\epsilon_0 S} \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 q'(t)}{2S} r \vec{u}_\theta$$

$$\vec{\Pi} = -\frac{q(t)q'(t)}{2\epsilon_0 S^2} r \vec{u}_r$$

On en déduit en coordonnées cylindriques

$$\text{div } \vec{\Pi} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Pi)}{\partial r} = -\frac{q(t)q'(t)}{\epsilon_0 S^2}$$

L'énergie électromagnétique volumique vaut

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

$$u_{em} = \frac{q^2(t)}{2\epsilon_0 S^2} + \frac{\mu_0 q'^2(t) r^2}{8S^2}$$

L'énergie magnétique proportionnelle à $q'(t)$ est constante donc

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \frac{\partial u_e}{\partial t} = \frac{q'(t)q(t)}{\epsilon_0 S^2}$$

L'équation locale de Poynting est donc bien vérifiée car $\vec{j} = \vec{0}$ entre les plaques et

$$-\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \text{div } \vec{\Pi}$$

- e) On calcule le flux du vecteur de Poynting à travers la bache :

$$\mathcal{P} = \int_{z=0}^d \int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{\Pi}(R, t) \cdot R d\theta dz \vec{u}_r$$

$$\mathcal{P} = -\int_{z=0}^d \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{q(t)q'(t)}{2\epsilon_0 S^2} R^2 d\theta dz$$

$$\mathcal{P} = -\frac{q(t)q'(t)\pi R^2 d}{\epsilon_0 S^2}$$

Or $S = \pi R^2$ et $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ est la capacité du condensateur donc

$$\mathcal{P} = -\frac{q(t)q'(t)d}{\epsilon_0 S} = -\frac{q(t)q'(t)}{C}$$

C'est donc l'opposé de la dérivée par rapport au temps de l'énergie emmagasinée par le condensateur :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q(t)q'(t)}{C}$$

15.6

- a) Le rotationnel étant un opérateur de dérivée première par rapport à une variable d'espace, le rapport vaut, en ordres de grandeur :

$$\left\| \frac{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}{\text{rot } \vec{B}} \right\| \approx \frac{\mu_0 \epsilon_0 \frac{E}{T}}{\frac{B}{L}}$$

soit $\left\| \frac{\mu_0 \vec{j}_D}{\text{rot } \vec{B}} \right\| \approx \mu_0 \epsilon_0 \frac{L}{T} \cdot \frac{E}{B}$

- b) L'équation de Maxwell-Faraday en ordres de grandeur donne

$$\frac{E}{L} \approx \frac{B}{T} \text{ donc } \frac{E}{B} \approx \frac{L}{T}$$

- c) On déduit de ce qui précède que

$$\left\| \frac{\mu_0 \vec{j}_D}{\text{rot } \vec{B}} \right\| \approx \frac{L^2}{c^2 T^2}$$

La durée caractéristique de propagation des perturbations électriques le long du circuit est $\tau = \frac{L}{c}$ donc

$$\left\| \frac{\mu_0 \vec{j}_D}{\text{rot } \vec{B}} \right\| \approx \left[\frac{\tau}{T} \right]^2$$

On retrouve donc que lorsque l'ARQS est vérifiée, $\tau \ll T$ entraîne que le terme de courant de déplacement $\mu_0 \vec{j}_D$ peut être négligé devant $\text{rot } \vec{B}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère. La condition s'écrit ici

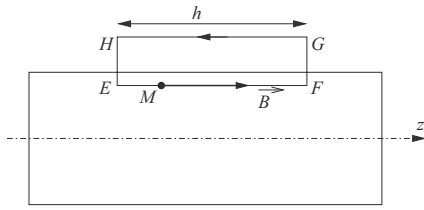
$$L \ll cT \text{ soit } L \ll \frac{c}{f}$$

$$\text{soit } f \ll \frac{c}{L} \approx 10^9 \text{ Hz}$$

Les générateurs basse fréquence des séances de TP dépassent rarement les 10 MHz, l'ARQS est donc vérifiée.

15.7

- a) La distribution de courants est invariante par rotation d'angle θ et par translation selon \vec{u}_z donc $\vec{B} = \vec{B}(r)$. Le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie des courants donc $\vec{B} = B(r)\vec{u}_z$. Le circuit d'Ampère est un rectangle (EFGH) et de longueur h arbitraire.



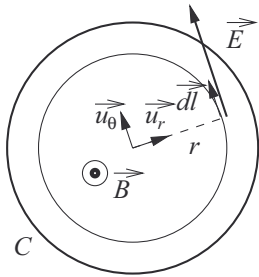
Ce circuit enlace nh spires. En utilisant la nullité du champ à l'extérieur du solénoïde, l'application du théorème d'Amperè donne

$$B \cdot h + 0 + 0 + 0 = \mu_0(nh)i \text{ donc } \vec{B} = \mu_0 ni \vec{u}_z$$

On en déduit

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 nI\omega \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

b) Voici une vue de droite du solénoïde.



La circulation du champ électrique le long de \mathcal{C} est

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E(r, t) \cdot 2\pi r$$

La surface S tendue sur \mathcal{C} est un disque de rayon r . Le flux de \vec{B} à travers S est donc

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot \pi r^2$$

L'équation intégrale de Faraday donne donc

$$E(r, t) \cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt} (B \cdot \pi r^2)$$

$$\text{soit } E(r, t) \cdot 2\pi r = \pi r^2 \cdot \mu_0 nI\omega \sin(\omega t)$$

$$\text{donc } E(r, t) = \frac{\mu_0 nI\omega r}{2} \sin(\omega t)$$

c) On intègre les énergies volumiques sur l'espace. Pour l'énergie électrique :

$$U_e(t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^D$$

$$\frac{\mu_0^2 n^2 I^2 \omega^2 r^2}{4} \sin^2(\omega t) r dr d\theta dz$$

$$U_e(t) = \frac{\epsilon_0 \mu_0^2 \pi n^2 I^2 \omega^2 R^4}{16} \sin^2(\omega t) \cdot 2\pi D$$

Sa valeur moyenne est

$$\langle U_e \rangle = \frac{\epsilon_0 \mu_0^2 \pi^2 n^2 I^2 \omega^2 R^4 D}{16}$$

Pour l'énergie magnétique :

$$U_m(t) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^D \mu_0^2 n^2 I^2 \cos^2(\omega t) r dr d\theta dz$$

$$U_m(t) = \frac{\mu_0 \pi n^2 I^2 R^2}{2} \cos^2(\omega t) \cdot 2\pi D$$

Sa valeur moyenne est

$$\langle U_m \rangle = \frac{\mu_0 \pi^2 n^2 I^2 R^2 D}{2}$$

15.8

Pour le même volume de métal, la puissance dissipée par effet Joule est

$$\mathcal{P}' = N \times \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 L \left(\frac{2a}{N}\right)^3}{6} = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 L (2a)^3}{6 N^2}$$

La puissance décroît donc avec le carré de N , d'où l'intérêt du feuilletage.

15.9

a) Par mouvement relatif, à z fixé, un point M de la plaque est placé dans les champs successifs et alternatifs des aimants qui semblent se succéder à la vitesse $-\vec{V}$. La période temporelle T de variation de \vec{B} est le temps qui sépare le passage devant deux aimants dans le même sens. Il y en a un tous les λ donc

$$T = \frac{\lambda}{V} \text{ donc } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi V}{\lambda}$$

À t fixé, le champ magnétique est aussi une fonction périodique de z , de période spatiale la longueur d'onde λ donc

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- b) On peut justifier la forme proposée pour \vec{j} . Il y a invariance de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ par translation selon y donc $\vec{E} = \vec{E}(x, z, t)$. Le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donc $\vec{E} = E(x, z, t)\vec{u}_y$, et par proportionnalité $\vec{j} = j(x, z, t)\vec{u}_y$. Appliquons l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ j(x, z, t) \\ 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -B_0 \omega \sin(\omega t + kz) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} -\frac{\partial j(x, z, t)}{\partial z} = \gamma B_0 \omega \sin(\omega t + kz) \\ \frac{\partial j(x, z, t)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } j(x, z, t) = j(z, t) = \gamma B_0 \frac{\omega}{k} \cos(\omega t + kz) + K$$

La valeur moyenne de \vec{j} est nulle (il n'y a pas de courants permanents) donc $K = 0$ et $\frac{\omega}{k} = V$

$$\text{donc } \vec{j}(z, t) = \gamma V B_0 \cos(\omega t + kz)\vec{u}_y$$

- c) La puissance volumique dissipée par effet Joule est

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\vec{j}^2}{\gamma} = \gamma B_0^2 V^2 \cos^2(\omega t + kz)$$

On en déduit par intégration sur $x \in [0, a]$ et $y \in [0, b]$

$$\frac{d\mathcal{P}_1}{dz} = ab\gamma B_0^2 V_0^2 \cos^2(\omega t + kz)$$

Sa valeur moyenne est donc

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}_1}{dz} \right\rangle = \frac{ab\gamma B_0^2 V_0^2}{2}$$

- d) La densité volumique des forces de Laplace est

$$\vec{j} \wedge \vec{B} = \gamma V B_0 \cos(\omega t + kz)\vec{u}_y \wedge B_0 \cos(\omega t + kz)\vec{u}_x$$

$$\vec{j} \wedge \vec{B} = -\gamma V B_0^2 \cos^2(\omega t + kz)\vec{u}_z$$

et en intégrant sur $x \in [0, a]$ et $y \in [0, b]$:

$$\vec{\frac{d\vec{F}_L}{dz}} = -ab\gamma V B_0^2 \cos^2(\omega t + kz)\vec{u}_z$$

On intègre sur $z \in [0, \lambda]$:

$$\vec{F}_L = \int_{z=0}^{\lambda} -ab\gamma V B_0^2 \cos^2(\omega t + kz) dz \vec{u}_z$$

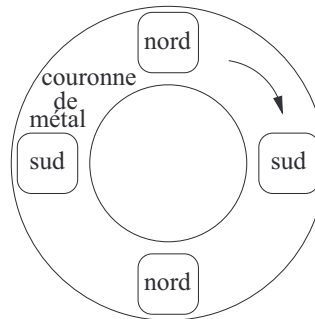
$$\vec{F}_L = -ab\gamma V B_0^2 \vec{u}_z \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2\omega t + \frac{4\pi}{\lambda}z\right) \right]_{z=0}^{\lambda}$$

$$\vec{F}_L = -\frac{1}{2} ab\lambda \gamma V B_0^2 \vec{u}_z$$

- e) La force de Laplace est donc assimilable à une force de frottement fluide

$$\vec{F}_L = -h\vec{V}$$

et elle opère un freinage de la plaque. Pour le freinage d'une roue, on rend celle-ci solidaire d'une couronne en mouvement de rotation qui se déplace entre des aimants.



L'énergie est dissipée par effet Joule dans la plaque de métal. Il n'y a donc pas d'usure mécanique de plaquette de frein et de disque, ce qui assure une longévité plus importante au dispositif, et écarte la possibilité d'une inflammation de la plaquette.

15.10

- a) Par application de la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday sur un contour circulaire de rayon r :

$$2\pi r \cdot E(r, t) = -\frac{d}{dt} (\pi r^2 \cdot \mu_0 n i(t))$$

$$\text{donc } \vec{E}(r, t) = \frac{\mu_0 n I \omega r}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

- b) Par application de la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma \mu_0 n I \omega r}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

On observe un échauffement du cylindre par effet Joule.

- c) On peut assimiler cette distribution de courants à des solénoïdes superposés. La contribution au champ magnétique de la couche $[r, r + dr]$ est celle d'un solénoïde dont la densité surfacique de courant orthoradial est

$$dj_s = j(r) \cdot dr$$

Il crée donc un champ élémentaire

$$\vec{dB}_i = \mu_0 dj_s \vec{u}_z \text{ donc } \vec{B}_i = \int_{r=0}^{r_1} \mu_0 \vec{u}_z \frac{\gamma \mu_0 n I \omega r}{2} \sin(\omega t) dr$$

$$\text{soit } \vec{B}_i = \mu_0 \frac{\gamma \mu_0 n I \omega r_1^2}{4} \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

Chapitre 15 Équations de Maxwell

Le rapport des amplitudes des deux champs magnétiques est

$$\frac{B_i}{B} = \frac{\mu_0 \gamma \omega r_1^2}{4}$$

Le champ \vec{B}_i est donc négligeable si

$$r_1 \ll \sqrt{\frac{4}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

La quantité $\sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ est appelée épaisseur de peau.

- d) La puissance dissipée par effet Joule croît comme r^2 , et entraîne l'échauffement puis la fusion du métal sur sa couche périphérique.

Cinquième partie

Physique des ondes

CHAPITRE 16

Équation de d'Alembert

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Ondes sur une corde vibrante.
- ◇ Équation de d'Alembert.
- ◇ Célérité.
- ◇ Onde longitudinale, onde transversale.
- ◇ Onde progressive harmonique, onde stationnaire harmonique.
- ◇ Vecteur d'onde, vitesse de phase.
- ◇ Théorème de superposition.
- ◇ Conditions aux limites.
- ◇ Corde vibrante, corde de Melde.
- ◇ Onde dans un câble coaxial.
- ◇ Réflexion sur une impédance terminale.
- ◇ Onde sonore dans un fluide.
- ◇ Approximation acoustique.
- ◇ Densité d'énergie sonore, densité de courant énergétique.
- ◇ Intensité acoustique, impédance acoustique.
- ◇ Onde sonore sphérique.
- ◇ Effet Doppler.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Établir une équation de d'Alembert.
- ◇ Expliciter les solutions progressives et stationnaires harmoniques de l'EDA.
- ◇ Exploiter les conditions initiales et/ou aux limites pour résoudre l'EDA.
- ◇ Caractériser propagation et réflexion d'une onde électrique sur une impédance terminale.
- ◇ Savoir établir les équations linéarisées et en déduire l'EDA des ondes sonores.
- ◇ Connaître et articuler les grandeurs énergétiques sonores.
- ◇ Décrire l'onde sonore sphérique.

Les méthodes à retenir

Établir une équation de d'Alembert.

L'équation de d'Alembert (EDA en abrégé) qui régit une grandeur physique G dépendant de l'espace (M) et du temps (t) s'écrit

$$(EDA) : \Delta G(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(M, t)}{\partial t^2} = 0$$

où $\Delta G(M, t)$ est le Laplacien et c homogène à une vitesse. Dans le cas (fréquent) où G ne dépend que d'une variable de position x , l'équation de d'Alembert unidirectionnelle s'écrit

$$\frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Pour **établir** cette équation, on applique les règles suivantes.

- On applique les lois du domaine de la physique concernée, mécanique du point, thermodynamique, mécanique des fluides, électromagnétisme, etc.
- On travaille par éléments infinitésimaux, entre t et $t + dt$, sur un élément situé entre x et $x + dx$, et on effectue le développement limité à l'ordre 1 ou 2 :

$$G(x + dx, t) \simeq G(x, t) + \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} \cdot \frac{(dx)^2}{2}$$

$$G(x, t + dt) \simeq G(x, t) + \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial t^2} \cdot \frac{(dt)^2}{2}$$

- Très souvent, deux grandeurs sont couplées et on obtient un système d'équations aux dérivées partielles du type

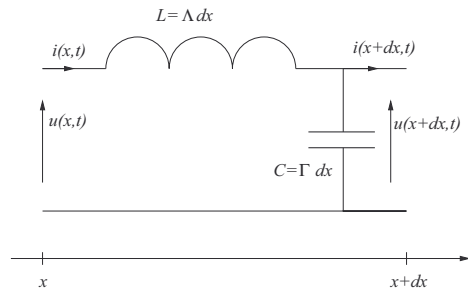
$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial t} = -\beta \frac{\partial H}{\partial x}$$

- On en déduit l'équation de d'Alembert en appliquant le théorème de Schwartz :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}$$

Exemple :

Le montage électrique suivant modélise un tronçon $[x, x + dx]$ d'une ligne électrique sans perte, Λ est l'inductance linéique et Γ la capacité linéique.



Les deux équations électriques sont la loi des nœuds et la loi des mailles.

$$\begin{cases} u(x, t) = \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + u(x + dx, t) \\ i(x, t) = i(x + dx, t) + \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} \end{cases}$$

Remarquons que

$$\Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} \simeq \Gamma dx \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cdot dx \right]$$

$$\text{donc } \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} \simeq \Gamma dx \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

en négligeant le terme du second ordre en dx . En divisant les deux relations par dx et en effectuant les développements limités au premier ordre en dx , on obtient le système d'équations aux dérivées partielles couplées en $u(x, t)$ et $i(x, t)$:

$$-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad -\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

On élimine $i(x, t)$ entre ces deux équations en dérivant la première par rapport à x et la seconde par rapport à t :

$$-\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \Lambda \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x \partial t} \quad \text{et} \quad -\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t \partial x} = \Gamma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

En utilisant le théorème de Schwartz, on en déduit

$$-\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -\Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\text{soit (EDA)} \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

C'est bien l'équation de d'Alembert avec $\frac{1}{c^2} = \Lambda \Gamma$.

Expliciter les solutions progressives et stationnaires harmoniques de l'EDA.

Les deux familles les plus courantes de solution de l'EDA unidirectionnelle sont :

- l'onde progressive

$$G(x, t) = g\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$$

- et en particulier l'onde progressive harmonique

$$G(x, t) = A \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \text{ ou } \underline{G}(x, t) = A e^{i\varphi} e^{i(\omega t \pm kx)}$$

en grandeur complexe, qui se propage à la célérité c

- l'onde stationnaire $G(x, t) = f(x) \cdot h(t)$ qui, si elle vérifie l'EDA est nécessairement une **onde stationnaire harmonique**

$$G(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

Les ondes progressive et stationnaire harmoniques vérifient toutes deux l'équation de dispersion $\omega = kc$ et présentent la **double périodicité**, spatiale de longueur d'onde λ et temporelle de période T , associées respectivement à la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et au vecteur d'onde $\vec{k} = \pm \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_x$. L'équation de dispersion entraîne la relation $\lambda = cT$. Il est important de savoir établir rapidement toutes ces propriétés.

Exemple :

L'établissement de la relation de dispersion peut être faite

- en grandeurs complexes pour l'onde progressive harmonique :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \underline{G}}{\partial x^2} = (\pm ik) \cdot (\pm ik) \underline{G} = -k^2 \underline{G} \\ \frac{\partial^2 \underline{G}}{\partial t^2} = (i\omega) \cdot (i\omega) \underline{G} = -\omega^2 \underline{G} \end{cases} \Rightarrow -k^2 \underline{G} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2) \underline{G} = 0$$

$$\text{donc } \omega^2 = k^2 c^2 \text{ et } \omega = kc$$

- en grandeurs réelles pour l'onde stationnaire harmonique :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \\ \frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \end{cases}$$

$$\text{donc } -k^2 G(x, t) + \frac{1}{c^2} \omega^2 G(x, t) = 0$$

$$\text{donc } \omega^2 = k^2 c^2 \text{ et } \omega = kc$$

↪ Exercices 16.4, 16.5, 16.6.

Exploiter les conditions initiales et/ou aux limites pour résoudre l'EDA.

La traduction des **conditions initiales** (connaissance de l'état vibratoire à $t = 0$ le long du système) et des **conditions aux limites** est parfois plus difficile que la résolution de l'EDA elle-même. Les deux conditions aux limites les plus fréquentes sont :

- l'absence de vibration à une abscisse donnée imposant un nœud de vibration ;
- l'application par un exciteur d'une vibration harmonique imposée en un point d'abscisse donnée.

L'existence de conditions aux limites conduit à chercher une solution stationnaire harmonique, elles permettent de déterminer un ou plusieurs des paramètres :

- la pulsation si elle est imposée par l'exciteur ;
- la phase temporelle φ si elle est imposée par l'exciteur ;
- la phase spatiale ψ (on peut la fixer, le modulo est inutile) ;
- l'amplitude (qui conduit à des études de résonance) ;
- une relation de quantification (qui conduit à une étude spectrale).

Exemple :

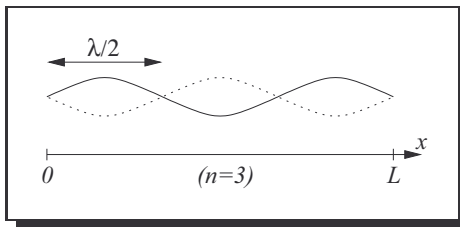
Une corde de longueur L est fixée à ses deux extrémités. Ses vibrations transversales de faible amplitude décrites par $y(x, t)$ sont régies par une EDA avec une célérité $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ où T est la tension (homogène) de la corde et μ sa masse linéique. La solution stationnaire harmonique vérifie les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \forall t, A \cos(\omega t + \varphi) \cos(0 + \psi) = 0 \\ \forall t, A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kL + \psi) = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \cos \psi = 0 \text{ et } \psi = -\frac{\pi}{2} \text{ par exemple}$$

$$\text{et } \cos\left(kL - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ soit } \sin(kL) = 0$$

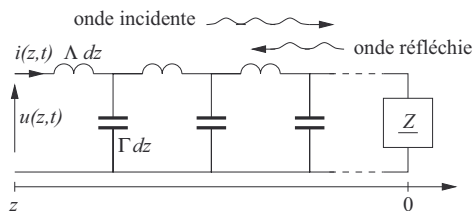
donc $kL = n\pi$ où n est un entier naturel non nul, soit $L = n\frac{\lambda}{2}$. La corde présente donc n lobes de vibration, les nœuds qui les délimitent sont distants de $\frac{\lambda}{2}$. Or $\omega = kc$ donc $\omega = \frac{n\pi c}{L}$ et la fréquence est quantifiée $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n c}{2L}$. Le spectre ne présente donc que des multiples entiers de la fréquence fondamentale $f_1 = \frac{c}{2L}$, ce qui est caractéristique des signaux périodiques du temps.



↪ Exercices 16.7, 16.8, 16.9, 16.10.

Caractériser propagation et réflexion d'une onde électrique sur une impédance terminale.

Un élément de longueur dz d'un câble coaxial sans perte est modélisé par une inductance Λdz et une capacité Γdz . On montre (voir l'exemple du premier paragraphe) qu'une onde électrique couplant tension $u(z, t)$ et intensité $i(z, t)$ se propage à la célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$. Si une onde se propage dans le sens des z croissants et qu'on place en bout de ligne en $z = 0$ un dipôle d'impédance \underline{Z} , alors une onde réfléchie est créée, et se propage dans le sens des z décroissants.



La méthode générale pour l'étude de la réflexion d'une onde est la suivante :

- on exprime les ondes de tension incidente \underline{u}_i et réfléchie \underline{u}_r en formalisme complexe en mettant en évidence les amplitudes complexes \underline{U}_i et \underline{U}_r ;
- on en déduit les ondes de courant incidente \underline{i}_i et réfléchie \underline{i}_r en formalisme complexe grâce à l'**impédance caractéristique de ligne** \underline{Z}_c ;
- on exprime la tension $\underline{u}(0, t)$ par superposition des ondes incidente et réfléchie en $z = 0$;
- on exprime l'intensité $\underline{i}(0, t)$ par superposition des ondes incidente et réfléchie en $z = 0$;
- on applique la loi d'Ohm généralisée $\underline{u}(0, t) = \underline{Z}i(0, t)$;
- en simplifiant la relation et en la divisant par \underline{U}_i , on en déduit le **coefficient de réflexion en tension**

$$r_u = \frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_i}$$

Exemple :

L'onde incidente et l'onde réfléchie de tension s'écrivent

$$\underline{u}_i = \underline{U}_i e^{j(\omega t - kx)} \text{ et } \underline{u}_r = \underline{U}_r e^{j(\omega t + kx)}$$

La relation de dispersion $\omega = kc$ et la relation entre les dérivées partielles $-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$ donnent

$$\begin{cases} jk\underline{u}_i = \Lambda j\omega \underline{i}_i \\ -jk\underline{u}_r = \Lambda j\omega \underline{i}_r \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \frac{\underline{u}_i}{\underline{i}_i} = \Lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \\ \frac{\underline{u}_r}{\underline{i}_r} = -\Lambda c = -\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \end{cases}$$

L'impédance de ligne est réelle : $\underline{Z}_c = R_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$. En $z = 0$, la loi d'Ohm généralisée s'écrit

$$(\underline{u}_i(0, t) + \underline{u}_r(0, t)) = \underline{Z}(\underline{i}_i(0, t) + \underline{i}_r(0, t))$$

$$\text{soit } (\underline{U}_i + \underline{U}_r) e^{j\omega t} = \underline{Z} \left(\frac{\underline{U}_i}{R_c} - \frac{\underline{U}_r}{R_c} \right) e^{j\omega t}$$

$$\text{donc } R_c (\underline{U}_i + \underline{U}_r) = \underline{Z} (\underline{U}_i - \underline{U}_r)$$

et en divisant par \underline{U}_i :

$$R_c(1 + r) = \underline{Z}(1 - r) \text{ donc } r = \frac{\underline{Z} - R_c}{\underline{Z} + R_c}$$

↪ **Exercices 16.11, 16.12, 16.13.**

Savoir établir les équations linéarisées et en déduire l'EDA des ondes sonores.

L'EDA pour les ondes sonores est établie à partir d'un système de trois relations.

- Équation mécanique (M) pour la particule de fluide, son accélération étant identifiée à $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ si $v \ll c$
- Loi (C) de conservation de la masse
- Équation (S) thermodynamique.

Elles relient trois grandeurs :

- vitesse de la particule de fluide \vec{v}
 - pression P
 - masse volumique μ .
- L'**approximation acoustique** consiste à linéariser les équations en négligeant les termes du second ordre, ce qui se traduit par une règle simple : 1+1=2, ou le produit de deux termes d'ordre 1, quels qu'ils soient, est du second ordre.

On définit ainsi

$$\vec{v} = v_1 \vec{u}_x, P = P_0 + p_1, \mu = \mu_0 + \mu_1$$

et on linéarise les trois équations

$$(M) : \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} P, (C) : \text{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0, (S) : \chi_S = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P}$$

Le poids est négligé devant les forces de pression et χ_S désigne le **coefficient de compressibilité isentropique**. L'établissement de l'EDA est alors une classique élimination de μ d'abord, puis de v_1 en utilisant la relation $\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} = \Delta$. On obtient

$$\Delta p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$$

Exemple :

Le développement et la linéarisation des équations donne

$$(M) : (\mu_0 + \mu_1) \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} (P_0 + p_1)$$

$$\text{donc } \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} (p_1)$$

$$(C) : \text{div}((\mu_0 + \mu_1) \vec{v}_1) + \frac{\partial(\mu_0 + \mu_1)}{\partial t} = 0$$

$$\text{donc } \mu_0 \text{div } \vec{v}_1 + \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = 0$$

$$(S) : (\mu_0 + \mu_1) \chi_S \frac{\partial(P_0 + p_1)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu_0 + \mu_1)}{\partial t}$$

$$\text{donc } \mu_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial \mu_1}{\partial t}$$

On élimine $\frac{\partial \mu_1}{\partial t}$ entre (S) et (C) puis on simplifie par μ_0 , d'où le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} (M) : \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} (p_1) \\ (CS) : \text{div } \vec{v}_1 = -\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\text{donc } \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 \text{div} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} (p_1) = -\Delta p_1 \\ \frac{\partial \text{div } \vec{v}_1}{\partial t} = -\chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

Le théorème de Schwartz permet d'identifier

$$\operatorname{div} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \frac{\partial \operatorname{div} \vec{v}_1}{\partial t}$$

d'où l'EDA vérifiée par p_1 :

$$\Delta p_1 = \mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

↪ Exercices 16.14, 16.15, 16.16, 16.17, 16.18, 16.19.

Connaître et articuler les grandeurs énergétiques sonores.

Le raisonnement développé pour mettre en exergue les grandeurs énergétiques sonores n'est pas exigible, il est détaillé dans l'exercice 16.22. Il est conseillé de le connaître, c'est un modèle pour tous les autres types d'onde, car toute onde transporte de l'énergie.

- Le vecteur **densité de courant énergétique sonore** appelé aussi **vecteur de poynting sonore** est

$$\vec{\Pi}_{\text{son}} = p_1 \vec{v}_1$$

Il a le sens et la direction du flux de puissance, il est exprimé en joule par seconde et par mètre carré, ou en watt par mètre carré.

- La puissance reçue par une membrane de surface \mathcal{S} est

$$\mathcal{P} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi}_{\text{son}} \cdot \vec{dS}$$

- L'**intensité acoustique** est

$$I_{dB} = 10 \log \frac{\langle \|\vec{\Pi}\rangle}{\Pi_0} \text{ avec } \Pi_0 = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

- La **densité volumique d'énergie sonore** est

$$u_{\text{son}} = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} \chi_S p_1^2$$

Le premier terme est une énergie volumique cinétique, le second une énergie potentielle de compression. u_{son} est exprimé en joule par mètre cube.

Exemple :

Une membrane de surface $S = 100 \text{ cm}^2$ vibre dans l'air assimilé à un gaz parfait diatomique ($\gamma = 1,4$) de masse molaire $M = 29,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, de masse volumique au repos $\mu_0 = 1,18 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ à $T_0 = 300 \text{ K}$ à la fréquence $f = 200 \text{ Hz}$. La célérité du son est $c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} = 347 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\chi_S = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 7,04 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$. Sa puissance acoustique moyenne émise est $\mathcal{P} = 10 \text{ W}$ et on assimile l'onde sonore à une onde plane harmonique se propageant seulement d'un côté de la membrane, sur l'axe (O, x) et sur une surface constamment égale à S . On en déduit

$$p_1(x, t) = P_1 \cos \left[2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

$$\text{avec } \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \vec{u}_x$$

$$\text{donc } \vec{v}_1 = \frac{P_1}{\mu_0 c} \cos \left[2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{u}_x$$

Le vecteur de Poynting sonore vaut donc

$$\vec{\Pi}_{\text{son}} = \frac{P_1^2}{\mu_0 c} \cos^2 \left[2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{u}_x$$

$$\text{donc } \langle \mathcal{P} \rangle = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle S = \frac{P_1^2 S}{2\mu_0 c}$$

car la valeur moyenne d'un cosinus carré vaut $\frac{1}{2}$. On en déduit l'intensité acoustique

$$I_{\text{dB}} = 10 \log \frac{\langle \mathcal{P} \rangle / S}{\Pi_0} = 150 \text{ dB}$$

et les amplitudes

$$\begin{cases} P_1 = \sqrt{\frac{2\langle \mathcal{P} \rangle \mu_0 c}{S}} = 905 \text{ Pa} \\ V_1 = \frac{P_1}{\mu_0 c} = 2,21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

On en déduit la valeur moyenne de l'énergie sonore

$$\langle u_{\text{son}} \rangle = \frac{1}{4} \mu_0 V_1^2 + \frac{1}{4} \chi_S P_1^2 = 1,44 + 1,44 = 2,88 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

↪ Exercices 16.20, 16.21, 16.22.

Décrire l'onde sonore sphérique.

Une sphère pulsante de centre O émet une onde sphérique invariante par rotations d'angle θ et φ . La recherche d'une solution de l'EDA du type $p_1(r, t)$ conduit à l'équation

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r p_1(r, t))}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1(r, t)}{\partial t^2} = 0 \text{ soit } \frac{\partial^2(r p_1(r, t))}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r p_1(r, t))}{\partial t^2} = 0$$

On en déduit la solution progressive pseudo-harmonique (son amplitude décroît avec r) :

$$p_1(r, t) = \frac{A}{r} \cos[\omega(t - kr)] \text{ avec } \omega = kc$$

Exemple :

L'onde de vitesse associée à l'onde pseudo-harmonique de pression est déterminée en intégrant l'équation mécanique :

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \text{grad } p_1 = -\frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\vec{v}_1 = \frac{A}{\mu_0 \omega} \left[\frac{1}{r^2} \sin(\omega t - kr) + \frac{k}{r} \cos(\omega t - kr) \right] \vec{u}_r$$

C'est donc une onde longitudinale, mais contrairement à l'onde plane, elle n'est pas proportionnelle à la pression, on ne peut donc pas définir d'impédance acoustique dans ce cas.

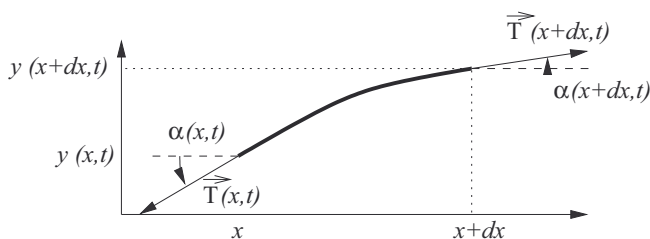
↔ Exercices 16.23, 16.24.

Énoncés des exercices

16.1

Équation de d'Alembert pour la corde vibrante

Un tronçon de corde horizontale $[x, x + dx]$, dont la tension à une de ses extrémités est T_0 , de masse linéique μ , est animée d'un mouvement transversal de faible amplitude selon y modélisé par $y(x, t)$. On note $T(x, t)$ la tension au point d'abscisse x et $\alpha(x, t)$ l'angle d'inclinaison de la corde par rapport à l'axe horizontal. On fera l'approximation des petits angles et on négligera le poids devant les forces de tension.

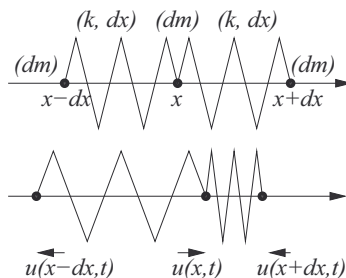


- Justifier que $\alpha(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$.
- Montrer que $T(x, t) = T_0$.
- Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par $y(x, t)$ et préciser l'expression de c en fonction de T_0 et μ .
- L'alimentation électrique d'un train est assurée par le contact entre le cable horizontal appelé caténaire et un contacteur appelé pantographe qui soulève à son passage le caténaire d'une trentaine de centimètres. La tension de la caténaire est $T = 2,6 \cdot 10^4$ N, elle est en cuivre de masse volumique $\mu_{Cu} = 8900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et sa section est $S = 150 \text{ mm}^2$. On estime que la vitesse du TGV ne doit pas dépasser 97% de la célérité c des ondes de vibration transversale de la caténaire. Déterminer la vitesse correspondante, et expliquer le terme « mur de la caténaire ». *Le record de vitesse du TGV du 3 avril 2007 est $v = 574,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.*

16.2

Équation de d'Alembert pour la vibration longitudinale dans un solide

Une tige solide selon x , de section S , de masse volumique μ , est modélisée par une chaîne d'oscillateurs mécaniques. Une masselotte de masse $\mu S dx$ est à l'abscisse x au repos et à l'abscisse $x + u(x, t)$ au passage d'une onde de vibration longitudinale. Elle est reliée aux deux masselottes voisines, d'abscisses au repos $x - dx$ et $x + dx$, par deux ressorts de longueur à vide dx et de raideur $k = \frac{ES}{dx}$ où E est le **module d'Young** du matériau. On négligera toutes les autres forces devant celles exercées par les ressorts.

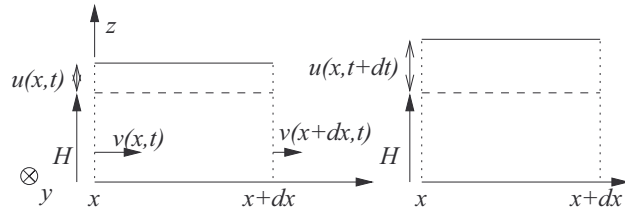


- Quelle est l'unité et à quelle grandeur le module d'Young est-il homogène ? Pourquoi le qualifie-t-on de module d'« élasticité » ?
- Écrire la loi de la quantité de mouvement sur la masselotte centrale.
- Par un développement limité au second ordre, en déduire l'équation de d'Alembert vérifiée par $y(x, t)$ et préciser l'expression de c en fonction de E et μ .

16.3

Équation de d'Alembert pour les vagues en faible profondeur

Dans un bassin de largeur L selon y , de longueur infinie selon x et de profondeur moyenne H selon l'axe z orienté vers le haut, l'origine étant au fond du bassin, l'eau est assimilée à un fluide incompressible, parfait, de masse volumique μ . Au passage d'une vague homogène sur la largeur du bassin, on cherche le champ des vitesses sous la forme $\vec{v}(x, t) = v(x, t)\vec{u}_x$ et le champ des pressions sous la forme $P(x, z, t)$. On note P_0 la pression dans l'air. Le niveau de l'eau à l'abscisse x à la date t est $z(x, t) = H + u(x, t)$. On travaille sur la tranche d'eau située entre x et $x + dx$, en régime non permanent entre t et $t + dt$.



a) Commenter la relation suivante :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx -\vec{\text{grad}} P + \mu \vec{g}$$

- b) En déduire la relation (PU) entre $P(x, z, t)$, z et $u(x, t)$, puis la relation (PV) entre $\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial P(x, z, t)}{\partial x}$.
- c) Déduire de (PU) et (PV) la relation entre $\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$.
- d) Par un bilan de masse (en régime non stationnaire ici) sur la tranche de fluide, en supposant $u(x, t) \ll H$, établir la relation entre $\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$.
- e) En déduire l'équation de d'Alembert vérifiée par $u(x, t)$ et préciser l'expression de c en fonction de g et H .
- f) Expliquer pourquoi une vaguelette qui se propage vers le rivage ralentit.
- g) Expliquer pourquoi une grosse vague qui se propage dans un bassin de profondeur constante se déforme et déferle.



16.4

Chaînette

Une corde inextensible de masse linéique λ est accrochée à ses deux extrémités, elle est parfaitement immobile et soumise au champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g \vec{u}_z$. On étudie un tronçon de corde de longueur ds (s s'appelle l'abscisse curviligne) situé entre les abscisses x et $x + dx$ et on utilise les deux variables habituelles : l'angle d'inclinaison $\alpha(x)$ est l'angle entre l'horizontale et la tangente à la corde et $T(x)$ est la tension de la corde. On ne fait pas l'hypothèse des petits angles.

- a) Faire un schéma.
- b) Justifier que $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ et que $\tan \alpha = \frac{dz}{dx}$.
- c) Traduire l'équilibre du tronçon de corde. En déduire :
 - i) que $T(x) \cos \alpha(x)$ est une constante qu'on notera T_0
 - ii) que $T_0 \frac{d(\tan \alpha)}{dx} = \lambda g \frac{ds}{dx}$.
- d) Déduire de ce qui précède l'équation différentielle $T_0 \frac{d^2 z}{dx^2} = \lambda g \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$
- e) On pose $u = \frac{dz}{dx}$. Écrire et résoudre l'équation en u .
- f) En déduire que z est une fonction cosinus hyperbolique de x comportant deux constantes d'intégration (on ne les cherchera pas mais on pourra préciser à partir de quelles données on les trouverait). *Remarque : la notation ch pour le cosinus hyperbolique correspond aux deux premières lettres du mot chaînette, mais ce n'est qu'un pur hasard...*



16.5

Caractère harmonique de la solution stationnaire de l'EDA

On cherche une solution stationnaire sous la forme $G(x, t) = f(x)h(t)$ de l'EDA.

- a) Montrer que l'EDA s'écrit sous la forme de l'égalité d'une fonction de x seul à une fonction de t seul et en déduire que ces deux quantités sont égales à une même constante.
- b) En éliminant l'autre cas, montrer que le signe de cette constante est fixé et qu'on peut mettre l'équation en f sous la forme

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0$$

- c) Finir la résolution et en déduire la forme générale de la solution.



16.6

Décomposition réciproque des solutions harmoniques progressive et stationnaire

On rappelle les relations trigonométriques

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et } \cos(p + q) + \cos(p - q) = 2 \cos p \cos q$$

- a) Justifier qu'une solution stationnaire harmonique est la somme de deux solutions progressives harmoniques de l'EDA.
- b) Justifier qu'une solution progressive harmonique est la somme de deux solutions stationnaires harmoniques de l'EDA.

16.7

S'accorder (résolution de problème)

« S'accorder » est devenu un terme générique en musique pour tout instrument dont on cherche à régler la fréquence conformément à une référence commune. Ce terme est historiquement réservé aux instruments à cordes, violon, alto, violoncelle, contrebasse, guitare en particulier. Pour ces cinq instruments, on dispose d'une cheville qu'on tourne pour changer la tension de la corde. Expliquer comment cette action change la hauteur du son entendu, en s'appuyant sur des relations explicites entre les différents paramètres.

16.8

Corde de Melde

La **corde de Melde** est de longueur L , son extrémité en $x = 0$ est excitée par un vibreur qui impose

$$y(0, t) = Y_0 \cos(\omega t)$$

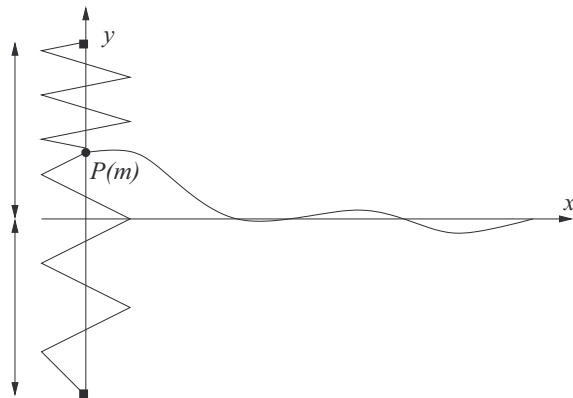
et son autre extrémité est fixe.

- Déterminer le plus complètement possible la solution stationnaire harmonique de l'EDA.
- Montrer qu'une résonance d'amplitude est observée pour certaines valeurs de la pulsation ω .

16.9

Excitation de l'extrémité d'une corde par un jeu de ressorts

Une corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0 et vibre dans le plan horizontal, on néglige les effets de la pesanteur. À son extrémité gauche, le point P de masse m , se déplace sans frottement sur l'axe (O, y) . Il est relié à deux ressorts de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur K . On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$, $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ et $\lambda = \frac{T_0}{2mc\omega_0}$.



À $t = 0$, la corde est confondue avec (O, x) et la vitesse initiale de P est $\dot{y}(0) = v_0$. Étudier le mouvement de P et tracer l'allure de la forme de la corde à la date t .

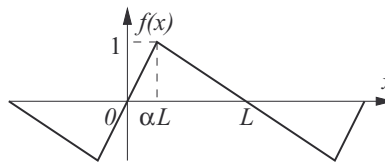


16.10

Timbre d'un élastique pincé

On tend une corde de longueur L , de masse linéique μ avec la tension T_0 . Cette corde est fixée entre ses deux extrémités O et A . On néglige les effets de la pesanteur. On la "pince" en un point P d'abscisse $x_P = OP = \ell$, c'est-à-dire qu'on écarte P de l'axe horizontal jusqu'à l'ordonnée $y_{P0} = h$, les deux brins de corde PO et PA formant deux segments droits, et on lâche à $t = 0$.

- a) Chercher une solution sous la forme d'une superposition d'ondes stationnaires du type $y_n(x, t) = Y_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$ où n est un entier de quantification.
- b) Le théorème de Fourier permet de décomposer tout signal temporel périodique, mais aussi toute fonction suffisamment régulière de la variable d'espace x périodique en somme de fonction sinusoïdales. En particulier, la fonction suivante



peut s'exprimer sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\alpha) \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right)$$

où $C_n(\alpha)$ est un coefficient réel fonction de l'entier n et du rapport cyclique α . Pourquoi le timbre de la guitare change-t-il selon la position de l'ongle ou du médiateur ?



16.11

Réflexion sur un résistor

Une ligne coaxiale d'impédance de ligne $Z_c = R_c$ est fermée sur un résistor de résistance R .

- a) Comment choisir R pour que le coefficient de réflexion soit nul ?
- b) Comment choisir R pour que le coefficient de réflexion soit égal à $\frac{1}{2}$?
- c) Comment choisir R pour que le coefficient de réflexion soit égal à 1 ?
- d) Comment choisir R pour que le coefficient de réflexion soit égal à -1 ? Dans ce cas, donner l'expression de l'onde résultante de tension sur la ligne.



16.12

Coefficient de réflexion en intensité, bilan de puissance

Une ligne coaxiale sans perte d'impédance de ligne $Z_c = R_c$ est fermée sur un dipôle d'impédance Z .

- a) Définir et exprimer le coefficient de réflexion en intensité r_I .
- b) Faire un bilan de puissance électrique en $x = 0$ si le dipôle en bout de ligne est une résistance R .

16.13**Coefficient de réflexion, coefficient de transmission**

Un onde incidente de tension d'amplitude

$$u_i(x, t) = U_i \cos(\omega t - kx + \varphi_i)$$

se propage dans le domaine $x < 0$ sur une ligne coaxiale infinie d'impédance de ligne $Z_c = R_c$. En $x = 0$, on place en dérivation un dipôle d'impédance Z qui engendre une onde réfléchie et une onde transmise. Déterminer et exprimer les coefficients de réflexion r_u et de transmission t_u en tension.

16.14**EDA des ondes sonores en géométries unidirectionnelle, sphérique**

- En géométrie unidirectionnelle, on pose $p_1(x, t)$ et $\mu_1(x, t)$. Montrer que l'onde de vitesse est longitudinale et écrire dans ce cas l'EDA vérifiée par p_1 et celle vérifiée par \vec{v}_1 .
- En géométrie sphérique, on pose que $p_1(r, t)$ et $\mu_1(r, t)$. Montrer que l'onde de vitesse est radiale et traduire dans ce cas l'EDA en une équation aux dérivées partielles vérifiée par $p_1(r, t)$.

16.15**Impédance acoustique**

Une onde sonore est caractérisée par une onde de surpression

$$p_1(x, t) = P_1 \cos(\omega t - kx)$$

- Montrer que l'onde de vitesse est longitudinale, soit $\vec{v}_1 = v_1(x, t)\vec{u}_x$.
- On se place en formalisme complexe. Montrer que

$$\underline{p}_1(x, t) = Z_{\text{son}} \underline{v}_1(x, t)$$

où Z_{son} est l'**impédance acoustique** du milieu, qu'on exprimera en fonction de (μ_0, c) , puis de (μ_0, χ_S) , et enfin en fonction de (χ_S, c) .

16.16**Célérité du son dans le cas d'un gaz parfait**

Un gaz parfait a pour masse molaire M et de rapport de capacités thermiques γ .

- Rappeler la relation entre P , μ , P_0 , μ_0 et γ pour une évolution isentropique.
- En déduire, dans l'approximation acoustique, l'expression du coefficient de compressibilité isentropique χ_S en fonction de γ et P_0 .
- En déduire l'expression de la célérité des ondes sonores en fonction de γ , R , T_0 et M . Faire l'application numérique pour l'air, gaz parfait diatomique de masse molaire moyenne $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ à la température $T = 298 \text{ K}$, en prenant $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.



16.17

Effet Donald Duck (résolution de problème)

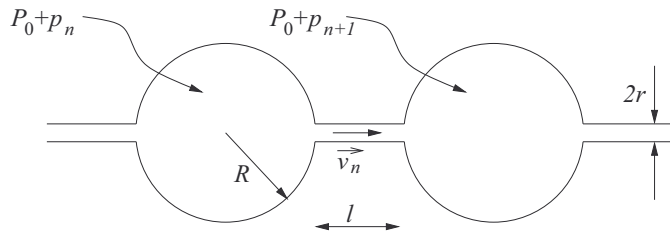
L'émission d'un son par le larynx est un processus très complexe, dont on retient un seul fait : le larynx est assimilé à un tuyau plein d'air de hauteur H : à sa base, les cordes vocales jouent le rôle d'excitateur d'une onde de pression d'amplitude p_{10} , à la fréquence f , et à son extrémité haute, on a un nœud de pression. Le son émis est celui qui crée une résonance de l'onde stationnaire vérifiant les conditions aux limites. On rappelle que la célérité du son dans un gaz parfait est $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$. Expliquer que quand on prend une courte inspiration (l'expérience est déconseillée, il y a des risques majeurs d'accident) d'hélium, la voix devient suraiguë.



16.18

EDA sonore discrète

Un tuyau cannelé (servant de gaine de protection aux cables électriques et aux conduites d'eau enterrées, noyées ou encimentées) est modélisé par des alvéoles presque sphériques de rayon R séparées par des tubes fins cylindriques de longueur ℓ et de rayon r . On note $P_0 + p_n$ la pression dans la n -ième alvéole et $\vec{v}_n = v_n \vec{u}_x$ la vitesse dans le tuyau séparant la n -ième et la $n+1$ -ième alvéole. On note μ_0 la masse volumique de l'air au repos et $\chi = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P}$ le coefficient de compressibilité isentropique. On se place dans l'approximation acoustique.



- a) Établir une relation entre la différence des surpressions $p_n - p_{n+1}$ et la vitesse v_n .
- b) Établir une relation entre la différence des vitesses $v_{n-1} - v_n$ et la surpression p_n .
- c) On fait l'approximation du continu :

$$X_{n+1} - X_n \approx \frac{\partial X}{\partial x} \cdot a \text{ avec } a = x_{n+1} - x_n = 2R + \ell$$

Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par p (par exemple) Donner l'expression de la célérité c des ondes acoustiques dans le tuyau cannelé.

16.19**Effet Doppler (CCP PC (1) 2010)**

- a) **Approche heuristique.** Une source émet des « bips sonores », c'est-à-dire des surpressions très brèves, avec une fréquence f_0 , c'est-à-dire que f_0 bips sont émis par seconde. cette source est en mouvement à la vitesse $v \ll c$ sur un axe (O, x) : $x_S = vt\vec{u}_x$. Un récepteur se trouve à l'abscisse D . Avec quelle fréquence f_a les bips sont-ils reçus par le récepteur si $x_S < D$? Avec quelle fréquence f_e les bips sont-ils reçus par le récepteur si $x_S > D$?
- b) **Approche ondulatoire : récepteur mobile.** Une source émet une onde sonore de pression d'amplitude P_1 et de fréquence f_0 . Elle est fixe à l'origine de l'axe (O, x) . Un microphone est en mouvement à la vitesse $v \ll c$ sur un axe (O, x) : $x_m = D + vt$. Déterminer l'expression de la surpression perçue par le microphone à la date t . En déduire la fréquence perçue f_m .
- c) **Approche ondulatoire : source mobile.** Une source en mouvement à la vitesse $v \ll c$ sur un axe (O, x) , $x_S = vt$, émet une onde sonore de pression d'amplitude P_1 et de fréquence f_0 . L'onde de pression qu'elle génère dans l'air immobile est

$$p_1(x, t) = P_1 \cos(2\pi f_1 t - k_1 x)$$

- i) Rappeler la relation entre f_1 et k_1 .
- ii) En considérant l'onde à l'abscisse de la source, déterminer f_1 .
- iii) Un microphone est fixe à l'abscisse $x_m = D$. Déterminer la fréquence f_m du son perçu.
- iv) Lorsqu'une moto passe sur une piste, un observateur immobile sur le bord perçoit un son de fréquence $f_a = 250$ Hz à l'approche et $f_e = 210$ Hz à l'éloignement. Quelle est la vitesse de la moto ? On prendra $c = 340$ m·s⁻¹.
- d) **Double effet Doppler.** Une source en mouvement d'abscisse $x_S = v_e t$ émet une onde sonore de pression d'amplitude P_1 et de fréquence f_e . Un microphone est lui-aussi en mouvement, son abscisse est $x_m = D + v_m t$. Déterminer l'expression de la surpression perçue par le microphone à la date t . En déduire la fréquence perçue f_m .
- e) **Détection synchrone.** Une source sonore alimentée par un générateur électrique délivrant la tension $u_e(t)$ de fréquence f , est fixe à l'origine de l'axe (O, x) . Une paroi réfléchissante se déplace à la vitesse V : $x_p(t) = D + Vt$.
- i) Quelle est la fréquence f' de l'onde sonore perçue par la plaque ?
- ii) La plaque réfléchit une onde sonore de même fréquence f' dans son référentiel. Quelle est la fréquence f'' de l'onde sonore réfléchie perçue au niveau de la source ?
- iii) Un microphone fixe au voisinage de la source convertit l'onde réfléchie en un signal électrique $u_m(t)$ de fréquence f'' . Un multiplieur effectue le produit de ces deux tensions et donne en sortie $U(t) = k u_e(t) u_s(t)$. Ce signal traverse un filtre passe-bas ; le spectre du signal filtré fait apparaître un pic unique à la fréquence F . Donner l'expression de la vitesse V en fonction de F , f et c .

16.20

Application numérique pour une onde sonore

Une onde sonore plane progressive harmonique a pour champ de surpression

$$p_1(x, t) = 10 \cos(2765t - 8,131x)$$

Elle se propage dans l'air, gaz parfait de rapport de capacités thermiques $\gamma = 1,40$ et de masse molaire $M = 28,97 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. On prend $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. La pression à l'équilibre est $P_0 = 101300 \text{ Pa}$.

- Quelle est la fréquence f de l'onde, à quelle note correspond-elle ?
- Quelle est l'intervalle des variations de la pression ?
- Calculer la célérité c , en déduire la température T_0 en utilisant la relation pour les gaz parfaits $c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$. En déduire la masse volumique au repos μ_0 et le coefficient de compressibilité isentropique χ_S de l'air.
- Quelle est la longueur d'onde λ de l'onde ?
- Exprimer l'onde de vitesse $\vec{v}_1(x, t)$ et l'onde de masse volumique $\mu_1(x, t)$.
- Exprimer l'onde d'accélération \vec{a}_1 .
- Exprimer la valeur instantanée et calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting sonore $\vec{\Pi}_{\text{son}}$ et de la puissance sonore moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ reçue par le tympan assimilé à une membrane perpendiculaire à x et d'aire $S = 1 \text{ cm}^2$.
- Calculer l'intensité acoustique I_{dB} .
- Exprimer la valeur instantanée et calculer la valeur moyenne de l'énergie sonore volumique u_{son} .

16.21

Battements acoustiques (Centrale PSI 2013)

Dans un piano moderne, les sons du médium grave sont produits par deux cordes identiques, de longueur L , fixées à leurs extrémités, frappées simultanément. On note μ leur masse linéique et T leur tension.

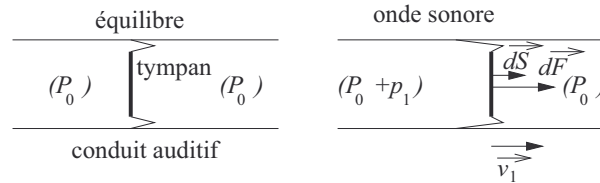
- Rappeler l'expression de la célérité c de l'onde transversale de vibration.
- Donner l'expression de la fréquence fondamentale f de vibration selon une onde stationnaire. Calculer L pour le LA grave du piano avec $f = 28 \text{ Hz}$, $T = 850 \text{ N}$, la corde étant en cuivre de masse volumique $\rho = 9,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ de diamètre $d = 1,6 \text{ mm}$.
- On admet que la vibration de la corde à cette fréquence f crée, à quelques mètres du piano, une onde sonore assimilable à une onde harmonique de même fréquence. Les deux cordes sont désaccordées, c'est-à-dire que leurs tensions sont légèrement différentes : $T_1 = T$ et $T_2 = 0,95T$. Donner l'expression de l'onde sonore résultante à une abscisse x arbitraire en supposant que l'amplitude des deux ondes est identique. On utilisera la relation

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Tracer l'allure du graphe temporel, expliquer le terme de « battements » et calculer le nombre de battements perçus par seconde pour un LA de fréquence $f = 220 \text{ Hz}$.

16.22
Démonstration de l'équation locale de conservation de l'énergie

- a) Lorsque le tympan, membrane imperméable de vecteur surface \vec{dS} reçoit une onde sonore, exprimer la puissance mécanique qu'il reçoit en fonction de p_1 , \vec{v}_1 et \vec{dS} .



- b) En déduire l'expression du vecteur densité de courant énergétique sonore ou vecteur de poynting sonore $\vec{\Pi}_{\text{son}}$.
 c) On donne la relation d'analyse vectorielle

$$\text{div}(a\vec{u}) = a\text{div}\vec{u} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} a$$

En utilisant les équations linéarisées de l'approximation acoustique, établir l'**équation locale de conservation de l'énergie** reliant $\vec{\Pi}_{\text{son}}$ et l'énergie volumique sonore u_{son} .

16.23
Conservation de l'énergie sonore de l'onde sphérique

Vérifier que la valeur moyenne de la puissance sonore traversant une sphère de même centre que la sphère pulsante est indépendante de son rayon.

16.24
Vibration d'une bulle dans un liquide (Mines-Ponts PSI(2) 2006)

Une bulle d'air de centre O, de rayon R_0 et de pression P_0 au repos est immobile dans l'eau, fluide incompressible parfait de masse volumique μ_e . L'air est assimilé à un gaz parfait de rapport de capacités calorifiques γ . On étudie l'oscillation de la bulle caractérisée par son rayon et sa pression interne supposée uniforme :

$$R(t) = R_0 + \xi(t) \text{ avec } \xi \ll R_0 \text{ et } p_B(t)$$

On note $\vec{v}_1 = v_1(r, t)\vec{u}_r$ le champ des vitesses dans l'eau autour de la bulle et $P_0 + p_1(r, t)$ le champ des pressions dans l'eau.

a) Montrer qu'au premier ordre

$$\frac{p_B(t) - P_0}{P_0} + 3\gamma \frac{\xi(t)}{R_0} = 0$$

b) En traduisant l'incompressibilité de l'eau, établir une relation entre $v_1(r, t)$, $\dot{R}(t)$ et r .

c) On admet que l'accélération de la particule de fluide a pour expression au premier ordre $\frac{\partial v_1(r, t)}{\partial t} \vec{u}_r$. Par application de la loi de la quantité de mouvement à la particule de fluide, établir une relation entre $\frac{\partial p_1(r, t)}{\partial r}$, μ_e , r et $R(t)$ et ses dérivées successives.

d) Linéariser cette équation en négligeant tous les termes d'ordre supérieur à 2 en $\xi(t)/R_0$ et en déduire l'équation

$$\mu_e \frac{R_0^2}{r^2} \ddot{\xi}(t) = - \frac{\partial p_1(r, t)}{\partial r}$$

e) En intégrant cette équation entre ($r = R(t)$, $p_1 = p_B(t) - P_0$) et ($r \rightarrow +\infty$, $p_1 \rightarrow 0$), en déduire une relation entre $p_B(t) - P_0$ et $\dot{\xi}(t)$.

f) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\xi(t)$ et mettre en évidence la **pulsation de Minnaert** ω_M fonction des paramètres γ , P_0 , R_0 et μ_e .

g) On suppose que la bulle a une vibration sinusoïdale $\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega_M t)$. Exprimer $v_1(r, t)$. Cette loi est-elle assimilable à celle de l'onde sonore sphérique générée par la vibration de la bulle dans le modèle du cours ?

Du mal à démarrer ?

16.1 La loi de la quantité de mouvement appliquée au tronçon de corde donne, en faisant l'approximation des petits angles, les relations des questions (b) et (c).

16.2 La force de rappel d'un ressort est $\pm k(\ell - \ell_0)$. La longueur ℓ d'un ressort entre deux points A et B est $x_B - x_A$. Enfin, l'abscisse d'une masselotte est $X + u(X, t)$ où X est l'abscisse au repos de la masselotte.

16.3 (a) Cette relation est l'expression approchée de la loi de la quantité de mouvement. (b) On fait les projections sur les axes x et z et on intègre celle sur z entre l'altitude z où la pression est $P(x, z, t)$ et l'altitude $H + u(x, t)$ où la pression est P_0 . (c) On dérive (PU) par rapport à x . (d) Le bilan de masse en régime non stationnaire traduit que la masse à la date $t + dt$ est égale à la masse à la date t plus ce qui entre moins ce qui sort. (e) La méthode d'élimination de v est classique. (f) et (g) demandent un peu d'astuce.

16.4 Exercice très technique mais parfaitement guidé. L'écriture de l'équilibre mécanique est menée ici sans faire l'approximation des petits angles.

16.5 L'égalité de deux fonctions de deux variables indépendantes entraîne l'égalité de ces deux fonctions à une même constante. On éliminera l'un des cas en résolvant l'équation temporelle.

16.6 Cet exercice demande uniquement des compétences en trigonométrie.

16.7 L'expression de c étant donnée, il suffit de raisonner sur la relation de quantification de la fréquence.

16.8 La relation de dispersion et les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ permettent de conclure.

16.9 La condition aux limites en $x = 0$ est obtenue en écrivant la loi de la quantité de mouvement sur P, soumis aux forces de rappel et à la tension de la corde. Il faut prendre en compte l'inclinaison de la corde en $x = 0$ qu'on identifie à $\frac{\partial y}{\partial x}(0, t)$. La clef du problème est de transformer cette dérivée spatiale en une dérivée temporelle, ce qui est possible en supposant que l'onde est quasi sinusoïdale. On obtient ainsi une équation différentielle du second ordre en $y_p(t)$ qu'on résout pour trouver la condition aux limites et conclure.

16.10 On peut reconnaître la forme de la corde entre $x = 0$ et $x = L$.

16.11 C'est une simple application de la loi du cours.

16.12 Le bilan de puissance nécessite le calcul de la puissance $u_i \cdot i_i$ de l'onde électrique incidente, de celle $u_r \cdot i_r$ de l'onde réfléchie et de la puissance consommée par la résistance R.

- 16.13** On s'inspirera du raisonnement du cours, en traduisant en $x = 0$, la continuité de la tension et la loi des nœuds.
- 16.14** On traduit les opérateurs d'analyse vectorielle en coordonnées cartésiennes pour la question (a), en coordonnées sphériques pour la (b).
- 16.15** Cet exercice peut être considéré comme une question de cours, les impédances acoustiques seront utilisées dans le dernier chapitre.
- 16.16** La loi de Laplace et la loi des gaz parfaits suffisent pour conclure.
- 16.17** La recherche d'une solution stationnaire vérifiant les conditions aux limites permet de relier H , f et c . Le changement de gaz modifie c donc f .
- 16.18** (a) On applique la loi de la quantité de mouvement à l'air dans le tuyau. (b) On fait un bilan de masse dans l'alvéole. (c) L'approximation permet d'obtenir un système d'équations aux dérivées partielles en v et p , on élimine v par la méthode habituelle.
- 16.19** L'exercice est très guidé, on utilisera la relation de dispersion et on traduira les mouvements de la source et/ou du récepteur comme on écrirait des conditions aux limites qui dépendent de t . La méthode de détection synchrone est à mémoriser.

- 16.20** Cette application numérique est analogue à celle menée dans l'exemple du cours.
- 16.21** L'utilisation des battements pour mettre en évidence un décalage fréquentiel est assimilable à la détection synchrone de l'exercice 16.19.
- 16.22** Le tympan est soumis aux forces de pression, et sa vitesse est égale à \bar{v}_1 car il est imperméable. On en déduit aisément la puissance mécanique.
- 16.23** On utilise les résultats de l'exemple du cours pour déterminer le vecteur de Poynting sonore, on calcule son flux en intégrant sur une sphère à r constant, et on calcule les valeurs moyennes des fonctions trigonométriques du temps.
- 16.24** (a) On utilise la loi de Laplace. (b) La loi $\text{div } \vec{v}_1$ traduite en coordonnées sphériques permet de montrer que la quantité $r \cdot v_1(r, t)$ est constante, donc égale à sa valeur à la surface de la bulle. (c) On conjugue la loi de la quantité de mouvement avec le résultat de la question (b). (d) La linéarisation permet de ne garder qu'un seul terme. (e) Il suffit de suivre l'indication de l'énoncé. (f) On conjugue les équations du (a) et du (e) et on en déduit une équation d'oscillateur harmonique. (g) On utilise la relation obtenue à la question (b).

Corrigés des exercices

16.1

- a) La pente de la tangente à une courbe est égale à sa dérivée par rapport à x , mais aussi égale à la tangente de l'angle d'inclinaison. En utilisant l'approximation des petits angles

$$\alpha(x, t) \simeq \tan \alpha(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$

- b) La loi de la quantité de mouvement appliquée au tronçon de corde donne

$$\mu dx \vec{a} = \vec{T}(x, t) + \vec{T}(x + dx, t)$$

$$\text{soit } \mu dx \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -T(x, t) \cos \alpha(x, t) \\ -T(x, t) \sin \alpha(x, t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T(x + dx, t) \cos \alpha(x + dx, t) \\ T(x + dx, t) \sin \alpha(x + dx, t) \end{vmatrix}$$

En faisant l'approximation des petits angles, on en déduit le système

$$\begin{cases} 0 = -T(x, t) + T(x + dx, t) \\ \mu dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -T(x, t) \alpha(x, t) + T(x + dx, t) \alpha(x + dx, t) \end{cases}$$

la première égalité s'écrit

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0 \text{ donc } T(x, t) = T_0$$

- c) En injectant cette relation dans la seconde équation, il vient

$$\mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)}{dx}$$

$$\text{soit } \mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

On obtient donc l'EDA

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \text{ donc } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

- d) La masse linéique de la caténaire est

$$\mu = \frac{dm}{dl} = \frac{\mu_{\text{CuS}} dl}{dl} = \mu_{\text{CuS}} = 1,34 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

On en déduit la célérité

$$c = \sqrt{\frac{26\,000}{1,34}} = 139 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La vitesse du TGV ne doit pas dépasser

$$\frac{97}{100} \times 139 = 135 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 486 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Si la vitesse du TGV dépasse cette valeur, les ondes de vibration créées par le soulèvement de la caténaire ne peuvent plus s'éloigner du train, et comme pour le mur du son, leur énergie s'accumule, l'amplitude des déformations de la caténaire augmente, elle peut se briser, ou le contact électrique avec la caténaire peut être rompu. Le record n'a pu être obtenu qu'en augmentant la tension de la caténaire sur la ligne où a été fait le test.

16.2

a) La constante de raideur est en $N \cdot m^{-1}$ donc

$$[E] = \frac{N \cdot m^{-1} \cdot m}{m^2} = N \cdot m^{-2} = Pa$$

Il est donc homogène à une pression et est lié aux déformations du matériau comme un ressort, ou un élastique.

b) La masselotte centrale est soumise aux forces de rappel \vec{F}_g et \vec{F}_d des ressorts de gauche et de droite.

$$\vec{F}_g = -k[(x + u(x, t)) - (x - dx + u(x - dx, t)) - dx] \vec{u}_x$$

$$\vec{F}_g = k[-u(x, t) + u(x - dx, t)] \vec{u}_x$$

$$\vec{F}_d = k[(x + dx + u(x + dx, t)) - (x + u(x, t)) - dx] \vec{u}_x$$

$$\vec{F}_d = k[u(x + dx, t) - u(x, t)] \vec{u}_x$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la masselotte centrale s'écrit donc, en projection sur x :

$$\mu S dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{ES}{dx} [u(x + dx, t) + u(x - dx, t) - 2u(x, t)]$$

On utilise la formule de Taylor pour donner les développements limités au second ordre :

$$u(x + dx, t) \approx u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2}$$

$$u(x - dx, t) \approx u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} (-dx) + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \frac{(-dx)^2}{2}$$

On remplace et on simplifie :

$$\mu S dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{ES}{dx} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} (dx)^2$$

$$\text{soit } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{E} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

qui est bien l'EDA avec $c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$.

16.3

a) On reconnaît la loi de la quantité de mouvement appliquée à la particule de fluide, soumise aux forces de contact de pression (la viscosité est supposée nulle) et au poids. La raison pour laquelle ce n'est qu'une approximation est que l'accélération de la particule de fluide comporte un terme d'accélération convective qu'on ne peut expliquer que dans un cours complet de mécanique des fluides, mais ce terme est du second ordre.

b) En projetant sur les axes x et z , cette relation donne

$$\begin{cases} (PV) \mu \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g \end{cases}$$

On intègre la seconde relation entre z où la pression vaut $P(x, z, t)$ et $H + u(x, t)$ où la pression vaut P_0 :

$$\int_z^{H+u(x, t)} dP = \int_z^{H+u(x, t)} -\mu g dz$$

$$[P_0 - P(x, z, t)] = -\mu g [H + u(x, t) - z]$$

$$\text{donc (PU) } P(x, z, t) = P_0 + \mu g [H + u(x, t) - z]$$

c) En dérivant (PU) par rapport à x , on en déduit

$$\frac{\partial P(x, z, t)}{\partial x} = \mu g \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

ce qui permet d'éliminer $\frac{\partial P(x, z, t)}{\partial x}$ dans (PV) :

$$\mu \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -\mu g \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$\text{soit } \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -g \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

d) Le bilan de masse sur la tranche peut s'écrire : la masse comprise dans la tranche à la date $t + dt$ est égale à celle dans la tranche à la date t plus la masse dm_e qui entre en x moins celle dm_s qui sort en $x + dx$:

$$\mu L(H + u(x, t + dt)) dx = \mu L(H + u(x, t)) dx$$

$$+ \mu v(x, t) L(H + u(x, t)) dt - \mu v(x + dx, t) L(H + u(x + dx, t)) dt$$

$$\text{soit } \mu L \frac{u(x, t + dt) - u(x, t)}{dt} =$$

$$\mu L \frac{v(x, t)(H + u(x, t)) - v(x + dx, t)(H + u(x + dx, t))}{dx}$$

On peut négliger u devant H dans le terme de droite car H ne s'élimine pas, d'où

$$\mu L \frac{u(x, t + dt) - u(x, t)}{dt} = -\mu L H \frac{v(x + dx, t) - v(x, t)}{dx}$$

$$= -\mu L H \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$$

$$\text{soit } \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -H \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$$

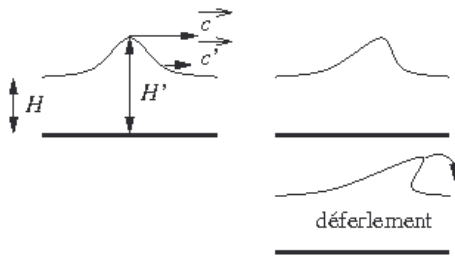
- e) On élimine $v(x, t)$ entre les deux équations aux dérivées partielles en dérivant la première par rapport à x , la seconde par rapport à t et en utilisant le théorème de Schwartz :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t} = -g \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -H \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x} \end{array} \right. \text{ donc } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

$$\text{soit } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{gH} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

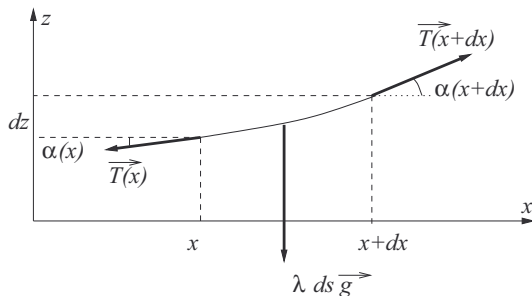
qui est bien l'EDA avec $c = \sqrt{gH}$.

- f) Lorsque la vaguelette s'approche du rivage, la hauteur d'eau H diminue donc la célérité diminue.
 g) La profondeur d'eau du bassin est constante, mais la hauteur d'eau effective sous la crête de la vague est plus grande que sous la base de la vague. La crête se déplace donc plus vite que la base, et la vague se déforme puis déferle quand la crête passe au dessus de la base.



16.4

- a) Voici l'allure de la figure.



- b) D'après Pythagore, $ds^2 = dx^2 + dz^2$ donc

$$ds^2 = \sqrt{dx^2 + dz^2}$$

Par définition de la dérivée, $\tan \alpha = \frac{dz}{dx}$.

- c) L'équilibre du tronçon de corde, de masse λds , s'écrit

$$\vec{T}(x + dx) + \vec{T}(x) + \lambda ds \vec{g} = \vec{0}$$

On projette sur les deux axes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -T(x) \cos \alpha(x) + T(x + dx) \cos \alpha(x + dx) = 0 \\ -T(x) \sin \alpha(x) + T(x + dx) \sin \alpha(x + dx) - \lambda g ds = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{soit } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial [T(x) \cos \alpha(x)]}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial [T(x) \sin \alpha(x)]}{\partial x} = \lambda g \frac{ds}{dx} \end{array} \right.$$

On en déduit :

- i) $T(x) \cos \alpha(x) = T_0$ est une constante donc

$$T(x) = \frac{T_0}{\cos \alpha(x)}$$

- ii) donc $\frac{\partial [T_0 \tan \alpha(x)]}{\partial x} = \lambda g \frac{ds}{dx}$.

- d) D'après l'expression de ds , on a

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

et en remplaçant $\tan \alpha$, on en déduit l'équation différentielle

$$T_0 \frac{d^2 z}{dx^2} = \lambda g \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

- e) En posant $u = \frac{dz}{dx}$, on obtient l'équation

$$T_0 \frac{du}{dx} = \lambda g \sqrt{1 + u^2} \text{ soit } \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\lambda g}{T_0} dx$$

- f) En intégrant cette équation à variables séparables, on en déduit $\operatorname{arsh} u = \frac{\lambda g}{T_0} x + K$ donc $u = \operatorname{sh} \left(\frac{\lambda g}{T_0} x + K \right)$ d'où

$$z = \frac{T_0}{\lambda g} \operatorname{ch} \left(\frac{\lambda g}{T_0} x + K \right) + K'$$

Les deux conditions aux limites sont les positions des deux points d'attache de la corde.

16.5

- a) On a

$$\frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} = f''(x)g(t) \text{ et } \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial t^2} = f(x)g''(t)$$

donc l'équation de d'Alembert s'écrit

$$f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2} f(x)g''(t) = 0$$

$$\text{soit } \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)}$$

L'égalité entre ces deux fonctions de deux variables indépendantes entraîne qu'elles sont toutes deux égales à une même constante.

Chapitre 16 Équation de d'Alembert

- b) Supposons que cette constante soit positive et notons-la k^2 . On obtient à droite

$$g''(t) - k^2 c^2 g(t) = 0 \text{ donc } g(t) = A e^{-kct} + B e^{kct}$$

B est nécessairement nul car le terme e^{kct} tend vers l'infini quand $t \rightarrow +\infty$, ce qui nécessiterait une énergie infinie. Mais alors $g(t)$ tendrait vers zéro, or aucun processus ne dissipe l'énergie de ce système. On rejette donc ce cas. La constante est donc négative et on la note $-k^2$, d'où l'équation en $f(x)$.

- c) Cette équation est du type oscillateur harmonique donc

$$f(x) = A \cos(kx + \varphi)$$

L'équation en $g(t)$ s'écrit

$$g''(t) + k^2 c^2 g(t) = 0 \text{ donc } g(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$$

avec $\omega = kc$. La solution stationnaire est bien doublement harmonique, en x et en t . En fusionnant A et B en une seule constante :

$$G(x, t) = G_0 \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)$$

16.6

- a) On remarque que

$$A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) =$$

$$\frac{A}{2} \cos(\omega t + kx + \varphi + \psi) + \frac{A}{2} \cos(\omega t - kx + \varphi - \psi)$$

c'est-à-dire que la solution stationnaire est la superposition de deux ondes progressives de même amplitude se déplaçant dans deux sens opposés.

- b) De même

$$A \cos(\omega t - kx + \varphi) =$$

$$A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx) + A \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx) =$$

$$A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx) + A \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right)$$

qui est bien la superposition de deux ondes stationnaires.

16.7

En vissant la cheville, on entoure une petite portion de corde sur le cylindre. On ne change pas la longueur L de la partie vibrante de la corde, mais on augmente sa tension T_0 , en on diminue sa masse m . La masse linéique $\mu = \frac{m}{L}$ diminue donc elle-aussi. La célérité $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ augmente donc doublement. La note émise par la corde correspond à la fréquence fondamentale d'une corde fixée

à ses deux extrémités, soit l'harmonique $n = 1$ des fréquences quantifiées par la relation

$$L = n \frac{\lambda}{2} \text{ donc } f_n = n \frac{c}{2L}$$

Comme L reste constante, $f_1 = \frac{c}{2L}$ augmente, et le son devient plus aigu. On peut donc régler la hauteur du son en vissant (pour monter) ou en dévissant la cheville (pour baisser).

16.8

- a) On cherche une solution stationnaire sous la forme

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

Il y a donc 4 inconnues : A , φ , k et ψ . La relation de dispersion impose $k = \frac{\omega}{c}$. La condition aux limites en $x = L$ impose

$$\forall t, A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kL + \psi) = 0 \text{ donc } \cos(kL + \psi) = 0$$

donc $kL + \psi = \frac{\pi}{2}$ par exemple, donc $\psi = \frac{\pi}{2} - kL$. On en déduit que

$$\cos(kx + \psi) = -\sin(k(x - L))$$

La condition aux limites en $x = 0$ impose

$$\forall t, Y_0 \cos(\omega t) = A \sin(kL) \cos(\omega t + \varphi)$$

Par identification, $\varphi = 0$ et $Y_0 = A \sin(kL)$ et si $\sin(kL) \neq 0$, $A = \frac{Y_0}{\sin(kL)}$. En conclusion :

$$y(x, t) = -\frac{Y_0}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \sin(k(x - L))$$

- b) Si $kL = n\pi$, n entier naturel ni nul, l'amplitude tend vers l'infini, il y a résonance d'amplitude des vibrations (dans ce cas, les hypothèses qui ont présidé à l'établissement de l'EDA ne sont plus vérifiées). Ceci correspond aux pulsation spropres de la corde fixée à ses deux extrémités :

$$\omega = n \frac{\pi c}{L}$$

16.9

Les lois relatives à la corde vibrante doivent se doubler d'une condition aux limites en $x = 0$ qui est ici donnée par la loi de la quantité de mouvement appliquée à la masse P . Celle-ci subit la force de rappel des deux ressorts, la force du guide (O, y) , son poids perpendiculaire au plan de la figure, et la force de la corde. Son mouvement est repéré par $y_P(t) = y(0, t)$. L'inclinaison de la corde par rapport à \vec{u}_x est repérée par l'angle

$$\alpha_P(t) = \alpha(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t)$$

En notant \vec{R} la réaction normale du guide, il vient

$$\begin{cases} 0 = R_x + T_0 \cos \alpha_P(t) \\ m \ddot{y}_P(t) = -K y_P(t) - K y_P(t) + T_0 \sin \alpha_P(t) \\ 0 = R_z - mg \end{cases}$$

On en déduit

$$m \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial t^2} = -2Ky(0, t) + T_0 \frac{\partial y(0, t)}{\partial x}$$

Or $y(x, t)$ vérifie l'équation de d'Alembert et en supposant les vibrations quasi sinusoïdales

$$y(x, t) \approx Y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = kY_0 \sin(\omega t - kx + \varphi) \\ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -\omega Y_0 \sin(\omega t - kx + \varphi) \end{cases}$$

$$\text{donc } \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = -\frac{k}{\omega} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$$

L'équation vérifiée par $y_P(t) = y(0, t)$ s'écrit donc

$$m \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial t^2} + \frac{T_0}{c} \frac{\partial y(0, t)}{\partial t} + 2Ky(0, t) = 0$$

$$\text{soit } \ddot{y}_P + \frac{T_0}{mc} \dot{y}_P + \frac{2K}{m} y_P = 0$$

$$\text{soit } \ddot{y}_P + 2\lambda\omega_0 \dot{y}_P + \omega_0^2 y_P = 0$$

L'équation caractéristique

$$r^2 + 2\lambda\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

a pour discriminant

$$\Delta = 4\lambda^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 \approx -4\omega_0^2$$

car $\lambda \ll 1$. Les solutions cette équation sont donc

$$r = -\lambda\omega_0 \pm i\omega_0$$

On est donc en régime pseudo-périodique très faiblement amorti, ce qui valide l'hypothèse de vibrations quasi sinusoïdales. La vibration du point P est donc régie par l'équation horaire

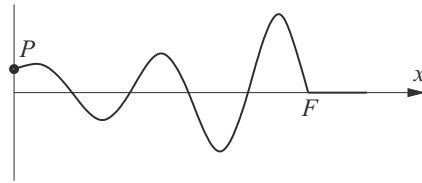
$$y_P(t) = e^{-\lambda\omega_0 t} [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)]$$

Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} 0 = A \\ v_0 = [-\lambda A + B]\omega_0 \end{cases} \text{ donc } B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

$$\text{et } y_P(t) = \frac{v_0}{\omega_0} e^{-\lambda\omega_0 t} \sin(\omega_0 t)$$

P a donc un mouvement oscillatoire pseudo-périodique amorti qui se propage depuis $t = 0$ le long de la corde dans le sens des x croissants. À la date t , le front F de l'onde est à l'abscisse $x_P = c \cdot t$. Le piège est que l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps, l'amplitude des oscillations diminue quand on va de F (au voisinage duquel on trouve les oscillations générées aux premiers instants de l'oscillation de P, de forte amplitude), vers O (au voisinage duquel on trouve les oscillations générées dans les derniers instants précédant t , de faible amplitude).



16.10

- a) On reconnaît ici la solution stationnaire de l'équation de d'Alembert pour une corde fixée à ses deux extrémités avec la relation de quantification

$$L = n \frac{\lambda}{2} \text{ donc } \begin{cases} k_n = n \frac{\pi}{L} \\ \omega_n = k_n c = n \frac{\pi c}{L} \end{cases}$$

La solution harmonique d'ordre n est donc

$$y_n(x, t) = Y_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n\pi \frac{ct}{L}\right)$$

L'équation de d'Alembert est linéaire, toute superposition de solutions est donc elle-même solution, donc

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n\pi \frac{ct}{L}\right)$$

convient pour toute suite de réels (Y_n) .

- b) La restriction de la fonction périodique $f(x)$ à $x \in [0, L]$ donne la forme exacte de la corde à $t = 0$, avec $\alpha = \frac{\ell}{L}$ et au facteur multiplicatif h près. En identifiant :

$$y(x, 0) = h \cdot f(x)$$

$$\text{soit } \forall x, \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} h C_n \left(\frac{\ell}{L}\right) \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right)$$

On en déduit l'amplitude de la n ème harmonique

$$Y_n = h C_n \left(\frac{\ell}{L}\right)$$

ce qui permet de construire le spectre du son que va émettre la corde en vibration. Ce spectre détermine le timbre du son. Le timbre dépend donc de ℓ , c'est-à-dire de la position où le musicien pince la corde de sa guitare.

16.11

- a) Par application du résultat du cours :

$$\underline{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{R - R_c}{R + R_c} = 0$$

$$\text{donc } R = R_c$$

Chapitre 16 Équation de d'Alembert

b) De même

$$\underline{r} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{R - R_c}{R + R_c} = \frac{1}{2}$$

donc $R = 3R_c$

c) De même

$$\underline{r} = 1 \Leftrightarrow \frac{R - R_c}{R + R_c} = 1$$

donc $R = \infty$

ce qui correspond à un interrupteur ouvert.

d) De même

$$\underline{r} = -1 \Leftrightarrow \frac{R - R_c}{R + R_c} = -1$$

donc $R = 0$

ce qui correspond à un court-circuit. Dans ce cas, les ondes de tension incidente et réfléchie s'écrivent en grandeurs complexes

$$\begin{cases} \underline{u}_i = U e^{j\varphi} e^{j(\omega t - kx)} \\ \underline{u}_r = -U e^{j\varphi} e^{j(\omega t + kx)} \end{cases}$$

et en grandeurs réelles

$$\begin{cases} u_i(x, t) = U \cos(\omega t - kx + \varphi) \\ u_r(x, t) = -U \cos(\omega t + kx + \varphi) \end{cases}$$

L'onde résultante est

$$u(x, t) = u_i(x, t) + u_r(x, t)$$

soit, en utilisant la relation

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$u(x, t) = 2U \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx)$$

qui est une onde stationnaire.

16.12

a) On a établi dans le cours la relation

$$\frac{\underline{u}_i}{\underline{i}_i} = R_c = -\frac{\underline{u}_r}{\underline{i}_r} \quad \text{donc} \quad \frac{\underline{i}_r}{\underline{i}_i} = -\frac{\underline{u}_r}{\underline{u}_i}$$

$$\text{soit } \underline{r}_i = -\underline{r}_u = -\frac{\underline{Z} - R_c}{\underline{Z} + R_c}$$

b) L'onde de tension incidente s'exprime en $x = 0$ en grandeurs complexes ainsi :

$$\underline{u}_i(0, t) = U e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On en déduit

$$\underline{i}_i(0, t) = \frac{\underline{u}_i(0, t)}{R_c} = \frac{U}{R_c} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Les coefficients de réflexion en tension et en intensité sont réels :

$$r_u = \frac{R - R_c}{R + R_c} \quad \text{et} \quad r_i = -\frac{R - R_c}{R + R_c}$$

On en déduit

$$\underline{u}_r(0, t) = \frac{R - R_c}{R + R_c} \cdot U e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\underline{i}_r(0, t) = -\frac{R - R_c}{R + R_c} \cdot \frac{U}{R_c} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

En grandeurs réelles, les quatre quantités s'écrivent

$$\begin{cases} u_i(0, t) = U \cos(\omega t + \varphi) \\ i_i(0, t) = \frac{U}{R_c} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad \text{donc } \mathcal{P}_i(0, t) = \frac{U^2}{R_c} \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} u_r(0, t) = \frac{R - R_c}{R + R_c} \cdot U \cos(\omega t + \varphi) \\ i_r(0, t) = -\frac{R - R_c}{R + R_c} \cdot \frac{U}{R_c} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\text{donc } \mathcal{P}_r(0, t) = -\left[\frac{R - R_c}{R + R_c} \right]^2 \cdot \frac{U^2}{R_c} \cos^2(\omega t + \varphi)$$

On en déduit

$$\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_r = \frac{U^2}{R_c} \left[1 - \left(\frac{R - R_c}{R + R_c} \right)^2 \right] \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\text{soit } \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_r = \frac{4R}{(R + R_c)^2} U^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Or l'intensité qui traverse la résistance de bout de ligne est

$$I(t) = i_i(0, t) + i_r(0, t) = \frac{2U}{R + R_c} \cos(\omega t + \varphi)$$

La puissance qu'elle reçoit est donc

$$\mathcal{P}_R = RI^2(t) = R \cdot \frac{4U^2}{(R + R_c)^2} \cos^2(\omega t + \varphi)$$

On a donc bien conservation de l'énergie car

$$\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_r = \mathcal{P}_R$$

16.13

En grandeurs complexes, on pose

$$\begin{cases} \underline{u}_i = \underline{U}_i e^{j(\omega t - kx)} \\ \underline{u}_r = \underline{U}_r e^{j(\omega t + kx)} \\ \underline{u}_t = \underline{U}_t e^{j(\omega t - kx)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \underline{u}_i = R_c \underline{i}_i \\ \underline{u}_r = -R_c \underline{i}_r \\ \underline{u}_t = R_c \underline{i}_t \end{cases}$$

En $x = 0$, on a continuité de la tension :

$$\underline{u}(x = 0^-, t) = \underline{u}(x = 0, t) = \underline{u}(x = 0^+, t)$$

Or en $x = 0^-$, la tension est la superposition de la tension de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, et en $x = 0^+$, la tension est égale à la tension de l'onde transmise. Enfin, $\underline{u}(0, t)$ est la tension complexe $\underline{U}e^{j\omega t}$ aux bornes du dipôle. On en déduit

$$\underline{U}e^{j\omega t} = \underline{U}_i e^{j\omega t} + \underline{U}_r e^{j\omega t} = \underline{U}_t e^{j\omega t}$$

$$\text{soit } \underline{U} = \underline{U}_i + \underline{U}_r = \underline{U}_t$$

L'intensité, elle, n'est pas continue et vérifie la loi des nœuds. Si on note $\underline{I}e^{j\omega t}$ l'intensité traversant le dipôle, alors en $x = 0$:

$$\underline{I}e^{j\omega t} = \underline{I}_i e^{j\omega t} + \underline{I}_r e^{j\omega t} - \underline{I}_t e^{j\omega t}$$

$$\text{soit } \underline{I} = \underline{I}_i + \underline{I}_r - \underline{I}_t$$

et en utilisant les relations entre les tensions et les intensités :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_i}{R_c} - \frac{\underline{U}_r}{R_c} - \frac{\underline{U}_t}{R_c}$$

On obtient donc le système suivant pour les amplitudes complexes de tension :

$$\begin{cases} \underline{U}_i + \underline{U}_r = \underline{U}_t \\ \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_i}{R_c} - \frac{\underline{U}_r}{R_c} - \frac{\underline{U}_t}{R_c} \end{cases}$$

En divisant ces deux équations par \underline{U}_i , on fait apparaître les coefficients de réflexion et de transmission en tension

$$\underline{r}_u = \frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_i} \text{ et } \underline{t}_u = \frac{\underline{U}_t}{\underline{U}_i}$$

$$\begin{cases} 1 + \underline{r}_u = \underline{t}_u \\ \frac{\underline{t}_u}{\underline{Z}} = \frac{1 - \underline{r}_u - \underline{t}_u}{R_c} \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} 1 + \underline{r}_u = \underline{t}_u \\ 1 - \underline{r}_u = \left(1 + \frac{R_c}{\underline{Z}}\right) \underline{t}_u \end{cases}$$

Ce système se résout sans difficulté et donne :

$$\begin{cases} \underline{t}_u = \frac{2}{2 + \frac{R_c}{\underline{Z}}} \\ \underline{r}_u = -\frac{\frac{R_c}{\underline{Z}}}{2 + \frac{R_c}{\underline{Z}}} \end{cases}$$

16.14

a) L'équation mécanique linéarisée

$$(M) \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p_1$$

donne avec ces notations

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x} \vec{u}_x$$

donc $\vec{v}_1 = v_1(x, t) \vec{u}_x$, ce qui prouve que l'onde de vitesse est longitudinale et

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

L'élimination de μ_1 entre l'équation de conservation de la masse (C) et l'équation traduisant l'évolution isentropique (S) donne

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t}$$

On élimine v_1 ou p_1 entre les deux équations aux dérivées partielles en dérivant l'une par rapport à t , l'autre par rapport à x , et en utilisant le théorème de Schwartz. Les équations de d'Alembert sont identiques pour p_1 et v_1 :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0$$

b) L'équation mécanique linéarisée

$$(M) \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p_1$$

donne avec ces notations

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1(r, t)}{\partial r} \vec{u}_r$$

donc $\vec{v}_1 = v_1(r, t) \vec{u}_r$, ce qui prouve que l'onde de vitesse est radiale. L'équation de d'Alembert générale est traduite en utilisant l'expression de l'opérateur Laplacien en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r p_1)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

16.15

a) L'équation mécanique linéarisée

$$(M) \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p_1$$

donne avec ces notations

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x} \vec{u}_x$$

donc $\vec{v}_1 = v_1(x, t) \vec{u}_x$, ce qui prouve que l'onde de vitesse est longitudinale et

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

Chapitre 16 Équation de d'Alembert

b) En formalisme complexe, la relation précédente s'écrit

$$\mu_0(j\omega)\underline{v}_1 = -(-jk)\underline{p}_1 \text{ donc } \underline{p}_1 = \mu_0 \frac{\omega}{k} \underline{v}_1$$

Or $\omega = kc$ avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_S}}$. On en déduit l'impédance acoustique

$$Z_{\text{son}} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_S}} = \frac{1}{c\chi_S}$$

16.16

a) La loi de Laplace s'écrit

$$P\mu^{-\gamma} = P_0\mu_0^{-\gamma} \text{ donc } \mu = \mu_0 P^{\frac{1}{\gamma}} P_0^{-\frac{1}{\gamma}}$$

b) Le coefficient de compressibilité isentropique vaut

$$\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S \text{ soit}$$

$$\chi_S = \frac{1}{\mu_0} P^{-\frac{1}{\gamma}} P_0^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \frac{1}{\gamma} \mu_0 P^{\frac{1}{\gamma}-1} P_0^{-\frac{1}{\gamma}}$$

$$\text{soit } \chi_S = \frac{1}{\gamma P}$$

Dans l'approximation acoustique, $p_1 \ll P_0$ donc

$$\text{soit } \chi_S \approx \frac{1}{\gamma P_0}$$

c) Par application de la loi des gaz parfaits :

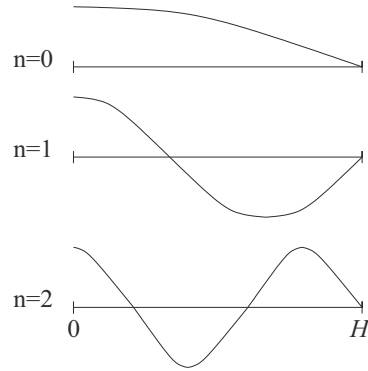
$$P_0 M = \mu_0 R T_0$$

$$\text{donc } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{P_0 M}{R T_0} \cdot \frac{1}{\gamma P_0}}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

L'air est un gaz parfait diatomique donc $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$. On en déduit $c = 346 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

16.17

Une onde stationnaire dans le larynx possède un ventre de vibration de pression au niveau des cordes vocales et un nœud au niveau de la bouche. Comme la distance entre un nœud et un ventre voisins est $\frac{\lambda}{4}$, on en déduit que $H = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$.



En ne gardant que $n = 0$, la fondamentale du son émis a donc pour fréquence

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4H}$$

On remarque que plus H est grand, plus f est faible, ce qui explique que la voix d'un homme très grand est souvent plus grave que celle d'un homme très petit (en supposant la taille du larynx proportionnelle à la taille). Quand on remplace l'air, gaz parfait diatomique ($\gamma = \frac{5}{2}$ et $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) par de l'hélium, gaz parfait monoatomique ($\gamma' = \frac{3}{2}$ et $M' = 4,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$), la célérité du son à 300 K passe de

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} = 347 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ à } c' = \sqrt{\frac{\gamma' R T}{M'}} = 912 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La fréquence fondamentale est donc multipliée par un facteur

$$\frac{f'}{f} = \frac{\frac{c'}{4H}}{\frac{c}{4H}} = \frac{c'}{c} = 2,6$$

Le son émis est plus haut de plus d'une octave, donc la voix est suraiguë.

16.18

a) La loi de la quantité de mouvement appliquée à l'air situé dans le tube s'écrit, en faisant l'approximation acoustique ($\mu_1 \ll \mu_0$) :

$$\mu_0 \ell \pi r^2 \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} = (P_0 + p_n) \pi r^2 \tilde{u}_x - (P_0 + p_{n+1}) \pi r^2 \tilde{u}_x$$

$$\text{donc } \mu_0 \ell \frac{\partial v_n}{\partial t} = p_n - p_{n+1}$$

b) Le bilan de masse sur l'élément d'indice n s'écrit

$$(\mu_0 + \mu_n(t + dt)) \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 - (\mu_0 + \mu_n(t)) \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 =$$

$$\mu_0 v_{n-1} \pi r^2 dt - \mu_0 v_n \pi r^2 dt$$

$$\text{soit } \frac{\mu_n(t + dt) - \mu_n(t)}{dt} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \mu_0 (v_{n-1} - v_n) \cdot \pi r^2$$

$$\text{soit } \frac{\partial \mu_n}{\partial t} = \mu_0 \frac{3r^2}{4R^3} (v_{n-1} - v_n)$$

- c) En utilisant l'approximation du continu, les deux équations précédentes s'écrivent

$$\begin{cases} \mu_0 \ell \frac{\partial v}{\partial t} = -a \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} = -a \mu_0 \frac{3r^2}{4R^3} \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Comme dans le cours, on substitue μ à p dans la seconde équation grâce au coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_S \quad \text{donc} \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu_0 \chi_S \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\text{donc} \quad \chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = -a \frac{3r^2}{4R^3} \frac{\partial v}{\partial x}$$

On élimine v en dérivant la première équation par rapport à x et la seconde par rapport à t et en utilisant le théorème de Schwartz.

$$\begin{cases} \mu_0 \ell \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -a \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -a \frac{3r^2}{4R^3} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a \frac{3r^2}{4R^3} \cdot \frac{a}{\mu_0 \ell} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$\text{soit} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{4\ell R^3}{3r^2(2R+\ell)^2} \mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

C'est bien l'équation de d'Alembert, de célérité

$$c = c_0 \sqrt{\frac{3r^2(2R+\ell)^2}{4\ell R^3}} \quad \text{avec} \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$$

16.19

- a) Le n ième bip est émis à la date $t_n = nT = \frac{n}{f_0}$ donc lorsque la source se trouve à l'abscisse

$$x_n = n \frac{v}{f_0}$$

À la date d'émission du $(n+1)$ ième bip, la source se trouve à l'abscisse

$$x_{n+1} = (n+1) \frac{v}{f_0}$$

L'abscisse de ce bip est donc

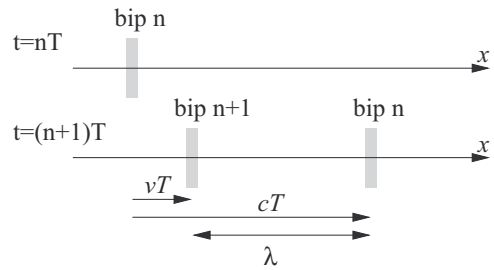
$$X_{n+1} = (n+1) \frac{v}{f_0}$$

et le n ième bip, qui s'est déplacé à la vitesse c pendant la durée $T = \frac{1}{f_0}$ se trouve à l'abscisse

$$X_n = x_n + cT = n \frac{v}{f_0} + \frac{c}{f_0}$$

La longueur d'onde est donc la distance entre ces deux bips consécutifs :

$$\lambda = X_{n+1} - X_n = \frac{c}{f_0} - \frac{v}{f_0} = \frac{c-v}{f_0}$$



On en déduit la fréquence perçue

$$\lambda = \frac{c}{f_a} \Rightarrow f_a = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{c-v} f_0$$

Lorsque $x_S > D$, la source s'éloigne donc il suffit de remplacer v par $-v$ dans la relation précédente :

$$f_e = \frac{c}{c+v} f_0$$

- b) L'équation d'onde dans le référentiel de la source est

$$p_1(x, t) = P_1 \cos(\omega t - kx) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega = 2\pi f_0 \\ \omega = kc \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad p_1(x, t) = P_1 \cos \left[2\pi f_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

La surpression perçue par le microphone est

$$p_m(t) = p_1(x_m, t) = P_1 \cos \left[2\pi f_0 \left(t - \frac{D+vt}{c} \right) \right]$$

$$\text{soit} \quad p_m(t) = P_1 \cos \left[2\pi f_0 \left(1 - \frac{v}{c} \right) t - 2\pi f_0 \frac{D}{c} \right]$$

Le signal perçue est donc harmonique de fréquence

$$f_m = f_0 \left(1 - \frac{v}{c} \right)$$

- c) Approche ondulatoire : source mobile.

i) La relation de dispersion donne $2\pi f_1 = k_1 c$.

ii) On doit identifier la vibration de la source et la valeur de l'onde en $x_S = vt$:

$$P_1 \cos(2\pi f_0 t) = P_1 \cos(2\pi f_1 t - k_1 vt)$$

$$\text{soit} \quad P_1 \cos(2\pi f_0 t) = P_1 \cos \left[2\pi f_1 \left(1 - \frac{v}{c} \right) t \right]$$

Par identification :

$$f_0 = f_1 \left(1 - \frac{v}{c} \right) \quad \text{donc} \quad f_1 = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$$

iii) Le microphone étant fixe

$$f_m = f_1 = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$$

On retrouve le résultat de l'approche heuristique.

iv) On doit résoudre le système

$$\begin{cases} 250 = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} \\ 210 = \frac{f_0}{1 + \frac{v}{c}} \end{cases} \text{ donc } \frac{250}{210} = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}$$

$$\text{donc } \frac{v}{c} = \frac{250 - 210}{250 + 210} = 0,0870$$

$$\text{donc } v = 0,0870c = 29,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 106 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

d) On utilise le résultat de la question précédente. L'onde de pression dans l'air est

$$p_1(x, t) = P_1 \cos \left[2\pi f_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

avec $f_1 = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$. Le microphone perçoit

$$p_m(t) = p_1(x_m, t) = P_1 \cos \left[2\pi f_1 \left(t - \frac{D + v_m t}{c} \right) \right]$$

$$p_m(t) = P_1 \cos \left[2\pi f_1 \left(1 - \frac{v_m}{c} \right) t - 2\pi f_1 \frac{D}{c} \right]$$

La fréquence perçue est donc

$$f_m = f_1 \left(1 - \frac{v_m}{c} \right) = f_0 \frac{1 - \frac{v_m}{c}}{1 - \frac{v}{c}}$$

e) Détection synchrone.

i) En utilisant le résultat de la question (b)

$$f' = f \left(1 - \frac{V}{c} \right)$$

ii) En utilisant le résultat de la question (c), en remarquant que la plaque s'éloigne à la vitesse V de la source :

$$f'' = \frac{f'}{1 + \frac{V}{c}} = f \frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}$$

iii) Le signal sortant du multiplieur est

$$U(t) = kU_e U_m \cos(2\pi f t + \varphi) + \cos(2\pi f'' t + \varphi'')$$

$$U(t) = \frac{kU_e U_m}{2} [\cos(2\pi(f + f'')t + \varphi + \varphi'') + \cos(2\pi(f - f'')t + \varphi - \varphi'')]$$

Le filtre passe-bas élimine le signal de fréquence $f + f''$ et sélectionne celui de fréquence

$$F = f - f'' = f - f \frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}} = \frac{2f \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}$$

$$\text{soit } F = \frac{2fV}{c + V} \approx \frac{2fV}{c}$$

car $V \ll c$ donc

$$V \approx \frac{cF}{2f}$$

16.20

a) On a

$$2\pi f = 2765 \text{ donc } f = 440 \text{ Hz}$$

C'est un LA.

b) L'amplitude de l'onde de pression est $P_1 = 10 \text{ Pa}$ donc $P \in [101290, 101310]$.

c) La relation de dispersion donne

$$2765 = 8,131 \cdot c \text{ donc } c = \frac{2765}{8,131} = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

En utilisant la célérité du son dans un gaz parfait

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} \text{ donc } T_0 = \frac{Mc^2}{\gamma R} = 288 \text{ K}$$

La loi des gaz parfaits donne

$$P_0 M = \mu_0 RT_0 \text{ donc } \mu_0 = \frac{P_0 M}{RT_0} = 1,226 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

La célérité vaut aussi

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}} \text{ donc } \chi_S = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 7,06 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$$

On vérifie la relation obtenue à l'exercice 16.16

$$\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0}$$

d) D'après la relation de dispersion

$$\lambda = \frac{c}{f} = 0,773 \text{ m}$$

e) La relation linéarisée

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad } p_1$$

permet d'exprimer

$$v_1(x, t) = \frac{P_1 k}{\mu_0 \omega} \cos(\omega t - kx) = \frac{1}{\mu_0 c} P_1 \cos(\omega t - kx)$$

$$\text{soit } \vec{v}_1(x, t) = 0,0240 \cos(2765t - 8,131x) \vec{u}_x$$

L'onde de masse volumique est

$$\mu_1(x, t) = \mu_0 \chi_S p_1(x, t) = 8,656 \cdot 10^{-5} \cos(2765t - 8,131x)$$

f) L'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport à t :

$$\vec{a}_1(x, t) = -66,4 \sin(2765t - 8,131x) \vec{u}_x$$

g) Par définition du vecteur de Poynting sonore

$$\vec{\Pi}_{\text{son}} = p_1 \vec{v}_1 = 0,240 \cos^2(2765t - 8,131x) \vec{u}_x$$

La puissance sonore est

$$\mathcal{P} = \vec{\Pi}_{\text{son}} \cdot S \vec{u}_x = 6,64 \cdot 10^{-3} \cos^2(2765t - 8,131x)$$

$$\text{donc } \langle \mathcal{P} \rangle = 3,32 \text{ mW}$$

h) Par définition

$$I_{\text{dB}} = 10 \log \frac{\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle}{10^{-12}} = 111 \text{ dB}$$

i) Par définition :

$$u_{\text{son}} = \frac{1}{2} \chi_S p_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 = 7,06 \cdot 10^{-4} \cos^2(2765t - 8,131x)$$

$$\text{et } \langle u_{\text{son}} \rangle = 3,53 \cdot 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

16.21

a) D'après le cours $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

b) D'après le cours

$$L = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{c}{2f} \text{ donc } f = n \frac{c}{2L}$$

soit $f = \frac{c}{2L}$ pour la fondamentale avec $n = 1$. Pour la corde de cuivre, la masse linéique est

$$\mu = \rho \cdot \pi \frac{d^2}{4} = 72,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\text{donc } c = \sqrt{\frac{850}{72,4 \cdot 10^{-3}}} = 108,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{et } L = \frac{f}{2c} = 1,94 \text{ m}$$

c) La célérité de la corde 1 est $c_1 = c$ et celle de la corde 2 détendue est

$$c_2 = \sqrt{\frac{0,95T}{\mu}} = \sqrt{0,95} c = 0,975c$$

La fréquence de la corde 1 est f et celle de la corde 2 est

$$f_2 = \frac{c_2}{2L} = 0,975f$$

L'onde sonore de pression est donc

$$p(t) = P_1 \cos(2\pi f t + \varphi_1) + P_1 \cos(2\pi \cdot 0,975 f t + \varphi_2)$$

$$p(t) = 2P_1 \cos\left(2\pi f \frac{1+0,975}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(2\pi f \frac{1-0,975}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

Cette expression est le produit de deux cosinus de périodes très différentes. La porteuse a pour fréquence

$$f_p = f \frac{1+0,975}{2} = 0,9875f \simeq f \text{ donc } T_p \simeq \frac{1}{f}$$

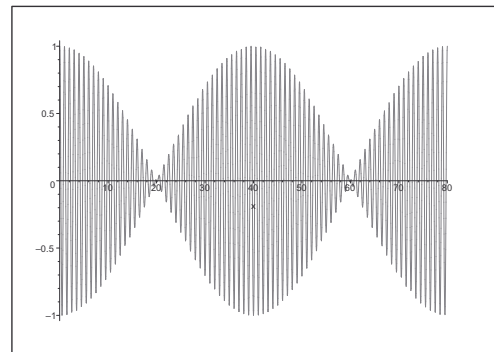
L'enveloppe a pour fréquence

$$f_e = f \frac{1-0,9875}{2} = 0,0125f \text{ donc } T_e = \frac{80}{f} = 80T_p$$

La courbe est donc comprise entre les deux enveloppes

$$\pm 2P_1 \cos\left(2\pi f_e t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

et effectue 40 vibrations entre elles-deux dans chaque feu-
seau.



Le son est donc de fréquence f mais il « bat », c'est-à-dire qu'il s'éteint régulièrement à chaque annulation de l'enveloppe (ce qui est très désagréable à l'oreille). Pour $f = 55 \text{ Hz}$, il y a une extinction du son deux fois par période de l'enveloppe, donc toutes les

$$\Delta t = \frac{T_e}{2} = \frac{80}{2 \times 220} = 0,182 \text{ s}$$

donc environ 5 fois par seconde.

16.22

- a) La résultante des forces de pression exercées par l'air sur le tympan vaut

$$\vec{F} = +(P_0 + p_1)\vec{dS} - P_0\vec{dS} = p_1\vec{dS}$$

Le tympan est imperméable, donc sa vitesse est égale à celle de la particule de fluide qui est à sa gauche, soit \vec{v}_1 . La puissance mécanique de la résultante des forces de pression est donc

$$\mathcal{P}_m = \vec{F} \cdot \vec{v}_1 = p_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{dS}$$

- b) Par identification avec la formule qui définit le vecteur de Poynting sonore,

$$\vec{\Pi}_{\text{son}} = p_1 \vec{v}_1$$

- c) En utilisant la formule donnée :

$$\text{div } \vec{\Pi}_{\text{son}} = \text{div} (p_1 \vec{v}_1) = p_1 \text{div } \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p_1$$

En utilisant les équations linéarisées

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p_1 \\ \text{div } \vec{v}_1 = -\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} \end{cases}$$

on en déduit

$$\text{div } \vec{\Pi}_{\text{son}} = -\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} p_1 - \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \cdot \vec{v}_1$$

$$\text{div } \vec{\Pi}_{\text{son}} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \chi_S p_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \vec{v}_1^2 \right]$$

On reconnaît entre les crochets l'énergie volumique sonore. L'équation locale de conservation de l'énergie sonore s'écrit donc

$$\text{div } \vec{\Pi}_{\text{son}} + \frac{\partial u_{\text{son}}}{\partial t} = 0$$

Cette équation de conservation est mathématiquement analogue aux autres lois de conservation du programme (premier principe local en thermique, nombre de particules en diffusion, masse en mécanique des fluides, charge en électromagnétisme).

- 16.23 Le vecteur de Poynting sonore (densité de courant énergétique) est, avec les notations du cours et en utilisant le résultat de l'exemple :

$$\vec{\Pi}_{\text{son}} = p_1 \vec{v}_1$$

Notons, pour alléger les notations, $\theta = \omega t - kr$. Il vient :

$$\vec{\Pi}_{\text{son}} = \frac{A}{r} \cos \theta \cdot \frac{A}{\mu_0 \omega} \left[\frac{1}{r^2} \sin \theta + \frac{k}{r} \cos \theta \right] \vec{u}_r$$

$$\vec{\Pi}_{\text{son}} = \frac{A^2}{\mu_0 \omega r^2} \left[\frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta + k \cos^2 \theta \right] \vec{u}_r$$

Le flux de $\vec{\Pi}_{\text{son}}$ à travers une sphère Σ de rayon r est

$$\mathcal{P} = \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi}_{\text{son}} \cdot \vec{dS}$$

$$\mathcal{P} = \oiint_{\Sigma} \Pi_{\text{son}} \cdot dS = \Pi_{\text{son}} \cdot 4\pi r^2$$

$$\mathcal{P} = \frac{4\pi A^2}{\mu_0 \omega} \left[\frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta + k \cos^2 \theta \right]$$

Les valeurs moyennes dans le temps des deux fonctions trigonométriques sont

$$\langle \sin \theta \cos \theta \rangle = 0 \text{ et } \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{4\pi A^2}{\mu_0 \omega} \left[0 + \frac{k}{2} \right] = \frac{2\pi k A^2}{\mu_0 \omega}$$

Or $\omega = kc$ donc

$$\text{donc } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{2\pi A^2}{\mu_0 c}$$

qui est bien indépendant de r .

16.24

- a) La loi de Laplace pour l'air dans la bulle s'écrit

$$p_B(t) \left(\frac{4}{3} \pi (R_0 + \xi(t))^3 \right)^{\gamma} = P_0 \left(\frac{4}{3} \pi R_0^3 \right)^{\gamma}$$

$$\text{soit } p_B(t) (R_0 + \xi(t))^{3\gamma} = P_0 R_0^{3\gamma}$$

$$\text{soit } p_B(t) = P_0 \left(1 + \frac{\xi(t)}{R_0} \right)^{-3\gamma}$$

Le développement limité à l'ordre 1 en $\frac{\xi(t)}{R_0}$ donne

$$p_B(t) = P_0 \left(1 - 3\gamma \frac{\xi(t)}{R_0} \right)$$

$$\text{soit } p_B(t) - P_0 + 3\gamma P_0 \frac{\xi(t)}{R_0} = 0$$

ce qui donne bien la relation de l'énoncé en divisant par P_0 .

- b) L'incompressibilité de l'eau se traduit en mécanique des fluides par la relation $\text{div } \vec{v} = 0$ soit, en coordonnées sphériques

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_1(r, t))}{\partial r} = 0 \text{ donc } r^2 v_1(r) = \text{Cste}$$

Cette constante est évaluée à la surface de la bulle, de rayon $R(t)$ et de vitesse $\dot{R}(t)$:

$$r^2 v_1(r, t) = R^2(t) \cdot \dot{R}(t)$$

- c) On écrit la loi de la quantité de mouvement sur la particule d'eau, soumise seulement aux forces de pression :

$$\mu_e \frac{\partial \vec{v}_1(r, t)}{\partial t} = -\text{grad } p_1(r, t) \text{ donc } \mu_e \frac{\partial v_1(r, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p_1(r, t)}{\partial r}$$

D'après le résultat de la question (b) :

$$v_1(r, t) = \frac{R^2(t)\dot{R}(t)}{r^2} \text{ donc}$$

$$\frac{\partial v_1(r, t)}{\partial t} = \frac{2R(t)\dot{R}^2(t) + R^2(t)\ddot{R}(t)}{r^2}$$

L'équation attendue est donc

$$\mu_e \frac{2R(t)\dot{R}^2(t) + R^2(t)\ddot{R}(t)}{r^2} = -\frac{\partial p_1(r, t)}{\partial r}$$

- d) On a $R(t) = R_0 + \xi(t)$ donc $\dot{R}(t) = \dot{\xi}(t)$ et $\ddot{R}(t) = \ddot{\xi}(t)$. Le terme $2R(t)\dot{R}^2(t)$ est donc du second ordre et $R^2(t)\ddot{R}(t) \approx R_0^2\ddot{\xi}(t)$. L'équation de la question (c) s'écrit donc, au premier ordre

$$\mu_e \frac{R_0^2}{r^2} \ddot{\xi} = -\frac{\partial p_1(r, t)}{\partial r}$$

- e) On intègre entre les deux bornes

$$\int_{R(t)}^{+\infty} \mu_e \frac{R_0^2}{r^2} \ddot{\xi}(t) dr = - \int_{p_B(t)-P_0}^0 dp_1$$

$$\mu_e R_0^2 \ddot{\xi} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R(t)}^{+\infty} = [-p_1]_{p_B(t)-P_0}^0$$

$$\frac{\mu_e R_0^2 \ddot{\xi}}{R(t)} = p_B(t) - P_0$$

avec $R(t) \approx R_0$ donc

$$p_B(t) - P_0 = \mu_e R_0 \ddot{\xi}$$

- f) En utilisant l'équation de la question (a), on en déduit

$$\frac{\mu_e R_0 \ddot{\xi}}{P_0} + 3\gamma \frac{\xi(t)}{R_0} = 0$$

$$\text{soit } \ddot{\xi} + \frac{3\gamma P_0}{\mu_e R_0^2} \xi = 0$$

C'est une équation d'oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_M = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\mu_e R_0^2}}$$

appelée pulsation de Minnaert.

- g) On a établi à la question (b)

$$v_1(r, t) = \frac{R^2(t)\dot{R}(t)}{r^2} \approx \frac{R_0^2 \dot{\xi}(t)}{r^2}$$

$$\text{soit } v_1(r, t) = -\frac{R_0^2 \omega_M}{r^2} \sin(\omega_M t)$$

Ce n'est évidemment pas une onde progressive (il n'y a pas de terme en $\omega t - kr$), et on n'est pas dans le modèle du cours. On l'explique par le fait qu'on a supposé l'eau incompressible, alors que la théorie des ondes sonores développée dans ce chapitre traite des fluides compressibles.

CHAPITRE 17

Ondes électromagnétiques dans le vide

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Onde électromagnétique dans le vide.
- ◇ Onde plane progressive harmonique.
- ◇ Vecteur de Poynting électromagnétique.
- ◇ Bilan énergétique pour une onde électromagnétique.
- ◇ Polarisation rectiligne, elliptique, circulaire.
- ◇ Polariseur.
- ◇ Lame quart d'onde, lame demi-onde.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Établir l'EDA électromagnétique dans le vide, exprimer la solution OPPH PR.
- ◇ Étudier l'aspect énergétique d'une onde électromagnétique dans le vide.
- ◇ Identifier une onde polarisée rectilignement.
- ◇ Faire l'analyse et la synthèse d'une onde polarisée rectilignement.
- ◇ Identifier une onde polarisée elliptiquement ou circulairement.
- ◇ Faire l'analyse et la synthèse d'une onde polarisée circulairement ou elliptiquement.

Les méthodes à retenir

Établir l'EDA électromagnétique dans le vide, exprimer la solution OPPH PR.

Deux méthodes distinctes conduisent à l'expression et aux propriétés de la solution **Onde Plane Progressive Harmonique Polarisée Rectilignement** (notée OPPH PR).

Première méthode. L'équation de propagation des ondes électromagnétiques (notées OEM) dans le vide utilise la propriété d'analyse vectorielle

$$\overrightarrow{\text{rot rot}} = \overrightarrow{\text{grad div}} - \Delta$$

et le théorème de Schwartz. Dans le vide, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$. Les équations de Maxwell s'écrivent donc

$$\begin{aligned} \text{(M. Gauss)} : \text{div } \vec{E} &= 0 & \text{(M. Thomson)} : \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{(M. Faraday)} : \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(M. Ampère)} : \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\text{rot rot}} \vec{E} = \overrightarrow{\text{rot}} \left[-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} \\ \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{array} \right.$$

$$\text{donc } \overrightarrow{\text{grad div}} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{soit } \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

L'équation de d'Alembert vérifiée par \vec{B} est identique. La solution onde plane progressive selon x harmonique, polarisée rectilignement selon y est

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

En injectant dans l'EDA, on obtient la **relation de dispersion**

$$\omega^2 = k^2 c^2 \text{ donc } k = \frac{\omega}{c}$$

pour l'onde se propageant dans le sens croissant des x . On déduit de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{B} = B_0 \vec{u}_z \cos(\omega t - kx + \varphi) \text{ avec } E_0 = cB_0$$

Deuxième méthode. Si on cherche a priori une solution OPPH PR sous la forme complexe

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})} \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$$

alors on peut écrire directement les équations de Maxwell en grandeurs complexes, avec les règles de dérivation suivantes :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \leftrightarrow i\omega \vec{A}, \text{ div } \vec{A} \leftrightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{A} \text{ et } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \leftrightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{A}$$

Par suite :

$$-i\vec{k} \cdot \vec{\underline{E}} = 0, \quad -i\vec{k} \cdot \vec{\underline{B}} = 0, \quad -i\vec{k} \wedge \vec{\underline{E}} = -i\omega\vec{\underline{B}}, \quad -i\vec{k} \wedge \vec{\underline{B}} = i\omega\epsilon_0\mu_0\vec{\underline{E}}$$

On obtient donc immédiatement que $(\vec{k}, \vec{\underline{E}}, \vec{\underline{B}})$ forme un trièdre direct et on élimine $\vec{\underline{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega}$ en utilisant la formule du double produit vectoriel :

$$-\vec{k} \wedge \frac{\vec{k} \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega} = \frac{k^2 \vec{\underline{E}}}{\omega} = \omega\epsilon_0\mu_0\vec{\underline{E}}$$

$$\text{donc } k^2 = \omega^2\epsilon_0\mu_0 = \frac{\omega^2}{c^2} \text{ et } \|\vec{\underline{E}}\| = c\|\vec{\underline{B}}\|$$

Ces propriétés forment la **structure de l'OPPH**. Attention, elles ne doivent en aucun cas être généralisées à toute onde électromagnétique dans le vide. En particulier, une superposition de deux ondes OPPH PR est solution de l'équation de d'Alembert, mais elle n'est pas forcément plane, ni progressive, ni harmonique, ni polarisée rectilignement. L'exercice 17.2 explore quelques-unes de ces superpositions.

Exemple :

En grandeurs complexes, les notations $\vec{k} \cdot \vec{\text{OM}}$ et $\vec{\underline{E}}_0$ peuvent paraître moins claires que kx et $E_0 \vec{u}_y$ en grandeurs réelles. Il n'en est rien. Elles laissent au contraire le choix de la direction et du sens de propagation de l'OPPH, celui de la polarisation et de la phase de l'onde. • Si on baptise x l'axe de propagation d'une onde, qu'on l'oriente dans le sens de propagation alors $\vec{k} = k\vec{u}_x$. Il vient

$$\vec{k} \cdot \vec{\text{OM}} = \begin{vmatrix} k & | & x \\ 0 & \cdot & y \\ 0 & & z \end{vmatrix} = kx$$

• Le champ électrique étant transversal, si l'onde est polarisée rectilignement, on peut baptiser y l'axe de polarisation, c'est-à-dire la direction constante du champ électrique, et $\vec{\underline{E}}_0 = \underline{E}_0 \vec{u}_y$. • Si on note E_0 l'amplitude réelle et φ la phase du champ électrique, alors $\underline{E}_0 = E_0 e^{i\varphi}$. On en déduit l'expression complexe

$$\vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{\text{OM}})} = E_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi)} \vec{u}_y$$

$$\text{donc } \vec{E}(M, t) = \mathcal{R}e(\vec{\underline{E}}) = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_y$$

↪ **Exercices 17.1, 17.2.**

Étudier l'aspect énergétique d'une onde électromagnétique dans le vide.

- L'onde électromagnétique est susceptible de transporter de l'énergie électromagnétique. Le vecteur densité de courant énergétique est le **vecteur de Poynting** électromagnétique

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Dans le vide, il n'y a aucun porteur de charge susceptible d'accumuler de l'énergie sous forme électrocinétique

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

L'onde électromagnétique fait donc varier l'énergie électromagnétique volumique

$$u_{em} = u_e + u_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}$$

L'équation locale de poynting traduit le bilan local d'énergie électromagnétique :

$$-\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \text{div } \vec{\Pi}$$

Sa forme intégrale est définie pour un volume \mathcal{V} délimité par une surface fermée Σ

$$-\frac{dU_{em}}{dt} = \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \text{ avec } U_{em} = U_e + U_m$$

$$\text{et } \begin{cases} U_e = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} d\tau \\ U_m = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} d\tau \end{cases}$$

Exemple :

Pour l'OPPH PR décrite à la fiche précédente :

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t - kx) \wedge B_0 \vec{u}_z \cos(\omega t - kx)}{\mu_0}$$

$$\text{soit } \vec{\Pi} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

Sa valeur moyenne dans le temps vaut

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} \vec{u}_x$$

Or $E_0 = cB_0$ et $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ donc

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_x = \frac{1}{2\mu_0} c B_0^2 \vec{u}_x$$

L'énergie électromagnétique volumique vaut

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) + \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t - kx)$$

$$\text{soit } u_{em} = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

On remarque qu'il y a équipartition de l'énergie volumique entre composante électrique et composante magnétique. Vérifions l'équation locale de Poynting.

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -2\omega \epsilon_0 E_0^2 \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx)$$

$$\text{div } \vec{\Pi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{div } \vec{\Pi} = 2k \epsilon_0 c E_0^2 \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx)$$

et la relation $\omega = kc$ permet de valider la relation de Poynting.

↪ **Exercices 17.3, 17.4, 17.5, 17.6, 17.7, 17.8, 17.9.**

Identifier une onde polarisée rectilignement.

Lorsque le champ électrique d'une onde électromagnétique est exprimé dans une base quelconque, il est important de disposer d'une méthode mathématique qui permette de déterminer si cette onde est, ou non, polarisée rectilignement.

On se place dans le cas particulier où le vecteur d'onde est selon l'un des axes de la base cartésienne :

$$\vec{k} = \pm k\vec{u}_x \text{ ou } \pm k\vec{u}_y \text{ ou } \pm k\vec{u}_z$$

Prenons par exemple $\vec{k} = k\vec{u}_z$ et considérons l'onde plane progressive harmonique

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{cases}$$

Ce champ électrique est **transverse**, orthogonal à la direction de propagation \vec{u}_z . Elle est **polarisée rectilignement** si et seulement si sa direction reste constante, donc si

$$\varphi_x - \varphi_y = n\pi, \quad n \text{ entier relatif}$$

La direction de propagation est celle du champ électrique, s'il n'est pas nul, à $t = 0$ et en $z = 0$.

Exemple :

Considérons les ondes suivantes

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_y = 2E_0 \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{cases} \quad \vec{E}_2 = \begin{cases} E_x = E_0 \cos\left(\omega t + ky + \frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 \\ E_z = E_0 \cos\left(\omega t + ky - \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

La première onde se propage selon $\vec{k}_1 = k\vec{u}_z$. On a

$$\varphi_x - \varphi_y = 0 - 0 = 0$$

donc elle est polarisée rectilignement selon

$$\vec{E}_1(0,0) = \begin{cases} E_0 \\ 2E_0 \\ 0 \end{cases}$$

La deuxième se propage selon $\vec{k}_2 = -k\vec{u}_y$. On a

$$\varphi_x - \varphi_z = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} \neq n\pi$$

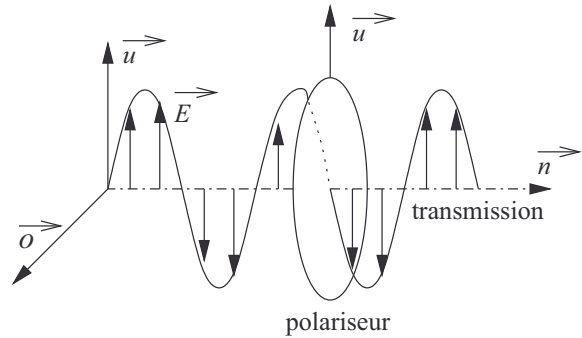
donc elle n'est pas polarisée rectilignement.

↪ Exercices 17.10, 17.11.

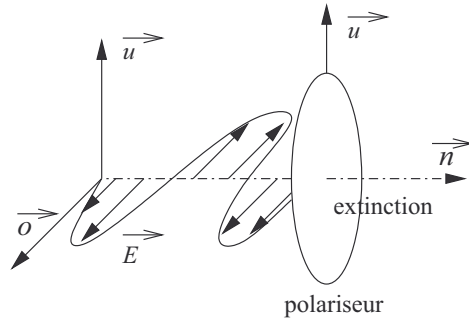
Faire l'analyse et la synthèse d'une onde polarisée rectilignement.

La lame polarisante ou **polariseur**, est une fine lame de vecteur normal \vec{n} , d'axe \vec{u} dans son plan. Notons \vec{o} le vecteur de son plan tel que $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{o})$ forme un trièdre orthogonal.

- Toute OPPH se propageant dans la direction de \vec{n} polarisée rectilignement selon \vec{u} (axe transparent) traverse le polariseur sans atténuation.



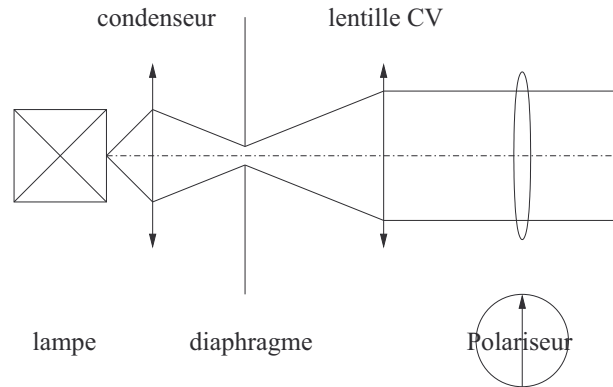
- Toute OPPH se propageant dans la direction de \vec{n} polarisée rectilignement selon \vec{o} (axe opaque) est arrêtée par le polariseur.



Le raisonnement est toujours basé sur un schéma explicatif qui fait apparaître clairement les axes de propagation, transparent et opaque, et sur une décomposition des champs électriques sur ces axes.

a) Voici le protocole d'**analyse expérimentale** de polarisation rectiligne. On place le polariseur, appelé ici **analyseur**, en alignant \vec{n} avec l'axe \vec{u}_z de propagation du faisceau de lumière qu'on veut analyser. On le fait pivoter autour de cet axe. Si la lumière est polarisée rectilignement dans une direction x , alors il y aura extinction quand $\vec{o} = \vec{u}_x$, et intensité lumineuse maximale lorsque $\vec{u} = \vec{u}_x$. On retient que la direction de polarisation est donc la perpendiculaire à \vec{u} lors de l'extinction. Si l'onde n'est pas polarisée rectilignement, il n'y aura jamais extinction.

b) Voici le protocole de **production expérimentale** d'une lumière polarisée rectilignement (en supposant la lampe quasi monochromatique).

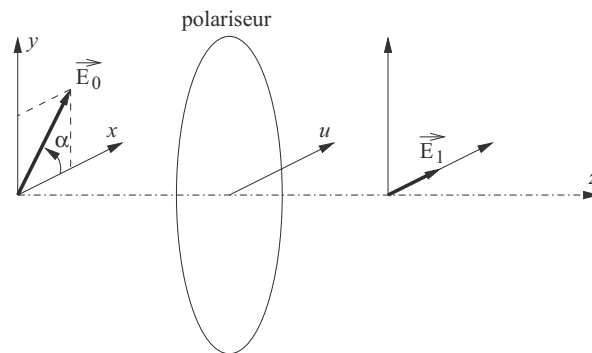


Exemple :

Considérons un faisceau de lumière se propageant dans la direction de \vec{u}_z , polarisée rectilignement selon un axe

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} . \text{ On place un polariseur d'axe transparent}$$

$\vec{u} = \vec{u}_x$ sur le trajet du faisceau.



Le champ électrique de l'onde électromagnétique incidente et celui de l'onde électromagnétique émergente s'écrivent

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha \\ E_0 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz) \text{ et } \vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz)$$

Les intensités lumineuses correspondantes sont donc

$$I_0 = K \langle \vec{E}_0^2 \rangle = \frac{KE_0^2}{2} \text{ et } I_1 = K \langle \vec{E}_1^2 \rangle = \frac{KE_1^2 \cos^2 \alpha}{2}$$

$$\text{donc } I_1 = I_0 \cos^2 \alpha$$

C'est la **loi de Malus**.

↪ **Exercices 17.12, 17.13, 17.14.**

Identifier une onde polarisée elliptiquement ou circulairement.

Dans un plan donné, orthogonal à la direction de propagation d'une OPPH, si l'extrémité du vecteur champ électrique décrit une ellipse, l'onde est **polarisée elliptiquement**, si elle décrit un cercle, l'onde est **polarisée circulairement**. On se place dans le cas particulier où le vecteur d'onde est selon l'un des axes de la base cartésienne :

$$\vec{k} = \pm k\vec{u}_x \text{ ou } \pm k\vec{u}_y \text{ ou } \pm k\vec{u}_z$$

Prenons par exemple $\vec{k} = k\vec{u}_z$ et considérons l'onde plane progressive harmonique

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{cases}$$

Ce champ électrique est **transverse**, orthogonal à la direction de propagation \vec{u}_z . Elle est **polarisée circulairement** si et seulement si

$$\begin{cases} E_{0x} = E_{0y} \text{ et} \\ \varphi_x - \varphi_y = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \text{ entier relatif} \end{cases}$$

Elle est **polarisée elliptiquement** si

$$\begin{cases} E_{0x} \neq E_{0y} \text{ ou} \\ \varphi_x - \varphi_y \neq n\frac{\pi}{2}, n \text{ entier relatif} \end{cases}$$

Voici une méthode permettant de préciser cette polarisation.

a) On identifie le vecteur d'onde (par exemple $k\vec{u}_z$) et on se place dans un plan orthogonal à ce vecteur (en imposant $z = 0$ par exemple).

b) On identifie la fenêtre rectangulaire de variations du champ électrique dans ce plan, dans deux directions orthogonales (par exemple $(E_x, E_y) \in [-a, a] \times [-b, b]$).

c) On cherche à quelle date le champ électrique touche l'un des bords de la fenêtre selon un axe (par exemple $E_y = b$ à $t = t_1$).

- d) À cette date, on détermine le signe de la dérivée par rapport au temps du champ électrique selon l'autre axe (par exemple $\frac{dE_x}{dt}(t_1) > 0$). On en déduit le sens de rotation du champ électrique.
- e) On conclut en indiquant s'il s'agit d'une polarisation circulaire ou elliptique, gauche ou droite, en regardant l'onde en face selon son sens de propagation.

Exemple :

Considérons l'onde plane progressive harmonique de champ électrique

$$\vec{E} \begin{cases} 0 \\ E_0 \cos(\omega t + kx - \frac{\pi}{4}) \\ 2E_0 \sin(\omega t + kx) \end{cases}$$

- a) Le vecteur d'onde est $\vec{k} = -k\vec{u}_x$. On se place dans le plan $x = 0$.
- b) Le champ électrique évolue dans la fenêtre

$$(E_y, E_z) \in [-E_0, E_0] \times [-2E_0, 2E_0]$$

- c) Le champ touche le bord supérieur quand $E_z = 2E_0$ soit

$$\sin(\omega t) = 1 \text{ donc } \omega t_1 = \frac{\pi}{2}$$

À cette date (le calcul est facultatif),

$$E_y(t_1) = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = E_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

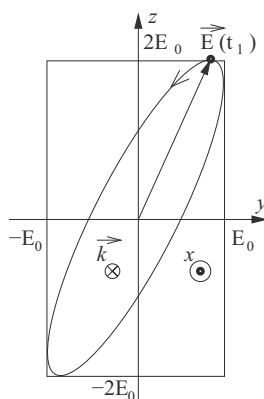
- d) La dérivée de E_y est

$$\frac{dE_y}{dt} = -\omega E_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

À la date t_1 , cette dérivée vaut

$$\frac{dE_y}{dt}(t_1) = -\omega E_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\omega E_0 \sin \frac{\pi}{4} < 0$$

Voici la trace du mouvement du champ électrique au voisinage de t_1 dans la fenêtre rectangulaire et dans le plan $x = 0$.



Comme E_y décroît à la date t_1 , le vecteur tourne dans le sens trigonométrique (à gauche) sur la figure.

e) Mais comme le vecteur \vec{k} fuit vers l'arrière de la figure, si on regarde l'onde en face, on voit une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre. C'est donc une onde polarisée elliptique droite.

↪ **Exercices 17.15, 17.16, 17.17.**

Faire l'analyse et la synthèse d'une onde polarisée circulairement ou elliptiquement.

On dispose de deux types de lames.

La **lame quart d'onde** est une fine lame de vecteur normal \vec{n} , d'**axe rapide** \vec{u}_X et d'**axe lent** \vec{u}_Y tels que $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{n})$ forme un trièdre orthogonal. Toute OPPH se propageant dans la direction de \vec{n} voit

- sa composante de champ électrique sur l'axe X inchangée
- sa composante de champ électrique sur l'axe Y déphasée de $\frac{\pi}{2}$.

La **lame demi-onde** est une fine lame de vecteur normal \vec{n} , d'**axe rapide** \vec{u}_X et d'**axe lent** \vec{u}_Y tels que $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{n})$ forme un trièdre orthogonal. Toute OPPH se propageant dans la direction de \vec{n} voit

- sa composante de champ électrique sur l'axe X inchangée
- sa composante de champ électrique sur l'axe Y déphasée de π .

Le raisonnement est toujours basé sur un schéma explicatif qui fait apparaître clairement les axes de propagation, rapides et lents, et sur une décomposition des champs électriques sur ces axes. Les lames quart d'onde et demi-onde sont utilisées en complément de polariseurs et d'analyseurs.

a) Le protocole d'**analyse expérimentale** de polarisation circulaire ou elliptique utilise la propriété fondamentale suivante : une lame quart d'onde peut transformer une lumière polarisée circulairement ou elliptiquement en une lumière polarisée rectilignement, qu'on met en évidence ensuite grâce à un polariseur.

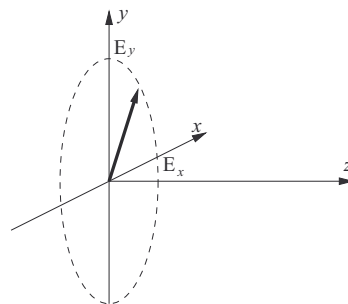
b) Réciproquement, une lame quart d'onde peut transformer une lumière polarisée rectilignement en une lumière polarisée circulairement ou elliptiquement.

c) La lame demi-onde permet de changer la direction de polarisation rectiligne, ou le sens de rotation de la polarisation circulaire ou elliptique.

Exemple :

a) Une lumière polarisée elliptiquement se propage selon \vec{u}_z on définit l'axe y selon le grand axe de l'ellipse et l'axe x selon le petit axe.

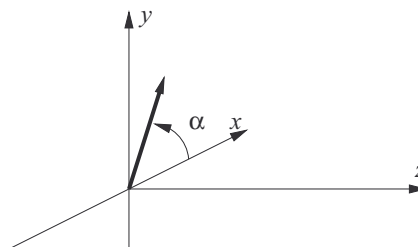
$$\vec{E} \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{cases}$$



En plaçant un analyseur sur l'axe z de propagation, et en tournant son axe \vec{u}_p , on obtient en sortie une lumière polarisée rectilignement dont l'intensité est maximale quand $\vec{u}_p = \vec{u}_y$, et minimale quand $\vec{u}_p = \vec{u}_x$.

b) Une lumière polarisée rectilignement se propage selon \vec{u}_z . Sa direction de propagation fait un angle α avec \vec{u}_x , soit

$$\vec{E}_i \begin{cases} E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{cases}$$



En plaçant une lame quart d'onde d'axe rapide X selon \vec{u}_x et d'axe lent Y selon \vec{u}_y , l'onde émergente s'écrit

$$\vec{E}_f \begin{cases} E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kz \pm \frac{\pi}{2}) = \mp E_0 \sin \alpha \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{cases}$$

C'est une onde polarisée elliptiquement, circulairement si $\alpha = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$.

c) En plaçant une lame demi-onde d'axe rapide X selon \vec{u}_x et d'axe lent Y selon \vec{u}_y , l'onde émergente s'écrit

$$\vec{E}_f \begin{cases} E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kz + \pi) = -E_0 \sin \alpha \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{cases}$$

C'est une onde polarisée rectilignement, de direction de polarisation symétrique par rapport à Y.

↪ **Exercices 17.18, 17.19, 17.20, 17.21, 17.22, 17.23.**

Énoncés des exercices

17.1

Représentation graphique de l'OPPH PR

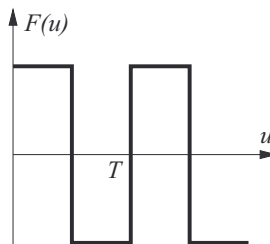
Une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propage dans le vide avec le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$. On donne l'amplitude complexe du champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$.

- Donner l'expression complète des ondes de champ électrique $\vec{E}(x, t)$ et magnétique $\vec{B}(x, t)$ en fonction des seuls paramètres B_0 , k et c .
- Cette onde est-elle polarisée rectilignement ?
- Représenter en trois dimensions l'allure de la distribution des champs électriques et magnétiques à $t = 0$ sur l'axe (O, x) .
- Même question à la date $t_1 = \frac{\pi}{2kc}$.

17.2

Superpositions d'ondes électromagnétiques

- Pourquoi la combinaison linéaire de solutions du type OPPH PR de l'EDA électromagnétique dans le vide est-elle solution de l'EDA ?
- On superpose deux OPPH PR de même amplitude $E_0\vec{u}_y$, de phase nulle et de vecteurs d'onde opposés $\pm k\vec{u}_x$. Donner l'expression du champ électrique résultant $\vec{E}(M, t)$ et du champ magnétique résultant $\vec{B}(M, t)$. Caractériser cette onde. Les champs magnétique et électrique s'annulent-ils aux mêmes abscisses ?
- La fonction périodique suivante



a pour décomposition en séries de Fourier

$$F(u) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \cos \left[(2p+1) \cdot \frac{2\pi u}{T} \right]$$

En déduire qu'une onde électromagnétique rectangulaire d'amplitude E_0 , de fréquence fondamentale f , se propageant selon \vec{u}_x et polarisée rectilignement selon \vec{u}_y est la superposition d'OPPH PR.

- On superpose deux OPPH PR d'amplitudes respectives $E_0\vec{u}_y$ et $E_0\vec{u}_z$, de phases respectives 0 et $\frac{\pi}{2}$ et de vecteurs d'onde égaux $k\vec{u}_x$. Donner l'expression du champ électrique résultant $\vec{E}(M, t)$. Dans le plan $x = 0$, comment évolue le champ électrique au cours du temps ? En déduire un qualificatif pour la polarisation de cette onde.

17.3**Application numérique pour un faisceau laser**

Un faisceau laser pratiquement cylindrique est assimilé sur sa section $S = 1 \text{ mm}^2$ à une OPPH se propageant dans le vide avec une longueur d'onde $\lambda = 532 \text{ nm}$. Sa puissance moyenne est $\mathcal{P} = 50 \text{ W}$. Calculer les valeurs de la fréquence f , la période T , la pulsation ω , la norme du vecteur d'onde k , l'amplitude du champ électrique E_0 et celle du champ magnétique B_0 . On donne $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

17.4**Ordre de grandeur du rayonnement solaire**

La distance entre le Soleil et la Terre est de l'ordre de 150 millions de kilomètres. La puissance électromagnétique émise par le Soleil vaut $\mathcal{P} = 3,82 \cdot 10^{26} \text{ W}$ et le rayonnement est isotrope. Calculer l'ordre de grandeur de la valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting solaire à la surface de la Terre et l'énergie totale incidente sur le globe terrestre. Le rayon de la Terre est $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$.

17.5**Vecteur de Poynting pour une OEM stationnaire**

Une onde électromagnétique stationnaire dans le vide a pour champ électrique

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t) \sin(kz)$$

- Déterminer le champ magnétique (il n'y a pas de champ magnétique permanent).
- En déduire le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(z, t)$.
- Calculer sa valeur moyenne temporelle et conclure.

17.6**Modèle photonique : utilisation de $\vec{\Pi}$**

Le quantum de lumière est le photon, son énergie est donnée par la relation de Planck-Einstein $\mathcal{E} = hf$ où $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck et f la fréquence de l'onde associée. Les photons se déplacent à la vitesse de la lumière.

- Une OPPH PR qui se propage dans le vide a pour champ électrique

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t - kx)$$

Donner l'expression du vecteur de Poynting moyen associé.

- À travers une surface élémentaire $d\vec{S} = dS \vec{u}_x$, donner l'expression de la puissance moyenne électromagnétique véhiculée par l'onde.
- Pendant un intervalle de temps dt , en déduire l'énergie moyenne $d\mathcal{W}$ qui traverse la surface.
- En déduire le nombre dN de photons qui travers la surface, puis le nombre n_0 de photons par mètre cube dans le faisceau de lumière.
- Calculer n_0 pour le laser décrit dans l'exercice 17.3.

17.7

Onde rayonnée par un dipôle oscillant

Un dipôle oscillant sur l'axe z est formé de deux charges ponctuelles $-q$ et $+q$ qui se déplacent de façon symétrique de part et d'autre de O , en échangeant périodiquement leurs positions. On montre que l'onde électromagnétique rayonnée par ce dipôle oscillant s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = E_0 \cdot \frac{r_0}{r} \sin\theta \vec{u}_\theta \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \\ \vec{B}(M, t) = \frac{E_0}{c} \cdot \frac{r_0}{r} \sin\theta \vec{u}_\phi \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \end{cases}$$

- a) Quelles analogies peut-on faire avec l'OPPH ? Quelles différences note-t-on ?
- b) Les propriétés de symétrie et d'invariance habituelles en électrostatique et en magnétostatique sont-elles vérifiées ?
- c) Expliciter le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne.
- d) Calculer la puissance électromagnétique moyenne traversant une sphère de rayon r et commenter le résultat. On donne l'élément de surface de la sphère et l'intégrale

$$\vec{dS} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{u}_r \text{ et } \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$$

- e) Pourquoi l'amplitude d'oscillation du dipôle diminue-t-elle au cours du temps ?

17.8

Modèle photonique : utilisation de u_{em}

Le quantum de lumière est le photon, son énergie est donnée par la relation de Planck-Einstein $\mathcal{E} = hf$ où h est la constante de Planck et f la fréquence de l'onde associée. Les photons se déplacent à la vitesse de la lumière.

- a) Une OPPH PR qui se propage dans le vide a pour champ électrique

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \cos(\omega t - kx)$$

Donner l'expression des énergies volumiques moyennes électrique $\langle u_e \rangle$, magnétique $\langle u_m \rangle$ et totale $\langle u_{em} \rangle$.

- b) En déduire le nombre n_0 de photons par mètre cube dans le faisceau de lumière.

17.9

Condition d'interférences

Deux OPPH polarisées rectilignement se propagent dans le vide selon \vec{u}_x . On donne, en $x = 0$, $\vec{E}_1(t) = E_0 \vec{u}_y \cos(\omega_1 t)$ et $\vec{E}_2(t) = E_0 \vec{u}_y \cos(\omega_2 t + \theta)$.

- a) Calculer les valeurs moyennes des vecteurs de Poynting $\vec{\Pi}_1$ et $\vec{\Pi}_2$ associés à chaque onde.
- b) Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé à l'onde résultante.
- c) Dans quel cas a-t-on $\langle \vec{\Pi} \rangle \neq \langle \vec{\Pi}_1 \rangle + \langle \vec{\Pi}_2 \rangle$?

17.10

Analyse de polarisation d'ondes électromagnétiques

Pour les deux ondes suivantes, déterminer le vecteur d'onde et le cas échéant la direction de polarisation rectiligne.

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_x = E_0 \cos(\omega t + kz) \\ E_y = E_0 \sin(\omega t + kz) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y = -E_0 \cos\left(\omega t - kx + \frac{2\pi}{3}\right) \\ E_z = 3E_0 \sin\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}$$

17.11

Analyse de transversalité et de propagation d'ondes électromagnétiques

a) Les ondes suivantes sont-elles transverses électriques ?

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kx + 2ky) \\ 2E_0 \cos(\omega t - kx + 2ky) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 2E_0 \cos(\omega t - kx + 2ky) \\ E_0 \cos(\omega t - kx + 2ky) \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Les ondes suivantes admettent-elles un vecteur d'onde ?

$$\vec{E}_3 = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ 2E_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{E}_4 = \begin{pmatrix} 2E_0 \cos(\omega t - ky) \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Quelle est la particularité de l'onde suivante (et aussi de l'onde 1) ?

$$\vec{E}_5 = \begin{pmatrix} 2E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \cos(\omega t - ky) \\ 0 \end{pmatrix}$$

17.12

Polarisation rectiligne

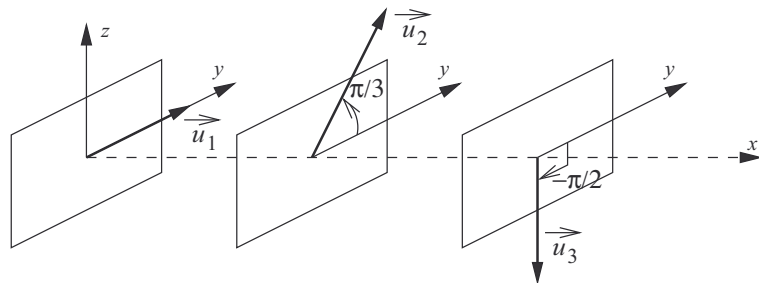
Un faisceau de lumière se propage selon l'axe \vec{u}_x horizontal. Lorsqu'on place un analyseur d'axe \vec{u}_z vertical devant le faisceau, l'éclairement s'annule à la sortie.

- a) Justifier que le faisceau de lumière est polarisé rectilignement.
- b) Déterminer la direction de polarisation du faisceau.
- c) Justifier que lorsqu'on place un analyseur d'axe \vec{u}_y horizontal devant le faisceau, l'intensité lumineuse ne change pas.
- d) Par quel coefficient est multipliée l'intensité quand on interpose un analyseur d'axe selon la bissectrice de (\vec{u}_y, \vec{u}_z) ?

17.13

Polariseurs successifs

Devant un faisceau de lumière naturelle se propageant selon \vec{u}_x , d'intensité I_0 , on place successivement un polariseur d'axe $\vec{u}_1 = \vec{u}_y$ à la sortie duquel l'intensité vaut $I_1 = \frac{I_0}{2}$, un polariseur d'axe \vec{u}_2 défini par $(\vec{u}_y, \vec{u}_2) = \frac{\pi}{3}$ à la sortie duquel l'intensité vaut I_2 , un polariseur d'axe \vec{u}_3 défini par $(\vec{u}_y, \vec{u}_3) = -\frac{\pi}{2}$ à la sortie duquel l'intensité vaut I_3 .



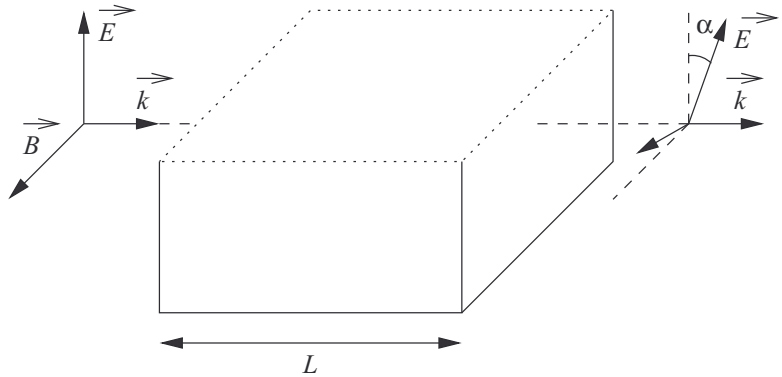
Donner en fonction de I_0 les expressions des intensités I_1 , I_2 et I_3 . Que se passe-t-il si on intervertit les positions du polariseur 2 et du polariseur 3 ?



17.14

Polarimètre (résolution de problème)

Une solution est optiquement active (c'est le cas de l'eau sucrée) si elle est transparente à une onde électromagnétique onde électromagnétique plane progressive polarisée rectilignement, mais si sa traversée s'accompagne d'une rotation du plan de polarisation contenant (\vec{k}, \vec{E}) d'un angle α proportionnel à la concentration c et à la longueur L de solution traversée



Proposer un dispositif permettant de mesurer α et donner l'intérêt expérimental de cette mesure.



17.15

Analyse de polarisation

Déterminer l'état de polarisation des ondes suivantes.

$$\vec{E}_1 \begin{cases} 0 \\ 2E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \end{cases} \quad \vec{E}_2 \begin{cases} 0 \\ E_0 \cos(\omega t + kx) \\ E_0 \sin(\omega t + kx) \end{cases}$$

$$\vec{E}_3 \begin{cases} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \sin(\omega t - kx - \frac{\pi}{6}) \end{cases} \quad \vec{E}_4 \begin{cases} E_0 \cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ -E_0 \sin(\omega t - ky) \end{cases}$$



17.16

Décompositions directe et réciproque

- Montrer qu'une onde plane progressive harmonique polarisée circulairement est la somme de deux OPPH polarisées rectilignement.
- Montrer qu'une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement est la somme de deux OPPH polarisées circulairement.

17.17**Aspect énergétique de l'onde plane polarisée circulairement**

Une onde plane a pour champ électrique $\vec{E}(z, t) = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{cases}$

- Quel est l'état de polarisation de cette onde ?
- Montrer que cette onde est la superposition de deux ondes planes polarisées rectilignement, $\vec{E}_1(z, t)$ selon \vec{u}_x et $\vec{E}_2(z, t)$ selon \vec{u}_y , de même vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_z$.
- En déduire les vecteurs $\vec{B}_1(z, t)$ et $\vec{B}_2(z, t)$ puis le vecteur résultant $\vec{B}(z, t)$.
- En déduire le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(z, t)$.
- Commenter le résultat obtenu.

17.18**Changement de sens de polarisation**

Justifier qu'il est possible de changer le sens (gauche ou droite) d'une OPPH polarisée elliptiquement, sans changer la direction du grand axe, grâce à une lame optiquement active.

17.19**Distinction entre lumière polarisée elliptiquement et lumière polarisée circulairement**

Proposer un protocole permettant de distinguer une lumière polarisée elliptiquement d'une lumière polarisée circulairement.

17.20**Distinction entre lumière naturelle et lumière polarisée circulairement**

Proposer un protocole permettant de distinguer une lumière polarisée circulairement d'une lumière naturelle (superposition d'OPPH PR de direction de polarisation aléatoire à chaque train d'onde).

17.21**Analyse d'une lumière polarisée elliptiquement**

Une OPPH polarisée elliptiquement traverse un polariseur à la sortie duquel l'intensité détectée est minimale. On intercale entre la source et le polariseur une lame quart d'onde dont l'axe lent est parallèle à la direction du polariseur. On tourne le polariseur et on constate une extinction lorsqu'il a tourné d'un angle de 30° dans le sens des aiguilles d'une montre quand on regarde l'onde en face. Est-ce en accord avec la polarisation de l'onde incidente ?



17.22

Analyse de pénombre

On éclaire avec de la lumière naturelle un dispositif d'axe (O, z) formé d'un polariseur d'axe transparent \vec{u}_p et d'un analyseur d'axe transparent \vec{u}_A . On note $\alpha = (\vec{u}_A, \vec{u}_p)$ dans l'orientation vue depuis la sortie avec \vec{u}_z en face. On place entre les deux une lame demi-onde d'axe rapide \vec{u}_y qui ne couvre que le trajet de la lumière sur la moitié ($y > 0$) du faisceau. Une moitié de la lumière traverse donc les trois lames, une autre moitié seulement le polariseur et l'analyseur. On pose $\beta = (\vec{u}_A, \vec{u}_y)$ et on suppose que $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$. La lame demi-onde et l'analyseur sont solidaires et peuvent tourner autour de (O, z) donc β est constant.

- a) Faire un schéma vue de face (\vec{u}_z venant vers l'œil) indiquant les axes \vec{u}_x, \vec{u}_y , les vecteurs unitaires \vec{u}_A et \vec{u}_p et les angles α et β .
- b) Justifier que le champ électrique après traversée du polariseur s'écrit

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_p$$

Donner l'état de polarisation de cette onde.

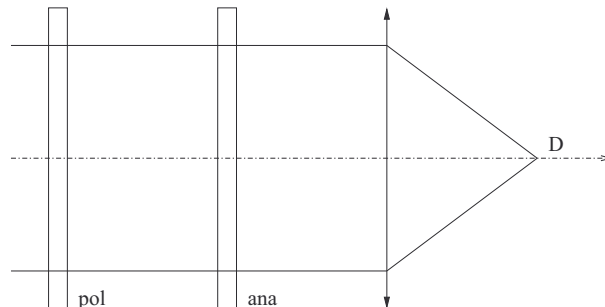
- c) Donner l'expression de \vec{E} dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
- d) En déduire les champs ayant traversé (\vec{E}'_1) ou n'ayant pas traversé (\vec{E}'_2) la lame demi-onde, avant la traversée de l'analyseur.
- e) Déterminer les angles entre \vec{u}_A et chacun de ces deux vecteurs, en déduire les intensités lumineuses des ondes émergentes de l'analyseur dans les deux zones.
- f) Montrer qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles les intensités des deux zones sur un écran sont égales et qu'on peut qualifier ces situations d'équipé-nombre et d'équiluminosité.



17.23

Polariseur, analyseur, lame à retard

Dans le montage suivant, D est un capteur transformant le flux lumineux Φ en intensité ($i = K\Phi$). On éclaire le système par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ et on interpose sur le trajet du faisceau un polariseur (pol) et un analyseur (ana).



- a) L étant l'intensité lumineuse incidente, donner l'expression de i lorsque l'angle entre pol et ana vaut α .
- b) On intercale entre pol et ana une lame à retard d'axe rapide X et d'axe lent Y . On note α l'angle entre X et pol, β l'angle entre X et ana.

i) On note $\Delta\varphi$ la différence de phase entre les composantes du champ électrique arrivant sur la lame selon X et Y , e l'épaisseur de la lame, n_x et n_y les indices selon les deux axes (double réfringence). Justifier brièvement la relation

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_y - n_x)e$$

- ii) Rappeler les valeurs de $\Delta\varphi$ pour une lame quart d'onde, pour une lame demi-onde.
- iii) On note I_0 l'intensité lumineuse incidente, I_P celle après le polariseur, I_A celle après l'analyseur. Montrer que

$$I_A = I_P \left[\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta \cos \Delta\varphi \right]$$

- iv) Cas des lames demi-onde.
- Simplifier la relation entre I_A et I_P , interpréter.
 - Analyser la nature de l'onde sortant de la lame.
- v) Cas des lames quart d'onde.
- Simplifier la relation entre I_A et I_P .
 - Analyser la nature de l'onde sortant de la lame.
- vi) Étudier le cas où pol et ana sont croisés.

Du mal à démarrer ?

17.1 L'utilisation de la relation de structure et de la relation de dispersion suffisent pour déterminer complètement \vec{B} .

17.2 (a) On utilise la linéarité de l'EDA. (b) Une formule de trigonométrie permet de transformer la somme de deux cosinus en un produit. (c) Il faut exprimer u en fonction de t et x . (d) La somme de deux ondes PR n'est pas PR.

17.3 C'est une application directe des formules du cours.

17.4 La puissance solaire se répartit sur une sphère. La Terre recueille le flux solaire sur une surface équivalente à un disque.

17.5 L'onde étant stationnaire et pas progressive, on ne peut pas utiliser la relation de structure pour calculer \vec{B} , mais la loi de Maxwell-Faraday.

17.6 On identifie l'énergie \mathcal{W} à celle des dN photons.

17.7 Le calcul du flux du vecteur de Poynting est assez technique, mais facilitée par les données de l'énoncé.

17.8 On identifie l'énergie volumique au produit de n_0 par l'énergie de chaque photon.

17.9 Exercice très technique mais sans difficulté physique. Le cœur du calcul est la détermination de la valeur moyenne du produit de deux cosinus, qu'on pourra linéariser. La valeur moyenne d'un cosinus est nulle à condition qu'il dépende du temps.

17.10 On utilise la méthode du cours après avoir transformé le sinus en cosinus.

17.11 (a) On pourra calculer $\vec{k} \cdot \vec{E}$. (b) On pourra décomposer l'onde en somme de deux OPPH dont on identifie les vecteurs d'onde respectifs. (c) On pourra calculer $\text{div } \vec{E}_5$.

17.12 L'application directe du cours et celle de la loi de Malus permettent de conclure.

17.13 L'exercice exploite la loi de Malus, il faut définir précisément, après la traversée de chaque polariseur, l'amplitude du champ électrique, sa direction de polarisation et l'intensité lumineuse.

17.14 La mesure de α doit être faite par différence entre deux situations d'extinction.

17.15 On peut facilement trouver le type de polarisation, rectiligne, elliptique ou circulaire en cherchant le déphasage entre les deux

composantes non nulles (après avoir transformé les sinus en cosinus) du champ électrique. Pour déterminer le sens de rotation, on peut utiliser la méthode décrite dans le cours.

17.16 Une onde polarisée circulairement est décrite mathématiquement par un champ dont une des composantes est un cosinus, une deuxième est un sinus et la troisième est nulle.

17.17 L'analyse de polarisation est analogue à celle menée à l'exercice 17.15. La décomposition est immédiate, on en déduit le champ \vec{B} et le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ en appliquant les lois vues au début de ce chapitre.

17.18 Par un changement d'axes, on peut décrire une OPPH polarisée elliptiquement sous une forme simple. Une lame demi-onde judicieusement placée permet d'obtenir le résultat attendu.

17.19 Un polariseur qu'on fait tourner donne, selon le cas, une intensité lumineuse constante ou pas en sortie.

17.20 On peut exploiter la propriété d'une lame quart d'onde de transformer une onde polarisée circulairement en une onde polarisée rectilignement.

17.21 Par un choix adapté des axes, on exprime l'onde polarisée elliptiquement puis on traduit mathématiquement les effets des lames.

17.22 L'exercice est très guidé. Le schéma doit être fait avec soin et on a intérêt à y faire figurer \vec{E}'_1 et \vec{E}'_2 pour identifier les angles que leurs directions de polarisation font avec \vec{u}_A , et appliquer la loi de Malus.

17.23 La formule de la question (b) (iii) est le cœur de l'exercice et permet de traiter les questions suivantes. On l'établit en exprimant tour à tour les champs électriques \vec{E}_P à la sortie du polariseur, \vec{E}_R à la sortie de la lame à retard et $\vec{E}_A = (\vec{E}_R \cdot \vec{u}_A)\vec{u}_A$ à la sortie de l'analyseur.

Corrigés des exercices

17.1

a) La relation de dispersion donne $\omega = kc$. La phase du champ magnétique est nulle donc

$$\vec{B} = B_0 \vec{u}_z e^{i(kct - kx)} \text{ et } \vec{B}(x, t) = B_0 \vec{u}_z \cos(kct - kx)$$

La relation de structure permet d'écrire

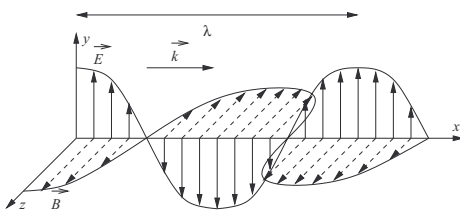
$$\vec{E}(x, t) = cB_0 \vec{u}_y \cos(kct - kx)$$

b) La direction du champ électrique est constante donc l'onde est polarisée rectilignement.

c) À la date $t = 0$, les champs s'écrivent

$$\begin{cases} \vec{E}(x, 0) = cB_0 \vec{u}_y \cos(kx) \\ \vec{B}(x, 0) = B_0 \vec{u}_z \cos(kx) \end{cases}$$

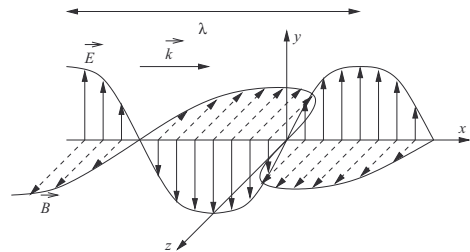
L'extrémité des vecteurs \vec{E} sont donc disposés sur une cosusoïde dans le plan (x, y) et ceux des vecteurs \vec{B} de même dans le plan (x, z) . Ils prennent leurs valeurs extrémales et nulles pour les mêmes abscisses ; leur période spatiale commune est la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Voici l'allure des cartes de champ à $t = 0$:



d) À la date $t_1 = \frac{\pi}{2kc}$:

$$\begin{cases} \vec{E}(x, t_1) = cB_0 \vec{u}_y \cos\left(\frac{\pi}{2} - kx\right) = cB_0 \vec{u}_y \sin(kx) \\ \vec{B}(x, t_1) = B_0 \vec{u}_z \cos\left(\frac{\pi}{2} - kx\right) = B_0 \vec{u}_z \sin(kx) \end{cases}$$

Il suffit donc de décaler la position des axes :



17.2

a) Les équations de Maxwell et l'équation de d'Alembert sont linéaires ; toute combinaison linéaire de solutions de l'EDA est donc elle-même solution.

b) Le champ électrique résultant est

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \vec{u}_y \cos(kct - kx) + E_0 \vec{u}_y \cos(kct + kx)$$

$$\vec{E}(x, t) = 2E_0 \vec{u}_y \cos \frac{(kct - kx) + (kct + kx)}{2} \cos \frac{(kct - kx) - (kct + kx)}{2}$$

$$\vec{E}(x, t) = 2E_0 \vec{u}_y \cos(kct) \cos(kx)$$

C'est une onde stationnaire pour le champ électrique. Le champ magnétique est la somme des deux champs qu'on

obtient par la relation de structure, en prenant garde au fait que les vecteurs d'onde sont opposés :

$$\vec{B}(x, t) = B_0 \vec{u}_z \cos(kct - kx) - B_0 \vec{u}_z \cos(kct + kx)$$

$$\vec{B}(x, t) = -2B_0 \vec{u}_z \sin \frac{(kct - kx) + (kct + kx)}{2} \sin \frac{(kct - kx) - (kct + kx)}{2}$$

$$\vec{B}(x, t) = 2B_0 \vec{u}_z \sin(kct) \sin(kx)$$

C'est une onde stationnaire pour le champ magnétique aussi. En revanche, les nœuds du champ électrique et ceux du champ magnétiques sont décalés de $\frac{\lambda}{4}$.

- c) L'onde considérée est de fréquence fondamentale f . Sa période est donc $T = \frac{1}{f}$. Elle peut donc s'écrire

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \vec{u}_y F\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

En utilisant la décomposition donnée, on a donc

$$\vec{E}(x, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4E_0}{(2p+1)\pi} \vec{u}_y \cos\left[(2p+1)2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

qui est bien la superposition d'OPPH PR.

- d) Le champ électrique s'écrit

$$\vec{E}(x, t) = \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}) \end{vmatrix}$$

$$\text{soit } \vec{E}(x, t) = \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ -E_0 \sin(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

Le champ électrique a une norme

$$\|\vec{E}(x, t)\| = \sqrt{E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) + E_0^2 \sin^2(\omega t - kx)} = E_0$$

et dans le plan $x = 0$

$$\vec{E}(0, t) = \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t) \\ -E_0 \sin(\omega t) \end{vmatrix}$$

L'extrémité du vecteur \vec{E} a donc un mouvement circulaire uniforme, à la vitesse angulaire ω , on parle donc de polarisation circulaire.

- 17.3** La valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting est $\langle \Pi \rangle = \frac{\mathcal{P}}{S} = 5,0 \cdot 10^7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

$$\langle \Pi \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \text{ donc}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \langle \Pi \rangle}{\epsilon_0 c}} = 137 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$$

Enfin $B_0 = \frac{E_0}{c} = 4,57 \cdot 10^{-4} \text{ T}$. On a $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ donc

$$f = \frac{c}{\lambda_0} = 5,64 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 3,54 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{et } k = \frac{\omega}{c} = 1,18 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

- 17.4** La puissance émise par le Soleil se dilue sur une surface sphérique de rayon $r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ donc

$$\langle \Pi \rangle = \frac{\mathcal{P}}{4\pi r^2} = 1350 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Le globe terrestre reçoit le rayonnement équivalent du disque de rayon R_T sous lequel on verrait la Terre depuis le Soleil, donc

$$\mathcal{P}_T = \langle \Pi \rangle \cdot \pi R_T^2 = 1,74 \cdot 10^{17} \text{ W}$$

17.5

- a) Par application de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ soit}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0 \cos(\omega t) \sin(kz) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{soit } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = kE_0 \vec{u}_x \cos(\omega t) \cos(kz)$$

$$\text{donc } \vec{B} = \frac{kE_0}{\omega} \vec{u}_x \sin(\omega t) \cos(kz)$$

$$\text{soit } \vec{B} = \frac{E_0}{c} \vec{u}_x \sin(\omega t) \cos(kz)$$

- b) On en déduit

$$\vec{\Pi}(z, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

et en utilisant la relation $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$:

$$\vec{\Pi}(z, t) = -\frac{E_0^2}{4\mu_0 c} \vec{u}_z \sin(2\omega t) \sin(2kz)$$

- c) On a $\langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$ donc la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting est nulle : l'onde stationnaire ne transporte pas d'énergie électromagnétique. On vérifie ici qu'elle est équivalente à deux ondes de même amplitude se propageant dans deux sens opposés (voir exercice 17.2, question (b)).

17.6

- a) La relation de structure entraîne

$$\vec{B} = \frac{k\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

On en déduit

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

$$\text{donc } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{u}_x$$

- b) Par définition

$$\langle d\mathcal{P} \rangle = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot dS \vec{u}_x$$

$$\text{soit } \frac{dW}{dt} = \frac{\epsilon_0 c E_0^2 dS}{2}$$

$$\text{donc } dW = \frac{\epsilon_0 c E_0^2 dS}{2} dt$$

- c) Les photons qui frappent la surface pendant dt sont ceux situés à une distance inférieure ou égale à cdt , ils sont donc situés dans un cylindre de base dS et de hauteur cdt ; il y en a donc $dN = n_0 dS c dt$. Leur énergie est

$$dW = dN \cdot hf$$

Par identification :

$$\frac{\epsilon_0 c E_0^2 dS}{2} dt = n_0 dS c dt \cdot hf \text{ donc } n_0 = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2hf}$$

- d) L'application numérique donne

$$n_0 = 2,23 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$$

17.7

- a) Les analogies sont les suivantes : l'onde se propage selon $\vec{k} = k\vec{u}_r$, $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre orthogonal direct et $E = cB$. Les différences sont que l'amplitude n'est pas constante, elle dépend de r et de θ , et que l'onde n'est pas plane.

- b) Le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ contient \vec{u}_z donc il contient les deux charges en mouvement. C'est donc un plan de symétrie des charges et \vec{E} est bien dans ce plan. C'est aussi un plan de symétrie des courants (les charges bougent sur l'axe) et \vec{B} lui est orthogonal. Il y a invariance de la distribution de charges et de courants par rotation d'angle φ et les champs ne dépendent pas de φ . Les règles "habituelles" sont donc bien vérifiées.

- c) Le vecteur de Poynting est

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \frac{E_0^2}{c} \frac{r_0^2}{r^2} \sin^2 \theta \vec{u}_r \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

$$\text{donc } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 r_0^2}{2\mu_0 c r^2} \sin^2 \theta \vec{u}_r$$

- d) La puissance est

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{E_0^2 r_0^2}{2\mu_0 c r^2} \sin^2 \theta \vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{E_0^2 r_0^2}{2\mu_0 c} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi$$

$$\text{donc } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{4\pi E_0^2 r_0^2}{3\mu_0 c}$$

Cette puissance ne dépend pas de r , il y a conservation du flux d'énergie électromagnétique.

- e) La puissance rayonnée étant non nulle, le système perd de l'énergie, ce qui peut se traduire par la perte d'énergie mécanique du dipôle oscillant, donc une diminution de l'amplitude.

17.8

- a) D'après le cours

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \epsilon_0 E^2$$

La valeur moyenne d'un cosinus carré vaut $\frac{1}{2}$ donc

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$$

- b) Il y a n_0 photons par mètre cube donc

$$\langle u_{em} \rangle = n_0 hf$$

Par identification :

$$\frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 = n_0 hf \text{ donc } n_0 = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2hf}$$

17.9

a) Les vecteurs d'onde sont

$$\vec{k}_1 = k_1 \vec{u}_x = \frac{\omega_1}{c} \vec{u}_x \text{ et } \vec{k}_2 = k_2 \vec{u}_x = \frac{\omega_2}{c} \vec{u}_x$$

On en déduit

$$\vec{E}_1(x, t) = E_0 \vec{u}_y \cos \left[\omega_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

$$\vec{E}_2(x, t) = E_0 \vec{u}_y \cos \left[\omega_2 \left(t - \frac{x}{c} \right) + \theta \right]$$

On en déduit les champs magnétiques en utilisant la relation de structure

$$\vec{B}_1(x, t) = \frac{E_0}{c} \vec{u}_z \cos \left[\omega_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

$$\vec{B}_2(x, t) = \frac{E_0}{c} \vec{u}_z \cos \left[\omega_2 \left(t - \frac{x}{c} \right) + \theta \right]$$

et les vecteurs de Poynting en utilisant la définition :

$$\vec{\Pi}_1 = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x \cos^2 \left[\omega_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

$$\vec{\Pi}_2 = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x \cos^2 \left[\omega_2 \left(t - \frac{x}{c} \right) + \theta \right]$$

On en déduit les valeurs moyennes

$$\langle \vec{\Pi}_1 \rangle = \langle \vec{\Pi}_2 \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

b) Pour alléger les notations, posons

$$\alpha_1 = \omega_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) \text{ et } \alpha_2 = \omega_2 \left(t - \frac{x}{c} \right) + \theta$$

L'onde résultante a pour champs

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 \vec{u}_y [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2]$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} \vec{u}_z [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2]$$

On en déduit

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2]^2$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x [\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2]$$

$$\text{donc } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \langle \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \rangle \right]$$

$$\text{soit } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x + 2 \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x \langle \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \rangle$$

c) La différence vaut

$$\langle \vec{\Pi} \rangle - (\langle \vec{\Pi}_1 \rangle + \langle \vec{\Pi}_2 \rangle) = 2 \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x \langle \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \rangle$$

Explicitons la valeur moyenne :

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 = \frac{1}{2} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{1}{2} \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

et en développant les expressions :

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos \left[(\omega_1 + \omega_2) \left(t - \frac{x}{c} \right) + \theta \right]$$

$$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \cos \left[(\omega_1 - \omega_2) \left(t - \frac{x}{c} \right) - \theta \right]$$

Le premier cosinus est une fonction du temps, sa valeur moyenne est nulle. Si $\omega_1 \neq \omega_2$, il en est de même pour le second et

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle \vec{\Pi}_1 \rangle + \langle \vec{\Pi}_2 \rangle$$

Mais si $\omega_1 = \omega_2$, alors le second cosinus est une constante et il est égal à sa valeur moyenne. On en déduit que

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle \vec{\Pi}_1 \rangle + \langle \vec{\Pi}_2 \rangle + \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos \theta \vec{u}_x$$

17.10

La première onde se propage selon $\vec{k}_1 = -k\vec{u}_z$. On transforme la composante selon y :

$$E_y = E_0 \sin(\omega t + kz) = E_0 \cos \left(\omega t + kz - \frac{\pi}{2} \right)$$

On a donc

$$\varphi_x - \varphi_y = \frac{\pi}{2}$$

donc l'onde n'est pas polarisée rectilignement. La deuxième se propage selon $\vec{k}_3 = k\vec{u}_x$. On transforme la composante selon z :

$$E_z = 3E_0 \sin \left(\omega t - kx + \frac{\pi}{6} \right) = 3E_0 \cos \left(\omega t - kx + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{soit } E_z = 3E_0 \cos \left(\omega t - kx - \frac{\pi}{3} \right)$$

On a

$$\varphi_y - \varphi_z = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \pi$$

donc l'onde est polarisée rectilignement selon

$$\vec{E}_2(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{2} \\ \frac{3E_0}{2} \end{pmatrix}$$

17.11

a) Le vecteur de l'onde 1 s'obtient en identifiant

$$-(kx - 2ky) = -\vec{k}_1 \cdot \vec{OM} \text{ donc } \vec{k}_1 = \begin{pmatrix} k \\ -2k \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule le produit scalaire

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{E}_1 = -3kE_0 \cos(\omega t - kx + 2ky) \neq 0$$

donc l'onde 1 n'est pas transverse électrique. Le vecteur de l'onde 2 s'obtient en identifiant

$$-(kx - 2ky) = -\vec{k}_2 \cdot \vec{OM} \text{ donc } \vec{k}_2 = \begin{pmatrix} k \\ -2k \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule le produit scalaire

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{E}_2 = 0$$

donc l'onde 2 est transverse électrique.

b) Posons

$$\vec{E}_{20}(t) = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t) \\ 2E_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que

$$\omega t - kz = \omega \left(t - \frac{k}{\omega} z \right) = \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

On peut donc écrire

$$\vec{E}_3(z, t) = \vec{E}_{20} \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

et en posant $\vec{k} = k\vec{u}_z$:

$$\vec{E}_3(M, t) = \vec{E}_{20} \left(t - \frac{\vec{k} \cdot \vec{OM}}{c} \right)$$

donc \vec{k} est le vecteur de l'onde 3. L'onde 4 est la superposition de deux OPPH PR :

$$\vec{E}_4 = \begin{pmatrix} 2E_0 \cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{pmatrix}$$

de vecteurs d'onde distincts $k\vec{u}_y$ et $k\vec{u}_x$ donc elle n'admet pas de vecteur d'onde.

c) On remarque que

$$\text{div } \vec{E}_5 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \cos(\omega t - ky) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{div } \vec{E} = 2E_0 k \sin(\omega t - kx) + E_0 k \sin(\omega t - ky) \neq 0$$

donc $\rho \neq 0$, on n'est donc pas dans le vide.

17.12

- a) Si le faisceau n'était pas polarisé rectilignement, \vec{E} aurait des composantes non nulles dans diverses directions non colinéaires, et une au moins ne serait pas éteinte par l'analyseur placé dans une direction donnée, il n'y aurait donc pas extinction.
- b) D'après la loi de Malus, il y a extinction ($\cos^2 \alpha = 0$) lorsque l'axe de l'analyseur est perpendiculaire ($\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$) à la direction de polarisation, donc le faisceau est polarisé selon \vec{u}_y .
- c) L'axe de l'analyseur \vec{u}_y est confondu avec la direction de polarisation ($\alpha = 0$), l'analyseur est donc transparent pour le faisceau et l'intensité ne change pas d'après la loi de Malus ($\cos^2 \alpha = 1$).
- d) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ donc $I' = I \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}I$.

17.13

$I_1 = \frac{I_0}{2}$ est donné par l'énoncé. D'après la loi de Malus

$$I_2 = I_1 \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} I_1 = \frac{I_0}{8}$$

La lumière émergente du deuxième polariseur est polarisée selon \vec{u}_2 . Pour appliquer à nouveau la loi de Malus, il faut donc bien penser à considérer l'angle entre \vec{u}_2 et \vec{u}_3 :

$$I_3 = I_2 \cos^2(\vec{u}_2, \vec{u}_3) = \frac{I_0}{8} \cdot \cos^2 \frac{5\pi}{6} = \frac{I_0}{8} \cdot \frac{3}{4}$$

soit $I_3 = \frac{3I_0}{32}$. Si on place 3 immédiatement après 2, les axes du 1 et du 3 étant orthogonaux, il y a extinction complète, qui perdure après le polariseur 2. L'ordre des polariseurs est donc important.

17.14

On commence par préparer un faisceau de lumière polarisée rectilignement selon la méthode décrite dans le cours. On place en sortie un polariseur dans l'axe de propagation.

- Lorsque la cuve est vide, on tourne le polariseur jusqu'à observer l'extinction. On définit ainsi la direction de référence \vec{u}_0 .
- On remplit la cuve avec la solution optiquement active. On mesure l'angle α dont il faut tourner le polariseur, depuis la direction \vec{u}_0 , pour retrouver l'extinction.

La polarimétrie est un procédé physique de mesure de concentration, sans réaction chimique, comme la conductimétrie et la colorimétrie.

17.15

(1) Le champ électrique s'écrit

$$\vec{E}_1 = \cos(\omega t - kx) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2E_0 \\ E_0 \end{pmatrix}$$

C'est donc une onde polarisée rectilignement.

(2) Le champ électrique s'écrit

$$\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t + kx) \\ E_0 \cos(\omega t + kx - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

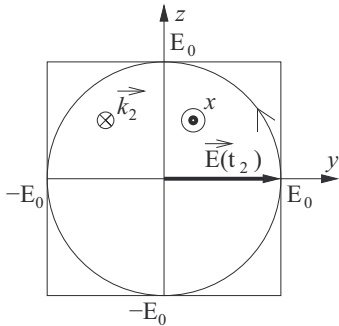
$$\text{donc } \varphi_y - \varphi_z = \frac{\pi}{2}$$

L'onde est donc polarisée circulairement. Déterminons son sens. Le vecteur de propagation est $\vec{k}_2 = -k\vec{u}_x$. Pour $x = 0$, on a

$$E_y = E_0 \text{ si } \omega t_2 = 0$$

$$\text{et } \begin{cases} E_z(t_2) = 0 \\ \frac{dE_z}{dt}(t_2) = \omega E_0 > 0 \end{cases}$$

Voici la trace du mouvement du champ électrique.



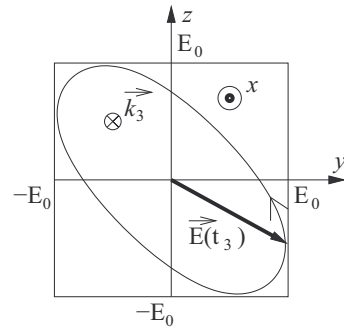
C'est donc une polarisation circulaire droite car \vec{k}_2 est fuyant.

(3) Le vecteur de propagation est $\vec{k}_3 = k\vec{u}_x$. Pour $x = 0$, on a

$$E_y = E_0 \text{ si } \omega t_3 = 0$$

$$\text{et } \begin{cases} E_z(t_3) = E_0 \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{E_0}{2} \\ \frac{dE_z}{dt}(t_3) = \omega E_0 \cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\omega E_0 \sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases}$$

Voici la trace du mouvement du champ électrique.



C'est donc une polarisation elliptique droite car \vec{k}_3 est fuyant.

(4) Le champ électrique s'écrit

$$\vec{E}_4 = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ E_0 \cos(\omega t - ky + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

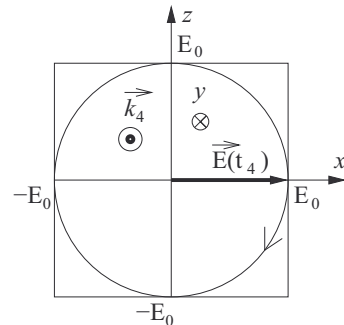
$$\text{donc } \varphi_x - \varphi_z = -\frac{\pi}{2}$$

L'onde est donc polarisée circulairement. Déterminons son sens. Le vecteur de propagation est $\vec{k}_4 = k\vec{u}_y$. Pour $y = 0$, on a

$$E_x = E_0 \text{ si } \omega t_4 = 0$$

$$\text{et } \begin{cases} E_z(t_4) = 0 \\ \frac{dE_z}{dt}(t_4) = -\omega E_0 < 0 \end{cases}$$

Voici la trace du mouvement du champ électrique.



C'est donc une polarisation circulaire droite.

17.16

a) Par une rotation d'axes, on peut écrire une OPPH polarisée circulairement sous la forme

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui forme une décomposition en superposition de deux ondes polarisées rectilignement.

Chapitre 17 Ondes électromagnétiques dans le vide

- b) De même, on peut écrire une OPPH polarisée rectilignement sous la forme

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz) \\ \frac{E_0}{2} \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz) \\ -\frac{E_0}{2} \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui forme une décomposition en superposition de deux ondes polarisées circulairement, gauche et droite.

17.17

- a) Le champ électrique s'écrit

$$\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

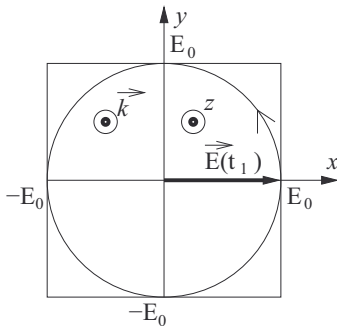
$$\text{donc } \varphi_x - \varphi_y = \frac{\pi}{2}$$

L'onde est donc polarisée circulairement. Déterminons son sens. Le vecteur de propagation est $\vec{k} = k\vec{u}_z$. Pour $z = 0$, on a

$$E_x = E_0 \text{ si } \omega t_1 = 0$$

$$\text{et } \begin{cases} E_y(t_1) = 0 \\ \frac{dE_y}{dt}(t_1) = \omega E_0 > 0 \end{cases}$$

Voici la trace du mouvement du champ électrique.



C'est donc une polarisation circulaire gauche.

- b) On a immédiatement

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_1 \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{E}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- c) Par application de la relation de structure

$$\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{E_0}{c} \sin(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \vec{B}(z, t) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{E_0}{c} \sin(\omega t - kz) \\ \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- d) Par définition

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \end{pmatrix}$$

- e) Le vecteur de Poynting est donc uniforme et constant, il est égal à sa valeur moyenne, il n'y a pas de scintillement de la puissance traversant une surface donnée.

17.18

En adaptant les axes à l'onde étudiée, on peut l'écrire sous la forme

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \sin(\omega t - kz) = E_{0y} \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui est une onde polarisée elliptiquement (circulairement si $E_{0x} = E_{0y}$) gauche. Lorsque cette onde traverse une lame demi-onde d'axe rapide X selon \vec{u}_y et d'axe lent Y selon \vec{u}_x (par exemple), le champ émergent est

$$\vec{E}' = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2} + \pi) = -E_{0y} \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui est une onde polarisée elliptiquement droite.

17.19

Lorsqu'on place un polariseur sur le trajet du faisceau, on observe des maxima et des minima d'intensité lumineuse si la lumière est polarisée elliptiquement, comme expliqué dans le cours. Si la lumière est polarisée circulairement, l'intensité est la même quelle que soit la direction du polariseur.

17.20

On place une lame quart d'onde sur le trajet du faisceau considéré. Si la lumière est polarisée circulairement, les champs incident et émergent s'écrivent

$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin(\omega t - kz) = E_0 \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_f = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = E_0 \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \vec{E}_f = \cos(\omega t - kz) \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui est une onde polarisée rectilignement selon

$$\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En plaçant un polariseur après la lame quart d'onde, on a donc extinction quand son axe est

$$\vec{u}_p \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si la lumière est naturelle, chaque train d'onde polarisé rectilignement est transformé en une onde polarisée circulairement, la lumière émergente n'est donc pas polarisée rectilignement et en plaçant un polariseur après la lame quart d'onde, on n'a jamais extinction.

17.21

On a un minimum d'intensité à la sortie du polariseur, son axe \vec{u}_p est donc dans la direction du petit axe de l'ellipse. Notons \vec{u}_x cette direction, et \vec{u}_z la direction de propagation de l'onde. On peut donc écrire le champ incident sous la forme

$$\vec{E} \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \sin(\omega t - kz) = E_{0y} \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après traversée de la lame quart d'onde, le champ s'écrit

$$\vec{E}' \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = E_{0y} \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \vec{E}' = \cos(\omega t - kz) \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

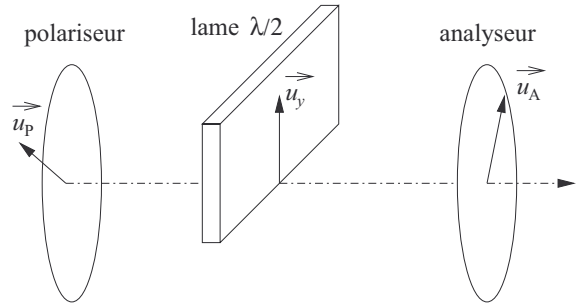
C'est donc une onde polarisée rectilignement. Il est donc normal qu'on observe une extinction. Celle-ci apparaît lorsque \vec{u}_p est perpendiculaire à la direction de polarisation de l'onde, soit

$$\begin{pmatrix} \cos(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

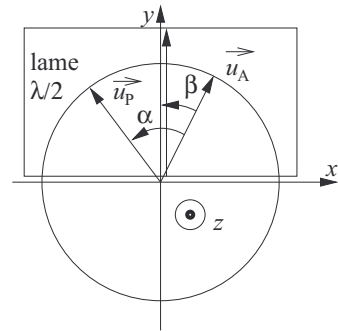
$$\text{soit } \frac{\sqrt{3}}{2} E_{0x} - \frac{1}{2} E_{0y} = 0 \text{ soit } E_{0y} = E_{0x} \sqrt{3}$$

17.22

a) Voici la figure en perspective



et voici la figure vue de face



b) Le champ électrique est polarisé rectilignement selon \vec{u}_p et se propage selon les z croissants, d'où l'expression proposée.

c) Le vecteur \vec{u}_p fait un angle $\alpha - \beta$ avec \vec{u}_y donc

$$\vec{u}_p = -\sin(\alpha - \beta) \vec{u}_x + \cos(\alpha - \beta) \vec{u}_y$$

$$\text{donc } \vec{E} \begin{pmatrix} -E_0 \sin(\alpha - \beta) \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \cos(\alpha - \beta) \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) L'onde qui n'a pas traversé la lame demi-onde n'est pas modifiée, donc

$$\vec{E}'_2 = \vec{E}$$

Elle est donc polarisée rectilignement selon \vec{u}_p .

L'onde qui a traversé la lame demi-onde laisse inchangée la composante sur l'axe rapide, donc celle selon \vec{u}_y et déphase de π celle sur l'axe lent, donc celle selon \vec{u}_x :

$$\vec{E}'_1 = \begin{pmatrix} -E_0 \sin(\alpha - \beta) \cos(\omega t - kz + \pi) \\ E_0 \cos(\alpha - \beta) \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}'_1 = \begin{pmatrix} E_0 \sin(\alpha - \beta) \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \cos(\alpha - \beta) \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Elle est donc polarisée rectilignement selon le symétrique de \vec{u}_p par rapport à \vec{u}_y , qui fait donc un angle $\beta - \alpha$ avec \vec{u}_y .

e) On en déduit

$$(\vec{u}_A, \vec{E}'_1) = (\vec{u}_A, \vec{u}_y) + (\vec{u}_y, \vec{E}'_1)$$

$$(\vec{u}_A, \vec{E}'_1) = \beta + \beta - \alpha = 2\beta - \alpha$$

$$\text{et } (\vec{u}_A, \vec{E}'_2) = (\vec{u}_A, \vec{u}_p) = \alpha$$

Par application de la loi de Malus, on en déduit

$$\begin{cases} I_1 = I_0 \cos^2(2\beta - \alpha) \\ I_2 = I_0 \cos^2 \alpha \end{cases}$$

f) Il y a égale intensité si

$$I_1 = I_2 \text{ soit } \cos^2(2\beta - \alpha) = \cos^2 \alpha$$

$$\text{soit } \begin{cases} \cos(2\beta - \alpha) = \cos \alpha \\ \text{ou } \cos(2\beta - \alpha) = -\cos \alpha \end{cases} \text{ donc}$$

$$\begin{cases} 2\beta - \alpha = \alpha & \text{ou } 2\beta - \alpha = \pi + \alpha \\ \text{ou } 2\beta - \alpha = -\alpha & \text{ou } 2\beta - \alpha = \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \alpha = \beta & \text{ou } \alpha = \beta - \frac{\pi}{2} \\ \text{ou } \beta = 0 & \text{ou } \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On élimine deux des quatre solutions car $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$. On a donc

$$\begin{cases} \alpha = \beta \text{ et } I_1 = I_2 = I_0 \cos^2 \beta \\ \text{ou } \alpha = \beta - \frac{\pi}{2} \text{ et } I_1 = I_2 = I_0 \cos^2(\beta - \frac{\pi}{2}) = I_0 \sin^2 \beta \end{cases}$$

La condition $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ entraîne que l'intensité lumineuse dans le premier cas est supérieure à $\frac{3}{4}I_0$, et dans le second cas inférieure à $\frac{1}{4}I_0$. Le premier cas est donc une situation d'équiluminosité, le second cas est une situation d'équipé-
nombre.

17.23

a) Par application de la loi de Malus, $i = KL \cos^2 \alpha$.

b) Avec lame à retard.

i) On a, à la sortie :

$$\begin{cases} E'_x = E_{0x} \cos(\omega t - k_x e) \\ E'_y = E_{0y} \cos(\omega t - k_y e) \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} k_x = \frac{\omega}{c_x} = \frac{\omega}{c_0} n_x = n_x k_0 = n_x \frac{2\pi}{\lambda} \\ k_y = \frac{\omega}{c_y} = \frac{\omega}{c_0} n_y = n_y k_0 = n_y \frac{2\pi}{\lambda} \end{cases}$$

On en déduit

$$\Delta\varphi = (\omega t - k_x e) - (\omega t - k_y e) = e(k_y - k_x) = \frac{2\pi}{\lambda}(n_y - n_x)e$$

ii) Pour une lame quart d'onde, $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ et pour une lame demi-onde, $\Delta\varphi = \pi$.

iii) On suit les champs électriques \vec{E}_p en sortie du polariseur et \vec{E}_r en sortie de la lame à retard, en projection sur les axes (X, Y, z) de la lame à retard.

$$\vec{E}_p = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_r = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kz - \Delta\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\vec{E}_A = (\vec{E}_r \cdot \vec{u}_A) \vec{u}_A$$

On décompose

$$\vec{u}_A = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où la composante de \vec{E}_A sur \vec{u}_A :

$$E_A = E_0 \cos \alpha \cos \beta \cos(\omega t - kz) +$$

$$E_0 \sin \alpha \sin \beta \cos(\omega t - kz - \Delta\varphi)$$

$$E_A = E_0 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \Delta\varphi) \cos(\omega t - kz) -$$

$$E_0 \sin \alpha \sin \beta \sin \Delta\varphi \sin(\omega t - kz)$$

On en déduit

$$I_a = K < E_A^2 > = \frac{KE_0^2}{2} [\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta \cos \Delta\varphi]$$

ce qui est bien la formule attendue avec $I_p = \frac{KE_0^2}{2}$.

iv) Cas des lames demi-onde.

i. $\Delta\varphi = \pi$ donc

$$I_a = I_p [\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta]^2 = I_p \cos^2(\alpha + \beta)$$

ii. La lumière émergeant de la lame a pour champ électrique

$$\vec{E}_r = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kz) \\ -E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est caractéristique d'une lumière polarisée rectilignement, dans une direction symétrique de celle de \vec{u}_p par rapport à l'axe rapide (X) de la lame.

v) Cas des lames quart d'onde.

i. $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ donc

$$I_a = I_P \left[\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \right]$$

ii. La lumière émergeant de la lame a pour champ électrique

$$\vec{E}_r = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin \alpha \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est caractéristique d'une lumière polarisée elliptiquement dans le cas général (circularment si $\alpha = \frac{\pi}{4} + p\frac{\pi}{2}$, rectiligne si $\alpha = p\frac{\pi}{2}$). L'analyse

se fait en faisant tourner l'analyseur et en détectant alternativement des maxima et minima non nuls (sauf dans les cas mentionnés dans la précédente parenthèse).

vi) Si pol et ana sont croisés, $\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$ donc $\cos \alpha = \pm \sin \beta$ et $\cos \beta = \mp \sin \alpha$; il vient :

$$I_a = 2I_P \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha [1 - \cos \Delta\varphi]$$

Si $\Delta\varphi = 0$, on a donc $I_a = 0$, ce qui est normal car on n'a pas de lame à retard ; sinon, on observe que I_a est double entre une lame demi-onde ($1 - \cos \Delta\varphi = 2$) et une lame quart d'onde ($1 - \cos \Delta\varphi = 1$) : on peut donc distinguer les deux lames.

CHAPITRE 18

Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Solution pseudo-OPPH.
- ◇ Relation de dispersion.
- ◇ Milieu dispersif, propagation, atténuation, amplification.
- ◇ Vitesse de phase, vitesse de groupe.
- ◇ Paquet d'ondes.
- ◇ Plasma, conductivité complexe.
- ◇ Onde évanescente.
- ◇ Pulsation de coupure.
- ◇ Propagation d'une OEM dans un conducteur ohmique.
- ◇ Effet de peau.
- ◇ Indice complexe.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Établir et exploiter une équation de dispersion.
- ◇ Calculer et interpréter les vitesses de phase et de groupe.
- ◇ Connaître le modèle du plasma et étudier les OEM dans ce milieu.
- ◇ Établir et résoudre l'équation de diffusion dans un milieu conducteur ohmique.
- ◇ Généraliser aux milieux d'indice complexe.

Les méthodes à retenir

Établir et exploiter une équation de dispersion.

L'équation de d'Alembert (EDA) est un exemple simple d'équation linéaire aux dérivées partielles vérifiée par une grandeur G fonction de l'espace et du temps

$$\Delta G(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(M, t)}{\partial t^2} = 0$$

ou dans le cas unidirectionnel

$$\frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Elle admet une famille de solutions naturelles, les ondes planes progressives harmoniques (OPPH) dont la forme complexe est

$$\underline{G}(M, t) = \underline{G}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$$

ou dans le cas unidirectionnel sur l'axe x (par exemple)

$$\underline{G}(x, t) = \underline{G}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

Dans ce chapitre, on étudie les **équations aux dérivées partielles linéaires** comportant d'autres termes dérivés que l'EDA

$$\frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} + \gamma \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} + \delta G(x, t) = 0$$

dont on cherche la famille des solutions du type **pseudo-Onde Plane Progressive Harmonique**

$$\underline{G}(M, t) = \underline{G}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$$

ou dans le cas unidirectionnel

$$\underline{G}(x, t) = \underline{G}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

en tout point identiques aux OPPH, à ceci près que \underline{k} est un nombre complexe.

On peut résumer les études de phénomènes dispersifs à la démarche suivante.

- On établit l'équation aux dérivées partielles (EDP) vérifiée par G en appliquant les lois habituelles du domaine de la physique concerné ; souvent, on est amené à travailler par éléments différentiels, sur une tranche élémentaire spatiale $[x, x + dx]$ et/ou pendant une durée infinitésimale $[t, t + dt]$ et à faire des développements limités à l'ordre 1 ou 2.
- On injecte la solution pseudo-OPPH complexe dans l'EDP avec l'équivalence habituelle

opérateur de dérivation	formalisme complexe
$\frac{\partial G}{\partial t}$	$i\omega \cdot \underline{G}$
$\frac{\partial G}{\partial x}$	$-i\underline{k} \cdot \underline{G}$
$\text{grad } G$	$-i\underline{k} G$
$\text{div } \underline{G}$	$-i\underline{k} \cdot \underline{G}$
$\text{rot } \underline{G}$	$-i\underline{k} \wedge \underline{G}$

- La linéarité de l'EDP entraîne que \underline{k} vérifie une équation algébrique du second degré à coefficients réels ou complexes : c'est l'**équation de dispersion**.
- La résolution de cette équation donne la ou les valeurs possibles de \underline{k} .
- On réinjecte ces solutions dans l'expression complexe de la pseudo-OPPH $\underline{G}(M, t)$, on en déduit sa partie réelle $G(M, t)$ et on interprète les phénomènes observés.

On identifie les parties réelle et imaginaire de \underline{k} :

$$\underline{k} = k' + i k''$$

et pour la pseudo-OPPH unidirectionnelle

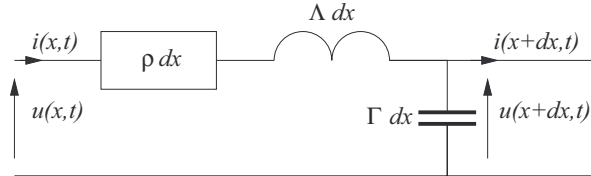
$$\underline{G}(x, t) = \underline{G}_0 e^{i(\omega t - (k' + i k'')x)}$$

on doit retenir les règles de **propagation** et d'**atténuation** :

- si $k' > 0$ l'onde se propage dans le sens croissant des x
- si $k' = 0$ l'onde ne se propage pas, elle est stationnaire
- si $k' < 0$ l'onde se propage dans le sens décroissant des x
- si k' et k'' sont de signes opposés, l'onde se propage en s'atténuant
- si k' et k'' sont de même signe, l'onde se propage en s'amplifiant.
- $\delta = \frac{1}{|k''|}$ est la distance caractéristique d'amortissement ou d'amplification.

Exemple :

Un tronçon élémentaire de ligne bifilaire électrique de longueur dx est modélisé par le schéma suivant :



ρ est la résistance linéique, Λ l'inductance linéique et Γ la capacité linéique de la ligne. (a) La loi des nœuds et la loi des mailles donnent

$$\begin{cases} u(x, t) = \rho dx i(x, t) + \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + u(x + dx, t) \\ i(x, t) = \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} + i(x + dx, t) \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \frac{u(x+dx, t) - u(x, t)}{dx} = -\rho i(x, t) - \Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ \frac{i(x+dx, t) - i(x, t)}{dx} = -\Gamma \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial t} \end{cases}$$

En effectuant le développement limité au premier ordre on en déduit

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\rho i(x, t) - \Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \end{cases}$$

En dérivant la première équation par rapport à x , la seconde par rapport à t et en utilisant le théorème de Schwartz on en déduit l'EDP vérifiée par $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \rho \Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0$$

(b) On cherche une solution pseudo-OPPH

$$\underline{u}(x, t) = \underline{U}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$$

En injectant dans l'EDP on obtient

$$(-i\underline{k})(-i\underline{k})\underline{u}(x, t) - \Lambda \Gamma (i\omega)(i\omega)\underline{u}(x, t) - \rho \Gamma (i\omega)\underline{u}(x, t) = 0$$

$$\text{soit } \underline{k}^2 = \Lambda \Gamma \left(\omega^2 - i \frac{\rho}{\Lambda} \omega \right)$$

(c) En posant $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$ (c'est la célérité de l'onde électrique en l'absence de résistance) et $\omega_c = \frac{\rho}{\Lambda}$ pulsation de coupure, on obtient donc l'équation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{\omega_c}{\omega} \right)$$

(d) La recherche de la racine carrée complexe du terme de droite ne pose pas de difficulté particulière, et on peut vérifier que celle de partie réelle k' positive possède une partie imaginaire k'' négative, et réciproquement ; l'onde se propage donc toujours de façon amortie. Si $\omega \ll \omega_c$ alors

$$\underline{k}^2 \simeq -i \frac{\omega_c \omega}{c^2} = \frac{\omega_c \omega}{c^2} e^{-i \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{donc } \underline{k} = \pm \sqrt{\frac{\omega \omega_c}{c^2}} e^{-i \frac{\pi}{4}} = \pm \sqrt{\frac{\omega_c \omega}{2c^2}} \mp i \sqrt{\frac{\omega_c \omega}{2c^2}}$$

Si $\omega \gg \omega_c$ alors

$$\underline{k}^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \text{ donc } \underline{k} = \pm \frac{\omega}{c}$$

(e) On remarque donc qu'en dessous et au voisinage de la pulsation de coupure, on a une propagation atténuée, ce qui est normal car la résistance dissipe l'énergie de l'onde et qu'à très haute fréquence l'onde se propage sans atténuation.

↪ **Exercices 18.1, 18.2, 18.3, 18.4, 18.5, 18.6, 18.7, 18.8.**

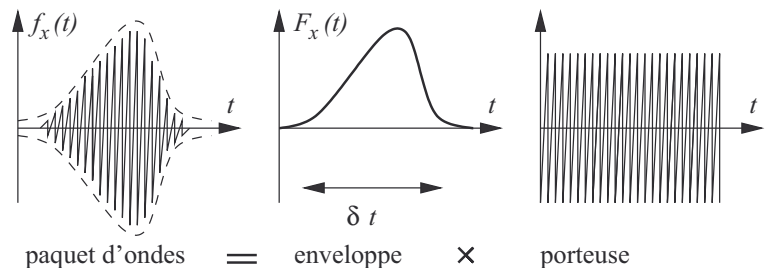
Calculer et interpréter les vitesses de phase et de groupe.

L'onde $G(x, t)$ du type OPPH de vecteur d'onde $\vec{k} = k' \vec{u}_x$ ou pseudo-OPPH de vecteur d'onde $\underline{k} \vec{u}_x = (k' + ik'') \vec{u}_x$ n'a pas de réalité physique : elle ne peut exister toujours ($\forall t$) et partout ($\forall x$). C'est pourquoi on définit le **paquet d'ondes** dont les représentations temporelle à une abscisse x , ou spatiale à une date t sont les suivantes :

$$G(x, t) = f_t(x) = h_x(t) \text{ avec } \begin{cases} f_x(t) = \mathcal{F}_x(t) \cdot \cos(\omega t - k'x + \varphi) \\ h_t(x) = \mathcal{H}_t(x) \cdot \cos(\omega t - k'x + \varphi) \end{cases}$$

Adoptons le point de vue temporel. L'onde à l'abscisse x a la forme du produit

- d'une **enveloppe** $= \mathcal{F}_x(t)$ de durée δt où on distingue le début et la fin du paquet d'onde
- et d'une **porteuse** $\cos(\omega t - k'x + \varphi)$ de longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k'}$.



Les propriétés suivantes sont admises et forment la base des réponses aux questions sur la propagation d'un paquet d'ondes.

a) La **largeur spectrale** $\delta\omega$ et la durée δt du paquet d'ondes vérifient

$$\delta\omega \cdot \delta t \simeq 2\pi$$

b) La porteuse se déplace à la **vitesse de phase**

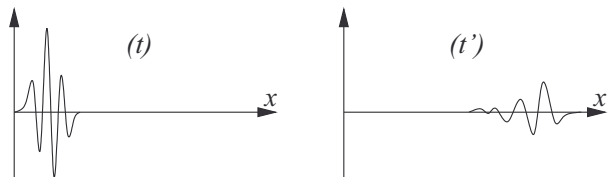
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$$

c) L'enveloppe se déplace à la **vitesse de groupe**

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'}$$

d) Un milieu est **dispersif** si la vitesse de phase et sa vitesse de groupe dépendent de la pulsation ω .

e) Lorsque le paquet d'ondes se propage dans un milieu dispersif, on observe l'**étalement** du paquet d'ondes : l'enveloppe s'élargit et son amplitude diminue.



Le calcul de la vitesse de groupe et de la vitesse de phase sont les questions techniques classiques de la fin des problèmes de concours sur la dispersion. Il est d'usage de les exprimer en fonction de ω et on utilise souvent les relations

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{1}{\frac{k'}{\omega}} \text{ et } v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}}$$

Exemple :

Dans l'exemple précédent de la ligne électrique avec pertes résistives, nous avons montré que si $\omega \gg \omega_c$, alors pour l'onde qui se propage dans le sens croissant des x

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c} = k'$$

On en déduit

$$v_\varphi = v_g = c$$

Si $\omega \ll \omega_c$, alors pour l'onde qui se propage dans le sens croissant des x

$$\underline{k} = k' + ik'' \text{ avec } k' = -k'' = \sqrt{\frac{\omega\omega_c}{c^2}}$$

On en déduit

$$v_\varphi = \frac{1}{\frac{k'}{\omega}} = c\sqrt{\frac{\omega}{\omega_c}} \text{ et } v_g = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = 2c\sqrt{\frac{\omega}{\omega_c}}$$

↪ Exercices 18.9, 18.10, 18.11, 18.12.

Connaître le modèle du plasma et étudier les OEM dans ce milieu.

Le **plasma** forme un autre exemple de milieu après le milieu conducteur ohmique et le vide. Les hypothèses sont les suivantes.

- Le plasma est neutre $\rho = 0$.
- Le courant est assuré par le déplacement des charges libres, ions et électrons ; si on néglige le courant ionique devant le courant électronique alors

$$\vec{j} = n_0(-e)\vec{v}$$

où n_0 est le nombre d'électrons libres par mètre cube et \vec{v} leur vitesse moyenne.

- Le milieu est dilué donc on peut négliger la force de frottement devant la force électrique.
- Les électrons sont non relativistes donc on peut négliger la composante magnétique de la force de Lorentz devant la composante électrique.
- On néglige le poids devant la force électrique.

Ces hypothèses conduisent à la relation en grandeurs complexes

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}} \text{ avec } \underline{\gamma} = \frac{n_0 e^2}{i\omega m_e}$$

$\underline{\gamma}$ est la **conductivité complexe** du plasma, e la charge élémentaire et m_e la masse de l'électron.

L'introduction de cette relation dans les équations de d'Alembert en grandeurs complexes donne la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \text{ avec } \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}$$

ω_p est la **pulsation plasma**.

- Si $\omega > \omega_p$, il y a propagation sans atténuation.
- Si $\omega < \omega_p$, il n'y a pas propagation, mais une onde stationnaire spatialement amortie appelée **onde évanescente**.

Exemple :

L'**ionosphère** est un bon exemple de plasma. La densité électronique est de l'ordre de $n_0 = 10^{12}$ électrons par mètre cube. La pulsation plasma est donc de l'ordre de

$$\omega_p = 5,6 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ donc } f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 9,0 \text{ MHz}$$

Les « grandes ondes » radio, de fréquence de l'ordre de la centaine de kilohertz, ne peuvent donc pas franchir l'ionosphère, elles se réfléchissent sur sa face inférieure, ce qui assure un transport de ces ondes sur des distances très importantes sur le globe terrestre et permet d'atteindre des navires en haute mer.

↪ Exercices 18.13, 18.14.

Établir et résoudre l'équation de diffusion dans un milieu conducteur ohmique.

Un conducteur ohmique est caractérisé par la relation $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Si on fait l'hypothèse du « bon conducteur ohmique » ($\gamma \geq 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$), et si on se place à des fréquences inférieures ou égales à celles des ondes visibles (de pulsation $\omega \leq 5 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$), alors les équations de Maxwell se simplifient et s'écrivent :

$$\begin{array}{l|l} \text{(MG)} \operatorname{div} \vec{E} = 0 & \text{(MT)} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \text{(MF)} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(MA)} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E} \end{array}$$

L'utilisation des lois d'analyse vectorielle permet d'éliminer \vec{B} entre ces équations et d'établir l'équation aux dérivées partielles suivante, du type **équation de dispersion** :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

La recherche d'une solution pseudo-OPPH polarisée rectilignement

$$\vec{\underline{E}}(\underline{M}, t) = \vec{\underline{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{\underline{k}} \cdot \vec{\underline{OM}})}$$

conduit à l'équation de dispersion

$$\vec{\underline{k}}^2 = -i\mu_0\gamma\omega$$

Si on pose $\vec{\underline{k}} = k\vec{u}_x$ et $\vec{\underline{E}}_0 = E_0 e^{i\varphi} \vec{u}_y$, on en déduit

$$\vec{\underline{E}}(x, t) = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi\right)$$

qui est l'expression d'une onde électrique plane progressive transverse atténuée dont la distance caractéristique d'amortissement est l'**épaisseur de peau** $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$. Ces résultats doivent être connus comme une question de cours, mais on doit aussi, dans l'objectif des concours, considérer leur démonstration comme un modèle qu'on est susceptible d'imiter dans d'autres types de milieux, ou avec d'autres hypothèses.

Exemple :

On peut établir l'équation de dispersion sans passer par l'équation aux dérivées partielles en traduisant les opérateurs div et rot en formalisme complexe. Les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{(MG)} \quad -i\vec{\underline{k}} \cdot \vec{\underline{E}} &= 0 & \text{(MT)} \quad -i\vec{\underline{k}} \cdot \vec{\underline{B}} &= 0 \\ \text{(MF)} \quad -i\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}} &= -i\omega\vec{\underline{B}} & \text{(MA)} \quad -i\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{B}} &= \mu_0\gamma\omega\vec{\underline{E}} \end{aligned}$$

$$\text{soit} \quad \begin{aligned} \vec{\underline{k}} \cdot \vec{\underline{E}} &= 0 & \vec{\underline{k}} \cdot \vec{\underline{B}} &= 0 \\ \vec{\underline{B}} &= \frac{\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega} & \vec{\underline{k}} \wedge \frac{\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega} &= i\mu_0\gamma\omega\vec{\underline{E}} \end{aligned}$$

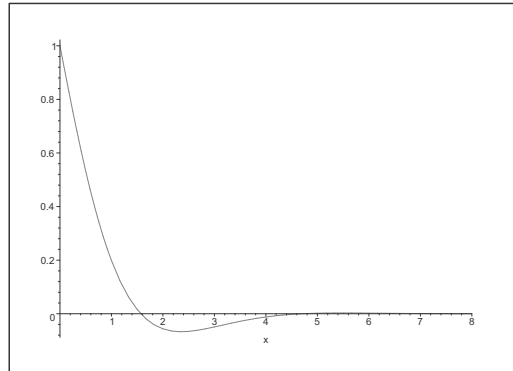
La relation de structure est donc vérifiée comme pour l'OPPH dans le vide (voir chapitre 16), $(\vec{\underline{k}}, \vec{\underline{E}}, \vec{\underline{B}})$ est un trièdre orthogonal direct et en utilisant la formule du double produit vectoriel dans la quatrième équation :

$$\left(\vec{\underline{k}} \cdot \vec{\underline{E}}\right) \vec{\underline{k}} - \left(\vec{\underline{k}} \cdot \vec{\underline{k}}\right) \vec{\underline{E}} = i\mu_0\gamma\omega\vec{\underline{E}}$$

$$\text{donc } \vec{\underline{k}}^2 = -i\mu_0\gamma\omega = \mu_0\gamma\omega e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{donc } \underline{k} = \pm\sqrt{\mu_0\gamma\omega} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}} \mp i\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}$$

Voici l'allure de la courbe représentative de $\frac{E(x,0)}{E_0}$ en fonction de $X = \frac{x}{\delta}$.



↪ Exercices 18.15, 18.16, 18.17, 18.18, 18.19.

Généraliser aux milieux d'indice complexe.

Le plasma et le métal conducteur sont deux cas particuliers d'un modèle plus général de milieu neutre, dont les équations phénoménologiques sont

$$\rho = 0 \text{ et } \vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$$

$\underline{\gamma}$ est la **conductivité complexe** du milieu considéré. Les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Thomson s'écrivent, en grandeurs complexes

$$-i \underline{k} \cdot \vec{E} = 0 \text{ et } -i \underline{k} \cdot \vec{B} = 0$$

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit, en grandeurs complexes

$$-i \underline{k} \wedge \vec{E} = -i \omega \vec{B}$$

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, en grandeurs complexes

$$-i \underline{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \underline{\gamma} \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 (i \omega) \vec{E}$$

$$\text{soit } -i \underline{k} \wedge \vec{B} = i \omega \epsilon_0 \mu_0 \left[1 - \frac{i \underline{\gamma}}{\epsilon_0 \omega} \right] \vec{E}$$

L'**indice complexe** du milieu est le complexe \underline{n} de partie réelle positive défini par

$$\underline{n}^2 = 1 - \frac{i \underline{\gamma}}{\epsilon_0 \omega}$$

Le système des équations de Maxwell conduit à la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\underline{n}^2 \omega^2}{c^2} \text{ donc } \underline{k} = \pm \underline{n} \frac{\omega}{c}$$

Pour étudier un tel milieu, il suffit donc d'établir l'expression de la conductivité complexe. Voici quelques éléments de méthode.

- On traduit les lois de comportement des porteurs de charge (c'est la plupart du temps la loi de la quantité de mouvement) par une équation différentielle linéaire.
- On exprime cette équation en grandeurs complexes, une dérivée par rapport au temps se traduisant par une multiplication par $i\omega$.
- On simplifie éventuellement cette relation en estimant les ordres de grandeur selon la gamme de fréquences, c'est-à-dire la valeur de ω .
- On en déduit la relation de proportionnalité entre \vec{j} et \vec{E} , d'où l'expression de $\underline{\gamma}$.

Exemple :

- Le vide est neutre et $\vec{j} = \vec{0}$, on peut donc l'assimiler à un milieu de conductivité nulle. Son indice est donc $\underline{n} = 1$ donc $\underline{k} = \frac{\omega}{c}$.
- L'indice complexe d'un métal bon conducteur ohmique est défini par

$$\underline{n}_c^2 = 1 - \frac{i\gamma}{\epsilon_0 \omega}$$

Pour des fréquences très inférieures à celles des ondes visibles,

$$\underline{n}_c^2 \simeq -\frac{i\gamma}{\epsilon_0 \omega} \text{ donc } \underline{n}_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\epsilon_0 \omega}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{et } \underline{k} = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} - i \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$$

- L'indice complexe d'un plasma vérifie $\underline{n}_p^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$.
- Les milieux transparents sont caractérisés par un indice réel, qui se confond avec l'indice de réfraction défini en optique géométrique

$$\underline{n} = n \in \mathbf{R} \Rightarrow v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$$

↪ **Exercices 18.20, 18.21, 18.22.**

Énoncés des exercices

18.1

Propagation, atténuation, amplification

Une pseudo-OPPH a pour expression

$$\underline{G}(x, t) = \underline{G}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \text{ avec } \begin{cases} \underline{G}_0 = G_0 e^{i\varphi} \\ \underline{k} = k' + ik'' \end{cases}$$

On suppose $k' > 0$.

- Donner l'expression de $G(x, t)$ en grandeur réelle.
- Justifier que l'onde se propage dans le sens des x croissants.
- Justifier qu'elle se propage en s'atténuant si $k'' < 0$, en s'amplifiant si $k'' > 0$.

18.2

De \underline{k} à l'EDP

Une onde plane $G(x, t)$ a pour vecteur d'onde complexe $\underline{k} = \underline{k} \vec{u}_x$. On suppose que \underline{k} vérifie la relation de dispersion

$$\underline{k} = \pm \frac{\omega - i\omega_0}{c}$$

Établir une équation aux dérivées partielles du second ordre compatible avec cette relation.

18.3

De \underline{k}^2 à \underline{k}

Une pseudo-OPPH $\underline{G}(x, t)$ vérifie l'EDP suivante :

$$\frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\omega_0}{c^2} \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} = 0$$

- Établir l'équation de dispersion vérifiée par \underline{k} .
- On pose $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$. Donner l'expression de $\frac{k^2}{k_0^2}$.
- On pose $\underline{k} = k' + ik''$. En utilisant les exponentielles complexes, montrer que $k'k'' < 0$.
- En déduire le caractère amplifié ou atténué de l'onde.

18.4**Corde vibrante avec frottement fluide visqueux**

Un câble horizontal, confondu au repos avec l'axe (O, x) , de tension horizontale T_0 et de masse linéique μ , vibre dans l'eau, et est soumis à un frottement fluide linéaire : un tronçon de longueur ℓ de corde en translation à la vitesse \vec{v} subit une force de frottement proportionnelle à sa longueur et à sa vitesse

$$\vec{f} = -h\ell\vec{v}$$

On néglige les effets de la pesanteur. En un point M de la corde, on note $z(x, t)$ l'élongation transversale et $\alpha(x, t)$ l'angle d'inclinaison de la corde par rapport à l'horizontale. On fait l'hypothèse des petites vibrations et on rappelle que

$$\alpha(x, t) \simeq \frac{\partial z(x, t)}{\partial x}$$

- Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par l'altitude z .
- Établir l'équation de dispersion.
- On pose

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ et } \omega_c = \frac{h}{\mu}$$

Donner l'expression de \underline{k}^2 en fonction de ω , c et ω_c .

- On suppose $\omega \gg \omega_c$ et on admet la validité en nombre complexes du développement limité

$$(1 + \underline{\epsilon})^r \simeq 1 + r\underline{\epsilon} \text{ si } |\underline{\epsilon}| \ll 1$$

En déduire l'expression approchée de \underline{k} .

- Donner l'expression de $z(x, t)$ en prenant comme condition aux limites

$$z(0, t) = Z_0 \cos(\omega t)$$

- Donner l'expression de la pseudo-longueur d'onde λ .
- Donner l'expression d'une abscisse δ caractéristique de l'amortissement.

18.5

Caténaire

Un câble horizontal est confondu au repos avec l'axe (O, x) . En un point M du câble, on note $z(x, t)$ l'élongation transversale et $\alpha(x, t)$ l'angle d'inclinaison de la corde par rapport à l'horizontale. On fait l'hypothèse des petites vibrations et on rappelle que

$$\alpha(x, t) \simeq \frac{\partial z(x, t)}{\partial x}$$

La tension horizontale du câble est T_0 , sa masse linéique est μ , et il est suspendu par des câbles caténaux dont l'action sur un tronçon de longueur dx est modélisée par une force de rappel

$$\vec{F} = -\alpha dx z(x, t) \vec{u}_z$$

a) Montrer qu'on peut établir une équation du type

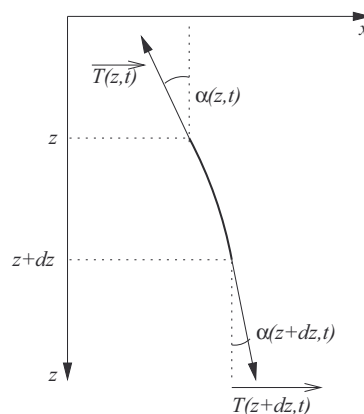
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{z}{\delta^2}$$

b) Donner l'équation de dispersion et déterminer le type d'onde qui peut se développer le long du câble selon la valeur de ω .

18.6

Corde verticale

Une corde verticale, suspendue par son extrémité A, l'autre extrémité B étant libre, est de longueur L et de masse linéique μ . L'axe (A, x) est horizontal, l'axe (A, z) est vertical dirigé vers le bas. On repère l'élongation horizontale d'un point de la corde par $x(z, t)$, son inclinaison par rapport à l'axe vertical par $\alpha(z, t)$ et la tension par $T(z, t)$. On fait l'hypothèse des petites vibrations et on identifie $\alpha \simeq \frac{\partial x}{\partial z}$. On note g l'accélération de la pesanteur.



- a) Établir l'expression de la tension $T(z)$.
 b) Établir l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(L-z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

- c) On cherche une solution du type pseudo-OPPH sous la forme

$$\underline{x}(z, t) = \underline{X}_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

Ce type de solution convient-il ?

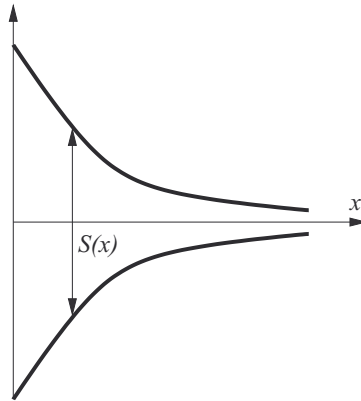
- d) Pour une corde très longue, on confond $(L-z)$ et L . Justifier que lorsqu'on agite assez vite l'extrémité A, l'amplitude de l'onde augmente vers le bas.



18.7

Cornet acoustique (résolution de problème)

On assimile un cornet acoustique (cf. Professeur Tournesol dans *Objectif Lune*) à une tuyère d'axe de révolution $\Delta = (O, x)$ et de section $S(x) = S_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$.



On étudie la propagation des ondes sonores dans ce cornet, dans le sens des x croissants, selon l'approximation acoustique en posant

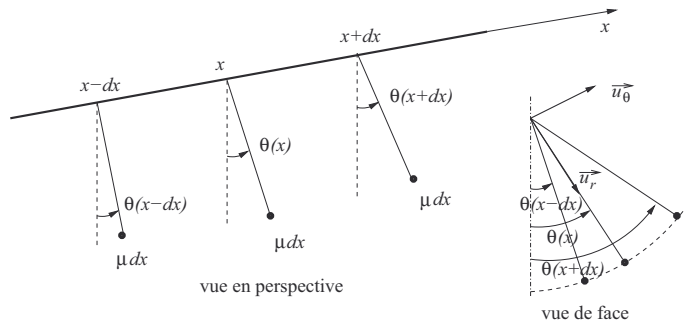
$$P(x, t) = P_0 + p_1(x, t), \quad \mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t) \quad \text{et} \quad \vec{v} = v_1(x, t) \vec{u}_x$$

Établir l'équation linéaire de propagation vérifiée par v_1 , établir l'équation de dispersion et montrer qu'il est possible d'observer une onde amplifiée si ω est supérieure à une pulsation de coupure ω_c dont on précisera l'expression en fonction de μ_0 , δ et du coefficient de compressibilité isentropique χ_S .

18.8

Corde lestée

Une corde de masse très faible, restant parfaitement horizontale selon (O, x) , est lestée par des petites masselottes de masse μdx , séparées de dx , pendues au bout de tiges de masse négligeable et de longueur a et formant autant de pendules dont l'angle d'oscillation est noté $\theta(x, t)$. On pourra considérer l'ensemble {tige, masselotte} comme un solide en rotation autour de l'axe (O, x) , de moment d'inertie $dJ_{(O,x)} = \mu dx a^2$. Chaque tronçon de corde séparant deux lests consécutifs est assimilable à un fil de torsion de constante de raideur de torsion $C = \frac{\Gamma}{dx}$, exerçant un couple de rappel de moment $\mathcal{M}_{(O,x)} = \pm \Gamma \cdot \delta\theta$ sur les deux pendules qu'il relie, $\delta\theta$ étant l'angle de torsion du tronçon de corde. On note g l'accélération de la pesanteur.



- a) Établir, sans faire pour l'instant l'hypothèse des petits angles, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\theta(x, t)$. On l'écrira sous la forme

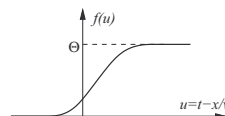
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \omega_0^2 \sin \theta$$

et on exprimera c et ω_0 en fonction de μ , g , a et Γ .

- b) Quels phénomènes physiques particuliers retrouve-t-on
- quand Γ tend vers zéro ?
 - quand $g = 0$?
- c) On fait l'hypothèse des petits angles ; établir l'équation de dispersion et conclure.
- d) On ne fait plus l'hypothèse des petits angles et on cherche une solution sous la forme $\theta(x, t) = f(t - \frac{x}{v})$ où v est une vitesse qu'on ne cherchera pas à déterminer. On suppose de plus que l'onde étudiée est un soliton, c'est-à-dire qu'elle est tend vers une valeur constante quand $t \rightarrow \pm\infty$. Montrer que f vérifie l'équation différentielle non linéaire du premier ordre

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2} \right) (f'(u))^2 + \omega_0^2 (1 - \cos f(u)) = 0 \text{ avec } u = t - \frac{x}{v}$$

- e) Voici le graphe de la solution.



Commenter l'allure de la courbe, proposer une valeur correspondant à la limite Θ et décrire ce soliton.

18.9**Relation entre largeur spectrale et durée du paquet d'ondes**

- a) Quelle est largeur spectrale $\delta\omega$ d'une OPPH et sa durée temporelle δt ? Est-ce cohérent avec la relation entre ces deux grandeurs pour un paquet d'ondes ?
- b) Un doublet spectral est un paquet d'ondes superposition de deux OPPH de même amplitude et de pulsations très proches $\omega_1 = \omega - \frac{\delta\omega}{2}$ et $\omega_2 = \omega + \frac{\delta\omega}{2}$ et de vecteurs d'onde très proches

$$\vec{k}_1 = \left(k' - \frac{\delta k'}{2}\right) \vec{u}_x \text{ et } \vec{k}_2 = \left(k' + \frac{\delta k'}{2}\right) \vec{u}_x$$

Donner l'expression de la vibration en $x = 0$ associée, identifier la porteuse et l'enveloppe du paquet d'ondes, mettre en évidence une durée δt et vérifier la relation entre δt et $\delta\omega$.

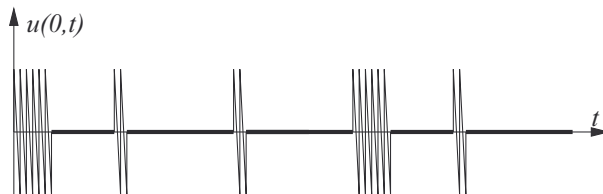
- c) Dans l'expression obtenue à la question (b), retrouver les expressions la vitesse de groupe et la vitesse de phase

18.10**Étalement d'un groupe de cyclistes**

Un peloton de cyclistes a une longueur initiale de 400 m. Le plus rapide, parti le premier, roule à la vitesse $v_M = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, le plus lent, parti le dernier, à la vitesse $v_m = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Quelle est la longueur du peloton lorsque le plus rapide achève un parcours de 100 km ?

18.11**Dispersion et information (analyse documentaire)**

Une information codée en signal binaire de tension et transmise par un câble électrique dispersif et atténuateur (voir exemple du cours) a la forme suivante au niveau de l'émetteur en $x = 0$.



- a) Quel est le signal codé sur 5 bits ?
- b) La vitesse de propagation de l'information est-elle la vitesse de groupe ou la vitesse de phase ?
- c) Donner deux raisons distinctes pour lesquelles la transmission de l'information n'est pas possible sur une très grande distance.

18.12

Dispersion des ondes sonores

Dans l'approximation acoustique et avec les notations habituelles (voir chapitre 16), la prise en compte de la viscosité du fluide conduit aux équations linéarisées suivantes

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \text{ et } \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial v_1}{\partial x}$$

On cherche une solution en surpression p_1 et en vitesse v_1 pseudo-OPPH de pulsation ω et de vecteur d'onde $\underline{k}\vec{u}_x$.

- a) Traduire directement en formalisme complexe les deux équations aux dérivées partielles.
- b) En déduire l'équation de dispersion vérifiée par \underline{k} .
- c) On pose $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$ et $\omega_c = \frac{1}{\eta \chi_S}$. Exprimer \underline{k}^2 en fonction de ω , c et ω_c .
- d) Quand $\eta = 0$, quel type d'onde retrouve-t-on ? Préciser la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
- e) On prend $\omega = \omega_c$.
 - i) Calculer explicitement \underline{k} correspondant à une onde se propageant dans le sens des x croissants. On prendra

$$\frac{\cos \frac{\pi}{8}}{\sqrt[4]{2}} \approx 0,777 \text{ et } \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\sqrt[4]{2}} \approx 0,322$$

- ii) Cette onde est-elle amplifiée ou atténuée ?
 - iii) Calculer la distance caractéristique δ .
- f) On prend $\omega \gg \omega_c$.
 - i) Calculer explicitement \underline{k} correspondant à une onde se propageant dans le sens des x croissants.
 - ii) Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
 - iii) Le milieu est-il dispersif ? Quelle conséquence cela a-t-il pour l'audition d'un morceau de musique ?

18.13

Calcul d'une pulsation plasma

L'hélium de masse molaire $M = 4,00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et de numéro atomique $Z = 2$ est assimilé à un gaz parfait à la pression $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et à la température $T = 1000 \text{ K}$. On donne $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ et $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. On suppose qu'il devient un plasma totalement ionisé. Déterminer n_0 et calculer la pulsation plasma ω_p .

18.14**Vitesse de groupe, vitesse de phase et indice de réfraction dans un plasma**

On considère une pseudo-OPPH dans un plasma de pulsation caractéristique ω_p .

- Rappeler la relation de dispersion et en déduire l'expression de la racine positive k' si $\omega > \omega_p$.
- Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe dans le plasma.
- Donner la relation entre ces deux vitesses et commenter leurs positions relatives par rapport à la célérité de la lumière dans le vide.
- Donner une allure du graphe de ces deux vitesses en fonction de ω quand $\omega > \omega_p$.
- Donner l'expression de l'indice de réfraction plasma $n = \frac{c}{v_{\phi}}$ et décrire la réfraction d'un rayon lumineux du vide vers le plasma en admettant la validité de la loi de Descartes. Donner en particulier l'expression de l'angle limite de réfraction.

18.15**Neutralité d'un bon conducteur ohmique**

Un bon conducteur ohmique possède une conductivité électrique γ supérieure à $10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$. On travaille à une fréquence inférieure à 10^{14} Hz . On donne $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$.

- Rappeler l'équation locale de conservation de la charge.
- En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\rho(M, t)$ et la résoudre.
- En déduire que $\rho \approx 0$ dans ces conditions.
- En déduire qu'une pseudo-OPPH est transverse électrique.

18.16**Négligeabilité des courants de déplacement**

Un bon conducteur ohmique possède une conductivité électrique γ supérieure à $10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$. On travaille à une fréquence inférieure à 10^{14} Hz . On donne $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$.

- En travaillant en ordres de grandeur, montrer qu'on peut négliger le courant de déplacement

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

devant \vec{j} .

- Quelle est la différence entre cette situation et l'ARQS magnétique (voir chapitre 15) sous laquelle on a aussi négligé le terme de courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère ?

18.17**Ordre de grandeur de l'épaisseur de peau**

On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$. Calculer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau pour le cuivre de conductivité électrique $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$ pour une fréquence $f_1 = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ (lumière visible) et pour $f_2 = 50 \text{ Hz}$ (courant domestique). Conclure.



18.18

Effet Joule dans un conducteur ohmique

Un métal conducteur ohmique de conductivité γ occupe le demi-espace $z \geq 0$. On travaille sur la portion $\mathcal{V} = [0, a] \times [0, a] \times [0, +\infty[$. Une pseudo-OPPH de pulsation ω se propage dans ce conducteur avec le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_z$. L'onde est polarisée rectilignement :

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \vec{u}_x e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$$

et $\vec{B}(z, t) = B(z, t) \vec{u}_y$.

- Donner l'expression de $B(z, t)$.
- Donner l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule

$$p_J(z, t) = \vec{j}(z, t) \cdot \vec{E}(z, t)$$

et de sa valeur moyenne dans le temps $\langle p_J \rangle(z)$ (on rappelle que la valeur moyenne d'un cosinus carré vaut 1/2).

- En déduire la puissance totale dissipée dans \mathcal{V} .
- Pourquoi dit-on que ce sont les infra-rouges qui font chauffer une carrosserie de voiture exposée au Soleil ?



18.19

Vitesse de groupe et vitesse de phase dans un métal

Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe dans un métal conducteur ohmique.



18.20

Étude du milieu diélectrique

Un milieu est dit **diélectrique linéaire homogène et isotrope** (dlhi en abrégé) si, lorsqu'il est soumis à un champ électrique, il apparaît un **moment dipolaire électrique volumique** proportionnel au champ électrique en formalisme complexe :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

La constante complexe χ (prononcer ki barre) est appelée **susceptibilité complexe** du milieu et est supposé différente de -1 . Un moment dipolaire volumique engendre une densité volumique de charges et une densité volumique de courants

$$\rho = -\text{div } \vec{P} \text{ et } \vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

- Vérifier que ces deux lois sont compatibles avec l'équation locale de conservation de la charge.
- Montrer que les lois du dlhi conduisent à des équations de Maxwell analogues à celles du vide, mais où ϵ_0 est remplacé par $\epsilon_0 \underline{\epsilon}$ où $\underline{\epsilon}$ est appelée la permittivité diélectrique relative du milieu qu'on exprimera en fonction de $\underline{\chi}$.
- On suppose que $\underline{\chi}$ est un réel positif noté χ . Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ électrique \vec{E} .
- En déduire la célérité de l'onde c et l'exprimer sous la forme $c = \frac{c_0}{n}$ où n est l'indice du milieu qu'on exprimera en fonction de χ .
- Dans un modèle particulier, on montre que la susceptibilité est réelle et vaut

$$\chi = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 \kappa \left(1 - \frac{m_e \omega^2}{\kappa}\right)}$$

où n_0 est le nombre d'atomes par mètre cube, e la charge élémentaire, m_e la masse de l'électron et κ une constante de raideur. On peut vérifier numériquement que pour la lumière visible

$$\omega \ll \omega_0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m_e}}$$

Montrer théoriquement la loi de Cauchy donnant l'indice de réfraction d'un matériau diélectrique transparent en fonction de la longueur d'onde dans le vide :

$$n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

Préciser les expressions de A et de B.

18.21

Transparence ultraviolette des métaux

Dans un métal comportant n_0 électrons libres par mètre cube, ceux-ci (de masse m et de charge $-e$) subissent l'action mécanique d'une onde électromagnétique ($\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t)$), une force de frottement $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$ et leur poids. On suppose que le métal reste neutre.

- Écrire la loi de la quantité de mouvement pour un électron de vitesse \vec{v} .
- On admet que plusieurs termes peuvent être négligés dans cette relation et on l'écrit ainsi :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}(M, t) - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

La densité volumique de courant associée à ce déplacement d'électrons est

$$\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$$

Établir l'équation de dispersion vérifiée par le vecteur d'onde complexe $\underline{k} = \underline{k} \vec{u}_x$. En déduire le carré de l'indice complexe de ce métal.

- Étudier le cas $\tau\omega \gg 1$ et expliquer le titre de l'exercice, sachant que $n_0 \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$, $\epsilon_0 \approx 10^{-11} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, $m \approx 10^{-30} \text{ kg}$ et $e \approx 10^{-19} \text{ C}$.

18.22

Modèle électromagnétique du milieu laser

Le milieu laser est caractérisé par un vecteur polarisation \vec{P} vérifiant

$$\begin{cases} \vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \\ \vec{P} = \epsilon_0 \chi_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_0 \tau \frac{d\vec{E}}{dt} \end{cases}$$

- a) Préciser les unités des paramètres χ_0 et τ .
- b) Déterminer le carré de l'indice complexe de ce milieu laser.
- c) Justifier que la propagation d'une onde dans ce milieu peut être amplifiée.

Du mal à démarrer ?

- 18.1 On remplace \underline{k} par son expression, on sépare les exponentielles réelle et imaginaire pure et on prend la partie réelle.
- 18.2 En élevant au carré, on élimine le \pm , puis on passe du formalisme complexe au formalisme réel.
- 18.3 En formalisme complexe, les dérivations se ramènent à des multiplications. Quand on élève un complexe au carré, son module est élevé au carré et son argument est multiplié par 2. Il est facile d'imaginer le processus inverse.
- 18.4 Le raisonnement est analogue à celui effectué au chapitre 16. La résolution approchée de l'équation de dispersion est basée sur la relation $\sqrt{1+\epsilon} = (1+\epsilon)^{\frac{1}{2}}$.
- 18.5 Le raisonnement est analogue à celui effectué au chapitre 16. L'équation de dispersion fait apparaître deux cas distincts de part et d'autre d'une pulsation de coupure.
- 18.6 Le raisonnement est analogue à celui effectué au chapitre 16, mais la tension de la corde n'est pas constante, on pourra la prendre nulle en $z = L$.
- 18.7 Les équations mécanique et isentropique sont les mêmes que dans le modèle habituel des ondes sonores. La loi de conservation de la masse, elle, est modifiée : on doit faire un bilan en régime non permanent sur la tranche $[x, x + dx]$.
- 18.8 On applique la loi du moment cinétique sur le pendule d'abs-cisse x soumis au poids et aux couples de torsion des deux tronçons de fil qui l'entourent.
- 18.9 Pour la question (b), on doit remplacer la somme des cosinus en produit et faire apparaître ainsi l'enveloppe et la porteuse.
- 18.10 Application numérique immédiate, qui illustre la notion d'étalement de train d'ondes.
- 18.11 L'étalement des trains d'ondes correspondant aux différents bits provoque le brouillage du signal.

- 18.12 L'équation de dispersion peut être résolue de façon exacte dans les différents cas étudiés.
- 18.13 La loi des gaz parfait permet de déterminer le nombre d'atomes d'hélium par mètre cube.
- 18.14 On obtient v_φ et v_g en appliquant les formules du cours.
- 18.15 Démonstration élémentaire de cours, nécessitant la conjonction de l'équation de conservation de la charge, la loi d'Ohm locale et l'équation de Maxwell-Gauss.
- 18.16 L'ordre de grandeur d'une dérivée par rapport au temps peut être estimée en travaillant en grandeurs complexes.
- 18.17 Application numérique immédiate grâce à la formule du cours, c'est le commentaire qui demande un peu de réflexion.
- 18.18 On calcule \vec{B} grâce à l'équation de Maxwell-Faraday. Le calcul de la puissance Joule nécessite une intégrale triple.
- 18.19 Par application des formules du cours, il suffit d'effectuer une division pour calculer la vitesse de phase et une dérivation pour calculer la vitesse de groupe.
- 18.20 Il faut éliminer \vec{P} entre les différentes relations proposées. Le raisonnement ressemble à celui développé dans le cours sur le plasma, où c'est \vec{v} qu'on doit éliminer.
- 18.21 Le passage en formalisme complexe permet d'éliminer tout à tour \underline{v} , \underline{j} , \underline{B} et finalement \underline{E} pour trouver l'équation de dispersion.
- 18.22 Conformément à la méthode donnée dans le cours, on traduit les relations constitutives données par une relation complexe dont on tire la conductivité complexe du milieu, puis \underline{n} . En cherchant, sans le calculer, les signes des parties réelle et imaginaire de \underline{k} , on peut conclure.

Corrigés des exercices

18.1

a) On remplace \underline{G}_0 et \underline{k} par leurs expressions

$$\underline{G}(x, t) = G_0 e^{i\varphi} e^{i(\omega t - k'x - ik''x)}$$

$$\text{soit } \underline{G}(x, t) = G_0 e^{k''x} e^{i(\omega t - k'x + \varphi)}$$

et on prend la partie réelle de cette expression :

$$G(x, t) = G_0 e^{k''x} \cos(\omega t - k'x + \varphi)$$

b) On remarque que

$$G(0, t) = \cos(\omega t + \varphi)$$

et on peut écrire

$$G(x, t) = e^{k''x} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{k'} \right) + \varphi \right]$$

$$\text{donc } G(x, t) = e^{k''x} \cdot G \left(0, t - \frac{x}{k'} \right)$$

Ce qu'on peut interpréter ainsi : « ce qui se passe en x à la date t est ce qui s'est passé un peu plus tôt en 0 (à la date $t - \tau$ avec $\tau = \frac{x}{k'}$, retard de l'onde ou délai de propagation

entre 0 et x) et avec un facteur d'amplitude $e^{k''x}$. L'onde se propage donc bien dans le sens des x croissants. Notons qu'on a mis en évidence une vitesse de propagation de la phase du cosinus

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k'}$$

c) Comme l'onde se propage dans le sens des x croissants, le facteur d'amplitude est une fonction croissante de x si $k'' > 0$ et l'onde s'amplifie, décroissante si $k'' < 0$ et l'onde s'atténue.

18.2

On lève l'ambiguïté sur le signe en élevant la relation au carré :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2i\omega_0\omega}{c^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2}$$

$$\text{soit } -(-i\underline{k})(-i\underline{k}) = -\frac{1}{c^2}(i\omega)(i\omega) - \frac{2\omega_0}{c^2}(i\omega) - \frac{\omega_0^2}{c^2}$$

$$\text{donc } (-i\underline{k})(-i\underline{k})\underline{G}(x, t) =$$

$$\frac{1}{c^2}(i\omega)(i\omega)\underline{G}(x, t) + \frac{2\omega_0}{c^2}(i\omega)\underline{G}(x, t) + \frac{\omega_0^2}{c^2}\underline{G}(x, t)$$

et en utilisant l'équivalence complexe-temporelle on en déduit l'EDP

$$\frac{\partial^2 \underline{G}(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{G}(x, t)}{\partial t^2} + \frac{2\omega_0}{c^2} \frac{\partial \underline{G}(x, t)}{\partial t} + \frac{\omega_0^2}{c^2} \underline{G}(x, t)$$

18.3

a) En utilisant les règles de dérivation de la grandeur complexe $\underline{G}(x, t)$, on obtient

$$(-i\underline{k})(-i\underline{k})\underline{G}(x, t) - \frac{1}{c^2}(i\omega)(i\omega)\underline{G}(x, t) - \frac{\omega_0}{c^2}(i\omega)\underline{G}(x, t) = 0$$

$$\text{donc } \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i \frac{\omega_0\omega}{c^2}$$

b) Avec la notation proposée, on obtient

$$\underline{k}^2 = k_0^2 - i \frac{\omega_0}{\omega} k_0^2$$

$$\text{donc } \frac{\underline{k}^2}{k_0^2} = 1 - i \frac{\omega_0}{\omega}$$

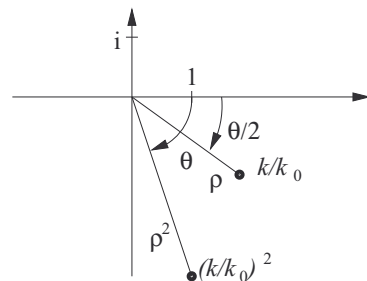
c) On remarque que le carré de $\frac{k}{k_0}$ possède une partie réelle positive et une partie imaginaire négative. Il a donc un module qu'on note ρ^2 et un argument dont une détermination est $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

$$\left(\frac{k}{k_0} \right)^2 = \rho^2 e^{i\theta}$$

Une de ses racines carrées complexes est donc le complexe dont le module est ρ et l'argument $\frac{\theta}{2}$, l'autre est l'opposé :

$$\left[\frac{k}{k_0} \right]^2 = \rho^2 e^{i\theta} \Rightarrow \frac{k}{k_0} = \pm \rho e^{i\frac{\theta}{2}}$$

avec $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{4}, 0[$.

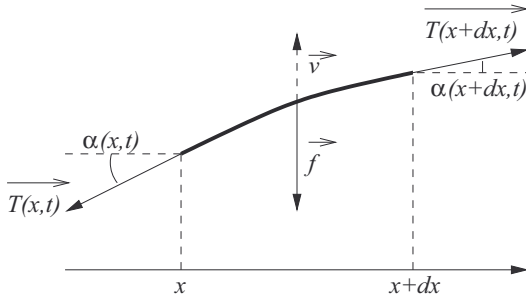


L'une des solutions a pour partie réelle $k' > 0$ et pour partie imaginaire $k'' < 0$ (celle représentée sur le plan complexe), c'est le contraire pour l'autre. Dans les deux cas, k' et k'' sont de signes contraires donc $k'k'' < 0$.

d) L'onde est donc atténuée d'après le cours.

18.4

a) Le tronçon de corde est soumis à la tension à ses deux extrémités et à la force de frottement.



En projection sur les axes x et z , on obtient donc

$$\begin{cases} 0 = -T(x, t) \cos \alpha(x, t) + T(x + dx, t) \cos \alpha(x + dx, t) \\ \mu dx \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = -T(x, t) \sin \alpha(x, t) + T(x + dx, t) \sin \alpha(x + dx, t) - h dx \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \end{cases}$$

En faisant l'approximation des petits angles, la première équation donne

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0 \text{ donc } T(x, t) = T_0$$

En remplaçant dans la seconde équation, on obtient donc

$$\mu \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)}{dx} - h \frac{\partial z(x, t)}{\partial t}$$

$$\text{soit } \mu \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} - h \frac{\partial z(x, t)}{\partial t}$$

et en utilisant la relation entre α et z :

$$\frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} - \frac{h}{T_0} \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} = 0$$

b) Avec les notations proposées, cette EDP s'écrit

$$\frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\omega_c}{c^2} \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} = 0$$

En passant au formalisme complexe, on obtient

$$-k^2 \underline{z}(x, t) + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{z}(x, t) - i \frac{\omega \omega_c}{c^2} \underline{z}(x, t) = 0$$

c) On en déduit

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i \frac{\omega \omega_c}{c^2}$$

d) En factorisant, on peut écrire

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - i \frac{\omega_c}{\omega} \right]$$

Le terme $\frac{\omega_c}{\omega}$ est très petit devant 1 donc on peut faire le développement limité

$$\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c} \left[1 - i \frac{\omega_c}{\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \approx \pm \frac{\omega}{c} \left[1 - i \frac{\omega_c}{2\omega} \right]$$

$$\text{soit } \underline{k} = \frac{\omega}{c} - i \frac{\omega_c}{2c}$$

e) On en déduit l'expression de l'onde en grandeurs complexes

$$\underline{z}(x, t) = Z_1 e^{i\varphi} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c}x + i \frac{\omega_c}{2c}x)}$$

$$\underline{z}(x, t) = Z_1 e^{-\frac{\omega_c}{2c}x} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi)}$$

La condition aux limites en $x = 0$ donne

$$Z_0 e^{i\omega t} = Z_1 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

donc $Z_1 = Z_0$ et $\varphi = 0$ d'où

$$\underline{z}(x, t) = Z_0 e^{-\frac{\omega_c}{2c}x} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c}x)}$$

$$\text{donc } z(x, t) = Z_0 e^{-\frac{\omega_c}{2c}x} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)$$

f) La pseudo-longueur d'onde est la période spatiale du cosinus :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}} = \frac{c}{f}$$

où $f = \frac{\omega}{2\pi}$ est la fréquence de la vibration en $x = 0$.

g) L'exponentielle réelle du coefficient d'amortissement s'écrit

$$e^{-\frac{\omega_c}{2c}x} = e^{-\frac{x}{\delta}} \text{ avec } \delta = \frac{2c}{\omega_c} = \frac{2\sqrt{T\mu}}{h}$$

18.5

On se place dans les notations habituelles de la corde tendue à ses extrémités. La force nouvelle étant verticale, perpendiculaire aux déplacements de la corde, la tension reste égale à la tension à l'extrémité, T_E .

a) En projection sur l'axe vertical, en négligeant le poids, en faisant l'approximation des petits angles avec $\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial z}{\partial x}$:

$$-T_E \alpha(x) + T_E \alpha(x + dx) - \alpha z dx = \mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\text{soit } T_E \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \alpha z = \mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\text{soit } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{z}{\delta^2}$$

en posant $c = \sqrt{\frac{T_E}{\mu}}$ et $\delta = \sqrt{\frac{T_E}{\alpha}}$

b) On passe en formalisme complexe :

$$-k^2 z + \frac{\omega^2}{c^2} z = \frac{1}{\delta^2} z$$

et on en déduit l'équation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{1}{c^2} \left[\omega^2 - \frac{c^2}{\delta^2} \right]$$

On a donc deux cas, en posant $\omega_c = \frac{c}{\delta}$ (pulsation de coupure).

- Premier cas : $\omega < \omega_c$. \underline{k} est imaginaire pur, il n'y a pas de propagation.
- Second cas : $\omega > \omega_c$. \underline{k} est réel, il y a propagation sans atténuation avec une vitesse de phase

$$c' = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2 \delta^2}}}$$

18.6

a) La loi de la quantité de mouvement appliquée au brin de corde s'écrit :

$$\begin{cases} -T(z) \sin \alpha(z, t) + T(z + dz) \sin \alpha(z + dz, t) = \mu dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ -T(z) \cos \alpha(z, t) + T(z + dz) \cos \alpha(z + dz, t) + \mu dz g = 0 \end{cases}$$

En projection verticale et avec l'hypothèse des petits angles, il vient $\frac{\partial T}{\partial z} = -\mu g$ d'où, avec la condition aux limites $T(L) = 0$ (ou $T(0) = \mu g L$)

$$T(z) = \mu g(L - z)$$

b) En projection horizontale et avec l'hypothèse des petits angles, il vient

$$\frac{\partial}{\partial z} [T(z) \alpha(z, t)] = \mu \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

$$\text{soit } \alpha(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} + T \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

Or $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial x}{\partial z}$ d'où

$$-\mu g \frac{\partial x}{\partial z} + \mu g(L - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(L - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

c) La présence de z (la variable spatiale) interdit l'écriture de l'équation de dispersion.

d) Si L grand, l'EDP s'écrit

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + gL \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

et en formalisme complexe

$$-\omega^2 \underline{x} = i g k \underline{x} - gL \underline{k}^2$$

$$\text{soit } \underline{k}^2 - i \frac{1}{L} \underline{k} - \frac{\omega^2}{gL} = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = \frac{4\omega^2 L - g}{gL^2}$; il est positif car L est grand donc on pose $\Delta = \frac{1}{L_0^2}$ et

$$\underline{k} = \pm \frac{1}{2L_0} + \frac{1}{2L} i$$

On garde la solution de partie réelle positive car l'onde se propage vers le bas dans le sens des z croissants et on en déduit la pseudo-OPPH

$$\underline{x} = X e^{i\varphi} e^{i(\omega t - \frac{1}{2L_0} z - \frac{1}{2L} iz)}$$

$$\text{soit } x(z, t) = X e^{\frac{z}{2L}} \cos \left(\omega t - \frac{1}{2L_0} z \right)$$

L'onde est donc amplifiée, ce qu'on peut interpréter énergétiquement par le fait que plus on descend, plus la masse de la corde restante suspendue est faible, et donc plus les oscillations peuvent avoir une grande amplitude.

18.7

Les trois équations sont, comme dans le cas habituel des ondes sonores,

- l'équation mécanique (M) traduisant la loi de la quantité de mouvement pour la particule de fluide soumise aux forces de pression
- l'équation (CM) de conservation de la masse qui est ici modifiée par la forme du cornet
- l'équation (S) traduisant l'évolution isentropique du fluide.

On ne revient pas ici sur les première et troisième équations linéarisées, on renvoie au chapitre 16 pour leur établissement :

$$\begin{cases} \text{(M)} \quad \mu_0 \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x} \\ \text{(S)} \quad \frac{\partial \mu_1(x, t)}{\partial t} = \mu_0 \chi_S \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} \end{cases}$$

Établissons la loi de conservation de la masse en faisant un bilan en régime non permanent sur la tranche $[x, x + dx]$ du cornet. La masse qu'elle contient à la date $t + dt$ ($m(t + dt)$) est égale à la masse qu'elle contient à la date t ($m(t)$) plus la masse (dm_e) qui entre en x moins la masse (dm_s) qui sort en $x + dx$ à la date t . Le débit massique étant le produit de la masse volumique par la section par la vitesse, on a :

$$\begin{aligned} \mu(x, t + dt) S(x) dx &= \mu(x, t) S(x) dx + \mu(x, t) S(x) v_1(x, t) dt \\ &\quad - \mu(x + dx, t) S(x + dx) v_1(x + dx, t) dt \end{aligned}$$

$$\text{soit } S(x) \frac{\mu(x, t + dt) - \mu(x, t)}{dt} =$$

$$\frac{\mu(x + dx, t)S(x + dx)v_1(x + dx, t)}{dx}$$

$$+ \frac{\mu(x, t)S(x)v_1(x, t)}{dx}$$

$$\text{soit } S(x) \frac{\partial \mu(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial(\mu(x, t)S(x)v_1(x, t))}{\partial x}$$

En supprimant les dérivées des termes constants et en négligeant les termes du second ordre, cette relation devient

$$S(x) \frac{\partial \mu_1(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial \mu_0 S(x) v_1(x, t)}{\partial x}$$

$$= -\mu_0 S'(x) v_1(x, t) - \mu_0 S(x) \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x}$$

Or $S'(x) = -\frac{1}{\delta} S(x)$ donc

$$S(x) \frac{\partial \mu_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\mu_0}{\delta} S(x) v_1(x, t) - \mu_0 S(x) \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x}$$

$$\text{soit (CM)} \quad \frac{\partial \mu_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\mu_0}{\delta} v_1(x, t) - \mu_0 \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x}$$

On élimine $\frac{\partial \mu_1(x, t)}{\partial t}$ entre (S) et (CM), on simplifie par μ_0 et on obtient le système

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x} \\ \chi S \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\delta} v_1(x, t) - \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} \end{cases}$$

On dérive la première équation par rapport à t , la seconde par rapport à x et on utilise le théorème de Schwartz pour éliminer p_1 , on en déduit l'EDP

$$\frac{\partial^2 v_1(x, t)}{\partial x^2} - \mu_0 \chi S \frac{\partial^2 v_1(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} = 0$$

On cherche une solution pseudo-OPPH de cette équation, et en utilisant les lois de dérivation en grandeurs complexes :

$$-\underline{k}^2 \underline{v}_1(x, t) + \mu_0 \chi S \omega^2 \underline{v}_1(x, t) + i \underline{k} \cdot \frac{1}{\delta} \underline{v}_1(x, t) = 0$$

d'où, en posant $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi S}}$, l'équation de dispersion

$$\underline{k}^2 - i \frac{1}{\delta} \underline{k} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = -\frac{1}{\delta^2} + \frac{4\omega^2}{c^2} = \frac{1}{\delta^2} \left[\left(\frac{\omega}{\frac{c}{2\delta}} \right)^2 - 1 \right]$$

Posons $\omega_c = \frac{c}{2\delta} = \frac{1}{2\delta\sqrt{\mu_0\chi S}}$. Si $\omega > \omega_c$, alors $\Delta > 0$ et les racines de l'équation de dispersion sont

$$\underline{k} = \frac{1}{2\delta} i \pm \frac{1}{2\delta} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 - 1}$$

Comme l'énoncé précise que l'onde se propage dans le sens des x croissants, on garde la solution de partie réelle positive, soit

$$\underline{k} = k' + i k'' \text{ avec } \begin{cases} k' = \frac{1}{2\delta} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 - 1} \\ k'' = \frac{1}{2\delta} \end{cases}$$

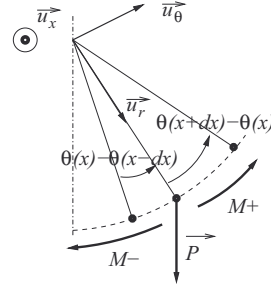
La solution réelle est donc du type

$$v_1(x, t) = V_1 e^{\frac{x}{2\delta}} \cos(\omega t - k'x + \varphi)$$

qui correspond bien à une onde amplifiée de distance caractéristique d'amplification δ .

18.8

- a) Dans la situation de la figure, le pendule d'abscisse x est soumis au poids qui s'exerce sur la masselotte, et aux couples de torsion du fil entre x et $x - dx$ dont l'angle de torsion est $\theta(x, t) - \theta(x - dx, t)$, et du fil entre x et $x + dx$ dont l'angle de torsion est $\theta(x + dx, t) - \theta(x, t)$.



La loi du moment cinétique pour le pendule s'écrit

$$\mu dx a^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = -\mu dx g \sin \theta(x, t)$$

$$+ \frac{\Gamma}{dx} [\theta(x + dx, t) - \theta(x, t)]$$

$$- \frac{\Gamma}{dx} [\theta(x, t) - \theta(x - dx, t)]$$

On effectue le développement limité au second ordre en dx :

$$\begin{cases} \theta(x + dx, t) = \theta(x, t) + \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} (dx)^2 \\ \theta(x - dx, t) = \theta(x, t) + \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} (-dx) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} (-dx)^2 \end{cases}$$

$$\mu dx a^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = -\mu dx g \sin \theta(x, t) - \frac{\Gamma}{dx} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} (dx)^2$$

$$\text{soit } \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{g}{a} \sin \theta(x, t) + \frac{\Gamma}{\mu a^2} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} (dx)^2$$

$$\text{soit } \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \omega_0^2 \sin \theta \text{ avec } \begin{cases} c = \sqrt{\frac{\Gamma}{\mu a^2}} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}} \end{cases}$$

b) • Quand $\Gamma \rightarrow 0$, $c \rightarrow 0$ donc l'EDP s'écrit

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

qui est l'équation d'un pendule simple : le fil étant très souple, chaque pendule oscille indépendamment des autres. • Quand $g = 0$, $\omega_0 = 0$ et on obtient une équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

qui est celle qui régit la propagation d'une onde de torsion le long de la corde, indépendamment du mouvement pendulaire car la gravité est nulle (c'est le dispositif de l'échelle de Perroquet).

c) Avec l'hypothèse des petits angles, l'EDP s'écrit

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \omega_0^2 \theta$$

En formalisme complexe, on obtient

$$(i\omega)(i\omega)\underline{\theta} = c^2(-ik)(-ik)\underline{\theta} - \omega_0^2 \underline{\theta}$$

$$\text{soit } \underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$$

- Si $\omega < \omega_0$, $\underline{k}^2 < 0$, donc \underline{k} est un imaginaire pur, $k' = 0$ donc il n'y a pas de propagation, c'est une onde stationnaire évanescence.
- Si $\omega > \omega_0$, $\underline{k}^2 > 0$, donc \underline{k} est un réel, il y a propagation sans atténuation.

d) On calcule les dérivées partielles

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot f'(u) = f'(u)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot f''(u) = f''(u)$$

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot f'(u) = -\frac{1}{v} f'(u)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot f''(u) = \frac{1}{v^2} f''(u)$$

On injecte dans l'équation

$$\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) f''(u) = -\omega_0^2 \sin f(u)$$

On réduit l'ordre de cette équation en multipliant par $f'(u)$ et en intégrant.

$$\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) f''(u) f'(u) = -\omega_0^2 f'(u) \sin f(u)$$

$$\text{donc } \left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (f'(u))^2 \right] = \omega_0^2 \frac{d}{dt} [\cos f(u)]$$

Quand $t \rightarrow -\infty$, $f(u)$ tend vers une constante, qu'on prend nulle, sa dérivée tend donc vers 0. On intègre donc entre $-\infty$ et t , d'où

$$\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) \cdot \frac{1}{2} (f'(u))^2 = \omega_0^2 (\cos f(u) - \cos 0)$$

$$\text{soit } \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) (f'(u))^2 + \omega_0^2 (1 - \cos f(u)) = 0$$

e) On peut considérer que $\Theta = 2\pi$ qui correspond à une position d'équilibre stable pour chaque pendule. On a donc un retournement des pendules qui font à tour de rôle un tour complet, l'onde de retournement se propageant à la vitesse v .

18.9

- a) L'OPPH est monochromatique, elle possède une pulsation ω unique, donc $\delta\omega = 0$. Sa durée temporelle δt est infinie. Ces valeurs sont cohérentes avec la relation du cours écrite sous la forme $\delta\omega \simeq \frac{2\pi}{\delta t}$.
- b) L'utilisation de la relation de trigonométrie permet de transformer la somme en produit :

$$S(x, t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x) =$$

$$2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right)$$

Avec les expressions proposées, on obtient

$$S(x, t) = 2A \cos(\omega t - k' x) \cos(\delta\omega t - \delta k' x)$$

$$\text{soit } S(t) = \mathcal{F}_x(t) \cdot \cos(\omega t - k' x)$$

$$\text{avec } \mathcal{F}_x(t) = 2A \cos(\delta\omega t - \delta k' x)$$

qu'on identifie à l'enveloppe. La période temporelle de l'enveloppe est identifiée à la durée temporelle

$$\delta t = \frac{2\pi}{\delta\omega} \text{ donc } \delta t \cdot \delta\omega = 2\pi$$

c) La porteuse s'écrit

$$\cos(\omega t - k'x) = \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{k'} \right) \right]$$

donc sa vitesse de propagation est la vitesse de phase

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k'}$$

L'enveloppe s'écrit

$$2A \cos(\delta\omega t - \delta k'x) = 2A \cos \left[\delta\omega \left(t - \frac{x}{\frac{\delta\omega}{\delta k'}} \right) \right]$$

donc sa vitesse de propagation est la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k'} \approx \frac{d\omega}{dk'}$$

18.10 Le premier cycliste arrive à la date

$$t_1 = \frac{100\,000}{10} = 10\,000 \text{ s}$$

À la date t_1 , le dernier cycliste parti est à l'abscisse

$$x_2 = -400 + v_m t_1 = 49\,600 \text{ m}$$

La longueur du peloton est donc

$$\delta x = 100\,000 - 49\,600 = 50,4 \text{ km}$$

Il y a donc bien étalement du groupe cycliste, la dispersion est la conséquence de l'écart de vitesse entre les différents cyclistes, comme dans la théorie ondulatoire où on a un écart de vitesse de phase entre les différentes composantes spectrales.

18.11

a) Si on admet l'analogie avec le code Morse, une brève impulsion correspond à un zéro, une longue à un un, donc le message est

$$10010$$

b) L'information est donc portée par la durée du paquet d'ondes, donc par la largeur temporelle de l'enveloppe, elle se propage donc à la vitesse de groupe.

c) D'une part, le câble est atténuateur donc l'information sera impossible à décoder lorsque son amplitude sera inférieure au bruit. D'autre part, il est dispersif, donc les paquets d'ondes s'évalent, et lorsque la largeur temporelle de chacun d'eux sera supérieure à la période d'émission des bits d'information, ils se superposent et il devient impossible de décoder l'information.

18.12

a) En utilisant les lois de dérivation en grandeurs complexes :

$$\begin{cases} \mu_0(i\omega)\underline{v}_1 = -(-ik)\underline{p}_1 + \eta(-ik)(-ik)\underline{v}_1 \\ (i\omega)\underline{p}_1 = -\frac{1}{\chi_S}(-ik)\underline{v}_1 \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} i\mu_0\omega\underline{v}_1 = ik\underline{p}_1 - \eta k^2\underline{v}_1 \\ \underline{p}_1 = \frac{1}{\chi_S\omega}k\underline{v}_1 \end{cases}$$

b) On élimine \underline{p}_1 entre les deux équations :

$$i\mu_0\omega\underline{v}_1 = ik^2\frac{1}{\chi_S\omega}\underline{v}_1 - \eta k^2\underline{v}_1$$

$$\text{donc } \mu_0\omega = k^2\frac{1}{\chi_S\omega} + i\eta k^2$$

$$\text{soit } k^2 = \frac{\mu_0\omega}{\frac{1}{\chi_S\omega} + i\eta}$$

d'où l'équation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\mu_0\chi_S\omega^2}{1 + i\eta\chi_S\omega}$$

c) Avec les notations proposées, on obtient :

$$\underline{k}^2 = \frac{\frac{\omega^2}{c^2}}{1 + i\frac{\omega}{\omega_c}}$$

d) Si $\eta = 0$, ω_c est infini et l'équation de dispersion s'écrit

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

On retrouve l'équation de dispersion des ondes sonores dans un fluide parfait et

$$v_{\varphi} = v_g = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_S}}$$

e) Quand $\omega = \omega_c$, on obtient

$$\underline{k}^2 = \frac{\frac{\omega^2}{c^2}}{1 + i} = \frac{\omega^2}{c^2\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

i) La racine de partie réelle positive est

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

$$\text{soit } \underline{k} \approx 0,777\frac{\omega}{c} - 0,322i\frac{\omega}{c}$$

ii) Cette onde est atténuée car la partie imaginaire de k'' est négative alors que sa partie réelle k' est positive.

iii) La distance caractéristique d'atténuation est

$$\delta = \frac{1}{|k''|} = \frac{c}{0,322\omega_c}$$

f) Lorsque $\omega \gg \omega_c$,

$$\underline{k}^2 \simeq -i \frac{\omega\omega_c}{c^2} = \frac{\omega\omega_c}{c^2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

i) On en déduit

$$\underline{k} = \frac{\sqrt{\omega\omega_c}}{c} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

soit $\underline{k} = \sqrt{\frac{\omega_c\omega}{2c^2}} - i\sqrt{\frac{\omega_c\omega}{2c^2}}$

ii) On a donc $k' = \sqrt{\frac{\omega_c\omega}{2c^2}}$ et on en déduit

$$\begin{cases} v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = c\sqrt{\frac{2\omega}{\omega_c}} \\ v_g = \frac{d\omega}{dk'} = c\sqrt{\frac{8\omega}{\omega_c}} \end{cases}$$

iii) Le milieu est dispersif car la vitesse de phase et la vitesse de groupe dépendent de la pulsation ω , elles sont proportionnelles à sa racine carrée. Une note grave formant un paquet d'onde de faible fréquence se déplace donc plus lentement qu'une note aiguë et la simultanéité des notes formant la polyphonie à l'émission n'est donc plus assurée à la réception. Il y a brouillage du signal.

18.13 Notons n_1 le nombre d'atomes par mètre cube dans le gaz d'hélium. La loi des gaz parfaits donne

$$PV = nRT = \frac{N}{\mathcal{N}_A} RT \text{ donc}$$

$$n_1 = \frac{N}{V} = \frac{P\mathcal{N}_A}{RT} = 7,33 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$$

S'il devient un gaz totalement ionisé, chaque atome libère $Z = 2$ électrons donc

$$n_0 = 2n_1 = 14,7 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$$

Par application de la formule du cours :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}} = 2,16 \cdot 10^{14} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

18.14

a) D'après le cours

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

$$\text{donc } k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

b) On en déduit

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \text{ et}$$

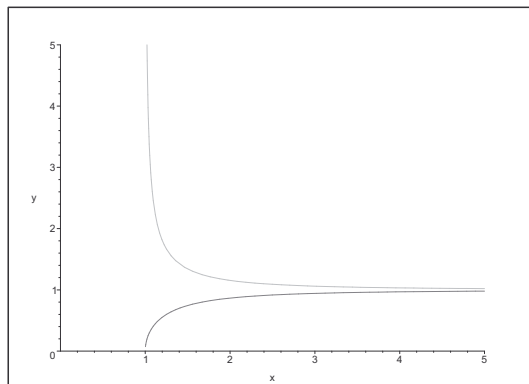
$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

c) On remarque que

$$v_g < c < v_\varphi$$

La vitesse de groupe est donc (heureusement) inférieure à c et l'information ne peut se propager plus vite que la lumière.

d) Voici l'allure des graphes de $\frac{v_g}{c}$ et de $\frac{v_\varphi}{c}$ en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_p}$



e) L'indice du plasma vaut donc

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Il est plus petit que 1 alors que c'est impossible pour un milieu transparent habituel. La deuxième loi de Descartes à la réfraction s'écrit

$$1 \sin i = n \sin r \text{ donc } r > i$$

Le rayon réfracté s'écarte de la normale au dioptre. Il n'est défini que si

$$\sin r \leq 1 \text{ soit } \frac{\sin i}{n} \leq 1$$

$$\text{soit } i \leq \arcsin n$$

L'angle limite de réfraction est donc

$$i_L = \arcsin \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

18.15

a) L'équation s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

b) En combinant cette équation avec celle de Maxwell-Gauss et la loi d'Ohm locale, on obtient :

$$\operatorname{div} \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{donc } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \rho = 0 \text{ avec } \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \approx 2 \cdot 10^{-18} \text{ s}$$

La solution est

$$\rho(M, t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

c) ρ est presque nul au bout de $5\tau \approx 10^{-17}$ s. Or la période de l'onde est de 10^{-14} s $\gg 5\tau$, donc $\rho \approx 0$.

d) L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit donc

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

soit, en formalisme complexe

$$-i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \text{ donc } \vec{k} \perp \vec{E}$$

18.16

a) Le rapport des ordres de grandeur s'écrit

$$\frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}\|} = \frac{\|\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\vec{j}\|}$$

$$\frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}\|} \approx \frac{\epsilon_0 \omega E}{\gamma E} = \frac{\omega}{\frac{\gamma}{\epsilon_0}}$$

En ordre de grandeur :

$$\frac{\omega}{\epsilon_0} \approx \cdot 10^{17} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{et } \omega = 2\pi f < 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

donc $\vec{j}_D \ll \vec{j}$.

b) Dans l'ARQS, on a deux différences. D'une part, $\rho \neq 0$. D'autre part c'est devant $\operatorname{rot} \vec{B}$ que le terme de courant de déplacement est négligeable.

18.17

La formule du cours est

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Pour le visible, on a

$$\delta \approx 3 \text{ nm}$$

donc la lumière ne pénètre quasiment pas dans le cuivre : il est réfléchissant. Pour le courant domestique :

$$\delta \approx 9 \text{ mm}$$

À cette fréquence, le champ électrique, donc le courant électrique ne pénètre donc pas plus qu'à environ $5\delta = 4,5$ cm, et dans un câble conducteur cylindrique de 10 cm de diamètre, la densité volumique de courant électrique au cœur du câble est presque nul. Il n'y a donc aucun intérêt à encore augmenter le diamètre du câble, la résistance ne sera pas plus faible.

18.18

a) L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{donc } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = E_0 \vec{u}_y \left[\frac{1}{\delta} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) - \frac{1}{\delta} e^{-\frac{z}{\delta}} \sin(\omega t - \frac{z}{\delta}) \right]$$

$$\text{donc } \vec{B} = \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-\frac{z}{\delta}} \vec{u}_y \left[\sin(\omega t - \frac{z}{\delta}) + \cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) \right]$$

$$\text{soit } B(z, t) = \frac{E_0 \sqrt{2}}{\omega \delta} e^{-\frac{z}{\delta}} \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)$$

b) En utilisant la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$:

$$p_J(z, t) = \gamma E_0^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} \cos^2(\omega t - \frac{z}{\delta})$$

$$\text{donc } \langle p_J \rangle (z) = \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

c) En intégrant :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a \int_{z=0}^{+\infty} \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-\frac{2z}{\delta}} dx dy dz$$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = a^2 \frac{\gamma E_0^2}{2} \left[\frac{e^{-\frac{2z}{\delta}}}{-\frac{2}{\delta}} \right]_0^{+\infty}$$

$$\text{soit } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{a^2 \gamma \delta E_0^2}{4}$$

d) $\langle \mathcal{P} \rangle$ est donc une fonction croissante de δ , donc une fonction décroissante de ω . L'effet Joule est donc plus fort pour les ondes de faible fréquence, donc pour les infrarouges.

18.19 En utilisant le résultat du cours, la partie réelle de \underline{k} est

$$k' = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$$

On en déduit

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{1}{\frac{k'}{\omega}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = \sqrt{\frac{8\omega}{\mu_0 \gamma}}$$

On constate donc que $v_g = 2v_\varphi$.

18.20

a) Il suffit d'injecter les deux relations dans l'équation de conservation de la charge pour obtenir

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

b) En injectant dans l'équation de Maxwell Gauss, on obtient

$$(1 + \chi) \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\text{donc } \operatorname{div} \vec{E} = 0 \text{ car } \chi \neq -1$$

Les équations de Maxwell Thomson et de Maxwell Faraday sont inchangées. En injectant dans l'équation de Maxwell Ampère, on obtient

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On pose donc $\underline{\epsilon} = 1 + \chi$ et on obtient bien des équations analogues à celles dans le vide.

c) Si on pose $1 + \chi = n^2$, et en notant la célérité dans le vide

$$c_0^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

on obtient l'EDA

$$\Delta \vec{E} - \frac{n^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\text{donc } c = \frac{c_0}{n}.$$

d) L'indice de réfraction est donc $n = \sqrt{1 + \chi}$.

e) On peut faire le développement limité

$$\chi = \chi_0 \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \simeq \chi_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

avec $\chi_0 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 k}$. On en déduit

$$n = \sqrt{1 + \chi_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} =$$

$$\sqrt{(1 + \chi_0) \left(1 + \frac{\chi_0}{1 + \chi_0} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

$$\text{soit } n = \sqrt{1 + \chi_0} \left(1 + \frac{\chi_0}{1 + \chi_0} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{donc } n \simeq \sqrt{1 + \chi_0} \left(1 + \frac{\chi_0}{2(1 + \chi_0)} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

Or $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ et $\omega = 2\pi f$ donc $\omega^2 = \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda_0^2}$ et

$$n = \sqrt{1 + \chi_0} + \frac{\frac{4\pi^2 c^2 \chi_0}{2\omega_0^2 \sqrt{1 + \chi_0}}}{\lambda_0^2}$$

ce qui est bien la formule de Cauchy avec $A = \sqrt{1 + \chi_0}$ et

$$B = \frac{4\pi^2 c^2 \chi_0}{2\omega_0^2 \sqrt{1 + \chi_0}}.$$

18.21

a) La prise en compte de la force de Lorentz donne

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}(\underline{M}, t) - e\vec{v} \wedge \vec{B}(\underline{M}, t) - \frac{m}{\tau} \vec{v} + m\vec{g}$$

b) En grandeurs complexes, l'équation mécanique s'écrit

$$i m \omega \underline{\vec{v}} = -e \underline{\vec{E}} - \frac{m}{\tau} \underline{\vec{v}}$$

On en déduit la densité volumique complexe de courant

$$\underline{\vec{j}} = -n_0 e \underline{\vec{v}} = \frac{n_0 e^2}{m \left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)} \underline{\vec{E}}$$

et les équations de Maxwell, en utilisant la neutralité du métal :

$$(MG) -i \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad (MT) -i \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$$

$$(MF) -i \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}} \quad (MA) -i \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + i\omega \epsilon_0 \mu_0 \underline{\vec{E}}$$

On simplifie et on élimine $\underline{\vec{j}}$ grâce à l'équation mécanique.

$$\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \text{ et } \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} \text{ et}$$

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = i \frac{\mu_0 n_0 e^2 \omega}{m \left(\frac{1}{\tau} + i\omega \right)} \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \vec{E}$$

D'où, après développement du double produit vectoriel et simplification, l'équation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m \left(1 - i \frac{1}{\tau \omega} \right)}$$

On en déduit le carré de l'indice complexe

$$\underline{n}^2 = \frac{\underline{k}^2 c^2}{\omega^2}$$

c) Si $\tau \omega \gg 1$, l'équation de dispersion se simplifie :

$$\underline{k}^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m}$$

Cette quantité est positive si

$$\omega > e \sqrt{\frac{n_0}{m \varepsilon_0}} \simeq 1,6 \cdot 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette valeur correspond à une longueur d'onde dans le vide

$$\lambda_0 = \frac{2\pi \times 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{16}} = 118 \text{ nm}$$

et correspond aux proches ultraviolets. Dans ce cas, \underline{k} est donc réel, il y a propagation sans atténuation d'une onde électromagnétique ultraviolette dans le métal : il est donc transparent.

18.22

a) D'après l'équation de Maxwell-Ampère, \vec{j} est homogène à $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, donc \vec{P} est homogène à $\varepsilon_0 \vec{E}$, donc χ_0 est sans dimension. Les deux termes qui définissent \vec{P} sont homogènes, donc τ est homogène à un temps.

b) Établissons l'expression de la conductivité complexe. On peut écrire

$$\begin{cases} \vec{j} = i\omega \vec{P} \\ \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_0 \vec{E} + i\omega \varepsilon_0 \chi_0 \tau \vec{E} \end{cases}$$

$$\text{donc } \underline{j} = i\omega \varepsilon_0 \chi_0 [1 + i\tau\omega] \vec{E}$$

$$\text{donc } \underline{Y} = i\omega \varepsilon_0 \chi_0 [1 + i\tau\omega]$$

On en déduit, d'après la formule du cours

$$\underline{n}^2 = 1 - \frac{iY}{\varepsilon_0 \omega} = 1 + \chi_0 + i\chi_0 \tau \omega$$

c) On peut mettre ce complexe sous la forme

$$1 + \chi_0 + i\chi_0 \tau \omega = n_0^2 e^{i\varphi_0}$$

avec $\varphi_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ car la partie réelle et la partie imaginaire du complexe sont toutes deux positives. On en déduit

$$\underline{n} = n_0 e^{i \frac{\varphi_0}{2}} \text{ et}$$

$$\underline{k} = \pm \underline{n} \frac{\omega}{c} = \pm \frac{n_0 \omega}{c} e^{i \frac{\varphi_0}{2}}$$

Les parties réelle et imaginaire de \underline{k} sont donc de même signe ($k' k'' > 0$), ce qui prouve que l'onde est amplifiée.

CHAPITRE 19

Interfaces entre deux milieux

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Réflexion, transmission d'une onde sonore.
- ◇ Coefficient de réflexion en amplitude.
- ◇ Coefficient de transmission en amplitude.
- ◇ Coefficient de réflexion en puissance.
- ◇ Relations de passage du champ électromagnétique.
- ◇ Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique.
- ◇ Interfaces vide-plasma, vide-conducteur ohmique.
- ◇ Réflexion vitreuse.
- ◇ Incidence de Brewster.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

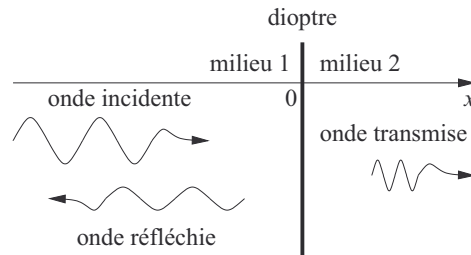
- ◇ Traduire et exploiter les conditions aux limites pour l'étude de la réflexion-transmission.
- ◇ Établir les expressions des coefficients et de transmission des ondes sonores.
- ◇ Utiliser les relations de passage pour calculer l'onde électromagnétique réfléchie.
- ◇ Établir les expressions des coefficients de réflexion et de transmission des OEM.
- ◇ Justifier et exploiter la polarisation vitreuse.

Les méthodes à retenir

Traduire et exploiter les conditions aux limites pour l'étude de la réflexion-transmission.

Voici le cadre général de l'étude de la **réflexion** et de la **transmission** d'une onde.

- a) Une onde plane progressive harmonique se propage dans un milieu avec la célérité c .
- b) La plupart du temps, cette onde couple deux grandeurs :
 - i) ondes sonores : surpression p_1 et vitesse \vec{v}_1
 - ii) ondes électromagnétiques : champ électrique \vec{E} et champ magnétique \vec{B}
 - iii) onde de vibration transversale d'une corde : élongation y et angle α .
- c) Un **dioptre** plan en $x = 0$ sépare deux milieux (1 : $x < 0$) et (2 : $x > 0$) de célérités respectives c_1 et c_2 .
- d) Une **onde incidente** $G_i(x, t)$ se propage dans (1) dans le sens des x croissants et aborde le dioptre en $x = 0^-$. Elle engendre
 - i) une **onde réfléchie** $G_r(x, t)$ dans (1) dans le sens des x décroissants
 - ii) une **onde transmise** $G_t(x, t)$ dans (2) dans le sens des x croissants.



- e) Le but de ce chapitre est de caractériser les ondes réfléchie et transmise par leurs amplitudes, phases, pulsations et vecteurs d'onde.

La méthode est stéréotypée. Elle nécessite la connaissance des propriétés des ondes, et on renvoie sur ce point au chapitre 17. Elle nécessite aussi la connaissance des propriétés physiques de l'**interface** vis-à-vis de la grandeur G (et de l'éventuelle autre grandeur couplée) de part et d'autre du dioptre.

- a) Les trois ondes ont **la même pulsation** ω que l'onde incidente. Leurs vecteurs d'onde dépendent de la célérité du milieu et du sens de propagation :

$$\vec{k}_i = k_1 \vec{u}_x, \vec{k}_r = -k_1 \vec{u}_x \text{ et } \vec{k}_t = k_2 \vec{u}_x \text{ avec } \begin{cases} k_1 = \frac{\omega}{c_1} \\ k_2 = \frac{\omega}{c_2} \end{cases}$$

- b) En formalisme complexe, les trois ondes s'écrivent

$$\underline{G}_i(x, t) = \underline{G}_i^0 e^{i(\omega t - k_1 x)}, \underline{G}_r(x, t) = \underline{G}_r^0 e^{i(\omega t + k_1 x)} \text{ et } \underline{G}_t(x, t) = \underline{G}_t^0 e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

- c) Pour $x = 0^-$, on a superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Pour $x = 0^+$, on n'a que l'onde transmise.

$$\begin{cases} \underline{G}(0^-) = \underline{G}_i(0^-, t) + \underline{G}_r(0^-, t) \\ \underline{G}(0^+) = \underline{G}_t(0^+, t) \end{cases}$$

- d) Les **relations de passage** sont les lois qui régissent la grandeur en $x = 0$, et donnent une relation entre $\underline{G}(0^-)$ et $\underline{G}(0^+)$. Un cas particulier fréquent est la **relation de continuité** qui s'écrit $\underline{G}(0^-) = \underline{G}(0^+)$. Les relations de passage peuvent être données par l'énoncé ou établies en utilisant les lois habituelles de la physique dans le domaine considéré (mécanique des fluides pour les ondes sonores, équations de Maxwell en électromagnétisme, mécanique du point pour les ondes mécaniques, etc.). Après simplification par $e^{i\omega t}$, on en déduit des **relations entre les amplitudes complexes**

$$\underline{G}_i^0, \underline{G}_r^0 \text{ et } \underline{G}_t^0$$

- e) Après division par \underline{G}_i^0 , on en déduit le **coefficient de réflexion** et le **coefficient de transmission**

$$r = \frac{\underline{G}_r^0}{\underline{G}_i^0} \text{ et } t = \frac{\underline{G}_t^0}{\underline{G}_i^0}$$

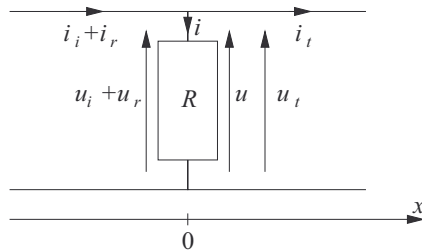
Exemple :

On a montré au chapitre 16 qu'une onde électrique se propage le long d'un câble coaxial de capacité linéique Γ et d'inductance linéique Λ avec un célérité $c = \frac{1}{\Lambda\Gamma}$. Cette onde couple la tension et l'intensité

$$\begin{cases} \underline{u}(x, t) = \underline{U} e^{i(\omega t \pm kx)} \\ \underline{i}(x, t) = \underline{I} e^{i(\omega t \pm kx)} \end{cases} \text{ avec } \underline{u}(x, t) = \mp R_c \underline{i}(x, t)$$

$R_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ est l'impédance caractéristique de ligne.

Cherchons les coefficients de réflexion et de transmission d'une onde électrique incidente sur un résistor de résistance R.



Écrivons les relations de passage en $x = 0$. Les tensions en $x = 0^-$ et en $x = 0^+$ sont égales à la tension aux bornes de la résistance, c'est donc une relation de continuité :

$$\underline{u}_i(0^-, t) + \underline{u}_r(0^-, t) = \underline{u}(t) = \underline{u}_t(0^+, t)$$

$$\text{soit } \underline{U}_i^0 e^{i\omega t} + \underline{U}_r^0 e^{i\omega t} = \underline{U} e^{i\omega t} = \underline{U}_t^0 e^{i\omega t}$$

$$\text{donc } \underline{U}_i^0 + \underline{U}_r^0 = \underline{U}_t^0 \text{ et } \underline{U}_t^0 = \underline{U}$$

La relation de passage pour l'intensité est la loi des nœuds :

$$\underline{i}_i(0^-, t) + \underline{i}_r(0^-, t) = \underline{i}(t) + \underline{i}_t(0^+, t)$$

$$\text{soit } \underline{I}_i^0 e^{i\omega t} + \underline{I}_r^0 e^{i\omega t} = \underline{I} e^{i\omega t} + \underline{I}_t^0 e^{i\omega t}$$

$$\text{donc } \underline{I}_i^0 + \underline{I}_r^0 = \underline{I} + \underline{I}_t^0$$

Le couplage entre les ondes de tension et d'intensité et la loi d'Ohm pour la résistance donnent

$$R_c = \frac{\underline{U}_i^0}{\underline{I}_i^0} = -\frac{\underline{U}_r^0}{\underline{I}_r^0} = \frac{\underline{U}_t^0}{\underline{I}_t^0} \text{ et } R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} \underline{U}_i^0 + \underline{U}_r^0 = \underline{U}_t^0 \\ \frac{\underline{U}_i^0}{R_c} - \frac{\underline{U}_r^0}{R_c} = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}_t^0}{R_c} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = \left(1 + \frac{R_c}{R}\right) \underline{t} \end{cases}$$

$$\text{donc } \underline{r} = \frac{-\frac{R_c}{2R}}{1 + \frac{R_c}{2R}} \text{ et } \underline{t} = \frac{1}{1 + \frac{R_c}{2R}}$$

↪ Exercices 19.1, 19.2, 19.3.

Établir les expressions des coefficients et de transmission des ondes sonores.

Pour l'étude de la réflexion et la transmission des ondes sonores, on rappelle les résultats du chapitre 16 et on choisit les notations suivantes.

- a) L'espace est séparé en $x = 0$:
- pour $x < 0$, on a un fluide non visqueux de masse volumique au repos μ'_0 et de compressibilité isentropique χ'_s , donc de célérité $c' = \frac{1}{\sqrt{\mu'_0 \chi'_s}}$
 - pour $x > 0$, on a un fluide non visqueux de masse volumique au repos μ''_0 et de compressibilité isentropique χ''_s , donc de célérité $c'' = \frac{1}{\sqrt{\mu''_0 \chi''_s}}$.
- b) Dans les deux milieux, une onde sonore plane progressive harmonique couple une onde de surpression et une onde de vitesse

$$\begin{cases} p_1(x, t) = P_1 \cos(\omega t - kx + \varphi_p) \\ \vec{v}_1(x, t) = V_1 \vec{u}_x \cos(\omega t - kx + \varphi_v) \end{cases}$$

ou en grandeurs complexes

$$\begin{cases} \underline{p}_1(x, t) = \underline{P}_1 e^{i(\omega t - kx)} \\ \underline{\vec{v}}_1(x, t) = \underline{V}_1 \vec{u}_x e^{i(\omega t - kx)} \end{cases}$$

- c) La loi de la quantité de mouvement appliquée à la particule de fluide, linéarisée, s'écrit en grandeurs réelles puis en grandeurs complexes

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p_1 \text{ donc } \mu_0 (i\omega) \underline{v}_1 = -ik \underline{p}_1$$

On en déduit la relation de couplage

$$\underline{p}_1 = Z \underline{v}_1 \text{ avec } Z = \frac{1}{\mu_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}}$$

Z est l'**impédance acoustique** du milieu considéré.

On applique la méthode de détermination des coefficients de réflexion et de transmission d'une onde incidente dans le milieu $x < 0$ dans le sens des x croissants sur le dioptré $x = 0$ qu'on assimile à une membrane

- **imperméable** donc il y a continuité de la vitesse en $x = 0$
- et de **masse surfacique nulle** donc il y a continuité de la surpression en $x = 0$.

Ces deux relations de continuité permettent d'exprimer les coefficients de réflexion et de transmission en vitesse, en surpression et en puissance (rapport des normes des vecteurs de Poynting sonores) en fonction des impédances acoustiques Z' et Z'' des deux milieux :

$$\begin{array}{l|l} r_v = \frac{V_1^r}{V_1^i} = \frac{Z' - Z''}{Z' + Z''} & t_v = \frac{V_1^t}{V_1^i} = \frac{2Z'}{Z' + Z''} \\ r_p = \frac{P_1^r}{P_1^i} = -\frac{Z' - Z''}{Z' + Z''} & t_p = \frac{P_1^t}{P_1^i} = \frac{2Z''}{Z' + Z''} \\ R = \frac{P_1^r V_1^i}{P_1^i V_1^i} = \left[\frac{Z' - Z''}{Z' + Z''} \right]^2 & T = \frac{P_1^t V_1^i}{P_1^i V_1^i} = \frac{4Z' Z''}{(Z' + Z'')^2} \end{array}$$

La démonstration de ces relations est à connaître comme une question de cours, mais aussi comme un modèle de raisonnement qu'on pourra adapter à une situation différente, sous des hypothèses différentes d'interface.

Exemple :

Les deux relations de continuité s'écrivent en grandeurs complexes en $x = 0$

$$\begin{cases} \underline{V}_1^i e^{i\omega t} + \underline{V}_1^r e^{i\omega t} = \underline{V}_1^t e^{i\omega t} \\ \underline{P}_1^i e^{i\omega t} + \underline{P}_1^r e^{i\omega t} = \underline{P}_1^t e^{i\omega t} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \underline{V}_1^i + \underline{V}_1^r = \underline{V}_1^t \\ Z' \underline{V}_1^i - Z' \underline{V}_1^r = Z'' \underline{V}_1^t \end{cases}$$

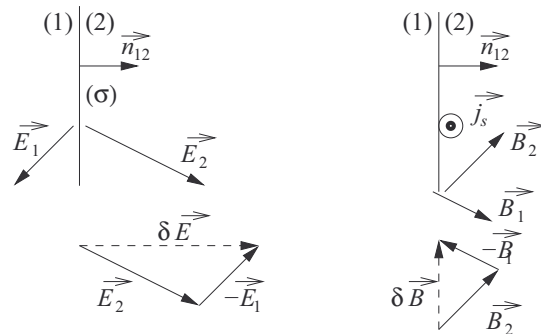
En divisant par \underline{V}_1^i , on en déduit

$$\begin{cases} 1 + r_v = t_v \\ Z' - Z' r_v = Z'' t_v \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} r_v = \frac{Z' - Z''}{Z' + Z''} \\ t_v = \frac{2Z'}{Z' + Z''} \end{cases}$$

↪ Exercices 19.4, 19.5, 19.6, 19.7, 19.8, 19.9.

Utiliser les relations de passage pour calculer l'onde électromagnétique réfléchie.

Les **relations de passage** pour les champs électromagnétiques sont déterminées par la présence éventuelle de **densités surfaciques** de charges (σ exprimé en coulomb par mètre carré) et de courants (\vec{j}_s en ampère par mètre). Soit une surface plane séparant deux milieux 1 et 2, de vecteur normal \vec{n}_{12} dirigé de 1 vers 2.



- La discontinuité de champ électrique de part et d'autre de la surface est proportionnelle à la densité surfacique de charges σ :

$$\delta \vec{E} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

- La discontinuité de champ magnétique de part et d'autre de la surface est proportionnelle à la densité surfacique de courants \vec{j}_S :

$$\delta \vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$$

Un corollaire important est que

- la composante tangentielle du champ électrique est continue
- la composante normale du champ magnétique est continue.

Ces relations de passage permettent de déterminer les lois de réflexion et de transmission des ondes électromagnétiques à l'interface entre deux milieux. La méthode est la même que celle détaillée dans les paragraphes précédents, mais cette fois-ci les ondes sont vectorielles. Voici la démarche préconisée pour prendre en compte cette difficulté nouvelle, en se limitant aux ondes planes et à une interface S plane infinie séparant les milieux 1 et 2.

- On détermine les caractéristiques des deux champs \vec{E}_i et \vec{B}_i de l'onde incidente dans le milieu 1.
- On définit, selon les directives de l'énoncé, les champs \vec{E}_r , \vec{B}_r de l'onde réfléchie dans le milieu 1 et \vec{E}_t , \vec{B}_t de l'onde transmise dans le milieu 2.
- On exprime les champs en des points M_1 et M_2 au voisinage d'un point M de l'interface

$$\begin{cases} \vec{E}_1(M, t) = \vec{E}_i(M_1, t) + \vec{E}_r(M_1, t) \\ \vec{B}_1(M, t) = \vec{B}_i(M_1, t) + \vec{B}_r(M_1, t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{E}_2(M, t) = \vec{E}_t(M_2, t) \\ \vec{B}_2(M, t) = \vec{B}_t(M_2, t) \end{cases}$$

- On utilise les relations de passage pour relier ces champs. Celles-ci devant être valables **quels que soient** M sur S et t , on en déduit par **identification** les amplitudes, phases pulsations, vecteurs d'onde des ondes réfléchie et transmise.
- Le cas échéant, on en déduit les coefficients de réflexion et transmission définis par l'énoncé.

Exemple :

Une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement se déplace dans le demi-espace vide $x < 0$

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t - kx)$$

Elle rencontre en $x = 0$ une surface plane infinie délimitant un conducteur parfait pour $x > 0$. On est donc sous **incidence normale**. (a) La relation de structure donne

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \vec{u}_z \cos(\omega t - kx)$$

(b) Dans le métal (voir chapitre 17), les champs \vec{E} et \vec{B} sont uniformément nuls. On cherche donc une onde réfléchie se propageant selon $-\vec{u}_x$, nécessairement transverse électrique car on est dans le vide :

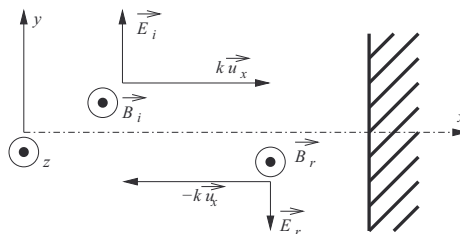
$$\vec{E}_r = \vec{E}_0^r \cos(\omega_r t + k_r x + \varphi_r)$$

(c) Le champ électrique est tangentiel à la surface, il est donc continu en $x = 0$. Or il est nul dans le métal en $x = 0^+$ donc il est nul en $x = 0^-$. On peut donc écrire, en formalisme complexe, en $x = 0$

$$\forall t, E_0 \vec{u}_y e^{i\omega t} + \vec{E}_0^r e^{i(\omega_r t + \varphi_r)} = \vec{0}$$

Par identification $\omega_r = \omega$ donc $k_r c = kc$ donc $k_r = k$. On en déduit toujours par identification que $\varphi_r = 0$ donc $\vec{E}_r = -E_0 \vec{u}_y$. L'onde réfléchie est donc

$$\vec{E}_0^r = -E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t + kx) \text{ et } \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \vec{u}_z \cos(\omega t + kx)$$



(d) Le coefficient de réflexion en amplitude du champ électrique vaut donc -1 , et $+1$ pour le champ magnétique. Il n'y a pas de charges mais il apparaît des courants superficiels (voir exercice 19.10). La superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie est une onde stationnaire (voir exercice 19.11).

↪ Exercices 19.10, 19.11, 19.12, 19.13.

Établir les expressions des coefficients de réflexion et de transmission des OEM.

Le plan $x = 0$ sépare deux milieux d'indices complexes respectifs \underline{n}_1 pour $x < 0$ et \underline{n}_2 pour $x > 0$. Dans chacun d'eux, la relation entre l'indice complexe et le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}$, et l'équation de Maxwell-Faraday conduisent à la relation de structure

$$\vec{\underline{B}}_{1,2} = \frac{\vec{k}_{1,2} \wedge \vec{\underline{E}}_{1,2}}{\omega} = \underline{n}_{1,2} \vec{u} \wedge \vec{\underline{E}}_{1,2}$$

Une onde électromagnétique incidente de pulsation ω se propage dans l'espace 1 dans la direction et le sens des x croissants

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\underline{E}}_i = \vec{\underline{E}}_{0i} e^{i(\omega t - k_1 x)} \\ \vec{\underline{B}}_i = \underline{n}_1 \vec{u}_x \wedge \vec{\underline{E}}_i \end{array} \right.$$

À l'interface en $x = 0$, elle génère une onde réfléchie et une onde transmise.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\underline{E}}_r = \vec{\underline{E}}_{0r} e^{i(\omega t + k_1 x)} \\ \vec{\underline{B}}_r = -\underline{n}_1 \vec{u}_x \wedge \vec{\underline{E}}_r \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\underline{E}}_t = \vec{\underline{E}}_{0t} e^{i(\omega t - k_2 x)} \\ \vec{\underline{B}}_t = \underline{n}_2 \vec{u}_x \wedge \vec{\underline{E}}_t \end{array} \right.$$

En $x = 0$, on admet la continuité des champs électrique et magnétique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\underline{E}}_i(0, t) + \vec{\underline{E}}_r(0, t) = \vec{\underline{E}}_t(0, t) \\ \vec{\underline{B}}_i(0, t) + \vec{\underline{B}}_r(0, t) = \vec{\underline{B}}_t(0, t) \end{array} \right.$$

En prenant $x = 0$ et en simplifiant par $e^{i\omega t}$, on en déduit le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\underline{E}}_{0i} + \vec{\underline{E}}_{0r} = \vec{\underline{E}}_{0t} \\ \vec{u}_x \wedge [\underline{n}_1 \vec{\underline{E}}_{0i}] - \vec{u}_x \wedge [\underline{n}_1 \vec{\underline{E}}_{0r}] = \vec{u}_x \wedge [\underline{n}_2 \vec{\underline{E}}_{0t}] \end{array} \right.$$

En multipliant vectoriellement la seconde équation par \vec{u}_x , en utilisant la formule du double produit vectoriel et la transversalité des champs électriques ($\text{div } \vec{\underline{E}} = 0$ donc $\vec{u}_x \perp \vec{\underline{E}}$), il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\underline{E}}_{0i} + \vec{\underline{E}}_{0r} = \vec{\underline{E}}_{0t} \\ \underline{n}_1 \vec{\underline{E}}_{0i} - \underline{n}_1 \vec{\underline{E}}_{0r} = \underline{n}_2 \vec{\underline{E}}_{0t} \end{array} \right.$$

On en déduit les **coefficients de réflexion et de transmission** du champ électrique

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\underline{E}}_{0r} = r \vec{\underline{E}}_{0i} \\ \vec{\underline{E}}_{0t} = t \vec{\underline{E}}_{0i} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{\underline{n}_1 - \underline{n}_2}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \\ t = \frac{2\underline{n}_1}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \end{array} \right.$$

Ces expressions sont appliquées à autant de cas particuliers qu'il y a de couples de milieux d'indice complexe possible. On donne ci-dessous les trois cas explicitement au programme.

Exemple :

- À l'interface vide-plasma, dans le domaine de transparence, $\omega > \omega_p$ et

$$\underline{n}_1 = 1 \text{ et } \underline{n}_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

- À l'interface vide-conducteur ohmique de conductivité réelle γ , pour des fréquences très inférieures à celle du visible,

$$\underline{n}_1 = 1 \text{ et } \underline{n}_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{2\varepsilon_0\omega}} - i\sqrt{\frac{\gamma}{2\varepsilon_0\omega}}$$

- À l'interface vide-conducteur ohmique de conductivité réelle γ , dans le domaine optique visible, le modèle de Drude donne une conductivité complexe analogue à celle d'un plasma, et un indice optique imaginaire pur comme pour un plasma dans le domaine réactif ($\omega < \omega_p$)

$$\underline{n}_1 = 1 \text{ et } \underline{n}_2 = i\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$$

↪ Exercices 19.14, 19.15, 19.16, 19.17.

Énoncés des exercices

19.1

Couplage et signe de l'onde réfléchie

Deux grandeurs $F(x, t)$ et $G(x, t)$ sont couplées par les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial G}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial G}{\partial t} = -\beta \frac{\partial F}{\partial x}$$

où α et β sont deux réels positifs.

- Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par F ou G et donner l'expression de la célérité en fonction de α et β .
- On pose $Z = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$. Donner l'expression de $\frac{F}{G}$ pour une onde incidente se propageant dans le sens des x croissants.
- Donner l'expression de $\frac{F}{G}$ pour une onde réfléchie se propageant dans le sens des x croissants.

19.2

Réflexion sans transmission

Une onde incidente $G_i(x, t)$ de pulsation ω et de célérité c se propage dans le sens des x décroissants sur une demi-droite (O, x) . En $x = 0$, on impose un nœud de vibration :

$$\forall t, G(x = 0, t) = 0$$

- a) Donner l'expression de l'onde incidente en grandeurs complexes.
- b) Déterminer le coefficient de réflexion de l'onde.
- c) Quelle est la nature de l'onde superposition des ondes incidente et réfléchie ?

19.3

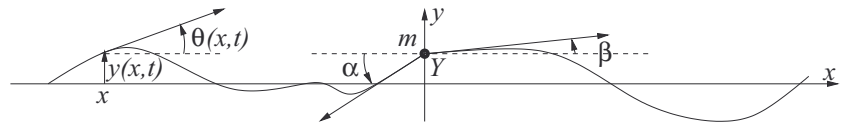
Réflexion et transmission d'une onde de vibration sur une masse

La vibration d'une corde de masse linéique μ , infinie selon l'axe horizontal x , et de tension T , est caractérisée par l'élongation transversale $y(x, t)$ et l'angle d'inclinaison $\theta(x, t)$ par rapport à x . On fait l'hypothèse des petits mouvements, des petits angles et on néglige les effets de la pesanteur. On rappelle la relation de couplage

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \theta(x, t)$$

La célérité de cette onde est $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. En $x = 0$ est accrochée une masselotte ponctuelle de masse m , se déplaçant sur l'axe y , on note $Y(t)$ son ordonnée sur l'axe,

$$\alpha(t) = \theta(x = 0^-, t) \text{ et } \beta(t) = \theta(x = 0^+, t)$$



Une onde incidente harmonique venant des $x < 0$ a pour expression

$$y_i(x, t) = U_0 \cos \left[\omega \left(\frac{x}{c} - t \right) \right]$$

Il apparaît une onde réfléchie et une onde transmise

$$\begin{cases} y_r(x, t) = U_r^0 \cos \left[-\omega \left(\frac{x}{c} + t \right) + \varphi_r \right] \\ y_t(x, t) = U_t^0 \cos \left[\omega \left(\frac{x}{c} - t \right) + \varphi_t \right] \end{cases}$$

- a) En écrivant les relations de passage en $x = 0$, déterminer les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en fonction de $\eta = \frac{2T_E}{m\omega c}$.
- b) Étudier les cas limites $m \rightarrow 0$ et $m \rightarrow \infty$.

19.4

Réflexion et transmission sur une discontinuité de masse linéique

Une onde transversale se propage le long d'une corde tendue. Celle-ci est constituée de deux tronçons de masses linéiques respectives μ_1 et μ_2 reliées en $x = 0$. On note T la tension de la corde. Déterminer les coefficients de réflexion et de transmission d'une onde incidente d'élongation transversale $y_i(x, t)$ du milieu 1 vers le milieu 2.



19.5

Réflexion sur l'interface air - hélium

Calculer les coefficients de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane progressive harmonique au niveau d'un dioptré plan séparant de l'air et de l'hélium aux mêmes températures et pressions. On précisera les hypothèses effectuées, les valeurs numériques des constantes usuelles et celles associées à ces deux corps sont supposées connues. On rappelle l'expression de la célérité du son dans un gaz parfait $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$.



19.6

Réflexion, transmission sur une membrane de masse non nulle

Une membrane fine et imperméable, de masse surfacique σ est placée en $x = 0$, l'air de part et d'autre est supposé parfait non visqueux, en évolution isentropique, de masse volumique au repos μ_0 , de coefficient de compressibilité isentropique χ_S . Une onde incidente plane progressive harmonique venant des $x < 0$ a pour expression

$$v_1^i(x, t) = V_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

Il apparaît une onde réfléchie

$$v_1^r(x, t) = V_0^r \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{c} \right) + \varphi_r \right]$$

et une onde transmise

$$v_1^t(x, t) = V_0^t \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_t \right]$$

On définit les coefficients de réflexion et de transmission complexes :

$$\underline{r} = \frac{V_0^r e^{i\varphi_r}}{V_0} \text{ et } \underline{t} = \frac{V_0^t e^{i\varphi_t}}{V_0}$$

En écrivant les relations de passage en $x = 0$, déterminer les expressions de ces deux coefficients en fonction de $\eta = \frac{2\mu_0 c}{\sigma \omega}$.



19.7

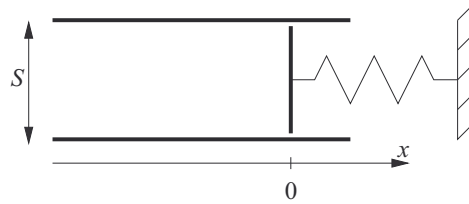
Réflexion, transmission sur une discontinuité de section

Une canalisation cylindrique, d'axe x présente une discontinuité de section : en $x = 0$, elle passe de S_1 à S_2 . Le fluide possède une masse volumique au repos μ_0 , un coefficient de compressibilité isentropique χ_S , une impédance Z et une célérité c .

- a) Déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en vitesse et en surpression à l'interface, en admettant la continuité de la pression et celle du débit massique en $x = 0$.
- b) Déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en puissance surfacique R et T à l'interface.
- c) A-t-on $R + T = 1$? Pourquoi ?

19.8**Adaptation d'impédance acoustique**

L'air est non visqueux de masse volumique au repos μ_0 et de coefficient de compressibilité isentropique χ_S . On note Z_a son impédance acoustique. Une onde acoustique progressive harmonique se propage selon les x croissants dans un tuyau de section S . À l'extrémité de ce tuyau, on place en $x = 0$ une membrane imperméable, rigide et mobile selon l'axe (O, x) , de masse m , de surface S , reliée à un ressort de constante de raideur k et à un système d'amortissement de force $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$. On suppose que la pression dans l'air à droite de la membrane reste constamment égale à P_0 .



L'impédance Z_m de la membrane est le rapport entre la résultante des pressions et sa vitesse en formalisme complexe.

- Déterminer Z_m .
- Déterminer le coefficient de réflexion de l'onde acoustique sur le piston.
- Dans quel cas a-t-on $Z_a = Z_m$ et pourquoi parle-t-on d'adaptation d'impédance dans ce cas ?

19.9

Couche antireflet, échographie

Partie 1 : préliminaires. On donne l'impédance acoustique de l'air

$$Z_a = 400 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

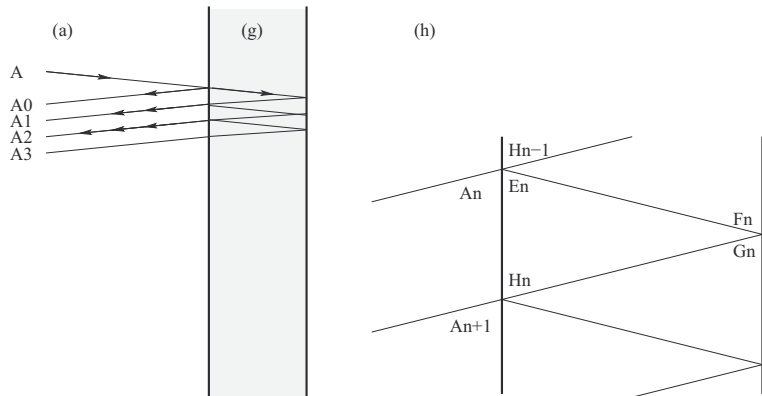
et celle des tissus du corps humain

$$Z_h = 1,0 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

- a) Calculer le coefficient de réflexion pour la vitesse au changement de milieu.
- b) En conclure qu'il est impossible d'effectuer une échographie dans ces conditions.
- c) En formalisme complexe, on note $\underline{p}_1(x, t)$ la fonction d'onde de surpression qui se propage dans le sens croissant des x , en x à la date t . L'onde se propage selon l'axe des x croissants. Montrer que

$$\underline{p}_1(x + e, t) = \underline{p}_1(x, t) \cdot e^{-ike}$$

Partie 2. On interpose un gel d'impédance acoustique Z_g , de masse volumique $\mu_g \approx 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et d'épaisseur e entre l'air et la peau. Les figures ci-dessous ont été tracées avec un angle d'incidence non nul pour plus de clarté, mais l'incidence réelle est nulle.



On cherche à déterminer l'épaisseur e et l'impédance acoustique Z_g permettant de n'avoir aucune réflexion. Pour cela, on va créer des conditions permettant d'observer des interférences destructives entre les différentes ondes réfléchies

$$\underline{A}_0, \underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n, \underline{A}_{n+1}, \dots$$

où \underline{A}_n désigne la fonction d'onde complexe (pour la pression par exemple) de la n -ième onde émergente du gel vers l'air. On note (cf. schéma) \underline{E}_n la vibration complexe juste à droite de l'interface air-gel (après réflexion-transmission), \underline{F}_n la fonction d'onde juste à gauche de l'interface gel-peau (avant réflexion), \underline{G}_n la fonction d'onde juste à gauche de l'interface peau-gel (après réflexion), \underline{H}_n la fonction d'onde juste à droite de l'interface gel-air (avant réflexion-transmission). On note r_{ij} et t_{ij} les coefficients de réflexion et de transmission à l'interface du milieu (i) et du milieu (j).

- a) Montrer que $\underline{A}_0 = r_{ag}\underline{A}$.
- b) Établir les relations entre
- i) \underline{H}_{n-1} et \underline{A}_n (en utilisant t_{ga})
 - ii) \underline{H}_{n-1} et \underline{E}_n (en utilisant r_{ga})
 - iii) (conséquence des deux premières) \underline{A}_n et \underline{E}_n (en utilisant r_{ga} et t_{ga})
 - iv) \underline{E}_n et \underline{E}_n (en utilisant e^{-ike})
 - v) \underline{E}_n et \underline{G}_n (en utilisant r_{gh})
 - vi) \underline{G}_n et \underline{H}_n (en utilisant e^{-ike})
 - vii) \underline{H}_n et \underline{A}_{n+1} (en utilisant t_{ga}).
- c) Dédire de la question précédente que (\underline{A}_n) forme une suite géométrique de premier terme et de raison :

$$\underline{A}_1 = t_{ag}r_{gh}t_{ga}e^{-2ike}\underline{A} \text{ et } \underline{q} = r_{gh}r_{ga}e^{-2ike}$$

- d) On cherche une série à valeurs réelles et on impose $e^{-2ike} = -1$. Déterminer la plus petite valeur de e compatible avec cette relation et donner son expression en fonction de la célérité c_g et de la fréquence f de l'onde ultrasonore.
- e) Sous cette hypothèse, la série se calcule aisément :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underline{A}_n = r_{ag}\underline{A} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \underline{q}^{n-1} \right] \underline{A}_1 = \left[r_{ag} - \frac{t_{ag}r_{gh}t_{ga}}{1 + r_{gh}r_{ga}} \right] \underline{A}_1$$

- i) Montrer que $t_{ag}t_{ga} = 1 + r_{ag}r_{ga}$.
 - ii) En déduire que l'onde réfléchie dans l'air est nulle si $r_{ag} = r_{gh}$.
 - iii) En déduire que $Z_g = \sqrt{Z_a Z_h}$.
- f) Calculer numériquement Z_g .
- g) Calculer numériquement e si $f = 5$ MHz.

19.10

Calcul des densités de charges et de courants à la réflexion normale d'une onde

- a) Avec les notations de l'exemple du cours, déterminer les expressions de la densité surfacique de charges ρ et de la densité surfacique de courant \vec{j}_s à la surface d'un métal conducteur parfait frappé sous incidence normale par une onde électromagnétique plane progressive polarisée rectilignement.
- b) On considère une languette sur l'interface définie par $x = 0$, $y \in [0, L]$ et $[z, z + dz]$. Déterminer la force de Laplace $d\vec{F}_L$ subie par cette languette.
- c) En déduire la force de Laplace \vec{F}_L subie par le carré

$$(y, z) \in [0, L] \times [0, L]$$

- d) En déduire la valeur moyenne dans le temps de la force surfacique de Laplace sur l'interface.
- e) Proposer une interprétation qualitative de cette force dans le modèle photonique.

19.11

Onde stationnaire à un, à deux miroirs

- a) Avec les notations de l'exemple du cours, déterminer l'onde résultante en champ électrique et en champ magnétique dans le demi-espace $x < 0$ lorsqu'un métal conducteur parfait est frappé sous incidence normale par une onde électromagnétique plane progressive polarisée rectilignement.
- b) Deux plaques infinies parallèles en métal conducteur parfait sont placées en $x = 0$ et $x = a$. Elles délimitent un espace vide dans lequel on cherche une onde électromagnétique plane stationnaire harmonique polarisée rectilignement selon \vec{u}_y . Déterminer l'expression du champ électrique de cette onde et montrer que sa pulsation est quantifiée.

19.12

Réflexion sous incidence oblique

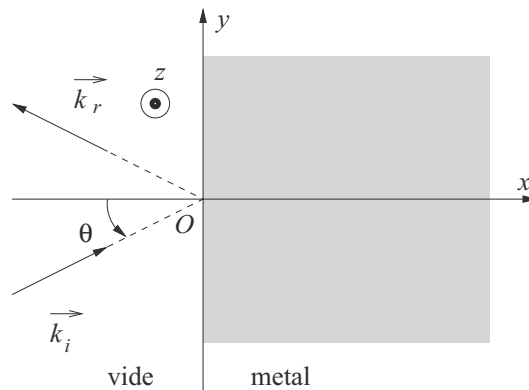
Une OPPH incidente de vecteur d'onde

$$\vec{k}_i = \begin{pmatrix} k \cos \theta \\ k \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

et polarisée rectilignement

$$\vec{E}_i(\mathbf{M}, t) = E_{0i} \vec{u}_z e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})}$$

se propage dans le demi-espace $x < 0$ et vient frapper la face plane ($x = 0$) d'un métal conducteur parfait.



On cherche le champ électrique de l'onde réfléchie sous la forme

$$\vec{E}_r(\mathbf{M}, t) = E_{0r} \vec{u}_z e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM})} \text{ avec } \vec{k}_r = \begin{pmatrix} k_{rx} \\ k_{ry} \\ k_{rz} \end{pmatrix}$$

- a) Écrire les conditions aux limites sur le champ électrique en $x = 0$.
- b) Montrer que $\omega_r = \omega$, $k_{rz} = 0$ et exprimer k_{ry} en fonction de k et θ .
- c) Justifier que $k = \sqrt{k_{rx}^2 + k_{ry}^2}$. En déduire k_{rx} en fonction de k et θ .
- d) En déduire les lois de Descartes relatives à la réflexion sur un miroir.

19.13

Loi de Descartes à la réfraction

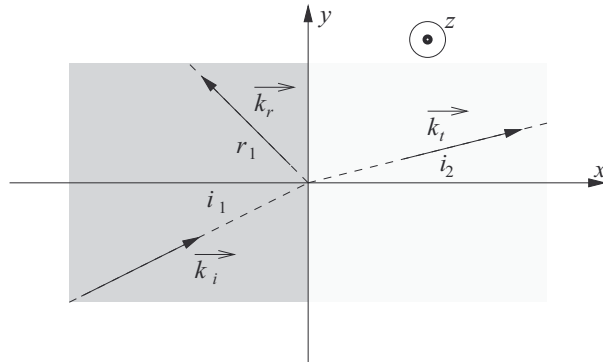
Un dioptre plan en $x = 0$ sépare deux milieux transparents d'indices respectifs n_1 et n_2 . Les ondes électromagnétiques dans un milieu d'indice n sont en tout point analogues à celles dans le vide, à ceci près que la relation de dispersion s'écrit $\omega = k \frac{c}{n}$. Une onde incidente polarisée selon \vec{u}_z fait un angle i_1 avec la normale au dioptre :

$$\vec{E}_i = E_0 \vec{u}_z e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})}$$

Elle donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise dont on admet que les vecteurs d'onde sont dans le plan d'incidence, et polarisées selon \vec{u}_z .

$$\begin{cases} \vec{E}_r = E_0^r \vec{u}_z e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM})} \\ \vec{E}_t = E_0^t \vec{u}_z e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{OM})} \end{cases}$$

On note r_1 l'angle de \vec{k}_r avec la normale au dioptre et i_2 l'angle de \vec{k}_t avec cette normale.



Démontrer la deuxième loi de Descartes à la réfraction

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

19.14

Réflexion d'une onde électromagnétique sur l'ionosphère

L'ionosphère, partie haute de l'atmosphère, est assimilable à un plasma neutre peu dense, de densité particulière en électrons de l'ordre de $n_0 = 10^{11} \text{ m}^{-3}$. On donne $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

- Calculer la pulsation plasma ω_p pour l'ionosphère.
- Calculer les coefficients de réflexion et de transmission, sous incidence normale, pour une onde électromagnétique infrarouge, de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 3,50 \text{ } \mu\text{m}$ venant du Soleil.
- Une onde radio du domaine des « grandes ondes », de fréquence $f = 162 \text{ kHz}$, est issu d'une antenne à la surface de la Terre. On assimile l'air en basse atmosphère au vide pour ses propriétés électromagnétiques. Cette onde peut-elle être perçue sur la Lune ?



19.15

Réflexion sur un métal de conductivité réelle

Une onde électromagnétique de pulsation ω se propage dans le vide et frappe sous incidence normale la surface d'un métal de conductivité réelle γ .

- a) On suppose $\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0}$. Donner les expressions approchées des coefficients de réflexion et de transmission de l'onde sur l'interface.
- b) On suppose $\omega \gg \frac{\gamma}{\epsilon_0}$. Donner les expressions approchées des coefficients de réflexion et de transmission de l'onde sur l'interface.



19.16

Réflexion sur un métal d'une onde dans le domaine visible

Dans un métal, les électrons mobiles sont répartis à raison de n_0 par mètre cube. Le métal est neutre et les électrons se déplacent sous l'action du champ électrique et d'une force de frottement $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$, toutes les autres forces étant négligées devant celles-ci.

- a) Donner l'expression de la conductivité complexe $\underline{\gamma}$.
- b) On suppose $\tau\omega \gg 1$. Montrer qu'on peut écrire

$$\underline{\gamma} \simeq \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{i\omega}$$

et donner l'expression de ω_p .

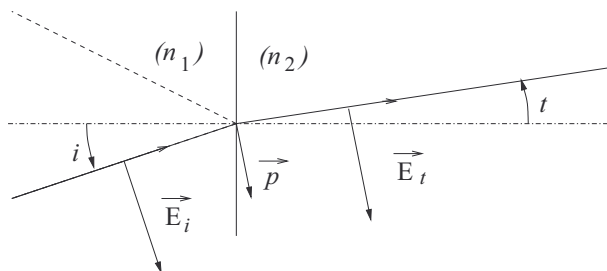
- c) En déduire l'indice complexe \underline{n} du métal.
- d) Dans le domaine du visible, $\omega < \omega_p$. Quelle est la nature de l'onde se propageant dans le métal ?
- e) Une onde électromagnétique se réfléchit sous incidence normale à l'interface vide-métal dans les hypothèses des questions précédentes. Calculer le module $|\underline{r}|$. Commenter ce résultat.



19.17

Polarisation par réflexion vitreuse sous incidence de Brewster

On considère une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement, se propageant dans un milieu d'indice réel n_1 , et arrivant sur un dioptre délimitant un milieu d'indice n_2 avec un angle d'incidence i . On admet le modèle suivant : l'onde pénètre dans le milieu 2, donne naissance à une onde réfractée faisant un angle t avec la normale, selon la deuxième loi de Descartes. Cette onde réfractée interagit avec les dipôles en surface qui rayonnent une onde réfléchie. L'onde incidente est polarisée rectilignement, le champ électrique est dans le plan d'incidence.



- a) Justifier qualitativement que le moment dipolaire \vec{p} des dipôles excités par le champ électrique transmis \vec{E}_t sont colinéaires à ce champ. et que ce sont des dipôles oscillant harmoniques.
- b) Un dipôle oscillant, de centre O et de direction \vec{u} , émet à son tour une onde électromagnétique dans toutes les directions de l'espace ; en un point M repéré en coordonnées sphériques, la puissance de cette onde est proportionnelle à $\sin^2 \theta$, où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{OM} . En déduire que contrairement à la loi de Descartes, il n'y a pas d'onde réfléchie lorsque $i + t = \frac{\pi}{2}$.
- c) En déduire la valeur i_B correspondante (on l'appelle l'incidence de Brewster) en fonction de n_1 et n_2 . Calculer i_B et t avec $n_1 = 1,333$ et $i_2 = 1,667$.
- d) Décrire un procédé expérimental d'observation de la **polarisation par réflexion vitreuse** sous **incidence de Brewster**.

Du mal à démarrer ?

19.1 La dérivation conjointe des deux équations et l'utilisation du théorème de Schwartz permet d'obtenir l'équation de d'Alembert et d'en déduire c . La différence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie est le signe devant kx dans l'expression en grandeurs complexes.

19.2 Après avoir écrit les ondes, de sens de propagation opposés, en grandeurs complexes, la condition aux limites en $x = 0$ donne une relation entre les amplitudes complexes \underline{G}_i^0 et \underline{G}_r^0 .

19.3 La continuité de y en 0 est immédiate. La seconde relation de passage est une conséquence de la loi de la quantité de mouvement appliquée à la masselotte. Sa position $Y(t)$ s'identifie à $y_t(0^+, t)$ et les angles α et β sont à relier aux angles $\theta_i(0^-, t)$, $\theta_r(0^-, t)$ et $\theta_t(0^+, t)$.

19.4 Cet exercice décrit ici dans le cas de la corde vibrante est jumeau de l'exemple du cours pour la réflexion et la transmission du son sur une interface entre deux milieux. Les deux relations de passage sont les relations de continuité pour l'élongation $y(x, t)$ et pour l'angle $\alpha(x, t)$.

19.5 Cette application numérique articule les lois de ce chapitre, celles sur les ondes sonores dans les fluides et la loi des gaz parfaits. Le résultat ne nécessite la connaissance que des masses molaires et des coefficients γ pour les deux gaz.

19.6 La membrane étant imperméable, il y a continuité de la vitesse, mais comme elle est de masse non nulle, la discontinuité de pression est obtenue en appliquant la loi de la quantité de mouvement à une surface S de membrane.

19.7 Les lois de continuité sont données dans l'énoncé. On rappelle que le débit massique est le produit de la masse volumique par la section et par la vitesse du fluide.

19.8 La membrane étant imperméable, il y a continuité de la vitesse. Sa masse étant non nulle, on obtient la relation de passage sur la pression en appliquant la loi de la quantité de mouvement à la membrane soumise en particulier aux forces de pression de part et d'autre.

19.9 La partie 1 ne pose aucune difficulté. Dans la partie 2, il faut déterminer avec beaucoup de soin la suite des relations de réflexion (utilisant le coefficient r), transmission (utilisant le coefficient t) et propagation (utilisant la question (c) de la partie 1) qui donnent les relations cherchées. La fin est guidée et calculatoire.

19.10 La densité de courant est dans le plan de S, ses deux composantes selon y et z sont trouvées grâce à la relation de passage et au calcul du champ magnétique résultant des ondes incidente et réfléchie en $x = 0^-$.

19.11 (a) En utilisant les lois de la trigonométrie, on peut remplacer la somme ou la différence de deux cosinus par un produit, et on obtient des ondes stationnaires. (b) L'onde stationnaire qui vérifie l'équation de d'Alembert est nécessairement harmonique et donc produit d'une fonction sinusoïdale de t par une fonction sinusoïdale de x . Les conditions aux limites en $x = 0$ et en $x = a$ entraînent la nullité du champ en ces deux points.

19.12 (a) Le champ électrique est tangentiel donc nul en $x = 0$. (b) Toutes les réponses à cette question se trouvent dans la nullité du champ énoncée à la question (a), elle est vraie pour tout t , pour tout y et pour tout z . Il suffit d'identifier les coefficients dans les exponentielles. (c) L'égalité des pulsations entraîne celle des normes des vecteurs d'onde. (d) Conséquence immédiate des résultats précédents.

19.13 Après avoir développé les expressions du type $\vec{k} \cdot \vec{OM}$ dans les exponentielles complexes, la continuité du champ électrique permet de conclure par identification des coefficients de y .

19.14 La valeur de ω_p est calculée avec la formule du cours. On compare ω à ω_p et on donne dans chaque cas les valeurs approchées de \underline{r} et de \underline{t} .

19.15 L'indice du métal est très grand devant 1 dans un cas, très petit devant 1 dans l'autre cas. On en déduit \underline{r} et \underline{t} .

19.16 La loi de la quantité de mouvement en grandeurs complexes donne la relation entre \underline{v} et \underline{E} , on en déduit celle entre \underline{j} et \underline{E} .

puis la conductivité complexe. Sous l'hypothèse de l'énoncé, on est dans le domaine réactif, l'indice est imaginaire pur, ce qui permet de répondre aux dernières questions.

19.17 En utilisant l'orthogonalité entre la direction de propagation

et le champ électrique, et le fait que le dipôle oscillant ne rayonne pas dans la direction de son axe d'oscillations, on établit la relation entre i et t . En combinant cette relation avec la deuxième loi de Descartes, on en déduit l'angle de Brewster.

Corrigés des exercices

19.1

- a) On dérive la première équation par rapport à t , la seconde par rapport à x et on utilise le théorème de Schwartz :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -\alpha \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial x} = -\alpha \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} = \alpha \beta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c = \sqrt{\alpha \beta}$$

- b) En formalisme complexe, une telle onde s'écrit

$$\begin{cases} \underline{F}(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \\ \underline{G}(x, t) = \underline{G}_0 e^{i(\omega t - kx)} \end{cases}$$

La première équation s'écrit

$$(i\omega)\underline{F} = -\alpha(-ik)\underline{G} \text{ donc } \frac{\underline{F}}{\underline{G}} = \frac{\alpha k}{\omega}$$

Or $\omega = kc$ donc

$$\frac{\underline{F}}{\underline{G}} = \frac{\alpha}{c} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = Z$$

- c) En formalisme complexe, une telle onde s'écrit

$$\begin{cases} \underline{F}(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t + kx)} \\ \underline{G}(x, t) = \underline{G}_0 e^{i(\omega t + kx)} \end{cases}$$

La première équation s'écrit

$$(i\omega)\underline{F} = -\alpha(ik)\underline{G} \text{ donc } \frac{\underline{F}}{\underline{G}} = -\frac{\alpha k}{\omega}$$

Or $\omega = kc$ donc

$$\frac{\underline{F}}{\underline{G}} = -\frac{\alpha}{c} = -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = -Z$$

19.2

- a) La relation de dispersion donne $k = \frac{\omega}{c}$ et l'onde se déplaçant dans le sens des x décroissants :

$$\underline{G}_i(x, t) = \underline{G}_i^0 e^{i(\omega t + kx)}$$

- b) L'onde réfléchie se propage dans le sens des x croissants et s'écrit

$$\underline{G}_r(x, t) = \underline{G}_r^0 e^{i(\omega t - kx)}$$

En $x = 0^+$, on a la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$\underline{G}(x = 0, t) = \underline{G}_i(0^+, t) + \underline{G}_r(0^+, t)$$

$$\text{donc } 0 = \underline{G}_i^0 e^{i\omega t} + \underline{G}_r^0 e^{i\omega t}$$

$$\text{donc } \underline{G}_r^0 = -\underline{G}_i^0$$

On en déduit que

$$\underline{r} = \frac{\underline{G}_r^0}{\underline{G}_i^0} = -1$$

- c) Posons $\underline{G}_i^0 = G_0 e^{i\varphi}$ On en déduit que

$$G(x, t) = G_0 [\cos(\omega t + kx + \varphi) - \cos(\omega t - kx + \varphi)]$$

$$G(x, t) = -2G_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx)$$

19.3

- a) Il y a continuité de l'élongation en $x = 0$:

$$y_i(0^-, t) + y_r(0^-, t) = Y(t) = y_t(0^+, t)$$

L'autre relation de passage en $x = 0$ est donnée par la loi de la quantité de mouvement appliquée à la masselotte. En projection sur l'axe y :

$$m\ddot{Y} = -T \sin \alpha(t) + T \sin \beta(t)$$

soit, en faisant l'approximation des petits angles :

$$m\ddot{Y} = -T\alpha(t) + T\beta(t)$$

En utilisant la relation précédente :

$$Y(t) = y_t(0^+, t) \text{ donc } \ddot{Y} = \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}(0^+, t)$$

La superposition des ondes angulaires donne

$$\alpha(t) = \theta(0^-, t) = \theta_i(0^-, t) + \theta_r(0^-, t) = \frac{\partial y_i}{\partial x}(0^-, t) + \frac{\partial y_r}{\partial x}(0^-, t)$$

$$\text{et } \beta(t) = \theta(0^+, t) = \theta_t(0^+, t) = \frac{\partial y_t}{\partial x}(0^+, t)$$

La seconde relation de passage s'écrit donc

$$m \frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}(0^+, t) = T \left[-\frac{\partial y_i}{\partial x}(0^-, t) - \frac{\partial y_r}{\partial x}(0^-, t) + \frac{\partial y_t}{\partial x}(0^+, t) \right]$$

En grandeurs complexes, les ondes s'écrivent

$$\underline{y}_i = U_0 e^{i\omega(\frac{x}{c} - t)}$$

$$\underline{y}_r = \underline{U}_r^0 e^{-i\omega(\frac{x}{c} + t)} \text{ avec } \underline{U}_r^0 = U_r^0 e^{i\phi_r}$$

$$\underline{y}_t = \underline{U}_t^0 e^{i\omega(\frac{x}{c} - t)} \text{ avec } \underline{U}_t^0 = U_t^0 e^{i\phi_t}$$

Les deux relations de passage en grandeurs complexes s'écrivent donc, après simplification par $e^{-i\omega t}$:

$$U_0 + \underline{U}_r^0 = \underline{U}_t^0$$

$$m(-i\omega)(-i\omega)\underline{U}_t^0 = T \left[-\left(i\frac{\omega}{c}\right)U_0 - \left(-i\frac{\omega}{c}\right)\underline{U}_r^0 + \left(i\frac{\omega}{c}\right)\underline{U}_t^0 \right]$$

On fait apparaître les coefficients de réflexion et de transmission

$$\underline{r} = \frac{\underline{U}_r^0}{U_0} \text{ et } \underline{t} = \frac{\underline{U}_t^0}{U_0}$$

en divisant les deux équations par U_0 :

$$\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ -m\omega^2 \underline{t} = -i\frac{\omega T}{c}(1 - \underline{r} - \underline{t}) \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} - \underline{t} = -i\frac{m\omega c}{T}\underline{t} = -\frac{2i}{\eta}\underline{t} \end{cases}$$

Le système se résout aisément et donne

$$\underline{r} = \frac{i}{\eta} \text{ et } \underline{t} = \frac{1}{1 - \frac{i}{\eta}}$$

b) Quand $m \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow \infty$ donc

$$\underline{r} = 0 \text{ et } \underline{t} = 1$$

Ces valeurs sont faciles à interpréter : il n'y a pas de masselotte, il n'y a donc aucune perturbation de la corde en $x = 0$, donc pas d'onde réfléchie, l'onde est totalement transmise.

Quand $m \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$ donc

$$\underline{r} = -1 \text{ et } \underline{t} = 0$$

Ces valeurs sont faciles à interpréter : la masselotte est de masse très importante, elle ne bouge donc pratiquement pas et empêche l'onde de se propager. L'onde est donc totalement réfléchie.

19.4

La discontinuité de masse volumique entraîne une discontinuité de célérité :

$$c_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \neq c_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$$

La pulsation étant la même pour l'onde incidente, l'onde transmise et l'onde réfléchie, les vecteurs d'onde ne sont pas les mêmes. On pose

$$\omega = k_1 c_1 = k_2 c_2$$

et on en déduit les expressions des ondes complexes d'élongation transversale

$$\underline{y}_i = \underline{Y}_i e^{i(\omega t - k_1 x)},$$

$$\underline{y}_r = \underline{Y}_r e^{i(\omega t + k_1 x)}, \underline{y}_t = \underline{Y}_t e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

et d'angles d'inclinaison $\alpha(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$:

$$\underline{\alpha}_i = -i k_1 \underline{Y}_i e^{i(\omega t - k_1 x)},$$

$$\underline{\alpha}_r = i k_1 \underline{Y}_r e^{i(\omega t + k_1 x)}, \underline{\alpha}_t = -i k_2 \underline{Y}_t e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

Il y a continuité de l'élongation et de l'angle d'inclinaison de la corde donc

$$\begin{cases} \underline{y}_i(0^-, t) + \underline{y}_r(0^-, t) = \underline{y}_t(0^-, t) \\ \underline{\alpha}_i(0^-, t) + \underline{\alpha}_r(0^-, t) = \underline{\alpha}_t(0^-, t) \end{cases}$$

soit, en utilisant les expressions précédentes et en simplifiant par $e^{i\omega t}$:

$$\begin{cases} \underline{Y}_i + \underline{Y}_r = \underline{Y}_t \\ -i k_1 \underline{Y}_i + i k_1 \underline{Y}_r = -i k_2 \underline{Y}_t \end{cases}$$

On divise la première relation par \underline{Y}_i , la seconde par $-i k_1 \underline{Y}_i$ pour mettre en évidence les coefficients de réflexion et de transmission en élongation :

$$\begin{cases} 1 + r_y = t_y \\ 1 - r_y = \frac{k_2}{k_1} t_y \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} r_y = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \\ t_y = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \end{cases}$$

$$\text{soit } r_y = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} \text{ et } t_y = \frac{2\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}$$

19.5

La masse molaire de l'air est $M' = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, et c'est un gaz qu'on suppose parfait diatomique donc $\gamma' = \frac{7}{5}$. La masse molaire de l'hélium est $M'' = 4,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, et c'est un gaz qu'on suppose parfait monoatomique donc $\gamma'' = \frac{5}{3}$. La célérité du son dans un gaz parfait est $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ et la loi des gaz parfaits

Chapitre 19 Interfaces entre deux milieux

peut s'écrire $PM = \mu RT$. On en déduit les impédances acoustiques des deux gaz :

$$Z = \mu_0 c = \frac{PM}{RT} \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \frac{P}{\sqrt{RT}} \cdot \sqrt{\gamma M}$$

Les deux gaz sont à même pression et à même température donc

$$\alpha = \frac{Z'}{Z''} = \frac{\sqrt{\gamma' M'}}{\sqrt{\gamma'' M''}} = 2,468$$

Par application des formules du cours

$$R = \left[\frac{Z' - Z''}{Z' + Z''} \right]^2 = \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right]^2 = 0,179$$

$$T = \frac{4Z'Z''}{(Z' + Z'')^2} = \frac{4\alpha}{(\alpha + 1)^2} = 0,821$$

On vérifie numériquement la conservation de l'énergie sonore $R + T = 1$.

19.6 La membrane est imperméable donc en formalisme complexe et après simplification par $e^{i\omega t}$:

$$V_0 + V_0^r e^{i\phi_r} = V_0^t e^{i\phi_t}$$

et en divisant par V_0 :

$$1 + \underline{r} = \underline{t}$$

De plus, la vitesse de la membrane est égale à celle de l'onde de part et d'autre, donc en particulier elle est égale à celle de l'onde transmise :

$$v(t) = v_1^t(0^+, t)$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à une surface S de la membrane donne

$$\left[p_1^i(0^-, t) + p_1^r(0^-, t) \right] S - p_1^t(0^+, t) S = \sigma S \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\left[p_1^i(0^-, t) + p_1^r(0^-, t) \right] S - p_1^t(0^+, t) S = \sigma S \frac{\partial v_1^t}{\partial t}(0^+, t)$$

La définition de l'impédance acoustique permet, après simplification par S , d'écrire cette relation sous la forme

$$Zv_1^i(0^-, t) - Zv_1^r(0^-, t) - Zv_1^t(0^+, t) = \sigma \frac{\partial v_1^t}{\partial t}(0^+, t)$$

soit, en grandeurs complexes et après simplification par $e^{i\omega t}$:

$$ZV_0 - ZV_0^r e^{i\phi_r} - ZV_0^t e^{i\phi_t} = \sigma(i\omega)V_0^t e^{i\phi_t}$$

et en divisant par ZV_0 :

$$1 - \underline{r} - \underline{t} = i\omega \frac{\sigma}{Z} \underline{t} = i \frac{\omega \sigma}{\mu_0 c} \underline{t} = \frac{2i}{\eta} \underline{t}$$

On en déduit

$$\underline{r} = \frac{\frac{i}{\eta}}{1 + \frac{i}{\eta}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{1}{1 + \frac{i}{\eta}}$$

19.7

a) On a continuité de la pression donc

$$\underline{P}_1^i + \underline{P}_1^r = \underline{P}_1^t$$

On a continuité du débit massique donc

$$\mu(0^-, t)v_1(0^-, t)S_1 = \mu(0^+, t)v_1(0^+, t)S_2$$

On se place dans l'approximation acoustique en négligeant les termes du second ordre, d'où

$$\mu_0 v_1(0^-, t)S_1 = \mu_0 v_1(0^+, t)S_2$$

En utilisant l'impédance acoustique, et en simplifiant les expressions par $e^{i\omega t}$, on en déduit le système

$$\begin{cases} Z\underline{V}_1^i - Z\underline{V}_1^r = Z\underline{V}_1^t & \text{donc} \begin{cases} 1 - \underline{r}_v = \underline{t}_v \\ 1 + \underline{r}_v = \frac{S_2}{S_1} \underline{t}_v \end{cases} \\ \underline{V}_1^i + \underline{V}_1^r = \frac{S_2}{S_1} \underline{V}_1^t \end{cases}$$

$$\text{donc } \underline{t}_v = \frac{2S_1}{S_1 + S_2} \quad \text{et} \quad \underline{r}_v = \frac{S_2 - S_1}{S_1 + S_2}$$

De même

$$\underline{t}_p = \frac{2S_1}{S_1 + S_2} \quad \text{et} \quad \underline{r}_p = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}$$

b) On a

$$R = \frac{|\Pi_r|}{|\Pi_i|} = \frac{-p_r v_r}{p_i v_i} = -r_p r_v = \frac{(S_1 - S_2)^2}{(S_1 + S_2)^2}$$

$$\text{et } T = t_p t_v = \frac{4S_1^2}{(S_1 + S_2)^2}$$

c) On remarque que $R + T \neq 1$ Ceci vient du fait que la surface change à l'interface, donc la puissance surfacique ne se conserve pas. En puissance totale, en revanche, on a

$$R' = \frac{S_1 |\Pi_r|}{S_1 |\Pi_i|} = R = \frac{(S_2 - S_1)^2}{(S_1 + S_2)^2}$$

$$T' = \frac{S_2 |\Pi_t|}{S_1 |\Pi_i|} = \frac{S_2}{S_1} T = \frac{4S_1 S_2}{(S_1 + S_2)^2}$$

et on a donc bien $R' + T' = 1$.

19.8

- a) Notons $p(t)$ la résultante des pressions sur la membrane et $X(t)$ son abscisse. Par application de la loi de la quantité de mouvement :

$$p(t)S - kX(t) - \lambda \dot{X}(t) = m\ddot{X}(t)$$

En grandeurs complexes, en notant $v(t)$ la vitesse de la membrane,

$$v(t) = \dot{X}(t) \text{ donc } \underline{v}(t) = i\omega \underline{X}(t) \text{ donc}$$

$$\underline{p}S = i\omega m \underline{v} + \lambda \underline{v} + \frac{k}{i\omega} \underline{v}$$

$$\text{donc } \underline{Z}_m = \frac{\underline{p}}{\underline{v}} = \frac{i\omega m + \lambda + \frac{k}{i\omega}}{S}$$

- b) La résultante des pressions vaut

$$p(t) = P_0 + p_1^i(0^-, t) + p_1^r(0^-, t) - P_0 = p_1^i(0^-, t) + p_1^r(0^-, t)$$

La vitesse de la membrane est égale à celle de l'onde résultante car elle est imperméable, donc

$$v(t) = v_1^i(0^-, t) + v_1^r(0^-, t)$$

En écrivant la continuité de vitesse et la relation qui définit l'impédance de la membrane, puis en simplifiant par $e^{i\omega t}$, on obtient le système

$$\begin{cases} \underline{V}_1^i + \underline{V}_1^r = \underline{V} \\ \underline{P}_1^i + \underline{P}_1^r = \underline{Z}_m \underline{V} \end{cases} \text{ donc } Z_a \underline{V}_1^i - Z_a \underline{V}_1^r = \underline{Z}_m \underline{V}_1^i + \underline{Z}_m \underline{V}_1^r$$

d'où l'expression du coefficient de réflexion

$$\underline{r}_v = \frac{\underline{V}_1^r}{\underline{V}_1^i} = \frac{Z_a - \underline{Z}_m}{Z_a + \underline{Z}_m}$$

- c) On a $Z_a = \underline{Z}_m$ lorsque \underline{Z}_m est réel donc quand

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Z_a = \frac{\lambda}{S}$$

Dans ce cas, $\underline{r}_v = 0$, aucune onde n'est réfléchi, il y a donc **transfert intégral** ou **conversion parfaite** de l'énergie sonore en énergie mécanique de vibration de la membrane. C'est un cas d'adaptation d'impédance.

19.9 Partie 1.

- a) Par application de la formule du cours :

$$\underline{r}_v = \frac{Z_a - Z_h}{Z_a + Z_h} = -0,9992$$

- b) L'onde est donc presque complètement réfléchi au niveau de la peau et ne pénètre pas dans les tissus.

- c) Par définition

$$\underline{p}_1(x, t) = \underline{P}_1 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\text{donc } \underline{p}_1(x + e, t) = \underline{P}_1 e^{i(\omega t - kx - ke)} = \underline{p}_1(x, t) e^{-ike}$$

Partie 2.

- a) \underline{A}_0 est le réfléchi air-gel de \underline{A} donc

$$\underline{A}_0 = r_{ag} \underline{A}$$

- b) Relations de récurrence.

- i) \underline{A}_n est le transmis gel-air de \underline{H}_{n-1} donc

$$\underline{A}_n = t_{ga} \underline{H}_{n-1}$$

- ii) \underline{E}_n est le réfléchi gel-air de \underline{H}_{n-1} donc

$$\underline{E}_n = r_{ga} \underline{H}_{n-1}$$

- iii) Par composition des deux relations

$$\underline{E}_n = \frac{r_{ga}}{t_{ga}} \underline{A}_n$$

- iv) \underline{E}_n est le propagé dans le gel de \underline{E}_n donc

$$\underline{E}_n = e^{-ike} \underline{E}_n$$

- v) \underline{G}_n est le réfléchi gel-peau de \underline{E}_n donc

$$\underline{G}_n = r_{gh} \underline{E}_n$$

- vi) \underline{H}_n est le propagé dans le gel de \underline{G}_n donc

$$\underline{H}_n = e^{-ike} \underline{G}_n$$

- vii) \underline{A}_{n+1} est le transmis gel-air de \underline{H}_n donc

$$\underline{A}_{n+1} = t_{ga} \underline{H}_n$$

- c) En combinant toutes ces relations,

$$\underline{A}_{n+1} = t_{ga} e^{-ike} r_{gh} e^{-ike} \frac{r_{ga}}{t_{ga}} \underline{A}_n$$

$$\text{donc } \underline{A}_{n+1} = r_{gh} r_{ga} e^{-2ike} \underline{A}_n$$

qui définit une suite géométrique de raison

$$\underline{q} = r_{gh} r_{ga} e^{-2ike}$$

Le premier terme vaut

$$\underline{A}_1 = t_{ga} e^{-ike} r_{gh} e^{-ike} t_{ag} \underline{A}$$

d) On a $e^{-2ike} = -1$ donc

$$2ke = \pi + n \cdot 2\pi \text{ donc}$$

$$e_{\min} = \frac{\pi}{2k} = \frac{\lambda}{4} = \frac{c_g}{4f}$$

e) Nullité de la série.

i) En appliquant les formules du cours

$$t_{ag} t_{ga} = \frac{2Z_a \cdot 2Z_g}{(Z_a + Z_g)^2}$$

$$r_{ag} r_{ga} = -\frac{(Z_a - Z_g)^2}{(Z_a + Z_g)^2}$$

$$\text{donc } t_{ag} t_{ga} - r_{ag} r_{ga} = 1$$

ii) En remplaçant au dénominateur de l'expression donnée, l'onde réfléchie somme de toutes les ondes issues de \underline{A}_n vaut

$$[r_{ag} - r_{gh}] \underline{A}_1$$

Il n'y a donc pas d'onde réfléchie si $r_{ag} = r_{gh}$.

iii) En exprimant cette égalité avec les impédances, on obtient

$$\frac{Z_a - Z_g}{Z_a + Z_g} = \frac{Z_g - Z_h}{Z_g + Z_h}$$

$$\text{soit } (Z_a - Z_g)(Z_g + Z_h) = (Z_a + Z_g)(Z_g - Z_h)$$

$$\text{soit } Z_a Z_h - Z_g^2 = -Z_a Z_h + Z_g^2$$

$$\text{donc } Z_a Z_h = Z_g^2 \text{ donc } Z_g = \sqrt{Z_a Z_h}$$

f) On calcule $Z_g = 2,0 \cdot 10^4 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

g) On en déduit

$$Z_g = \mu_g c_g \text{ donc } c_g = \frac{Z_g}{\mu_g} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{donc } e = \frac{c_g}{4f} = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

19.10

a) Le champ électrique est nul en $x = 0^-$ et en $x = 0^+$. Le vecteur normal dirigé du métal vers le vide est $\vec{n} = -\vec{u}_x$. La relation de passage en $x = 0$ donne donc

$$\vec{0} - \vec{0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\vec{u}_x) \text{ donc } \sigma = 0$$

Le champ magnétique est nul en $x = 0^+$ et le champ résultant en $x = 0^-$ est

$$\vec{B}_0(t) = \vec{B}_i(0^-, t) + \vec{B}_r(0^-, t) = \frac{2E_0}{c} \vec{u}_z \cos(\omega t)$$

La densité de courant surfacique est

$$\vec{j}_s = j_{sy} \vec{u}_y + j_{sz} \vec{u}_z$$

La relation de passage en $x = 0$ donne donc

$$\begin{vmatrix} 0 & -\vec{0} = \mu_0 & 0 \\ 0 & j_{sy} & \wedge \\ \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) & j_{sz} & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} 0 = -\mu_0 j_{sz} \\ \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) = \mu_0 j_{sy} \end{cases}$$

$$\text{soit } \vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \vec{u}_y \cos(\omega t)$$

b) Cette languette se comporte comme un tronçon de fil de longueur L parcouru par un courant $di = j_s dz$. Il subit donc une force de Laplace

$$d\vec{F}_L = di(L\vec{u}_y) \wedge \vec{B}_0(t)$$

$$d\vec{F}_L = L dz \vec{u}_x \frac{4E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t)$$

c) En intégrant sur $z \in [0, L]$ on en déduit

$$\vec{F}_L = L^2 \vec{u}_x \frac{4E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t)$$

La valeur moyenne d'un cosinus carré est $\frac{1}{2}$, on en déduit la valeur surfacique moyenne

$$\vec{F}_{L,\text{surf}} = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \vec{u}_x$$

d) L'impact des photons qui sont dotés d'une quantité de mouvement non nulle se traduit par une pression photonique ou pression de radiation qui est effectivement dirigée dans le sens de \vec{u}_x .

19.11

a) Le champ électrique résultant est

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t)$$

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t - kx) - E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t + kx)$$

$$\vec{E}(x, t) = 2E_0 \vec{u}_y \sin(\omega t) \sin(kx)$$

Le champ magnétique résultant est

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_i(x, t) + \vec{B}_r(x, t)$$

$$\vec{B}(x, t) = \frac{E_0}{c} \vec{u}_z \cos(\omega t - kx) + \frac{E_0}{c} \vec{u}_z \cos(\omega t + kx)$$

$$\vec{B}(x, t) = \frac{2E_0}{c} \vec{u}_z \cos(\omega t) \cos(kx)$$

Ces ondes sont toutes deux stationnaires.

- b) Une onde stationnaire qui vérifie l'équation de d'Alembert dans le vide est nécessairement harmonique. On la cherche donc sous la forme

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

avec $\omega = kc$. L'onde étant polarisée parallèlement aux plaques, le champ électrique est tangentiel il est donc continu, donc nul en $x = 0$ et en $x = a$. Ces conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} \cos(\psi) = 0 \\ \cos(ka + \psi) = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \psi = -\frac{\pi}{2} \\ \sin(ka) = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } ka = n\pi$$

qui forme la relation de quantification avec n entier naturel non nul. Remarquons qu'on retrouve ici, comme pour la corde fixée à ses deux extrémités :

$$a = n \frac{\lambda}{2}$$

On en déduit

$$\omega = kc = \frac{n\pi c}{a}$$

et l'expression de l'onde électrique

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t + \varphi) \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right)$$

19.12

- a) On développe

$$\vec{k}_i \cdot \vec{OM} = k \cos \theta x + k \sin \theta y$$

$$\text{et } \vec{k}_r \cdot \vec{OM} = k_{rx}x + k_{ry}y + k_{rz}z$$

Le champ électrique est tangentiel et donc continu en $x = 0$. Il est nul dans le métal pour $x = 0^+$, il est donc aussi nul dans le vide (où se superposent l'onde incidente et de l'onde réfléchie) pour $x = 0^-$, soit :

$$\forall y, z, t, E_{0i} e^{i\omega t} e^{-ik \cos \theta \cdot 0} e^{-ik \sin \theta y} +$$

$$E_{0r} e^{i\omega_r t} e^{-ik_{rx} \cdot 0} e^{-ik_{ry} y} e^{-ik_{rz} z} = 0$$

- b) Par identification, on en déduit que

$$E_{0i} + E_{0r} = 0, \quad \omega = \omega_r, \quad k \sin \theta = k_{ry} \text{ et } 0 = k_{rz}$$

- c) La relation de dispersion dans le vide pour les OPPH incidente et réfléchie donne

$$\left. \begin{aligned} k^2 \cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta &= \frac{\omega^2}{c_0^2} \\ k_{rx}^2 + k_{ry}^2 &= \frac{\omega_r^2}{c_0^2} \end{aligned} \right\} \text{ donc } k_{rx}^2 + k_{ry}^2 = k^2$$

$$\text{donc } k_{rx}^2 = k^2 - k_{ry}^2 = k^2 - k^2 \sin^2 \theta = k^2 \cos^2 \theta$$

Or $k_{rx} < 0$ car l'onde réfléchie se propage de droite à gauche donc $k_{rx} = -k \cos \theta$.

- d) $k_{rz} = 0$ prouve que le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence (première loi de Descartes). Les vecteurs \vec{k}_i et \vec{k}_r sont symétriques par rapport à \vec{u}_x , le rayon réfléchi fait donc avec la normale un angle $r = -\theta$ (deuxième loi de Descartes).

19.13 La relation de dispersion donne

$$\omega = \frac{k_i c}{n_1} = \frac{k_r c}{n_1} = \frac{k_t c}{n_2}$$

On pose $k_1 = \frac{n_1 \omega}{c}$ et $k_2 = \frac{n_2 \omega}{c}$. Les vecteurs d'onde s'écrivent dans la base cartésienne

$$\vec{k}_i \begin{vmatrix} k_1 \cos i_1 \\ k_1 \sin i_1 \\ 0 \end{vmatrix}, \vec{k}_r \begin{vmatrix} -k_1 \cos r_1 \\ k_1 \sin r_1 \\ 0 \end{vmatrix}, \vec{k}_t \begin{vmatrix} k_2 \cos i_2 \\ k_2 \sin i_2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On en déduit

$$\vec{k}_i \cdot \vec{OM} = k_1 \cos i_1 x + k_1 \sin i_1 y$$

$$\vec{k}_r \cdot \vec{OM} = -k_1 \cos r_1 x + k_1 \sin r_1 y$$

$$\vec{k}_t \cdot \vec{OM} = k_2 \cos i_2 x + k_2 \sin i_2 y$$

Le champ électrique étant selon \vec{u}_z , il est tangentiel et donc continu en $x = 0$. On en déduit

$$\forall t, \forall y, E_0 e^{i\omega t} e^{-ik_1 \sin i_1 y} + E_0^r e^{i\omega t} e^{-ik_1 \sin r_1 y} =$$

$$E_0^t e^{i\omega t} e^{-ik_2 \sin i_2 y}$$

Après simplification par $e^{i\omega t}$, on obtient une combinaison linéaire nulle de trois fonctions exponentielles. Si les coefficients de y étaient distincts, les trois fonctions formeraient une famille libre, donc tous les coefficients seraient nuls, ce qui est exclu (absence d'onde). Les trois coefficients sont donc identiques, donc

$$\begin{cases} k_1 \sin i_1 = k_1 \sin r_1 \\ k_1 \sin i_1 = k_2 \sin i_2 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} i_1 = r_1 \\ n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \end{cases}$$

19.14

- a) D'après la formule du cours

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}} = 17,8 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Chapitre 19 Interfaces entre deux milieux

- b) La pulsation de l'onde est $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 5,39 \cdot 10^{14} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On est dans le domaine de transparence du plasma et

$$\underline{n}_p = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx 1 \text{ donc } \underline{r} \approx 0 \text{ et } \underline{t} \approx 1$$

L'ionosphère ne réfléchit pratiquement pas les infrarouges solaires.

- c) La pulsation est $\omega = 2\pi f = 1,02 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On est dans le domaine réactif du plasma et

$$\underline{n}_p = i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = 17,4i$$

$$\text{donc } \underline{r} = \frac{1 - 17,4i}{1 + 17,4i} \text{ et } \underline{t} = \frac{2}{1 + 17,4i}$$

On remarque que $|\underline{r}| = 1$, le module de l'amplitude de l'onde réfléchie est égale à celle de l'onde incidente, l'onde transmise ne transporte pas d'énergie, c'est une onde évanescente, qui ne pourra pas traverser la centaine de kilomètres d'ionosphère, et cette fréquence n'est pas adaptée aux échanges radio avec la Lune.

19.15

- a) Si $\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0}$, alors

$$\underline{n}_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{2\epsilon_0\omega}} - i \sqrt{\frac{\gamma}{2\epsilon_0\omega}} \gg 1$$

On en déduit

$$\underline{r} \approx -1 \text{ et } \underline{t} \approx 0$$

Cette situation est privilégiée à grande conductivité, donc à faible épaisseur de peau, l'onde ne pouvant pénétrer dans le métal, elle se réfléchit.

- b) Si $\omega \gg \frac{\gamma}{\epsilon_0}$, alors

$$\underline{n}_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{2\epsilon_0\omega}} - i \sqrt{\frac{\gamma}{2\epsilon_0\omega}} \ll 1$$

On en déduit

$$\underline{r} \approx 1 \text{ et } \underline{t} \approx 2$$

19.16

- a) La loi de la quantité de mouvement appliquée à un électron s'écrit

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

donc en formalisme complexe

$$i\omega m_e \underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} - \frac{m}{\tau} \underline{\vec{v}}$$

On en déduit

$$\underline{\vec{j}} = -n_0 e \underline{\vec{v}} = \frac{n_0 e^2}{m_e \left(\frac{1}{\tau} + i\omega \right)} \underline{\vec{E}}$$

$$\text{donc } \underline{\gamma} = \frac{n_0 e^2}{m_e \left(\frac{1}{\tau} + i\omega \right)}$$

- b) Pour $\tau\omega \gg 1$, on peut écrire

$$\underline{\gamma} \approx \frac{n_0 e^2}{im_e \omega} = \frac{\epsilon_0 \cdot \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}{i\omega}$$

$$\text{donc } \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}$$

- c) Par application de la formule du cours,

$$\underline{n}^2 = 1 - \frac{i\underline{\gamma}}{\epsilon_0 \omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

- d) L'indice est imaginaire pur, il est en de même de \underline{k} , c'est une onde évanescente, qui ne se propage pas.
e) Posons $\underline{n} = in_0$. Le module vaut

$$\left| \frac{1 - in_0}{1 + in_0} \right| = 1$$

L'onde ne se propageant pas dans le métal, il est normal que l'amplitude de l'onde réfléchie soit égale à celle de l'onde incidente.

19.17

- a) Les deux charges qui forment le dipôle sont mises en mouvement oscillatoire sinusoïdal forcé sous l'action de la force électrique, le moment dipolaire \vec{p} est donc colinéaire à \vec{E}_t .
b) Le sinus carré est nul si $\theta = 0$ ou π . Le dipôle oscillant n'émet donc pas d'onde dans la direction de son axe d'oscillations, donc dans la direction de \vec{E}_t , donc dans la direction orthogonale au rayon transmis, donc dans la direction faisant un angle t avec le dioptre. Or le rayon réfléchi, s'il existe, fait un angle i avec la normale au dioptre. On en déduit qu'il y a absence de rayon réfléchi si

$$i + t = \frac{\pi}{2}$$

- c) La relation de Descartes donne

$$n_1 \sin i = n_2 \sin t = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - i \right) = n_2 \cos i$$

$$\text{donc } \tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$$

L'application numérique donne

$$\begin{cases} i_B = \arctan \frac{1,667}{1,333} = 51^\circ \\ t = 39^\circ \end{cases}$$

On vérifie la relation $i_B + t = 90^\circ$.

- d) Une onde électromagnétique incidente, sous incidence de Brewster, se décompose comme somme de deux ondes po-

larisées rectilignement, une dont la direction de polarisation est dans le plan d'incidence, une dont la direction de polarisation est orthogonale à ce plan. D'après l'étude théorique, la première onde ne crée aucune onde réfléchie. L'onde réfléchie est donc polarisée rectilignement orthogonalement au plan d'incidence. On met en évidence cette polarisation en mettant justement un polariseur avec une direction de polarisation dans le plan d'incidence et en observant l'extinction.

CHAPITRE 20

Physique du laser

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Système à deux niveaux d'énergie.
- ◇ Absorption, émission stimulée, émission spontanée
- ◇ Coefficients d'Einstein.
- ◇ Inversion de population.
- ◇ Oscillateur à pont de Wien : amplification, bouclage, oscillation.
- ◇ Laser.
- ◇ Faisceau gaussien.
- ◇ Longueur de Rayleigh.
- ◇ Élargisseur de faisceau.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Décrire et énoncer les lois d'absorption, d'émission stimulée et spontanée.
- ◇ Faire un bilan de population.
- ◇ Faire un bilan de puissance, justifier l'inversion de population.
- ◇ Décrire et mettre en œuvre le laser par analogie avec l'oscillateur à pont de Wien.
- ◇ Décrire les propriétés géométriques d'un faisceau laser.
- ◇ Utiliser des lentilles pour modeler le faisceau laser.

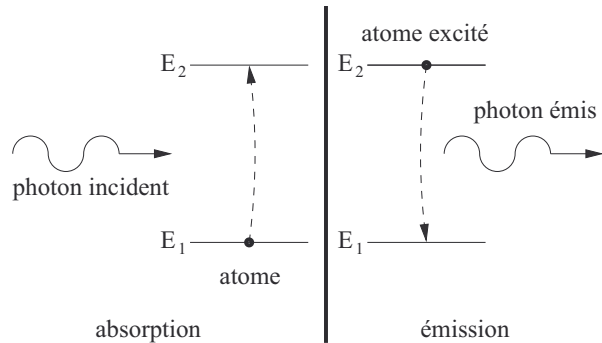
Les méthodes à retenir

Décrire et énoncer les lois d'absorption, d'émission stimulée et spontanée.

Dans un atome à deux niveaux d'énergie, un électron peut se trouver à un niveau E_1 ou à un niveau $E_2 > E_1$.

- Lorsque l'atome dans l'état E_1 absorbe un photon d'énergie minimale $E_2 - E_1$, il passe à l'état excité au niveau E_2 : il y a **absorption**.
- Lorsqu'un atome excité passe du niveau E_2 au niveau E_1 , il y a **émission** d'un photon d'énergie $E_2 - E_1$, donc de pulsation ω_{12} avec

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega_{12} \text{ avec } \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$



Dans une population comportant N atomes, on note N_1 et N_2 les nombres d'atomes dans les états E_1 et E_2 , avec $N = N_1 + N_2$. Voici les lois d'absorption et d'émission et quelques éléments de justification.

a) Pour qu'une absorption ait lieu, il faut la rencontre d'un atome dans l'état E_1 et d'un photon de pulsation ω ; N_1 diminue alors d'une unité et N_2 augmente d'une unité. Pendant dt , le nombre d'absorptions $dN_2(\text{abs})$ est donc proportionnel

- au nombre N_1 d'atomes dans l'état E_1
- au nombre de photons d'énergie $\hbar\omega_{12}$, lui-même proportionnel à la densité spectrale donnée par la loi de Planck (voir exercice 5.12)

$$\mathcal{D}(\omega_{12}) = \frac{du_{em}}{d\omega} = \frac{\frac{\hbar\omega_{12}^3}{\pi^2 c^3}}{e^{\frac{\hbar\omega_{12}}{k_B T}} - 1}$$

- à la durée dt .

On en déduit la **loi d'absorption**

$$dN_2(\text{abs}) = -dN_1(\text{abs}) = B_{12}\mathcal{D}(\omega_{12})N_1 dt$$

B_{12} est le **coefficient d'Einstein à l'absorption**.

b) Un atome excité au niveau E_2 , isolé de toute action extérieure peut se désexciter spontanément (comme pour une désintégration radioactive). Il y a alors émission spontanée d'un photon, N_2 diminue d'une unité, N_1 augmente d'une unité. Pendant dt , le nombre d'émissions spontanées $-dN_2(\text{emsp})$ est donc proportionnel

- au nombre N_2 d'atomes dans l'état E_2
- à la durée dt .

On en déduit la **loi d'émission spontanée**

$$-dN_2(\text{emsp}) = dN_1(\text{emsp}) = A_{21}N_2 dt$$

A_{21} est le **coefficient d'Einstein à l'émission spontanée**. En l'absence de tout autre phénomène d'émission et d'absorption, $N_2(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dN_2}{N_2} = -A_{21} dt \text{ donc } \ln \frac{N_2(t)}{N_2(0)} = -A_{21} t$$

$$\text{soit } N_2(t) = N_2(0)e^{-A_{21}t}$$

On peut donc définir une constante de temps $\tau = \frac{1}{A_{21}}$ et le temps de demi-vie, temps au bout duquel la moitié d'une population d'atome excités, sans interaction entre eux, se sont désexcités, est

$$t_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2 = \frac{\ln 2}{A_{21}}$$

c) L'électron est un fermion, et deux électrons ne peuvent pas se trouver dans le même état quantique, c'est le principe d'exclusion de Pauli. Au contraire, le photon est un boson, ce qui lui confère un « instinct grégaire », deux bosons pouvant être spontanément dans un même état quantique. Ainsi, la présence de photons d'énergie ω_{12} « encourage » d'autres photons à « se libérer » d'un atome excité au niveau E_2 . Il y a alors émission stimulée d'un photon, N_2 diminue d'une unité, N_1 augmente d'une unité. Pendant dt , le nombre d'émissions stimulées $-dN_2(\text{emst})$ est donc proportionnel

- au nombre N_2 d'atomes dans l'état E_2
- au nombre de photons d'énergie $\hbar\omega_{12}$, proportionnel à la densité spectrale donnée par la loi de Planck

$$\mathcal{D}(\omega_{12}) = \frac{\frac{\hbar\omega_{12}^3}{\pi^2 c^3}}{e^{\frac{\hbar\omega_{12}}{k_B T}} - 1}$$

- à la durée dt .

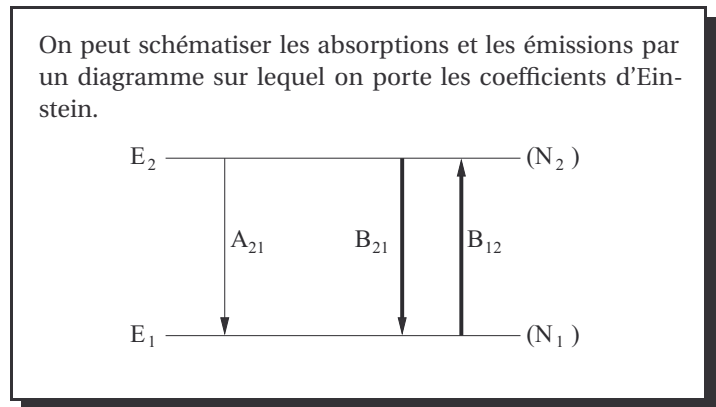
On en déduit la **loi d'émission stimulée**

$$-dN_2(\text{emst}) = dN_1(\text{emst}) = B_{21}\mathcal{D}(\omega_{12})N_2 dt$$

B_{21} est le **coefficient d'Einstein à l'émission stimulée**.

Ce type de bilan peut être généralisé à des situations plus complexes, avec un plus grand nombre d'états, ou avec des lois de variation faisant intervenir d'autres paramètres.

Exemple :



↪ Exercices 20.1, 20.2.

Faire un bilan de population.

L'établissement des relations entre les coefficients d'Einstein se fait en trois temps.

a) Pour un système à l'équilibre thermodynamique avec un thermostat à la température T , N_1 et N_2 sont liés par la loi statistique de Maxwell-Boltzmann

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}$$

b) Pour un système en régime stationnaire

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = 0$$

$$\text{donc } -B_{12}\mathcal{D}(\omega_{12})N_1 + (A_{21} + B_{21}\mathcal{D}(\omega_{12}))N_2 = 0$$

$$\text{donc } -B_{12}\mathcal{D}(\omega_{12})e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} + A_{21} + B_{21}\mathcal{D}(\omega_{12}) = 0$$

$$\text{soit } \mathcal{D}(\omega_{12}) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{B_{12}}{B_{21}}e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} - 1}$$

c) On identifie cette expression avec la loi de Planck

$$\mathcal{D}(\omega_{12}) = \frac{\frac{\hbar\omega_{12}^3}{\pi^2 c^3}}{e^{\frac{\hbar\omega_{12}}{k_B T}} - 1} \text{ avec } \hbar\omega_{12} = E_2 - E_1$$

$$\text{donc } \begin{cases} B_{12} = B_{21} = B \\ B = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega_{12}^3} A_{21} \end{cases}$$

Exemple :

Les relations entre les coefficients d'Einstein permettent de comparer les taux d'émission spontanée et d'émission stimulée. La première prédomine sur la seconde si

$$A_{21} > B_{21} \mathcal{D}(\omega_{12}) \Leftrightarrow 1 > \frac{\pi^2 c^3}{\hbar \omega_{12}^3} \cdot \frac{\frac{\hbar \omega_{12}^3}{\pi^2 c^3}}{e^{\frac{\hbar \omega_{12}}{k_B T}} - 1}$$

$$\text{soit } e^{\frac{\hbar \omega_{12}}{k_B T}} - 1 > 1$$

En ordre de grandeur, l'émission spontanée prédomine si l'énergie des photons est supérieure à l'énergie thermique, l'émission stimulée prédomine dans le cas contraire.

↪ **Exercice 20.3.**

Faire un bilan de puissance, justifier l'inversion de population.

Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique, de pulsation ω , se propageant selon \vec{u}_z , aborde un milieu matériel isolant formé d'atomes à deux niveaux d'énergie E_1 et E_2 avec $\omega = \omega_{12}$. On note

$$\vec{\Pi} = \Pi(z, t) \vec{u}_z$$

le vecteur de Poynting, densité surfacique de courant énergétique et u_{em} la densité volumique d'énergie électromagnétique. Le **bilan de puissance** conduit à une équation aux dérivées partielles vérifiée par Π . Voici les étapes du raisonnement.

a) Soit n_0 le nombre de photons par mètre cube. Pour cette onde monochromatique, on doit substituer l'énergie volumique $n_0 \hbar \omega$ à la densité spectrale $\mathcal{D}(\omega)$ par l'identification

$$\mathcal{D}(\omega) = \frac{n_0 \hbar \omega}{\omega} = \frac{u_{em}}{\omega}$$

b) Le modèle photonique (voir exercices 17.6 et 17.8) pour une onde monochromatique de pulsation ω conduit aux relations

$$\begin{cases} \vec{\Pi} = n_0 c \hbar \omega \vec{u}_z \\ u_{em} = n_0 \hbar \omega \end{cases} \quad \text{donc } \Pi = \|\vec{\Pi}\| = c u_{em}$$

c) Lors du passage de l'onde électromagnétique, les processus d'absorption et d'émission stimulée enrichissent l'onde des photons libérés et l'appauvrissent des photons absorbés. L'équation locale de Poynting doit donc prendre en compte les termes de création et d'annihilation de photons. L'émission spontanée, elle, libère des photons dont la direction de propagation est aléatoire et indépendante de celle de l'onde. La valeur moyenne du vecteur de Poynting associé est donc nulle et on ne les prend pas en compte dans le bilan. Un photon est créé quand N_1 augmente d'une unité, et un photon est absorbé quand N_1 diminue d'une unité. En notant n_1 et n_2 le nombre d'atomes par mètre cube dans les états d'énergie E_1 et E_2 , on en déduit

$$\frac{\partial u_{em}(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi(z, t)}{\partial z} + \frac{dn_1(t)}{dt} \cdot \hbar\omega$$

d) En utilisant les expressions des paragraphes précédents

$$\frac{\partial u_{em}(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi(z, t)}{\partial z} + \hbar\omega [-B_{12}n_0\hbar \cdot n_1 + B_{21}n_0\hbar \cdot n_2]$$

$$\frac{\partial u_{em}(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi(z, t)}{\partial z} + n_0\hbar\omega [-B\hbar n_1 + B\hbar n_2]$$

$$\text{soit } \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi(z, t)}{\partial z} + \frac{\hbar B}{c} \Pi(z, t)(n_2 - n_1)$$

En régime stationnaire, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{d\Pi(z)}{dz} = \frac{\hbar B}{c} (n_2 - n_1) \Pi(z, t)$$

$$\text{donc } \Pi(z) = \Pi_0 e^{\frac{\hbar B}{c} (n_2 - n_1) z}$$

L'amplitude énergétique de l'onde lorsqu'elle traverse le milieu matériel est donc

- décroissante avec z si $n_1 > n_2$
- croissante avec z si $n_2 > n_1$.

L'acronyme laser indique une amplification par émission stimulée. L'effet laser n'est donc possible que si $n_2 > n_1$. Or à l'équilibre thermique

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{\frac{E_1 - E_2}{k_B T}} < 1$$

Il faut donc un apport énergétique au système qui provoque une **inversion de population**.

Exemple :

La solution $\Pi(z)$ en régime permanent fait apparaître les quantités

$$L^{-1} = \frac{\hbar B}{c}(n_2 - n_1) \text{ et } L = \frac{c}{\hbar B(n_2 - n_1)}$$

qu'on peut nommer gain par unité de longueur et longueur caractéristique : tous les L mètres, en régime permanent, l'amplitude du vecteur de Poynting est multipliée par e , si $n_2 > n_1$, donc si on assure une inversion de population.

↪ **Exercice 20.4.**

Décrire et mettre en œuvre le laser par analogie avec l'oscillateur à pont de Wien.

L'oscillateur à pont de Wien (traité en exemple) met en évidence les différentes fonctions réalisant un oscillateur. Chacune de ces fonctions peut faire l'objet d'un modèle physique (et donc d'une question de problème ou d'un exercice) indépendant des autres.

a) L'**amplification optique** est assurée par l'émission stimulée. Elle est régie par un bilan d'énergie, comme on l'a montré au paragraphe précédent.

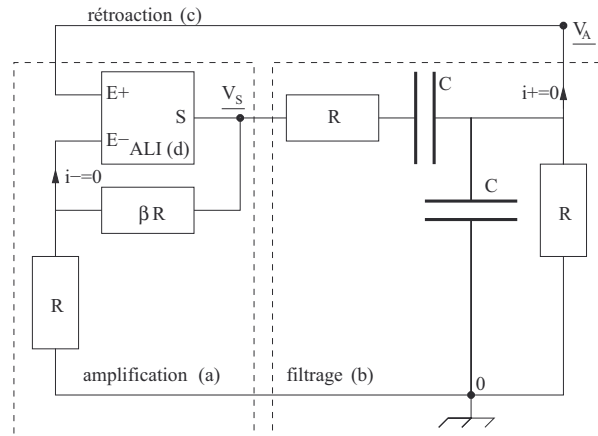
b) Le **filtrage fréquentiel** est assuré par la paire de miroirs semi-réfléchissants qui délimitent la cavité laser. Cette cavité est assimilée à la caisse de résonance en acoustique. Le modèle de **Fabry-Perot** (voir exercice 1.12) est bien adapté à la recherche des **modes propres laser**.

c) Le **bouclage** est assuré par chaque miroir à l'extrémité de la **cavité laser**. En imposant aux photons des allers-retours nombreux dans la cavité, on augmente la probabilité d'émission stimulée d'un atome excité. L'étude d'un miroir semi-réfléchissant relève de celle des ondes électromagnétiques, et peut s'apparenter en physique quantique à la traversée d'une barrière de potentiel par effet tunnel (voir chapitre 21).

d) L'**alimentation en énergie** du laser est assurée par le **pompage optique** permettant le maintien de l'inversion de population. Ce pompage est réalisé par la réexcitation des atomes par un flash, ou par une alimentation électrique. L'étude précise du processus d'excitation relève de la physique quantique.

Exemple :

L'oscillateur à pont de Wien comporte un étage d'amplification (a), alimenté en énergie au niveau d'un amplificateur linéaire intégré (ALI (d)), un étage de filtration (b) et une boucle de rétroaction (c).



a) La cellule d'amplification est régie par les lois de l'ALI

$$\underline{V}_{E+} = \underline{V}_{E-} \text{ et } i^+ = i^- = 0$$

En appliquant la loi du diviseur de tension (valable car $i^- = 0$) sur l'association série R, βR

$$(\underline{V}_A - 0) = \frac{R}{R + \beta R} \cdot (\underline{V}_S - 0) \text{ donc } \underline{V}_S = (1 + \beta)\underline{V}_A$$

b) L'étage de filtration est un quadripôle dont on exprime la fonction de transfert grâce au diviseur de tension (en sortie ouverte car $i^+ = 0$)

$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_A}{\underline{V}_S} = \frac{\frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R}}}{\frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R}} + \frac{1}{jC\omega} + R}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_A}{\underline{V}_S} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

C'est la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre de pulsation centrale $\omega = \frac{1}{RC}$.

c) La branche de retour forme la rétroaction qui assure la stabilité du fonctionnement de l'ALI.

d) L'énergie dissipée dans les résistors est compensée par l'énergie électrique d'alimentation de l'ALI (non représentée sur le schéma électrique).

En éliminant \underline{V}_S entre les deux relations, on obtient

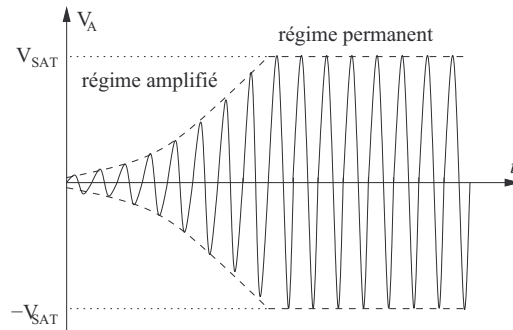
$$\underline{V}_A = \frac{jR(1+\beta)C\omega\underline{V}_A}{1+3jRC\omega-R^2C^2\omega^2}$$

$$\text{donc } R^2C^2(j\omega)(j\omega)\underline{V}_A + [3-(1+\beta)]RC(j\omega)\underline{V}_A + \underline{V}_A = 0$$

On transpose cette relation complexe en grandeurs réelles en associant la multiplication par $(j\omega)$ à une dérivation temporelle

$$R^2C^2 \frac{d^2V_A}{dt^2} + [3-(1+\beta)]RC \frac{dV_A}{dt} + V_A = 0$$

C'est une équation d'oscillateur harmonique si le coefficient d'amplification $1+\beta=3$. Concrètement, on règle ce coefficient à une valeur très légèrement supérieure à 3. On observe ainsi un régime transitoire d'oscillations amplifiées exponentiellement jusqu'à atteindre le **régime de saturation** de l'ALI, qui ne peut délivrer une tension de sortie supérieure en valeur absolue à V_{SAT} .



Voici un tableau récapitulatif donnant les analogies entre le laser et l'oscillateur à pont de Wien.

	oscillateur de Wien	laser
amplification	ALI	émission stimulée
filtrage	filtre passe-bande de Wien	cavité Fabry-Perot
bouclage	rétroaction $V_A \rightarrow V_{E+}$	miroirs
source d'énergie	alimentation de l'ALI	pompage

↪ **Exercices 20.5, 20.6, 20.7, 20.8, 20.9, 20.10.**

Décrire les propriétés géométriques d'un faisceau laser.

Un faisceau laser de **profil gaussien** d'axe (O, z) a pour intensité lumineuse en coordonnées cylindriques

$$I(r, z) = \frac{I_0}{1 + \left(\frac{z}{L_r}\right)^2} e^{-\frac{2}{a^2} \left[1 + \left(\frac{z}{L_r}\right)^2\right] r^2}$$

L_r est la **longueur de Rayleigh** et a est le *waist* (qu'on peut traduire par taille minimale, mais aussi taille de la partie centrale, ou étranglement) du faisceau laser.

Deux zones spatiales sont à distinguer.

- **Zone cylindrique.** Pour $z \ll L_r$,

$$I(r, z) \simeq I_0 e^{-2\left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

Le profil radial est indépendant de z . Le faisceau est donc cylindrique, son rayon est de l'ordre de $R(z) = a$, la tache lumineuse sur un écran est un disque gaussien.

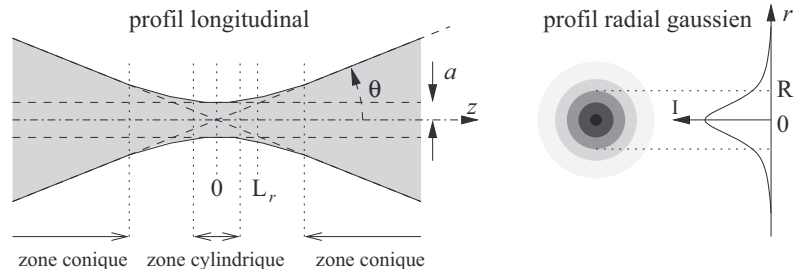
- **Zone conique.** Pour $z \gg L_r$,

$$I(r, z) \simeq \frac{L_r^2 I_0}{z^2} e^{-2\left(\frac{r}{L_r}\right)^2}$$

Le profil radial est gaussien, son rayon croît selon une fonction linéaire $R(z) = \frac{az}{L_r}$, et par conservation de l'énergie, son intensité décroît avec z^2 . Le faisceau est donc conique, de demi-angle au sommet θ avec

$$\tan \theta = \frac{a}{L_r}$$

Voici le profil longitudinal, obtenu en raccordant la zone cylindrique et la zone conique, et le profil radial gaussien.



L'exploitation des propriétés géométriques du faisceau forme l'essentiel des questions des exercices associées à ce paragraphe.

Exemple :

L'ouverture angulaire du faisceau à grande distance peut être attribuée à un effet de la diffraction. Au niveau de l'étranglement (zone cylindrique) du faisceau, son rayon est a et en notant λ la longueur d'onde, l'angle de diffraction est de l'ordre de

$$\theta \simeq \frac{\lambda}{\pi a}$$

Par identification, dans l'hypothèse des petits angles,

$$\frac{\lambda}{a} \simeq \frac{a}{L_r}$$

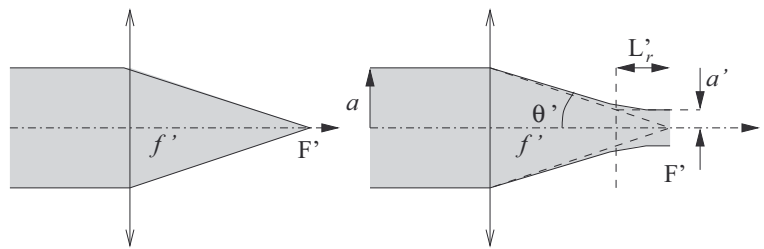
ce qui permet de déterminer la longueur de Rayleigh.

↪ **Exercices 20.11, 20.12, 20.13.**

Utiliser des lentilles pour modeler le faisceau laser.

Les propriétés de l'optique géométrique sont combinées avec celles du faisceau gaussien pour opérer deux transformations distinctes.

a) **Transformation d'un faisceau cylindrique en un faisceau conique.** Par définition du foyer image d'une lentille convergente, un faisceau cylindrique devient un faisceau conique de sommet F' . Or un faisceau cylindrique laser s'évase en un faisceau conique au delà de la longueur de Rayleigh L_r . Par **principe de retour inverse de la lumière**, on admet que le faisceau conique issu d'une lentille convergente, placée sur la zone cylindrique d'un faisceau laser incident, se réduit en un faisceau cylindrique au voisinage de F' .



prévision de l'optique géométrique

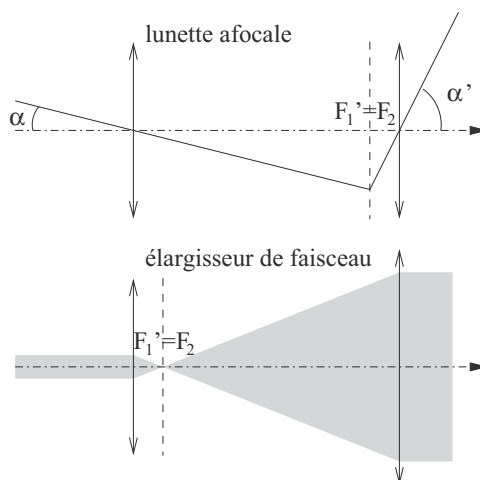
cas du faisceau laser

Les propriétés géométriques de la figure donnent (dans l'hypothèse des petits angles) les relations

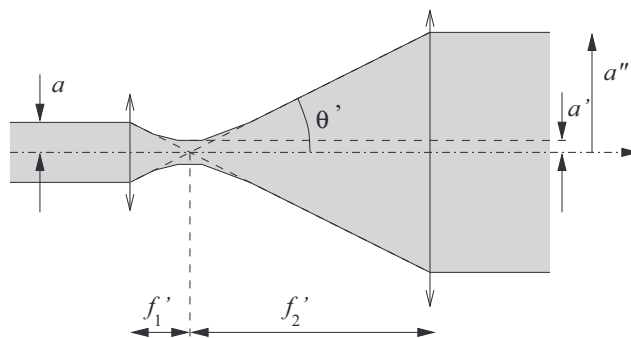
$$\begin{cases} \theta' = \frac{a}{f_1'} \\ \theta' = \frac{a'}{f_2'} \end{cases} \text{ avec } \theta' \approx \frac{\lambda}{a'} \text{ donc } a' = \frac{\lambda f_2'}{a}$$

Or dans les conditions de Gauss $a < f_1'$ donc $a' > \lambda$.

b) **Réduction de l'ouverture angulaire d'un faisceau conique.** La lunette afocale, étudiée en première année, est formée de deux lentilles convergentes de distances focales f_1' et $f_2' \gg f_1'$ telles que $F_1' = F_2$. Son grossissement est $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_1'}{f_2'}$. Utilisé dans l'autre sens, ce dispositif forme un **élargisseur de faisceau**.



En plaçant un élargisseur de faisceau sur le trajet d'un faisceau laser dans sa zone cylindrique, voici l'allure des faisceaux obtenus.



Dans l'hypothèse des petits angles

$$\theta = \frac{a}{f_1'} = \frac{a''}{f_2'} \text{ donc } a'' = \frac{f_2'}{f_1'} a$$

ce qui correspond bien à l'élargissement du faisceau.

La relation entre l'angle de faisceau et le waist donne

$$\begin{cases} \theta = \frac{\lambda}{a} \\ \theta'' = \frac{\lambda}{a''} \end{cases} \text{ donc } \frac{\theta''}{\theta} = \frac{a}{a''} = \frac{f_1'}{f_2'} \ll 1$$

Ce dispositif élargit donc le faisceau cylindrique, mais diminue l'ouverture angulaire du faisceau conique.

Exemple :

- a) La réduction de la taille de la tache dans la zone cylindrique correspond à la recherche d'une **focalisation** maximale d'un faisceau laser, afin de concentrer sa puissance ou de pointer avec une grande précision. Ainsi, la concentration importante des données sur la face d'un CD ou d'un DVD n'a été possible qu'en diminuant la taille des pits binaires, et la lecture d'un pit par un laser n'est possible que si la taille de la tache est de l'ordre de celle du pit.
- b) La recherche d'un angle de faisceau minimal est justifiée pour les lasers de très longue portée, en particulier pour l'expérience laser-Lune. Dans celle-ci, l'observatoire de la Côte d'Azur mesure la distance Terre-Lune, par le chronométrage de la durée de l'aller-retour d'un faisceau laser réfléchi par le miroir catadioptrique déposé sur la surface lunaire par les astronautes de la mission Apollo XV.

↪ **Exercices 20.14, 20.15, 20.16.**

Énoncés des exercices

20.1

Traduction matricielle du système en $(N_1(t), N_2(t))$

On définit le vecteur

$$X(t) = \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix}$$

Traduire matriciellement le système de deux équations à deux inconnues en $(N_1(t), N_2(t))$ sous la forme

$$\frac{dX(t)}{dt} = M \cdot X(t)$$

où M est une matrice 2×2 qu'on exprimera avec les coefficients d'Einstein.



20.2

Bilan pour un laser à 3 niveaux

Dans un laser à 3 niveaux, une famille d'atomes possède 3 niveaux d'énergie $E_1 < E_2 < E_3$, une pompe excite les atomes du niveau 1 au niveau 3 avec un taux W exprimé en nombre d'excitations par atome excitable et par seconde. Les atomes au niveau E_3 se désexcitent spontanément vers le niveau E_2 , avec un taux M exprimé en nombre de désexcitations par atome excité et par seconde. La population de photons d'énergie $\hbar\omega_{23} = (E_3 - E_2)$ et $\hbar\omega_{13} = (E_3 - E_1)$ est trop faible et trop instable pour envisager des absorptions ou des émissions stimulées entre le niveau E_3 et les autres. Entre les niveaux E_1 et E_2 , les coefficients d'Einstein sont les mêmes que pour un système à deux niveaux. Établir le système d'équations différentielles entre $N_1(t)$, $N_2(t)$ et $N_3(t)$.



20.3

Comparaison numérique de prédominance entre les deux types d'émission

Pour un matériau à température ordinaire $T = 290$ K, calculer la longueur d'onde minimale à partir de laquelle il y a prédominance de l'émission spontanée. On donne $c = 3,00 \cdot 10^8$ m · s⁻¹, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J · s et $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K⁻¹.



20.4

Bilan de puissance en lumière polychromatique

Un faisceau de lumière polychromatique est la superposition d'ondes monochromatiques dont les vecteurs d'onde respectifs sont tous portés par \vec{u}_z . Il aborde un milieu matériel isolant formé d'atomes à deux niveaux d'énergie E_1 et E_2 avec $E_2 - E_1 = \hbar\omega_{12}$. On note

$$\vec{\Pi} = \Pi(z, t) \vec{u}_z$$

le vecteur de Poynting, densité surfacique de courant énergétique et u_{em} la densité volumique d'énergie électromagnétique. La composition spectrale de cette lumière est définie par sa puissance spectrale en pulsation

$$\mathcal{D}(\omega) = \frac{d u_{em}}{d \omega}$$

ou par sa densité spectrale en population

$$\varphi(\omega) = \frac{\mathcal{D}(\omega)}{u_{em}}$$

a) Donner la relation intégrale entre u_{em} et $\mathcal{D}(\omega)$. En déduire la valeur de

$$\int_{\omega=0}^{\infty} \varphi(\omega) d\omega$$

b) Pourquoi peut-on généraliser la relation $\|\vec{\Pi}\| = c u_{em}$ énoncée dans le cours en lumière monochromatique ?

c) Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\Pi(z, t)$.

20.5**Inversion de population pour un laser à trois niveaux**

On reprend dans cet exercice les notations et les résultats de l'exercice 20.2. Les deux niveaux d'énergie E_1 et $E_2 > E_1$ ont des populations respectives N_1 et N_2 . Les phénomènes d'absorption, d'émission spontanée et stimulée se produisent entre ces deux niveaux. Une pompe utilisant une source extérieure d'énergie excite les atomes du niveau E_1 au niveau $E_3 > E_2$ avec un taux W et ceux excités au niveau E_3 se désexcitent spontanément au niveau E_2 avec un taux M . W et M sont exprimés en nombre de photons par atome et par seconde. Voici les résultats des bilans de particules.

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (-W + B\mathcal{D})N_1 + (A_{21} + B\mathcal{D})N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = B\mathcal{D}N_1 - (A_{21} + B\mathcal{D})N_2 + MN_3 \\ \frac{dN_3}{dt} = WN_1 - MN_3 \end{cases}$$

- Écrire ces bilans en régime permanent.
- En déduire l'expression de $N_1 - N_2$ en fonction de N_3 .
- En déduire la condition d'inversion de population en donnant le taux minimal W_{\min} en fonction des coefficients d'Einstein.

20.6**Amplification et saturation**

Dans un système atomique à deux niveaux d'énergie, on note n le nombre total d'atomes par unité de volume, n_1 celui au niveau d'énergie E_1 , n_2 celui au niveau d'énergie $E_2 > E_1$. Si on peut négliger l'émission spontanée devant l'émission stimulée, la norme du vecteur de Poynting vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d\Pi(z)}{dz} = \frac{\hbar B}{c}(n_2 - n_1)\Pi(z, t)$$

- Donner l'expression de $\Pi(z)$ et justifier la nécessité d'inversion de population.
- Définir le gain par unité de longueur

$$\gamma = \frac{d\Pi}{\Pi dz}$$

et donner sa valeur maximale γ_{\max} .

- Si on note a la longueur de la cavité laser, exprimer le nombre N d'allers-retours sont nécessaires pour atteindre ce gain maximal ?
- Dans l'oscillateur à pont de Wien, la tension de sortie vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2V_A}{dt^2} + [3 - (1 + \beta)]\omega_0 \frac{dV_A}{dt} + \omega_0^2 V_A = 0$$

On prend $\beta = 2 + 2\epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$.

- Résoudre complètement l'équation différentielle avec

$$V_A(0) = V_0 \text{ et } \frac{dV_A}{dt}(0) = 0$$

- Donner l'expression de la pseudo-période de cet oscillateur.
- La tension de sortie $V_s = (1 + \beta)V_A$ ne peut pas dépasser la tension de saturation $V_{\text{SAT}} = 100V_0$. En déduire la date à laquelle cette saturation est atteinte, et le nombre N d'oscillations amplifiées effectuées à cette date.



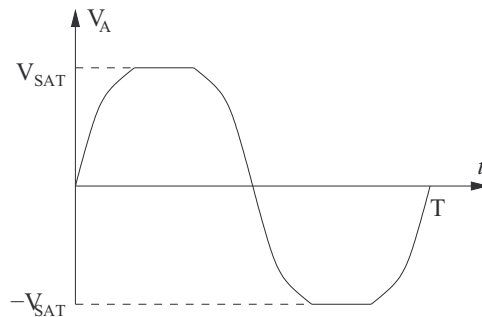
20.7

Sélection fréquentielle par la cavité de Fabry-Perot

Une cavité de Fabry-Perot est formée par deux miroirs semi-réfléchissants de coefficient de réflexion r proche de 1, distants de a , entre lesquels un faisceau de lumière fait des allers-retours. On démontre que l'intensité lumineuse de l'onde électromagnétique monochromatique, de longueur d'onde λ , qui émerge de la cavité par l'un des miroirs est (voir exercice 1.12)

$$I = \frac{J_0}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \text{ avec } \begin{cases} m = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \\ \varphi = \frac{4\pi a}{\lambda} \end{cases}$$

- a) Calculer m si $r = 0,999$.
- b) En déduire les valeurs de λ pour lesquelles l'intensité lumineuse qui sort de la cavité est significative.
- c) Donner l'expression des fréquences correspondantes et de l'intervalle spectral de la cavité Δf séparant deux valeurs consécutives des fréquences sélectionnées.
- d) Dans l'oscillateur à pont de Wien, lorsque la saturation est atteinte, voici l'allure de $V_A(t)$.



Quelles sont les valeurs des fréquences du spectre de cette tension ? Donner dans ce cas l'intervalle spectral Δf .



20.8

Modes laser : sélection et filtrage

La cavité Fabry-Perot (voir exercice 20.7) opère une **sélection** de fréquences discrètes

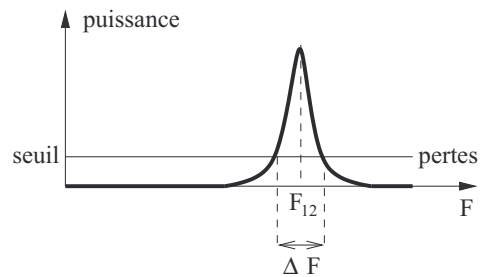
$$f_n = n f_1$$

Un laser est fabriqué à partir d'un système atomique à deux niveaux d'énergie

$$E_1 \text{ et } E_2 > E_1$$

- a) Dans un cas idéal, donner l'expression de l'unique fréquence F_{12} que le laser parfaitement monochromatique peut émettre.
- b) On peut déterminer les fréquences sélectionnées par la cavité Fabry-Perot de longueur a en considérant que ce sont les mêmes que celles des modes propres de vibration d'une corde fixée à ses deux extrémités de longueur a , avec une célérité c . En déduire f_1 . On pose maintenant $\Delta f = f_{n+1} - f_n = f_1$, Δf est appelé **intervalle spectral**.
- c) À quelle condition le laser parfaitement monochromatique ainsi réalisé peut-il fonctionner ?
- d) On abandonne ce modèle idéal en prenant en compte les données suivantes.
- Les **fluctuations** (thermiques, Doppler, quantiques) provoquent un élargissement spectral de la fréquence émise par émission stimulée, selon une loi gaussienne centrée sur F_{12} .
 - Les **pertes** (prise en compte de l'émission spontanée, fuites optiques, présence d'atomes parasites, ionisation, ...) définissent un seuil énergétique au dessous duquel le bilan énergétique absorption-émission conduit à une atténuation du signal.

Voici les deux graphes fréquence-puissance superposés.



Montrer graphiquement que la sélection fréquentielle opérée par la cavité de Fabry-Perot peut conduire à un laser polyfréquentiel (on dit multimode), monofréquentiel (on dit monomode), ou éventuellement non émissif. Donner la relation entre ΔF et Δf dans chaque cas.

- e) Pour un laser hélium néon, la fréquence centrale d'émission a pour longueur d'onde dans le vide $\lambda_{12} = 632,8$ nm. On assimile la gaussienne à un profil rectangulaire de largeur $\Delta F = 2,0$ GHz. La cavité laser a une largeur $a = 20$ cm. On donne $c = 3,00 \cdot 10^8$ m \cdot s $^{-1}$. Donner le nombre de modes à une unité près.

Réglage (accordage) d'un laser monomode

20.9

La longueur d'onde d'un laser à dioxyde de carbone (CO_2) possède une longueur d'onde centrale d'émission $\lambda_0 = 9,41$ μm , et un spectre rectangulaire de largeur spectrale en fréquence $\Delta F = 0,50$ GHz. La cavité Fabry-Perot est de longueur $a = 10,0$ cm et sélectionne les fréquences $f_n = n f_1$ avec $f_1 = \frac{c}{2a}$. On donne $c = 3,00 \cdot 10^8$ m \cdot s $^{-1}$.

- a) Calculer l'intervalle spectral $\Delta f = f_{n+1} - f_n$.
- b) Pourquoi le laser risque-t-il d'être non émissif ?
- c) Pour obtenir un laser monomode, on équipe le laser d'un dispositif de variation de a . Calculer la valeur maximale Δa permettant d'obtenir une émission de lumière par le laser.
- d) Quelle technologie permet un réglage aussi fin ?
- e) Justifier que ce laser est nécessairement monomode (monofréquentiel).



20.10

Rendement d'un laser

Un laser à trois niveaux opère un pompage du niveau E_1 à un niveau $E_3 > E_2$, puis les phénomènes d'absorption et d'émission spontanée et stimulée s'opèrent entre les niveaux E_2 et E_1 . On donne

$$\begin{cases} c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E_1 = -71,81 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ E_2 = -69,73 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ E_3 = -69,08 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{cases}$$

- Justifier que c'est un laser infrarouge.
- La puissance consommée par le laser est $\mathcal{P} = 15 \text{ mW}$. Son rendement de pompage, c'est-à-dire le rapport entre la puissance de pompage optique et la puissance consommée vaut $\rho_p = 0,73$. En déduire le nombre maximal de photons que ce laser peut émettre par seconde.
- Calculer la puissance optique maximale que peut produire ce laser et calculer son rendement.



20.11

Estimation du rayon à 5% et à 1% d'une tache gaussienne

Dans la partie cylindrique d'un faisceau gaussien, l'intensité lumineuse est

$$I(r, z) \approx I_0 e^{-2\left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

Déterminer le rayon r_5 à 5% de la tache lumineuse, c'est-à-dire la valeur de r pour laquelle $I(r) = \frac{I_0}{20}$. Déterminer le rayon r_1 à 1% de la tache lumineuse, c'est-à-dire la valeur de r pour laquelle $I(r) = \frac{I_0}{100}$. Commenter les résultats.



20.12

Taille de la tache laser sur un écran

On rappelle les deux expressions de l'angle du faisceau laser gaussien à grande distance :

$$\theta = \frac{a}{L_r} = \frac{\lambda}{\pi a}$$

Un faisceau de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ possède un *waist* $a = 150 \mu\text{m}$. Calculer l'angle de faisceau, la longueur de Rayleigh, le diamètre de la tache observée sur un écran situé à $z = 10 \text{ m}$, et celui sur un écran situé à $z = 1,0 \text{ cm}$.

20.13**Détermination expérimentale de la longueur de Rayleigh**

L'intensité lumineuse d'un laser en coordonnées cylindriques est

$$I(r, z) = \frac{I_0}{1 + \left(\frac{z}{L_r}\right)^2} e^{-2 \frac{r^2}{a^2 \left[1 + \left(\frac{z}{L_r}\right)^2\right]}}$$

- Donner les expressions de $I(r, z)$ pour $z \ll L_r$, pour $z = L_r$ et pour $z \gg L_r$.
- On place un écran à une distance L du point de diamètre minimal. On obtient un disque lumineux. Un système de capteurs de grande précision mesure la distance $R(L)$ entre le point central d'intensité maximale $I(L)$ de la tache et un point de la couronne circulaire où l'intensité lumineuse vaut $0,135 \cdot I(L)$. Donner l'expression de $R(L)$ pour $z \ll L_r$, et pour $z \gg L_r$.
- En déduire comment déterminer expérimentalement L_r .
- Donner l'expression de $R(L_r)$ et justifier qu'on peut ainsi valider la mesure expérimentale.

20.14**Focalisation d'un laser bleu sur un DVD de type *blue ray***

La surface active d'un DVD *blue ray* est de l'ordre de $S = 80 \text{ cm}^2$. La capacité de stockage (en simple couche) est de 7,5 Go, un octet vaut 8 bit et chaque bit est codé par l'état d'une petite pastille, appelée pit. Le faisceau laser est de couleur bleue (d'où le nom de cette technologie) de longueur d'onde $\lambda = 406 \text{ nm}$.

- Vérifier la compatibilité de ces données avec la valeur minimale du waist du faisceau laser.
- On utilise un objectif de microscope de vergence $C = 250 \delta$. pour focaliser le faisceau sur le pit. Quel doit être le waist maximal a du faisceau laser incident permettant une lecture correcte de la piste du DVD ?

20.15**Choix d'une lentille à longueur de Rayleigh fixée**

Un laser de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ possède un waist $a = 3,0 \text{ mm}$. On veut obtenir un faisceau de longueur de Rayleigh $L_r = 6,0 \text{ cm}$.

- Quel est l'intérêt de modéliser un faisceau laser de longueur de Rayleigh fixée ?
- Déterminer la position et la distance focale de la lentille convergente adaptée à ce cahier des charges.

20.16

Laser-Lune

La distance Terre-Lune est de l'ordre de 385 000 km, la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Un laser du type YAG de longueur d'onde $\lambda = 532 \text{ nm}$ est braqué vers un miroir catadioptrique, de surface $S = 0,60 \text{ m}^2$, posé à la surface de la Lune. Le diamètre du faisceau quasiment cylindrique à la sortie du laser est $2a = 1,2 \text{ cm}$.

- Déterminer l'angle θ du faisceau sortant du laser.
- On réduit cet angle d'un facteur 5, soit $\theta'' = \frac{\theta}{5}$. Décrire la méthode utilisée.
- Donner une estimation du rapport entre la surface S du miroir et la surface du faisceau laser sur la surface de la Lune.
- Quels phénomènes réduisent encore le taux de retour des photons vers le capteur sur Terre ?
- Ce taux de retour est estimé à 10^{-20} . Combien d'impulsions d'énergie $\mathcal{E} = 0,3 \text{ J}$ doivent être tirées pour recueillir un photon de retour ?
- Quelle durée sépare l'émission de l'impulsion et le retour du photon ?
- La durée de chaque impulsion est $\tau = 0,3 \mu\text{s}$. Pourquoi choisir une valeur aussi courte ?
- Quelle est la puissance impulsionnelle du laser ?

Du mal à démarrer ?

20.1 Après avoir écrit le système d'équations différentielles, on identifiera le vecteur des dérivées à la dérivée du vecteur X .

20.2 Il faut ajouter au système du cours les termes de création et de destruction associés aux coefficients W et M .

20.3 On utilise le critère de prédominance donné dans l'exemple du cours.

20.4 Le raisonnement est le même que celui effectué dans le cours, mais on remplace $\mathcal{D}(\omega_{12})$ par l'expression donnée par l'énoncé.

20.5 La manipulation algébrique du système permet d'obtenir la relation attendue. Il est en particulier inutile d'utiliser la deuxième équation.

20.6 La résolution de l'équation différentielle en Π et l'expression du gain par unité de longueur ne posent aucune difficulté. Le gain atteint 99% de sa valeur maximale après un trajet de 5 fois la longueur caractéristique, on en déduit N par division avec a . La résolution de l'équation différentielle en V_A fait apparaître un régime pseudo-périodique amplifié.

20.7 La très grande valeur de m impose que le sinus soit nul, on en déduit les valeurs des fréquences sélectionnées. À la question (d), il suffit de remarquer le caractère périodique de la tension pour conclure.

20.8 Après avoir exprimé les fréquences filtrées, l'exercice se ramène à la possibilité qu'une ou plusieurs de ces fréquences appa-

raissent dans la bande spectrale de largeur ΔF .

20.9 On pourra se rapporter à l'exercice 20.8 pour comprendre la problématique. Dans le cas le plus défavorable, les fréquences sélectionnées par le filtre les plus proches de F_{12} sont positionnées symétriquement. On doit alors modifier a pour que l'une de ces deux fréquences atteigne la fenêtre d'amplification $\left[F_{12} - \frac{\Delta F}{2}, F_{12} + \frac{\Delta F}{2} \right]$.

20.10 Il faut prendre garde au fait que pour produire un photon d'énergie $E_2 - E_1$, le pompage consomme une énergie $E_3 - E_1$.

20.11 Application numérique immédiate.

20.12 Les applications numériques pour les rayons des taches correspondent aux deux zones, conique et cylindrique.

20.13 On observera que $\ln 0,135 \approx -2$, ce qui permet d'exprimer très simplement les rayons en fonction de a et de L_r , et d'en déduire le protocole expérimental.

20.14 La division de la surface active par le nombre de pits donne une estimation de la largeur du pit. La focalisation est faite avec une lentille convergente selon la relation établie dans le cours.

20.15 En combinant les différentes expressions de θ' , on obtient l'expression de f' en fonction de L_r et a .

20.16 La divergence angulaire calculée avec la formule du cours, puis divisée par 5 grâce à l'élargisseur de faisceau, permet d'estimer la taille de la surface éclairée sur la Lune.

Corrigés des exercices

20.1

Le système s'écrit

$$\begin{cases} dN_1 = dN_1(\text{abs}) + dN_1(\text{emsp}) + dN_1(\text{emst}) \\ dN_2 = dN_2(\text{abs}) + dN_2(\text{emsp}) + dN_2(\text{emst}) \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -B_{12}\mathcal{D}N_1 + (A_{21} + B_{21}\mathcal{D})N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = B_{12}\mathcal{D}N_1 - (A_{21} + B_{21}\mathcal{D})N_2 \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dt} \\ \frac{dN_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{12}\mathcal{D} & A_{21} + B_{21}\mathcal{D} \\ B_{12}\mathcal{D} & -A_{21} - B_{21}\mathcal{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{soit } \frac{dX}{dt} = M \cdot X$$

20.2

Pour chaque effectif atomique, on identifie les variations en prenant en compte positivement les termes de création, et négativement les termes de destruction.

Les atomes dans l'état E_3 sont créés par la pompe proportionnellement à N_1 , détruits par désexcitation proportionnellement à N_3 donc

$$dN_3 = +WN_1 dt - MN_3 dt$$

En plus des termes d'absorption et d'émission spontanée ou stimulée entre les niveaux E_2 et E_1 , on doit ajouter les termes suivants.

Un atome dans l'état E_2 est créé à chaque fois qu'un atome au niveau E_3 se désexcite donc

$$dN_2(\text{desx}) = +MN_3 dt$$

Un atome dans l'état E_1 disparaît à chaque fois que la pompe le fait passer à l'état E_3 donc

$$dN_1(\text{pomp}) = -WN_1 dt$$

On en déduit

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -(W + B_{12}\mathcal{D})N_1 + (A_{21} + B_{21}\mathcal{D})N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = B_{12}\mathcal{D}N_1 - (A_{21} + B_{21}\mathcal{D})N_2 + MN_3 \end{cases}$$

20.3

D'après le résultat du cours, il y a prédominance de l'émission stimulée si

$$e^{\frac{\hbar\omega_3}{k_B T}} - 1 < 1 \text{ soit } \frac{\hbar\omega_{12}}{k_B T} < \ln 2$$

$$\text{soit } \frac{hc}{\lambda k_B T} < \ln 2 \text{ soit } \lambda > \frac{hc}{k_B T \ln 2} = 72 \mu\text{m}$$

dans le domaine infrarouge.

20.4

a) Par définition de l'intégrale

$$u_{em} = \int_{\omega=0}^{\infty} \mathcal{D}(\omega) d\omega$$

On en déduit

$$\int_{\omega=0}^{\infty} \varphi(\omega) d\omega = \frac{\int_{\omega=0}^{\infty} \mathcal{D}(\omega) d\omega}{u_{em}} = 1$$

b) La relation énoncée dans le cours est indépendante de la pulsation ω des photons concernés, on peut donc sommer les photons et leurs vecteurs de Poynting.

c) Le bilan d'énergie s'écrit

$$\frac{\partial u_{em}(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi(z, t)}{\partial z} + \frac{dn_1(t)}{dt} \cdot \hbar\omega_{12}$$

$$\text{soit } \frac{\partial u_{em}(z, t)}{\partial t} =$$

$$-\frac{\partial \Pi(z, t)}{\partial z} + \hbar\omega_{12} [-B_{12}\mathcal{D}(\omega_{12})n_1 + B_{21}\mathcal{D}(\omega_{12})n_2]$$

$$\text{soit } \frac{\partial u_{em}(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi(z, t)}{\partial z} + B\hbar\omega_{12}(n_2 - n_1)\varphi(\omega_{12})u_{em}$$

Or $\|\vec{\Pi}\| = cu_{em}$ donc

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Pi(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi(z, t)}{\partial z} + \frac{B\hbar\omega_{12}(n_2 - n_1)\varphi(\omega_{12})}{c} \Pi(z, t)$$

20.5

a) En régime permanent, les dérivées par rapport au temps sont nulles, donc

$$\begin{cases} (-W + B\mathcal{D})N_1 + (A_{21} + B\mathcal{D})N_2 = 0 \\ B\mathcal{D}N_1 - (A_{21} + B\mathcal{D})N_2 + MN_3 = 0 \\ WN_1 - MN_3 = 0 \end{cases}$$

b) De la deuxième et la troisième équation, on tire

$$WN_1 - A_{21}N_1 = A_{21}N_2 - A_{21}N_1 + B\mathcal{D}N_2 - B\mathcal{D}N_1$$

$$\text{soit } (W - A_{21})N_1 = (A_{21} + B\mathcal{D})(N_2 - N_1)$$

et d'après la troisième équation $N_1 = \frac{M}{W}N_3$ donc

$$M \left(1 - \frac{A_{21}}{W} \right) N_3 = (A_{21} + B\mathcal{D})(N_2 - N_1)$$

$$\text{donc } N_2 - N_1 = \frac{\left(1 - \frac{A_{21}}{W} \right) N_3 M}{A_{21} + B\mathcal{D}}$$

Chapitre 20 Physique du laser

c) Il y a inversion de population si $N_2 > N_1$ donc si

$$1 - \frac{A_{21}}{W} > 0 \text{ soit } W > A_{21}$$

donc $W_{\min} = A_{21}$. Le pompage doit donc compenser l'émission spontanée.

20.6

a) Par résolution de l'équation différentielle, en notant $\Pi(0) = \Pi_0$, on obtient

$$\Pi(z) = \Pi_0 e^{\frac{\hbar B(n_2 - n_1)}{c} z}$$

Π est donc une fonction croissante de z , il y a amplification si $n_2 > n_1$. À l'équilibre thermique, $n_2 < n_1$, il faut donc une inversion de population.

b) Le gain par unité de longueur est

$$Y = \frac{d\Pi}{dz} = \frac{\hbar B(n_2 - n_1)}{c}$$

Il est maximal si le pompage assure $n_2 \approx n$ et $n_1 \approx 0$ donc

$$Y_{\max} = \frac{\hbar B n}{c}$$

c) La longueur caractéristique d'amplification est

$$L = \frac{1}{Y_{\max}} = \frac{c}{\hbar B n}$$

Le gain est égal à environ 99% de sa valeur maximale quand la distance parcourue vaut $5L$, donc il faut

$$N = \frac{5L}{a} = \frac{5c}{\hbar B n a}$$

allers-retours.

d) L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d^2 V_A}{dt^2} - 2\varepsilon\omega_0 \frac{dV_A}{dt} + \omega_0^2 V_A = 0$$

i) Le discriminant de l'équation caractéristique vaut

$$\Delta = 4\varepsilon^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 \approx -4\omega_0^2$$

Les racines de cette équation sont donc complexes

$$r = \varepsilon\omega_0 \pm i\omega_0$$

$$\text{donc } V_A(t) = e^{\varepsilon\omega_0 t} [E \cos(\omega_0 t) + F \sin(\omega_0 t)]$$

L'utilisation des conditions initiales donne, après simplification des termes négligeables, $E = V_0$ et $F = 0$. On en déduit

$$V_A(t) = V_0 e^{\varepsilon\omega_0 t} \cos(\omega_0 t)$$

ii) C'est un régime pseudo-périodique amplifié, de pseudo-période

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

iii) La saturation est atteinte quand l'amplitude vaut $V_{\text{SAT}} = 100V_0$, soit

$$V_0 e^{\varepsilon\omega_0 t} = 100V_0 \text{ soit } t = \frac{\ln 100}{\varepsilon\omega_0}$$

Le nombre de pseudo-oscillations effectuées à cette date est

$$N = \frac{t}{T_0} = \frac{\ln 100}{2\pi\varepsilon}$$

20.7

a) Avec $r = 0,999$, on a

$$m = 1,00 \cdot 10^6$$

b) I est donc très faible sauf quand

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} \approx 0 \text{ soit } \varphi = n \cdot 2\pi, n \in \mathbf{Z}$$

$$\text{soit } a = n \frac{\lambda}{2}, n \in \mathbf{N}^*$$

c) On en déduit les fréquences sélectionnées

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2a}, n \in \mathbf{N}^*$$

$$\text{et } \Delta f = f_{n+1} - f_n = f_1 = \frac{c}{2a}$$

d) La tension est une fonction périodique de période T , de valeur moyenne nulle. Sa décomposition en série de Fourier fait donc apparaître un spectre discret aux fréquences

$$f_1, 2f_1, \dots, nf_1, \dots \text{ avec } f_1 = \frac{1}{T}$$

L'intervalle spectral est donc

$$\Delta f = f_1 = \frac{1}{T}$$

20.8

a) L'unique fréquence du laser monochromatique est celle du photon émis par la désexcitation, soit

$$F_{12} = \frac{\omega_{12}}{2\pi} = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

- b) Les nœuds de vibration aux extrémités de la corde conduisent à chercher une solution du type onde stationnaire. On en déduit que la longueur de la corde est égale à un nombre entier n de fois celle d'un fuseau de vibration, soit

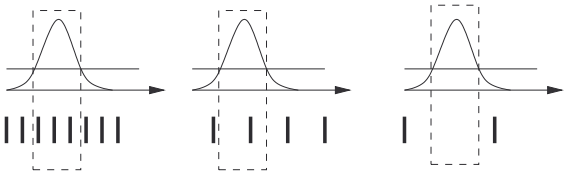
$$a = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{c}{2f}$$

$$\text{donc } f_n = n \frac{c}{2a} \text{ et } f_1 = \frac{c}{2a}$$

On vérifie que

$$\Delta f = f_{n+1} - f_n = \frac{c}{2a} = f_1$$

- c) Le laser monochromatique ne peut donc fonctionner que si F_{12} correspond à l'une des fréquences sélectionnées par la cavité, donc si le rapport $\frac{F_{12}}{f_1}$ est un nombre entier.
- d) Trois cas sont à envisager.
- Si $\Delta f \leq \frac{\Delta F}{2}$ alors il y a au moins deux fréquences sélectionnées dans la bande d'amplification de largeur ΔF , le laser est donc multimode.
 - Si $\Delta f \approx \Delta F$ alors il y a en moyenne une seule fréquence sélectionnée dans la bande d'amplification et le laser est monomode.
 - Si $\Delta f \geq 2\Delta F$ alors il y a moins d'une chance sur deux qu'une fréquence sélectionnée soit dans la bande d'amplification et, par défaut, le laser est alors non émissif.



i. laser 3-modes ii. laser monomode iii. laser non émissif

- e) L'intervalle spectral de la cavité est

$$\Delta f = \frac{c}{2a} = 0,75 \text{ GHz}$$

On a donc

$$\frac{\Delta F}{\Delta f} = 2,67$$

et il y a 2 ou 3 modes.

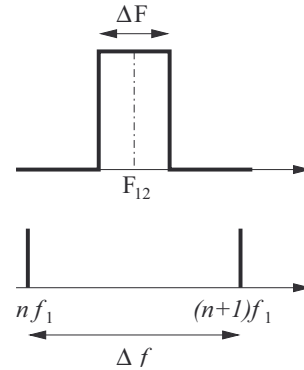
20.9

- a) L'intervalle spectral est

$$\Delta f = f_1 = \frac{c}{2a} = 1,50 \text{ GHz}$$

- b) L'intervalle spectral est trois fois plus large que la bande spectrale amplifiée, il y a donc seulement une chance sur trois qu'une fréquence sélectionnée soit dans cette bande. Le laser a donc deux chances sur trois d'être non émissif.
- c) Dans le pire des cas, les deux fréquences les plus proches sont situées symétriquement par rapport à la fréquence centrale amplifiée

$$F_{12} = \frac{c}{\lambda_0} = 3,19 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$$



Dans ce cas

$$nf_1 = F_{12} - \frac{\Delta f}{2}$$

Il faut donc changer a de telle sorte que, au minimum,

$$nf'_1 = F_{12} - \frac{\Delta f}{2}$$

En divisant ces deux égalités, on obtient

$$\frac{f'_1}{f_1} = \frac{F_{12} - \frac{\Delta f}{2}}{F_{12} - \frac{\Delta f}{2}}$$

$$\text{soit } \frac{a}{a'} = \frac{F_{12} - \frac{\Delta f}{2}}{F_{12} - \frac{\Delta f}{2}}$$

$$a' = a \frac{F_{12} - \frac{\Delta f}{2}}{F_{12} - \frac{\Delta f}{2}}$$

Effectuons le développement limité en remarquant que

$$\delta f \ll F_{12} \text{ et } \Delta F \ll F_{12}$$

On peut écrire

$$a' = a \frac{1 - \frac{\Delta f}{2F_{12}}}{1 - \frac{\Delta f}{2F_{12}}} \approx a \left[1 - \frac{\Delta f}{2F_{12}} \right] \cdot \left[1 + \frac{\Delta f}{2F_{12}} \right]$$

$$a' \approx a \left[1 - \frac{\Delta f + \Delta f}{2F_{12}} \right]$$

$$\text{donc } \Delta a = |a' - a| = a \frac{\Delta f + \Delta f}{2F_{12}} = 3,13 \text{ } \mu\text{m}$$

Chapitre 20 Physique du laser

- d) Les piézoélectriques permettent d'assurer des déplacements micrométriques.
 e) Comme $\Delta f < \Delta f$, un seul mode peut être sélectionné.

20.10

- a) La transition $E_2 \rightarrow E_1$ libère un photon de longueur d'onde

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = 954,8 \text{ nm}$$

qui est dans le domaine du proche infrarouge.

- b) Le pompage d'un atome du niveau E_1 au niveau E_3 nécessite une énergie minimale $E_3 - E_1$. Chaque atome ainsi excité ne pourra donner au mieux qu'un seul photon laser après s'être désexcité spontanément au niveau E_2 puis s'être désexcité de façon stimulée. Le nombre maximal de photons est donc

$$N = \frac{\rho_p \cdot \mathcal{P}}{E_3 - E_1} = 4,01 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$$

- c) En multipliant par l'énergie du photon émis

$$\mathcal{P}_{\text{opt}} = N(E_2 - E_1) = 8,34 \text{ mW}$$

On en déduit

$$\rho_{\text{opt}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{opt}}}{\mathcal{P}} = 56 \%$$

20.11

Par définition

$$\begin{cases} I_0 e^{-2\left(\frac{r_5}{a}\right)^2} = \frac{I_0}{20} \\ I_0 e^{-2\left(\frac{r_1}{a}\right)^2} = \frac{I_0}{100} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} r_5 = a \sqrt{\frac{\ln 20}{2}} = 1,22a \\ r_1 = a \sqrt{\frac{\ln 100}{2}} = 1,52a \end{cases}$$

L'assimilation de a au rayon de la tache est donc justifiée.

20.12

Par application des formules données

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi a} = 1,34 \text{ mrad} \text{ et } L_r = \frac{\pi a^2}{\lambda} = 0,112 \text{ m}$$

Sur un écran situé à $z = 10 \text{ m}$, on est dans la zone conique, donc

$$\theta = \frac{R}{z} \text{ et } 2R = z\theta = 2,68 \text{ cm}$$

Sur un écran situé à $z = 1,0 \text{ cm}$, on est dans la zone cylindrique, donc

$$R \approx a \text{ et } 2R = 2a = 0,3 \text{ mm}$$

20.13

- a) Pour $z \ll L_r$,

$$I(r, z) \approx I_0 e^{-2\left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

Pour $z = L_r$,

$$I(r, L_r) = \frac{I_0}{2} e^{-\frac{r^2}{a^2}}$$

Pour $z \gg L_r$,

$$I(r, z) \approx \frac{L_r^2 I_0}{z^2} e^{-2\left(\frac{r}{L_r}\right)^2}$$

- b) Pour $z \ll L_r$,

$$I(R(L), L) = 0,135 \cdot I(0, L) \Leftrightarrow e^{-2\left(\frac{R(L)}{a}\right)^2} = 0,135$$

$$\text{soit } \left(\frac{R(L)}{a}\right)^2 = \frac{\ln 0,135}{-2} \approx 1,00$$

$$\text{soit } R(L) = a$$

Pour $z \gg L_r$,

$$I(R(L), L) = 0,135 \cdot I(0, L) \Leftrightarrow e^{-2\left(\frac{R(L)}{L_r}\right)^2} = 0,135$$

$$\text{soit } \left(\frac{R(L)}{L_r}\right)^2 = \frac{\ln 0,135}{-2} \approx 1,00$$

$$\text{soit } R(L) = \frac{aL}{L_r}$$

- c) La mesure à faible distance L_1 donne la valeur de $a = R(L_1)$.
 La mesure à grande distance L_2 donne

$$L_r = \frac{aL_2}{R(L_2)} = L_2 \frac{R(L_1)}{R(L_2)}$$

- d) Pour $z = L_r$,

$$I(R(L_r), L_r) = 0,135 \cdot I(0, L_r) \Leftrightarrow e^{-\frac{R^2(L_r)}{a^2}} = 0,135$$

$$\text{soit } \left(\frac{R(L_r)}{a}\right)^2 = -\ln 0,135 \approx 2$$

$$\text{soit } R(L_r) = a\sqrt{2}$$

On peut donc vérifier la cohérence entre les valeurs de a et de L_r .

20.14

- a) On divise la surface active par le nombre de bits pour trouver la surface du pit

$$s = \frac{S}{8 \times 7,5 \cdot 10^9} = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$$

et en assimilant le pit à une fenêtre carrée, son côté est

$$d = \sqrt{s} = 365 \text{ nm}$$

C'est donc comparable à la taille du waist, qui pourra lire un seul pit à la fois.

- b) D'après la formule du cours,

$$a' = \frac{\lambda f'}{\pi a} \text{ donc } a = \frac{\lambda}{\pi dC} = 1,4 \text{ mm}$$

20.15

- a) La longueur de Rayleigh est l'ordre de grandeur de la longueur de la zone cylindrique du faisceau laser. Il est donc intéressant de pouvoir la maîtriser.
- b) D'après le cours, en positionnant la lentille dans la zone cylindrique du faisceau, le faisceau émergent est cylindrique au voisinage du foyer image F' et

$$\theta' = \frac{a}{f'} = \frac{a'}{L_r} = \frac{\lambda}{\pi a'}$$

$$\text{donc } \begin{cases} a' = \sqrt{\frac{\lambda L_r}{\pi}} \\ f' = \frac{a L_r}{a'} \end{cases}$$

$$\text{donc } f' = a \sqrt{\frac{\pi L_r}{\lambda}} = 1,64 \text{ m}$$

20.16

- a) D'après la formule du cours,

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi a} = 2,82 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

- b) On utilise un élargisseur de faisceau formé de deux lentilles convergentes de distances focales f'_1 et f'_2 telles que $F'_1 = F_2$ (système afocal) et $\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{1}{5}$.

- c) En notant R le rayon du disque formé sur la surface de la Lune, on peut écrire

$$\theta'' \approx \tan \theta'' = \frac{R}{L} \text{ donc } S'' = \pi R^2 = \pi (L\theta'')^2$$

$$\text{soit } S'' = 15 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 15 \text{ km}^2 \text{ donc } \frac{S}{S''} = 4 \cdot 10^{-8}$$

- d) Les cellules catadioptriques diffractent la lumière, le faisceau réfléchi est donc lui-même divergent, le capteur n'en recueille donc qu'un fragment. Il y a aussi de nombreuses pertes à la traversée de l'atmosphère à cause des nuages, des aérosols, des turbulences, des rendements des cellules et des éléments de filtrage du capteur.

- e) L'énergie de chaque photon est

$$e = \frac{hc}{\lambda} = 3,73 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

À chaque impulsion, on émet donc

$$\frac{\mathcal{E}}{e} = 8 \cdot 10^{17} \text{ photons}$$

On réussit à en capter en moyenne

$$8 \cdot 10^{17} \times 10^{-20} = 8 \cdot 10^{-3}$$

en retour, il faut donc émettre $\frac{1}{8 \cdot 10^{-3}} = 125$ impulsions.

- f) $\Delta t \approx \frac{2L}{c} = 2,6 \text{ s}$.

- g) Plus la durée de l'impulsion est petite, plus la précision sur Δt sera grande, donc plus la distance Terre-Lune sera mesurée précisément.

- h) La puissance impulsionnelle du laser est

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{E}}{\tau} = 1 \text{ MW}$$

CHAPITRE 21

Physique quantique

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Fonction d'onde.
- ◇ Densité de probabilité de présence.
- ◇ Normalisation.
- ◇ Équation de Schrödinger.
- ◇ États stationnaires.
- ◇ Relations de Planck-Einstein et de de Broglie.
- ◇ Paquet d'ondes quantique.
- ◇ Vitesse de groupe, vitesse de phase.
- ◇ Courant de probabilité.
- ◇ Inégalité de Heisenberg spatiale.
- ◇ Puits de potentiel.
- ◇ Énergie de confinement.
- ◇ Effet tunnel.
- ◇ Barrière de potentiel.
- ◇ Double puits symétrique.
- ◇ Oscillations quantiques.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Effectuer la séparation des variables dans l'équation de Schrödinger.
- ◇ Identifier la particule libre à un paquet d'ondes.
- ◇ Étudier une particule dans un potentiel constant par morceaux.
- ◇ Étudier une particule dans un puits.
- ◇ Expliquer l'effet tunnel et la radioactivité alpha.
- ◇ Étudier les oscillations quantiques.

Les méthodes à retenir

Effectuer la séparation des variables dans l'équation de Schrödinger.

La **fonction d'onde quantique** à une dimension $\psi(x, t)$ est une grandeur complexe dont le carré du module est la **fonction densité de probabilité de présence**

$$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = \psi(x, t) \cdot \psi^*(x, t) = \frac{dP(x, t)}{dx}$$

avec dP probabilité de trouver la particule à la date t dans l'intervalle $[x, x + dx]$. La fonction d'onde vérifie l'**équation de Schrödinger** et la **condition de normalisation**. Pour une particule sur l'axe x , soumise à un champ de forces dérivant de l'énergie potentielle (on dit simplement potentiel) indépendant du temps $V(x)$

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t) \\ \int_{x=-\infty}^{\infty} \rho(x, t) dx = 1 \end{cases}$$

Les **solutions stationnaires** forment une famille fondamentale de solutions

$$\psi(x, t) = u(t) \cdot \varphi(x)$$

On écrit dans ce cas l'équation de Schrödinger en séparant les variables, et l'égalité de fonctions de deux variables indépendantes t et x impose leur égalité à une même constante qu'on identifie à l'énergie E de la particule :

$$i\hbar \frac{1}{u(t)} \frac{du(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m\varphi(x)} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x)$$

$$\text{donc } \begin{cases} i\hbar \frac{1}{u(t)} \frac{du(t)}{dt} = E \\ -\frac{\hbar^2}{2m\varphi(x)} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x) = E \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} u(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \\ \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\varphi(x) = 0 \end{cases}$$

en prenant la constante multiplicative de $u(t)$ arbitrairement égale à 1 (c'est $\varphi(x)$ qui porte la constante multiplicative).

Ce calcul est un **préalable incontournable** à une grande majorité de sujets d'oral et d'écrit de physique quantique, il faut absolument le maîtriser. Dans la suite du chapitre, $V(x)$ sera presque toujours une fonction constante ou constante par morceaux.

Exemple :

On peut mettre en évidence deux termes importants.

a) Par identification, on peut définir la pulsation de l'onde ω et

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \text{ donc } E = \hbar\omega$$

qui forme la **relation de Planck-Einstein**.

b) Si on identifie E à l'énergie mécanique, alors

$$E - V(x) = E_c$$

énergie cinétique de la particule. Mais cette analogie est beaucoup trop naïve, et applicable seulement, avec des précautions, dans le cas de la particule libre. Dans d'autres situations, on verra que la particule peut exister (avoir une probabilité de présence non nulle) même si $E - V(x) < 0$, alors qu'une énergie cinétique est toujours positive en mécanique classique.

↪ Exercices 21.1, 21.2, 21.3.

Identifier la particule libre à un paquet d'ondes.

La **particule libre** n'est soumise à aucune force, le potentiel est uniformément nul et l'énergie E de la particule est positive. La démarche de résolution est très spécifique et se fait en deux temps.

a) L'équation spatiale (du type oscillateur harmonique)

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$$

se résout en grandeurs complexes (et pas en fonctions trigonométriques) en utilisant la relation $E = \hbar\omega$:

$$\varphi(x) = \psi_0 e^{ikx} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar} \\ \text{ou } \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \end{array} \right.$$

On en déduit la solution du type onde plane progressive harmonique

$$\psi(x, t) = u(t)\varphi(x) = \psi_0 e^{-i(\omega t - kx)}$$

Mais cette solution **n'est pas normalisable** car

$$\rho(x, t) = \psi_0 \psi_0^* = \rho_0 \in \mathbf{R}_+$$

dont l'intégrale sur la droite réelle diverge.

b) Par linéarité de l'équation de Schrödinger, toute superposition de solutions du type précédent convient. On forme donc un **paquet d'ondes** de spectre continu en pulsation spatiale k

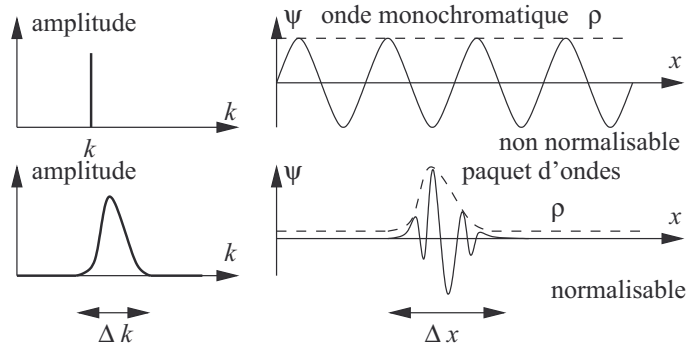
$$\Psi(x, t) = \int_{k_1}^{k_2} \Psi_0(k) e^{-i(\omega t - kx)} dk$$

On admet un résultat théorique : la largeur spatiale de la fonction d'onde Δx (qui représente l'intervalle des valeurs de x où la fonction d'onde n'est pas nulle) et la largeur spectrale en pulsation spatiale Δk (ici $k_2 - k_1$) vérifient la relation

$$\Delta x \cdot \Delta k \simeq 2\pi$$

On forme ainsi une solution qui résout les deux problèmes simultanément :

- la fonction d'onde est normalisable car on intègre $\rho(x, t)$ sur un intervalle de taille Δx fini
- la particule n'est plus délocalisée sur la droite réelle infinie, ce qui n'avait pas de sens physique.



Ce modèle du paquet d'ondes conduit à une convergence entre le point de vue de la mécanique classique et celui de la physique quantique, comme nous le montrons dans l'exemple, qu'on doit considérer comme une question de cours aussi incontournable que celle du paragraphe précédent.

Exemple :

La particule libre au sens de la **mécanique du point** possède une masse m , une vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$, une énergie mécanique égale à son énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, une quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$.

La **physique quantique** décrit la particule libre par un paquet d'onde, la fonction densité de probabilité de présence permet de l'assimiler à un nuage (comme l'orbitale de l'électron en chimie) d'extension spatiale non nulle et finie. Si on teste la présence de la particule à l'extérieur de ce nuage, la probabilité de l'y trouver est presque nulle, si on teste cette présence au voisinage d'un point du nuage, et qu'on réédite l'expérience un grand nombre de fois, on a une fréquence de présence qui tend vers la probabilité quantique. Rapprochons les grandeurs mécaniques et les grandeurs ondulatoires.

- On identifie les énergies

$$E = Ec \text{ avec } \begin{cases} E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ Ec = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} \end{cases} \text{ donc } p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$$

C'est la **relation de de Broglie**.

- La largeur spectrale Δk en pulsation spatiale est donc proportionnelle à l'incertitude Δp sur la quantité de mouvement

$$\Delta p = \hbar \Delta k$$

La relation admise entre la largeur spectrale et la largeur spatiale du paquet d'ondes donne donc

$$\Delta x \cdot \Delta k \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p \simeq h$$

qui est conforme à l'**inégalité de Heisenberg spatiale**.

- La relation $k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$ permet de calculer la **vitesse de phase** et la **vitesse de groupe**

$$k = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \text{ donc } \begin{cases} v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}} \\ v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m}} \end{cases}$$

Il y a donc dispersion avec **étalement du paquet d'ondes**.

- On identifie la vitesse de groupe à la vitesse de la particule

$$\begin{cases} v_g = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m}} \\ p = \hbar k \end{cases} \text{ donc } p = m v_g$$

- Comme en diffusion thermique, en diffusion de particules, en électricité, en mécanique des fluides, on peut définir un vecteur **densité de courant de probabilité**

$$\vec{J}(x, t) = \rho(x, t) \vec{v}_g(x, t) = \psi(x, t) \psi^*(x, t) \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$

↪ Exercices 21.4, 21.5.

Étudier une particule dans un potentiel constant par morceaux.

Soit une particule de masse m et d'énergie E dans un champ de force dérivant d'un potentiel constant par morceaux, dans une suite d'intervalles

$$\forall x \in [a_p, b_p], V(x) = V_p$$

Voici les règles de calcul pour déterminer les solutions stationnaires.

a) La pulsation ω vérifie l'équation de Planck-Einstein

$$E = \hbar\omega$$

b) On résout l'équation spatiale de Schrödinger dans chaque intervalle.

- Si $E > V_p$ alors

$$\varphi(x) = A_p e^{ikx} + B_p e^{-ikx} \text{ avec } k = \sqrt{\frac{2m(E - V_p)}{\hbar^2}}$$

- Si $E < V_p$ alors

$$\varphi(x) = A_p e^{\frac{x}{\delta}} + B_p e^{-\frac{x}{\delta}} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_p - E)}}$$

- Si $V_p = +\infty$ alors $\varphi(x) = 0$.

À ce stade, les inconnues sont les coefficients complexes A_p et B_p .

c) On écrit les **relations de continuité**. Soit x_p une abscisse de saut de potentiel.

- Il y a toujours continuité de φ en x_p

$$\varphi(x_p^-) = \varphi(x_p^+)$$

- Si la discontinuité $|V(x_p^+) - V(x_p^-)|$ est finie, il y a aussi continuité de la dérivée de φ en x_p .

$$\varphi'(x_p^-) = \varphi'(x_p^+)$$

d) La fonction densité linéique de probabilité vaut

$$\rho(x, t) = \psi(x, t) \cdot \psi^*(x, t) = e^{i\omega t} \varphi(x) \cdot e^{-i\omega t} \varphi^*(x)$$

$$\text{donc } \rho(x, t) = \rho(x) = \varphi(x) \varphi^*(x) = |\varphi(x)|^2$$

et la condition de normalisation s'écrit

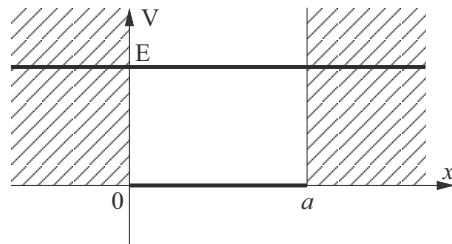
$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1$$

Cette intégrale est la somme des intégrales sur chaque intervalle.

Exemple :

Une particule d'énergie E est placée dans un **puits de potentiel rectangulaire infini**

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, a] \\ +\infty & \text{si } x < 0 \text{ ou si } x > a \end{cases}$$



a) La pulsation vaut $\omega = \frac{E}{\hbar}$.

b) Le terme spatial de la fonction d'onde vaut

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou si } x > a \end{cases}$$

c) Le saut de potentiel est infini en $x = 0$ et en $x = a$. On n'écrit donc que la continuité de φ , pas celle de sa dérivée.

$$\begin{cases} \varphi(x=0^-) = \varphi(x=0^+) \\ \varphi(x=a^-) = \varphi(x=a^+) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{ika} + Be^{-ika} = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} B = -A \\ 2iA \sin(ka) = 0 \end{cases}$$

Si $\sin(ka) \neq 0$, alors $A = 0$ donc $B = 0$, et la fonction d'onde est uniformément nulle, il y a absence de particule.

On exclut ce cas donc

$$\sin(ka) = 0 \text{ soit } ka = n\pi, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{ou } \frac{2\pi}{\lambda} a = n\pi \text{ soit } a = n \frac{\lambda}{2}$$

qui correspond à la quantification des longueurs d'onde d'une corde fixée à ses deux extrémités.

d) On en déduit

$$\varphi(x) = 2iA \sin(kx) = 2iA \sin \frac{n\pi x}{a} \text{ et } \rho(x) = |A|^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a}$$

On en déduit $|A|$ par la condition de normalisation, son argument ne pouvant être déterminé que grâce à la condition initiale.

↪ Exercices 21.6, 21.7, 21.8.

Étudier une particule dans un puits

Une particule d'énergie E placée dans un puits rectangulaire infini de largeur a possède une pulsation spatiale quantifiée, imposée par les conditions aux limites. On en déduit la quantification de l'énergie et de la quantité de mouvement

$$\begin{cases} ka = n\pi, n \in \mathbf{N} \\ k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ p = \frac{h}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \\ p_n = n \frac{h}{2a} \end{cases}$$

Pour $n = 1$, on en déduit deux propriétés quantiques importantes.

a) L'énergie minimale de la particule est l'**énergie de confinement**

$$\mathcal{E}_{\text{conf}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

b) Dans une interprétation classique, la particule est délocalisée et l'incertitude sur sa position est $\Delta x = a$; dans ce puits, elle effectue des allers-retours permanents entre les deux bords, sa quantité de mouvement est $\vec{p} = \pm \frac{h}{2a} \vec{u}_x$. L'incertitude sur la quantité de mouvement est donc l'écart entre les deux valeurs extrêmes

$$\Delta p = \left\| \left(\frac{h}{2a} \vec{u}_x \right) - \left(-\frac{h}{2a} \vec{u}_x \right) \right\| = \frac{h}{a}$$

On retrouve ainsi l'**inégalité de Heisenberg spatiale**

$$\Delta x \cdot \Delta p \simeq h \text{ donc } \Delta x \cdot \Delta p \geq h$$

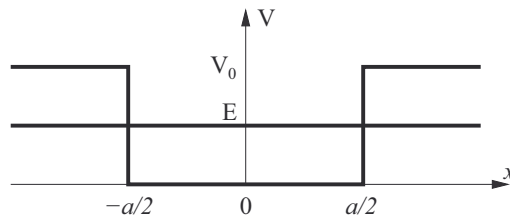
Le puits rectangulaire infini est un modèle peu réaliste. Pour un puits de profondeur finie, la fonction d'onde n'est pas rigoureusement nulle dans les domaines $x < 0$ et $x > a$. On observe alors des **ondes évanescentes** dans ces deux domaines, qui ont pour effet un **élargissement effectif** du puits de potentiel. L'incertitude spatiale est donc plus grande, et d'après l'inégalité de Heisenberg spatiale, si Δx croît, Δp décroît, donc p décroît, donc k décroît, donc $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ décroît. On retient donc les propriétés qualitatives

- **élargissement effectif** : la largeur effective du puits de profondeur finie est plus importante que celle du puits infini
- **abaissement des niveaux d'énergie** : l'énergie de confinement et les énergies quantifiées du puits de profondeur finie sont moins importantes que celles du puits infini.

Exemple :

Le plus simple des puits de potentiel de profondeur finie est le puits rectangulaire

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } x < -\frac{a}{2} \\ 0 & \text{si } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ V_0 & \text{si } x > \frac{a}{2} \end{cases} \quad \text{avec } 0 < E < V_0$$



Posons

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \quad \text{et} \quad \delta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}}$$

Les solutions stationnaires dans les trois domaines s'écrivent $\psi(x, t) = e^{-i\omega t} \varphi(x)$ avec

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_1 e^{\frac{x}{\delta}} + B_1 e^{-\frac{x}{\delta}} & \text{si } x < -\frac{a}{2} \\ A e^{ikx} + B e^{-ikx} & \text{si } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ A_2 e^{\frac{x}{\delta}} + B_2 e^{-\frac{x}{\delta}} & \text{si } x > \frac{a}{2} \end{cases}$$

La divergence des fonctions exponentielles conduit à prendre $B_1 = A_2 = 0$.

Cherchons les solutions paires φ_P en prenant $A = B$ et $A_1 = B_2$.

$$\varphi_P(x) = \begin{cases} B_2 e^{\frac{x}{\delta}} & \text{si } x < -\frac{a}{2} \\ A \cos(kx) & \text{si } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ B_2 e^{-\frac{x}{\delta}} & \text{si } x > \frac{a}{2} \end{cases}$$

La discontinuité de potentiel étant de hauteur finie en $x = \frac{a}{2}$, il y a continuité de φ et de sa dérivée φ' :

$$\begin{cases} A \cos \frac{ka}{2} = B_2 e^{-\frac{a}{2\delta}} \\ -kA \sin \frac{ka}{2} = -\frac{B_2}{\delta} e^{-\frac{a}{2\delta}} \end{cases} \quad \text{donc } \tan \frac{ka}{2} = \frac{1}{k\delta}$$

En utilisant les expressions de k et δ , et en élevant au carré, on en déduit

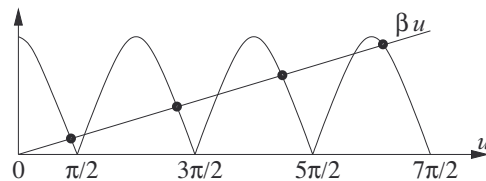
$$\begin{cases} \tan^2 \frac{ka}{2} = \frac{V_0 - E}{E} \\ \tan \frac{ka}{2} \geq 0 \end{cases} \quad \text{soit } \begin{cases} \sin^2 \frac{ka}{2} = \frac{V_0}{E} \cos^2 \frac{ka}{2} - \cos^2 \frac{ka}{2} \\ \tan \frac{ka}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \cos^2 \frac{ka}{2} = \frac{E}{V_0} = \frac{k^2}{k_0^2} \\ \tan \frac{ka}{2} \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} |\cos \frac{ka}{2}| = \frac{k}{k_0} \\ \tan \frac{ka}{2} \geq 0 \end{cases}$$

En posant $u = \frac{ka}{2}$ et $\beta = \frac{2}{ak_0}$, cette équation s'écrit

$$|\cos u| = \beta u \quad \text{avec } \tan u \geq 0$$

Cette équation se résout graphiquement en cherchant l'intersection entre les deux courbes.



Il y a donc un nombre fini de solutions paires du type

$$u_n \leq n \frac{\pi}{2} \quad \text{avec } n = 2N + 1, \quad N \in \mathbb{N}$$

$$\text{soit } k \leq n \frac{\pi}{a} \quad \text{donc } E \leq \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

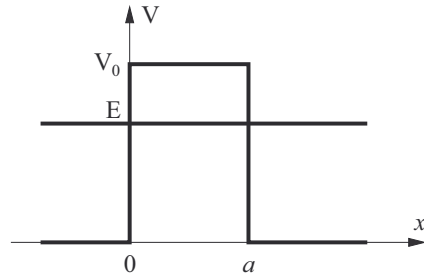
Ce qui prouve l'abaissement des niveaux d'énergie par rapport au puits infini.

↪ Exercices 21.9, 21.10.

Expliquer l'effet tunnel et la radioactivité alpha.

La **barrière de potentiel** est un cas particulier de potentiel constant par morceaux. Une particule de masse m et d'énergie $E < V_0$ subit un ensemble de forces dérivant du potentiel

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } \text{si } x > a \end{cases}$$



On parle de barrière car, en mécanique classique, il est impossible pour la particule de se trouver dans l'intervalle $[0, a]$ puisque son énergie E est inférieure à l'énergie potentielle V_0 , et l'énergie cinétique serait donc négative.

Les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger s'écrivent

$$\psi(x, t) = e^{-i\omega t} \varphi(x) \text{ avec } \varphi(x) = \begin{cases} A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & \text{si } x < 0 \\ A_2 e^{\frac{x}{\delta}} + B_2 e^{-\frac{x}{\delta}} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx} & \text{si } x > a \end{cases}$$

$$\text{avec } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \text{ et } \delta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}}$$

La détermination complète des six constantes d'intégration complexes est assez fastidieuse, et inutile pour expliquer qualitativement l'**effet tunnel** : Une particule incidente dans le demi-espace $x < 0$ donne naissance à une **onde évanescente** dans la zone $0 \leq x \leq a$, avec une **épaisseur de peau** δ .

- Si $a \gg \delta$, cette onde s'évanouit réellement et l'onde ne peut pas franchir la barrière.
- Si a est inférieur à environ 5δ , l'onde évanescente créée en $x = 0$ n'est pas nulle en $x = a$ et peut donner naissance à une onde progressive d'amplitude non nulle qui se propage dans le demi-espace $x > a$, la probabilité de franchissement de la barrière par la particule n'est pas nulle.

Le **coefficient de transmission** fourni par l'énoncé est le rapport entre les normes des vecteurs densité de courant de probabilité

$$T = \frac{\|\vec{J}(x > a)\|}{\|\vec{J}(x < 0)\|}$$

et peut être assimilé à la probabilité de traversée de la barrière.

On explique ainsi la **radioactivité alpha**. Un noyau instable est susceptible de libérer un noyau d'hélium, appelé particule alpha. Pour se libérer, cette particule doit vaincre les forces de cohésion du noyau, dont l'énergie potentielle associée forme une barrière de potentiel. Par effet tunnel, la probabilité de libération est donc celle de traversée de la barrière. On explique ainsi le caractère aléatoire du processus.

Exemple :

Une expression approchée du coefficient de transmission est

$$T = T_0 e^{-2\frac{a}{\delta}} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}}$$

Si un flot de particules d'énergie E aborde cette barrière, déterminons la valeur de a permettant de ne laisser passer qu'une particule sur un million par exemple.

$$T_0 e^{-2\frac{a}{\delta}} = 10^{-6} \text{ donc } -2\frac{a}{\delta} = \ln \frac{10^{-6}}{T_0} \text{ soit } a = \frac{\delta}{2} \ln(10^6 T_0)$$

$$\text{soit } a = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(V_0 - E)}} \ln(10^6 T_0)$$

↪ Exercices 21.11, 21.12, 21.13, 21.14.

Étudier les oscillations quantiques.

La superposition de deux états stationnaires **n'est pas** un état stationnaire. En particulier, deux solutions stationnaires d'énergies distinctes E_1 et E_2 sont associées à des pulsations différentes ω_1 et ω_2 . La densité linéique de probabilité de présence est alors la somme des densités de chaque état et d'un terme d'**oscillations quantiques** entre les deux états de pulsation

$$\omega_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

Cette relation fondamentale met en évidence la possibilité de **couplage** entre un atome à deux niveaux d'énergie et une onde électromagnétique de pulsation ω_{12} , à la base du phénomène d'émission stimulée étudié au chapitre 20.

Dans le respect du programme, l'étude est axée sur le cas d'un potentiel $V(x)$ pair. Voici la démarche du raisonnement.

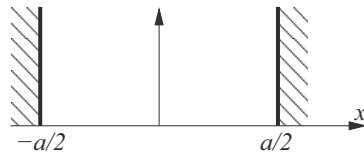
- L'étude mécanique d'un point matériel de masse m soumis à un ensemble particulier de forces conservatives permet d'exprimer l'énergie potentielle $E_p(x)$ dont leur somme dérive.
- On trace l'allure de son graphe et on le modélise par un champ de potentiel $V(x)$ constant par morceaux et pair.
- On cherche les deux états stationnaires **symétrique** (φ_P fonction paire) et **antisymétrique** (φ_I impaire). On calcule les énergies associées E_P et E_I .
- On en déduit la pulsation des oscillations quantiques

$$\omega_{PI} = \frac{|E_P - E_I|}{\hbar}$$

Exemple :

Considérons le puits infini rectangulaire défini par

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq \frac{a}{2} \\ +\infty & \text{si } |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$$



Les solutions stationnaires paires et impaires s'écrivent $\psi(x, t) = u(t)\varphi(x)$ avec respectivement

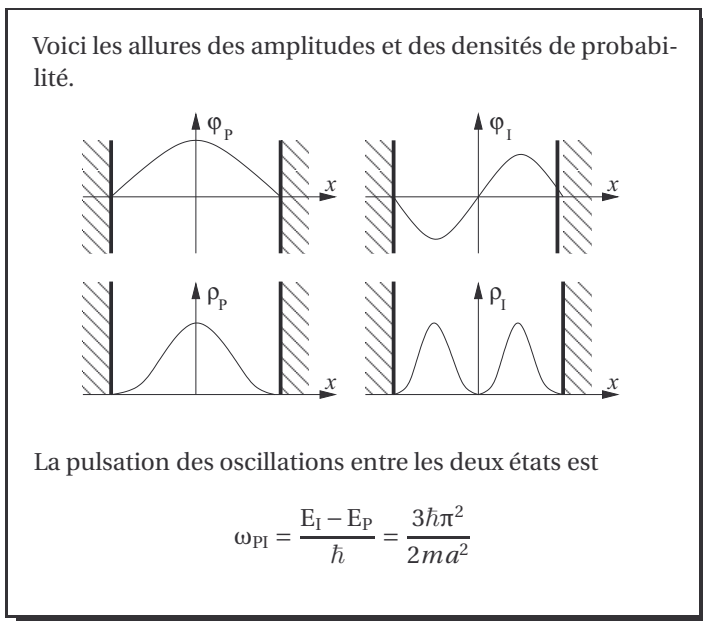
$$\begin{cases} \varphi_P(x) = A \cos(kx) \\ \varphi_I(x) = B \sin(kx) \end{cases} \quad \text{avec } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Les conditions aux limites donnent respectivement

$$\begin{cases} \cos \frac{k_P a}{2} = 0 \\ \sin \frac{k_I a}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} \frac{k_P a}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ \frac{k_I a}{2} = m\pi \end{cases}$$

En prenant $n = 0$ et $m = 1$, on en déduit les premiers états stationnaires

$$\begin{cases} \varphi_P(x) = A \cos \frac{\pi x}{a} & \text{avec } E_P = E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \\ \varphi_I(x) = B \sin \frac{2\pi x}{a} & \text{avec } E_I = E_2 = 4E_1 = \frac{2\hbar^2 \pi^2}{ma^2} \end{cases}$$



↪ Exercices 21.15, 21.16, 21.17.

Énoncés des exercices

21.1

Séparation des variables pour la solution stationnaire de l'équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger pour une particule de masse m soumise à un ensemble de forces dont la résultante dérive du potentiel énergétique indépendant du temps $V(x)$ s'écrit

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t)$$

On cherche une solution stationnaire sous la forme

$$\psi(x, t) = u(t) \cdot \varphi(x)$$

a) Donner les expressions des dérivées partielles

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}$$

en fonction de $u(t)$, $\varphi(x)$ et de leurs dérivées.

b) En déduire que l'équation de Schrödinger peut s'écrire sous la forme de l'égalité entre deux grandeurs homogènes à une énergie

$$A(t) = B(x)$$

c) En déduire les équations séparées vérifiées par $u(t)$ et $\varphi(x)$.

21.2**Particule libre sur un cercle**

On donne les expressions du Laplacien en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \text{ et } \Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Une particule de masse m est libre de se déplacer sur un cercle de rayon R . La position d'un point M est repérée par l'angle polaire θ .

- Par analogie avec l'équation de Schrödinger unidirectionnelle, proposer une équation indépendante du temps pour ce problème.
- Quelle condition aux limites peut-on proposer pour une fonction d'onde stationnaire ψ ?
- En déduire l'ensemble des solutions stationnaires $\psi_n(\theta)$ où n est un entier de quantification.

21.3**Particule dans un potentiel hyperbolique**

Une particule d'énergie E évolue dans un potentiel

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \leq 0 \\ -\frac{\lambda}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On donne, pour $\alpha > 0$:

$$\int_{x=0}^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

- Écrire l'équation de Schrödinger spatiale vérifiée par le terme $\varphi(x)$ de la solution stationnaire de pulsation ω .
- Chercher une solution du type

$$\varphi(x) = Cx e^{-kx}$$

Déterminer les expressions de k et de E correspondant à ce type de solution. Donner l'allure des profils énergétiques en traçant E et $V(x)$ sur le même graphe.

- Calculer la valeur de C , supposé réel positif.
- Calculer $\langle x \rangle$.

21.4**Normalisation d'un paquet d'ondes**

La superposition d'un nombre fini de fonctions d'ondes planes progressives monochromatiques, de vecteurs d'onde $k_1 \vec{u}_x, \dots, k_n \vec{u}_x$ et d'amplitudes complexes

$$\Psi_{01}, \dots, \Psi_{0n}$$

s'écrit sous la forme d'une **somme discrète**

$$\Psi(x, t) = \sum_{i=1}^n \Psi_{0i} e^{-i(\omega_i t - k_i x)}$$

Un paquet d'ondes possède un spectre continu dont la densité spectrale est $\alpha(k) = \frac{d\psi_0}{dk}$ et dont la fonction d'onde est une **somme intégrale**

$$\psi(x, t) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} d\psi(x, t) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} d\psi_0(k) e^{-i(\omega t - kx)} = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha(k) e^{-i(\omega t - kx)} dk$$

Un paquet d'ondes possède un profil spectral rectangulaire s'il possède un spectre continu dont la densité spectrale est constante sur un intervalle : $\alpha(k) = \alpha_0$ pour $k \in \left[k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2} \right]$ et nulle partout ailleurs. Δk est la **largeur spectrale** et on suppose que $\Delta k \ll k_0$.

- a) Pour $k = k_0$, donner l'expression de la pulsation $\omega(k = k_0) = \omega_0$ et de sa dérivée $v_g = \frac{d\omega}{dk}(k = k_0)$ en fonction de k_0 et de la masse m de la particule.
- b) On fait le développement limité au premier ordre

$$\omega(k) \simeq \omega_0 + \frac{d\omega}{dk} \cdot (k - k_0) = \omega_0 + v_g(k - k_0)$$

on pose $x = X + v_g t$ et $K = k - k_0$. Écrire la fonction d'onde sous la forme

$$\Psi(x, t) = \alpha_0 e^{-i\beta} \int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} e^{iKX} dK$$

où on donnera l'expression de β en fonction de X et de t .

- c) En calculant explicitement l'intégrale, montrer que

$$\psi(x, t) = \alpha_0 e^{-i\beta} \Delta k \operatorname{sinc} \frac{X \Delta k}{2} \text{ avec } \operatorname{sinc} u = \frac{\sin u}{u}$$

et en déduire l'expression de la densité linéique de probabilité $\rho(X)$.

- d) La fonction $\operatorname{sinc}^2 u$ passe par un maximum absolu égal à 1 pour $u = 0$. Expliquer pourquoi v_g est la vitesse de groupe.
- e) La fonction $\operatorname{sinc}^2 u$ s'annule pour $u = \pm\pi$ et elle est presque nulle en dehors de l'intervalle $[-\pi, \pi]$. En déduire la largeur ΔX du paquet d'ondes et vérifier l'inégalité d'Heisenberg spatiale.
- f) On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2 u du = \pi$. en déduire la valeur de la constante de normalisation α_0 .

21.5

Équation de conservation particulaire

Une particule de fonction d'onde complexe $\psi(x, t)$ et de densité linéique de probabilité $\rho(x, t) = \psi(x, t) \cdot \psi^*(x, t)$ vérifie l'équation de Schrödinger à une dimension dans le champ potentiel $V(x)$.

- a) Écrire l'équation de Schrödinger (E) vérifiée par ψ .
- b) Écrire l'équation combinaison linéaire (E') = $[\psi^* \cdot (E)] - [\psi \cdot (E)^*]$.
- c) On pose $J(x, t) = \frac{-i\hbar}{2m} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right]$. Traduire l'équation (E') en fonction de $\rho(x, t)$ et de $J(x, t)$.
- d) Justifier que pour une particule libre de pulsation ω $J(x, t)$ coïncide avec la densité de courant donnée par le cours.

21.6**Normalisation de la fonction d'onde dans un puits rectangulaire infini**

Une particule de masse m et d'énergie $E > 0$ est placée dans un puits de potentiel infini de largeur a . On a montré en cours que ses états stationnaires sont quantifiés par un entier naturel n non nul et que

$$\varphi(x) = 2iA \sin(kx)$$

où A est un complexe.

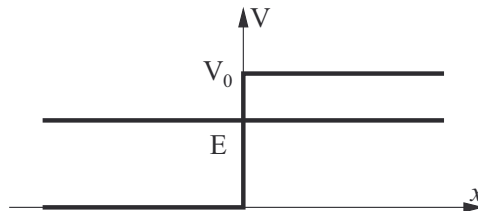
- Donner l'expression de la fonction d'onde $\psi(x, t)$. On prendra $\psi_0 = 1$.
- On pose $A = -i\alpha$ où α est un réel. Déterminer la valeur de α pour assurer la normalisation de la fonction d'onde.
- Représenter graphiquement $\varphi(x)$ et $\rho(x)$ pour $n = 2$.

21.7**Butée sur une marche de potentiel de hauteur supérieure à E**

Une **marche de potentiel** ($0 \rightarrow V_0$) est un potentiel stationnaire (indépendant du temps) défini par

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 > 0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

Une particule incidente de masse m bute sur cette marche de potentiel, c'est-à-dire qu'elle se propage dans le sens des x croissants, en venant de $-\infty$, avec une énergie $E < V_0$.



- Donner les solutions pour les termes spatiaux de la fonction d'onde $\varphi(x)$ pour les deux domaines $x < 0$ et $x > 0$, en fonction de 4 constantes d'intégration complexes, de la pulsation spatiale k et de l'épaisseur de peau δ définies par

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{et} \quad \delta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}}$$

- En déduire les fonctions d'onde $\psi(x, t)$ dans les deux domaines et justifier que l'une des constantes d'intégration est nulle.
- Écrire les relations de continuité en $x = 0$, en déduire deux relations entre les trois constantes restantes.
- Exprimer la densité de probabilité dans le domaine $x > 0$. Pourquoi sa non-nullité est-elle un phénomène purement quantique ?

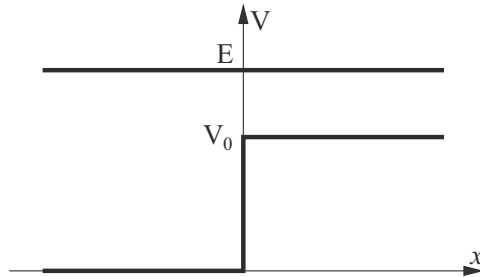
21.8

Réflexion et transmission sur une marche de potentiel de hauteur inférieure à E

Une **marche de potentiel** ($0 \rightarrow V_0$) est un potentiel stationnaire (indépendant du temps) défini par

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 > 0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

Une particule incidente de masse m aborde cette marche de potentiel, c'est-à-dire qu'elle se propage dans le sens des x croissants, en venant de $-\infty$, avec une énergie $E > V_0$.



- a) Donner les solutions pour les termes spatiaux de la fonction d'onde $\varphi(x)$ pour les deux domaines $x < 0$ et $x > 0$, en fonction de 4 constantes d'intégration complexes et des pulsations spatiales

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \text{ et } k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$$

- b) En déduire les fonctions d'onde $\psi(x, t)$ dans les deux domaines et justifier que l'une des constantes d'intégration est nulle.
 c) On définit les vecteurs densité de courant de probabilité associés aux trois termes restant, qu'on nomme respectivement

$$\vec{J}_i, \vec{J}_r \text{ et } \vec{J}_t$$

pour incident, réfléchi et transmis. Exprimer ces trois vecteurs en fonction des trois constantes restantes.

- d) En déduire les coefficients de réflexion et de transmission

$$R = \frac{\|\vec{J}_r\|}{\|\vec{J}_i\|} \text{ et } T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|}$$

en fonction de k_1 et k_2 .

- e) Donner le sens physique de R et T, donner et interpréter la relation algébrique très simple qui les lie.
 f) Calculer R et T si $V_0 = \frac{E}{2}$.

21.9**Potentiel harmonique**

Une particule de masse m se déplaçant sur l'axe (O, x) a pour fonction d'onde

$$\psi(x, t) = A \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar} - i\frac{\omega_0}{2}t\right)$$

On donne, pour $\alpha > 0$:

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \text{ et } \int_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$$

- Préciser les dimensions de A et ω_0 .
- Déterminer les valeurs possibles pour A .
- Déterminer l'énergie de la particule.
- Déterminer le potentiel $V(x)$ associé à la fonction d'onde proposée.
- On prépare N particules, avec $N \gg 1$, dans cet état et on mesure pour chacune d'elles l'abscisse x . Exprimer la valeur moyenne $\langle x \rangle$ de ces mesures.
- Même question pour $\langle \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \rangle$.

21.10**Puits semi-infini**

Une particule de masse m est placée dans un champ énergétique de potentiel

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } x < 0 \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ V_0 > 0 & \text{pour } x > a \end{cases}$$

On cherche une solution stationnaire d'énergie E de l'équation de Schrödinger et on suppose que $0 < E < V_0$. On pose

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \text{ et } \delta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}}$$

a) Justifier qu'on peut chercher le terme spatial de la fonction d'onde sous la forme

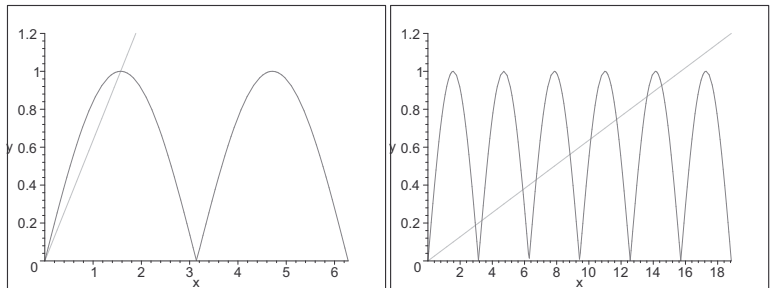
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ A_2 e^{-\frac{x}{\delta}} + B_2 e^{\frac{x}{\delta}} & \text{pour } x > a \end{cases}$$

b) Justifier que $B_2 = 0$.

c) Par application des conditions de continuité, écrire le système de trois équations vérifiées par A_1 , A_2 et B_1 .

d) En éliminant ces trois constantes entre les équations, établir la relation entre k , a et δ . Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme $|\sin(ka)| = \frac{k}{k_0}$ avec $\tan(ka) < 0$.

e) Cette équation se résout graphiquement. Voilà l'allure des fonctions $|\sin(x)|$ et $\frac{x}{\beta}$ pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et pour $\beta = 5\pi$:



En déduire que :

- si $k_0 < \frac{\pi}{2a}$, le problème n'a pas de solution stationnaire ;
- si $k_0 > \frac{\pi}{2a}$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour l'énergie et le problème est quantifié ;
- si $k_0 \gg \frac{\pi}{2a}$, on retrouve la quantification du puits infini.

21.11

Expression du coefficient de transmission dans l'effet tunnel

Le coefficient de transmission d'une particule d'énergie $E > 0$ à travers une barrière de potentiel de hauteur $V_0 > E$ et de largeur a est

$$T = \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2 \text{sh}^2(k_2 a) + 4k_1^2 k_2^2} \text{ avec } \begin{cases} k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \end{cases}$$

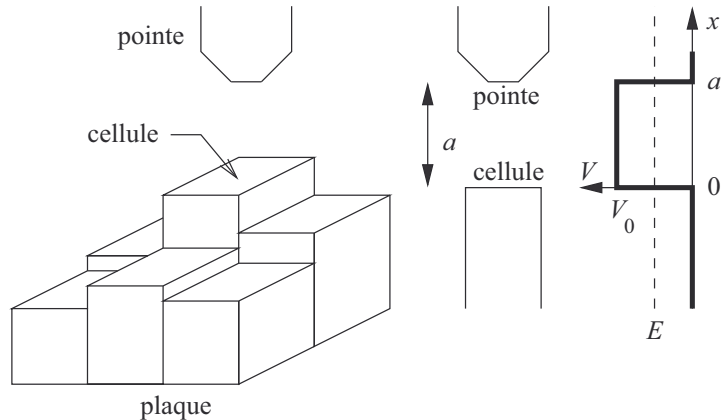
a) Que représente la grandeur $\frac{1}{k_2}$?

b) Justifier que la barrière est pratiquement infranchissable si elle est très haute ($V_0 \rightarrow +\infty$) ou si elle est très large ($a \rightarrow +\infty$).

c) Si E est de l'ordre de grandeur de V_0 et $a \gg \frac{1}{k_2}$, montrer que $T \approx T_0 e^{-2k_2 a}$.

21.12**Microscope à effet tunnel**

À l'échelle nanoscopique, la surface d'une plaque métallique possède un relief très tourmenté. On dessine un carré de 10 nanomètres de côté et on le subdivise en cent cellules de 1 nanomètre de côté. Le relief du grand carré pourra être reconstitué si on peut mesurer l'altitude moyenne de chaque cellule, mesurée par rapport à une altitude de référence. Pour cela, on déplace une pointe très fine à une altitude parfaitement constante au dessus de chaque cellule et on cherche à mesurer la distance a entre la cellule et la pointe.



La plaque et la pointe sont au potentiel **électrique** nul $U = 0$ et l'espace vide qui les sépare au potentiel $U = U_0$. La masse d'un électron est $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, sa charge est $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Son énergie E est de l'ordre de grandeur de $k_B T$ (où $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K⁻¹ est la constante de Boltzmann et $T \approx 300$ K).

- À quelle condition le système {cellule, pointe} est-il assimilable à une barrière de potentiel **énergétique** ? On notera désormais $V_0 = eU_0$.
- Le coefficient de transmission des électrons de la cellule vers la pointe vaut

$$T = T_0 e^{-\frac{2a}{\delta}} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}}$$

On suppose que E est du même ordre de grandeur que V_0 ; calculer l'ordre de grandeur de a qui permet de distinguer nettement les valeurs des altitudes des différentes cellules.

- Pourquoi un courant électrique peut-il être détecté dans la pointe ?
- Comment la mesure de ce courant donne-t-elle accès au relief de la plaque ? Faire une réponse en cinq lignes ou sous la forme d'un diagramme explicatif.
- Un dépôt a été réalisé sur une partie de plaque parfaitement plane. En déplaçant la pointe en différents points de la surface de la plaque, on mesure une intensité du courant maximale supérieure de 19% à l'intensité minimale. Quelle est l'épaisseur du dépôt si on prend $\delta = 10$ nm ?

21.13

Radioactivité α

Un atome d'hélium 4 est constitué d'un noyau formé de deux protons et de deux neutrons, et d'un nuage électronique formé de deux électrons. La radioactivité α est l'émission par un atome d'un noyau d'hélium ; la radioactivité β^- est l'émission d'un électron. On donne $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, $M_{He} = 4,00 \cdot 10^{-3}$ kg·mol⁻¹, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J·s, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ J·s.

a) **Approximation WKB.** On considère une barrière de potentiel non uniforme :

$$\forall x \in [a, b], E \leq V(x) \text{ avec } V(a) = V(b)$$

On cherche une solution de l'équation spatiale de Schrödinger sous la forme

$$\varphi(x) = f(x)e^{i\theta(x)}$$

L'approximation **Wentzel, Kramer, Brillouin** consiste à négliger le terme $f''(x)$ devant les autres termes dans l'équation.

i) Montrer que

$$f(x)\theta''(x) + 2f'(x)\theta'(x) = 0 \text{ et } \theta'^2(x) = \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2}$$

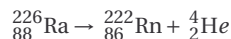
ii) On pose $\theta(x) = i\alpha(x)$ où $\alpha(x)$ est une fonction réelle de x . En déduire que

$$\varphi(x) = \varphi_0 [V(x) - E]^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha(x)} \text{ avec } \alpha(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{2m(V(u) - E)}{\hbar^2}} du$$

iii) Montrer que le coefficient de transmission est donné par

$$T = \left| \frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} \right|^2 = e^{-2 \int_a^b \sqrt{\frac{2m(V(u) - E)}{\hbar^2}} du}$$

b) **Radioactivité α .** On considère la réaction suivante



Les termes radium (Ra), radon (Rn) et radioactivité ont la même racine étymologique. La particule alpha est le noyau d'hélium. On considère un modèle simple où cette particule est attachée au noyau par une force électromagnétique, et peut s'en détacher à condition qu'il franchisse la barrière de potentiel dont la forme mathématique est

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } r < R \\ \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{si } r > R \end{cases} \text{ avec } Z = 88$$

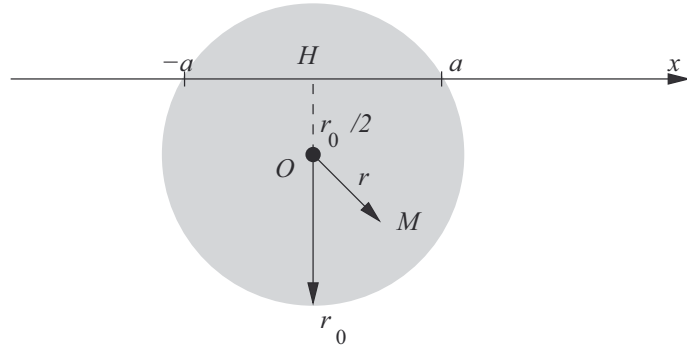
- i) Expliquer la forme proposée pour $V(r)$ et tracer l'allure de cette fonction pour $r > 0$.
- ii) L'énergie de la particule α est $E \in]0, \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 R}[$. Expliquer par quel effet elle peut se libérer de l'atome de radium et expliquer en quelques mots comment on pourrait calculer la probabilité de libération grâce à l'approximation WKB.

21.14**Effet Ramsauer**

La vapeur d'hélium peut être, dans certaines conditions, parfaitement transparente à un faisceau d'électrons : c'est l'effet Ramsauer dont on veut donner un modèle quantique simplifié.

Première partie : étude du profil énergétique.

On assimile l'atome d'hélium à un noyau ponctuel immobile en O de charge $2e$ au centre d'un nuage électronique sphérique de rayon r_0 et de densité volumique de charge uniforme $\rho_0 = \frac{-2e}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$.



- a) Par application du théorème de Gauss, montrer que le champ électrique en un point M à la distance r de O vaut

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r \text{ avec } E(r) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r \geq r_0 \\ \frac{e}{2\pi\epsilon_0 r_0^2} \left[\frac{r_0^2}{r^2} - \frac{r}{r_0} \right] & \text{si } r \leq r_0 \end{cases}$$

- b) En déduire le potentiel électrique $U(r)$ en prenant un potentiel nul à l'infini et en assurant sa continuité en $r = r_0$. On donne en coordonnées sphériques $\vec{\text{grad}} U(r) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r$.
- c) Un électron provient de $x = -\infty$ sur un axe (H, x) où H est situé à l'intérieur du nuage électronique, à la distance $\text{OH} = \frac{r_0}{2}$ du noyau. Donner l'expression de son énergie potentielle $V(x) = -eU(x)$ en distinguant $x < -a$, $x \in [-a, a]$ et $x > a$, où on précisera l'expression de a en fonction de r_0 .
- d) Tracer l'allure de $V(x)$ (l'étude de la fonction n'est pas demandée, on pourra se contenter de reproduire la courbe obtenue à la machine).

Deuxième partie : calcul du coefficient de réflexion.

On modélise le potentiel énergétique $V(x)$ de la question précédente par un potentiel constant par morceaux :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -a \\ -V_0 & \text{si } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

On braque dans la direction et le sens de \vec{u}_x un faisceau d'électrons de masse m , de vitesse v d'énergie $E = \frac{1}{2}mv^2 > 0 > -V_0$. On pose

$$k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}} \text{ et } K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

- a) Dans la zone $[-a, a]$ (où le potentiel est constant égal à $-V_0$), on cherche une solution stationnaire de l'équation de Schrödinger sous la forme

$$\Psi(x, t) = u(t) \cdot \varphi(x)$$

Établir l'expression de $u(t)$ (on précisera la relation entre ω et E) et l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\varphi(x)$.

- b) Justifier en quelques mots qu'on peut prendre

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_1 e^{iKx} + B_1 e^{-iKx} & \text{si } x < a \\ A_2 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx} & \text{si } -a \leq x \leq a \\ A_3 e^{iKx} & \text{si } x > a \end{cases}$$

- c) Écrire le système d'équations liant les différents coefficients complexes.
 d) On note les vecteurs courants de densité de probabilité

$$\vec{J}_i = |A_1|^2 \frac{\hbar K}{m} \vec{u}_x, \quad \vec{J}_r = -|B_1|^2 \frac{\hbar K}{m} \vec{u}_x, \quad \text{et } \vec{J}_t = |A_3|^2 \frac{\hbar K}{m} \vec{u}_x$$

Et on définit les coefficients de réflexion et de transmission

$$R = \frac{\|\vec{J}_r\|}{\|\vec{J}_i\|} \quad \text{et} \quad T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|}$$

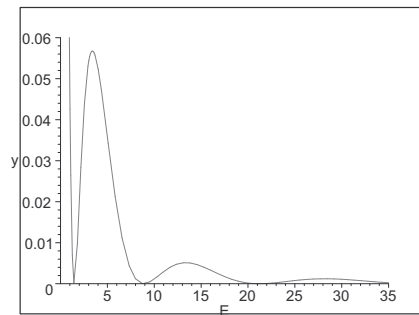
Quel est le sens physique de T et de R et quelle est la relation qui les lie ?

Troisième partie : effet Ramsauer.

Pour la suite, on **admet** les expressions suivantes (le lecteur intéressé pourra les établir)

$$R = \frac{\beta^2 \sin^2(2ka)}{1 + \beta^2 \sin^2(2ka)} \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{1 + \beta^2 \sin^2(2ka)} \quad \text{avec } \beta = \frac{k_0^2}{2kK}$$

Voici l'allure des variations de R (noté y sur le graphe) avec E (on a pris $V_0 = 1$, $a = 1$ et $\frac{2m}{\hbar^2} = 1$) :



- a) Pour quelles valeurs de E , R s'annule-t-il ? Est-ce cohérent avec la courbe donnée ?
 b) En quoi les résultats obtenus prouvent-ils l'effet Ramsauer ?
 c) Donner l'expression de la vitesse minimale v qu'il faut donner aux électrons pour observer cet effet.

21.15**Oscillations quantiques entre deux états**

Une particule possède deux états stationnaires d'énergies respectives E_1 et E_2 .

- Donner les pulsations correspondantes ω_1 et ω_2 .
- Exprimer les fonctions d'onde correspondantes en notant $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ les termes spatiaux associés.
- Exprimer les densités de probabilité $\rho_1(x)$ et $\rho_2(x)$ correspondantes.
- On pose

$$\Phi(x) = \varphi_1(x)\varphi_2^*(x) = r(x)e^{i\theta(x)}$$

Donner l'expression de la densité $\rho(x, t)$ de la superposition des deux ondes en fonction de $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$, $r(x)$, $\theta(x)$, E_1 et E_2 . En déduire la pulsation ω_{12} .

21.16**Superposition dans un puits**

On considère la superposition de deux états d'une particule dans un puits infini de largeur a :

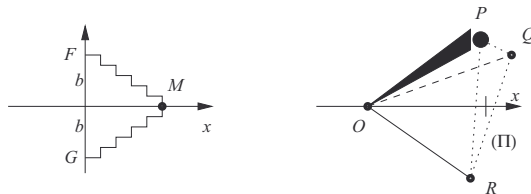
$$\psi(x, t) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + A_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}} \text{ avec } E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

- Une particule de masse m et d'énergie $E > 0$ est placée dans un puits infini de potentiel situé entre $x = 0$ et $x = a$. En cherchant une solution stationnaire $\psi(x, t) = \varphi(x) \cdot u(t)$, montrer que son énergie est quantifiée et justifier l'expression proposée pour E_n .
- Établir la relation entre A_1 et A_2 .
- Pour la suite, on prendra $A_1 = A_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}$, vérifier que ces valeurs conviennent.
- Représenter $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ pour des valeurs de t bien choisies.
- Quelle est la période T des oscillations quantiques ?
- Calculer et commenter le produit $\Delta E \times T$ où ΔE est l'incertitude sur l'énergie.

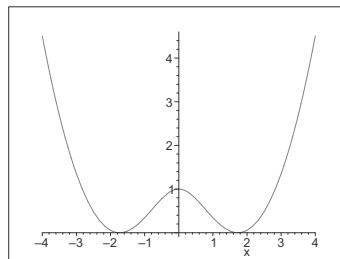
21.17**Système à double puits, oscillations quantiques**

Le modèle mécanique (1) modélise le système quantique (2) :

- un mobile ponctuel M de masse m se déplace sans frottement sur un axe (O, x) horizontal ; il est relié à deux ressorts identiques de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , dont les extrémités sont fixes en F et G distantes de $FG = 2b$ avec $b < \ell_0$;
- une molécule est modélisée par une structure pyramidale dans laquelle l'atome central est fixe en O , d'axe (O, x) et les trois atomes P , Q et R se déplacent en restant coplanaires, dans un plan Π d'abscisse x ; lorsque x change de signe, le mouvement conjoint des trois atomes évoque le retournement d'un parapluie ; la molécule d'ammoniac NH_3 est un bon représentant de ce modèle.



Question préliminaire : donner l'expression de l'énergie potentielle élastique $V(x)$ du système (1) en fonction de la variable x . La courbe représentative de $V(x)$ est la suivante :



On suppose que cette fonction représente correctement le potentiel énergétique dans le système (2) et on le modélise par le potentiel continu par morceaux suivant :

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } x < -3a \text{ ou } x > 3a \\ 0 & \text{pour } x \in [-3a, -a] \cup [a, 3a] \\ V_0 & \text{pour } x \in]-a, a[\end{cases}$$

On considère une particule de masse m et d'énergie $E > 0$. On pose $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et $\delta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}}$. On suppose enfin que $E \ll V_0$ ce qui entraîne que $k\delta = \sqrt{\frac{E}{V_0 - E}} \ll 1$.

- Comment peut-on expliquer que la particule puisse passer des valeurs de x négatives à des valeurs de x positives, et réciproquement ?
- On cherche les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger sous la forme $\psi(x, t) = \psi_0 \varphi(x) \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$ où $\varphi(x)$ est une fonction de x à valeurs réelles. Justifier que $\rho(x) = \psi(x, t) \cdot \psi^*(x, t)$ est une fonction paire. En déduire que $\varphi(x)$ est une fonction impaire qu'on notera φ_i ou paire qu'on notera φ_p .
- On propose les solutions suivantes

x	$[-3a, a]$	$] -a, a[$	$[a, 3a]$
$\varphi_i(x)$	$-I \sin[k_i(3a + x)]$	$I_0 \text{sh} \frac{x}{\delta_i}$	$I \sin[k_i(3a - x)]$
$\varphi_p(x)$	$P \sin[k_p(3a + x)]$	$P_0 \text{ch} \frac{x}{\delta_p}$	$P \sin[k_p(3a - x)]$

Vérifier ou traduire les conditions aux limites en $x = a$ et en $x = 3a$. En déduire que

$$\tan(2k_i a) = -k_i \delta_i \text{th} \frac{a}{\delta_i} \text{ et } \tan(2k_p a) = -k_p \delta_p \text{coth} \frac{a}{\delta_p}$$

- Expliquer pourquoi ces deux équations définissent deux énergies distinctes E_p et E_i .
- Ces équations peuvent être résolues graphiquement par tracé sur un même graphique des fonctions tangente, tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique pondérées par le coefficient $k\delta$. Elles se croisent au voisinage de $ka = \frac{\pi}{2}$; à quelle énergie E_0 cette égalité correspond-elle ?
- Les valeurs approchées de E_p et de E_i sont très proches l'une de l'autre, et très proches de E_0 . Donner l'allure des courbes représentatives des fonctions $\varphi_i(x)$ et $\varphi_p(x)$.

g) On considère maintenant les superpositions de deux états stationnaires :

$$\Psi_G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_p(x, t) - \psi_i(x, t)] \text{ et } \Psi_D(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_p(x, t) + \psi_i(x, t)]$$

Si on fait l'approximation $E_i = E_p$, montrer qu'on définit ainsi deux ondes stationnaires. Tracer dans ce cas l'allure des fonctions spatiales $\varphi_G(x)$ et $\varphi_D(x)$ associées, puis celle des densités linéiques $\rho_G(x)$ et $\rho_D(x)$. Expliquer les indices G et D choisis. Expliquer le choix du coefficient $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

h) E_i et E_p sont légèrement différentes : $E_i - E_p = \delta E \ll E_0$. Exprimer la fonction densité linéique $\rho(x, t)$ en fonction de $\rho_G(x)$ et $\rho_D(x)$ et mettre en évidence un phénomène quantique qu'on peut nommer « oscillations de retournement ». Exprimer la pulsation de ces oscillations en fonction de δE .

Du mal à démarrer ?

21.1 La méthode de séparation des variables nécessite d'isoler les termes en t d'un côté, ceux en x de l'autre, puis on identifie ces deux termes à une même constante.

21.2 On identifie $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ au laplacien, qu'on exprime pour $\varphi(\theta)$. Sur un cercle, on a une périodicité de période angulaire 2π .

21.3 La solution proposée doit être injectée dans l'équation de Schrödinger spatiale, et par identification, on en déduit E et k . La condition de normalisation permet de calculer C .

21.4 Les questions (a), (b) et (c) sont bien guidées. Pour la question (d), le pic de probabilité correspond au maximum de la fonction \sin^2 . Pour la question (e), la largeur du paquet est définie par les deux annulations de part et d'autre du maximum de la fonction \sin^2 .

21.5 Tous les calculs se ramènent à des combinaisons linéaires et à des conjuguations de grandeurs complexes.

21.6 La normalisation de la fonction d'onde nécessite le calcul de l'intégrale d'une fonction sinus carré, qu'on linéarise, et le résultat se simplifie grâce à la relation de quantification dans le puits.

21.7 Les solutions dans les deux domaines sont des combinaisons linéaires d'exponentielles complexes là où l'énergie est supérieure au potentiel, d'exponentielles réelles là où l'énergie est inférieure au potentiel. La divergence de l'une des exponentielles réelles quand $x \rightarrow +\infty$ permet d'annuler l'une des constantes. La discontinuité du potentiel en $x = 0$ étant finie, il y a continuité de φ et de φ' .

21.8 Les équations de Schrödinger spatiales sont du type oscillateur harmonique pour $x < 0$ et pour $x > 0$. Les solutions font donc apparaître deux sommes d'exponentielles complexes, et quatre constantes d'intégration. Celle qui est nulle est celle qui correspond à une onde venant de $+\infty$. Les continuités en $x = 0$ permettent dans un premier temps d'exprimer les coefficients de réflexion (r) en amplitude et de transmission (t) en amplitude. On en déduit R et T .

21.9 La condition de normalisation permet de calculer $|A|$. L'identification de la formule de Planck-Einstein donne E . L'introduction de la solution proposée dans l'équation de Schrödinger donne l'expression de $V(x)$. Le calcul des valeurs moyennes est assimilable à un calcul d'espérance mathématique.

21.10 Les relations de continuité donnent un système de relations qu'on combine pour éliminer les constantes d'intégration, on en déduit une relation entre k , δ et a . En élevant cette relation au carré, en utilisant les formules de trigonométrie et les expressions de k et de δ , on en déduit l'équation qui définit k . Cette équation est résolue de façon graphique.

21.11 Toutes les questions peuvent être traitées en utilisant les limites et équivalents des fonctions exponentielles. On rappelle que $\text{sh } u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$.

21.12 La traversée par l'électron de la barrière de potentiel par effet tunnel est régie par une loi statistique. Le nombre d'électrons qui passent est proportionnel à T , et ce nombre donne directement l'intensité du courant électrique. On en déduit que i dépend de la distance entre la pointe et la plaque, on peut donc reconstituer le relief de la plaque grâce à la saisie des valeurs de i .

21.13 En injectant la solution proposée, et en identifiant les coefficients de i d'une part, les autres d'autre part, on en déduit un système d'équations en f et en θ . Leur intégration donne l'expression attendue.

21.14 La première partie est un simple exercice d'électrostatique. L'allure du potentiel évoque bien un puits de profondeur finie. Dans la deuxième partie, les solutions en exponentielles complexes donnent des relations de continuité symétriques en $x = \pm a$. Les coefficients R et T peuvent être interprétés comme des probabilités dont la somme vaut 1. La troisième partie est une exploitation graphique des résultats.

21.15 Le développement de la densité de probabilité associée à la somme des deux ondes fait apparaître deux termes carrés (ρ_1 et ρ_2) et deux termes rectangles qui se simplifient grâce à l'introduction de $r(x)$ et $\theta(x)$.

21.16 La question (a) est une question de cours. La normalisation donne une relation entre A_1 et A_2 , il est inutile de chercher à la réduire à la question (b). À la question (c), on vérifie que les valeurs proposées conviennent, il faut pour cela calculer trois intégrales de fonctions trigonométriques.

21.17 Les relations de continuité donnent des relations entre sinus, sinus hyperbolique, cosinus et cosinus hyperbolique. On en déduit les relations demandées. La fin de l'exercice nécessite l'utilisation d'un outil de tracé de fonctions.

Corrigés des exercices

21.1

a) Les dérivées partielles s'écrivent

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = u'(t)\varphi(x) \text{ et } \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = u(t)\varphi''(x)$$

b) En remplaçant dans l'équation de Schrödinger

$$i\hbar u'(t)\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} u(t)\varphi''(x) + V(x)u(t)\varphi(x)$$

En divisant par $\psi(x, t) = u(t)\varphi(x)$

$$i\hbar \frac{u'(t)}{u(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m\varphi(x)}\varphi''(x) + V(x)$$

qui est bien du type $A(t) = B(x)$.

c) Si on dérive cette dernière égalité par rapport au temps, puis par rapport à x , on obtient

$$\begin{cases} A'(t) = 0 \\ B'(x) = 0 \end{cases} \text{ donc } A(t) = \text{cste} = B(x)$$

Comme $B(x)$ est homogène à $V(x)$, il est homogène à une énergie et on identifie la constante à l'énergie de la particule E . On en déduit les deux équations données dans le cours

$$\begin{cases} i\hbar \frac{u'(t)}{u(t)} = E \\ -\frac{\hbar^2}{2m\varphi(x)}\varphi''(x) + V(x) = E \end{cases}$$

21.2

a) L'équation de Schrödinger spatiale unidimensionnelle s'écrit, pour une particule libre ($V(x) = 0$) :

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$$

$$\text{soit } \Delta\varphi(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$$

Pour la particule sur un cercle, on écrit donc par analogie

$$\frac{1}{R^2} \frac{d^2\varphi(\theta)}{d\theta^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(\theta) = 0$$

b) Par périodicité, $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$.

c) L'équation se résout en

$$\varphi(\theta) = A \cos\left(\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}\theta + \alpha\right)$$

La condition aux limites donne

$$\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}} \cdot 2\pi = n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc } \frac{2mR^2E}{\hbar^2} = n^2 \text{ et } \varphi_n(\theta) = A_n \cos(n\theta + \alpha_n)$$

$$\text{donc } \psi_n(\theta, t) = A_n e^{-i\omega_n t} \cos(n\theta + \alpha_n)$$

On pourrait déterminer A_n par normalisation de la fonction d'onde sur $\theta \in [0, 2\pi]$.

21.3

a) D'après le cours,

$$\varphi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\varphi(x) = 0$$

b) On vérifie que $\varphi(0) = 0$, conformément à la loi de continuité de φ en $x = 0$. Calculons la dérivée seconde de φ :

$$\varphi'(x) = C e^{-kx} - k C x e^{-kx}$$

$$\varphi''(x) = -2k C e^{-kx} + k^2 C x e^{-kx}$$

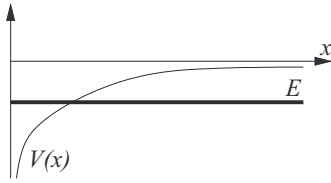
et on injecte dans l'équation spatiale

$$-2k C e^{-kx} + k^2 C x e^{-kx} + \frac{2mE}{\hbar^2} C x e^{-kx} + \frac{2m\lambda}{\hbar^2} C e^{-kx} = 0$$

soit, après simplification et identification

$$\begin{cases} E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ k = \frac{\lambda m}{\hbar^2} \end{cases}$$

c) L'énergie est donc négative, et le profil énergétique est le suivant :



La condition de normalisation donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, t) \Psi^*(x, t) dx = 1$$

Comme C est réel, $\varphi(x)$ aussi ; de plus, φ est nulle pour $x < 0$, donc

$$\int_{x=0}^{+\infty} \varphi^2(x) dx = 1$$

$$\text{soit } \int_{x=0}^{+\infty} C^2 x^2 e^{-2kx} dx = C^2 \frac{2!}{(2k)^3} = \frac{C^2}{4k^3} = 1$$

$$\text{donc } C = 2k^{\frac{3}{2}}$$

d) La valeur moyenne est

$$\langle x \rangle = \int_{x=-\infty}^{+\infty} x \rho(x) dx = \int_{x=0}^{+\infty} C^2 x^3 e^{-2kx} dx = \frac{3! C^2}{(2k)^4} = \frac{3}{2k}$$

21.4

a) La relation de dispersion s'écrit

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2 \text{ donc } \omega_0 = \frac{\hbar k_0^2}{2m}$$

La vitesse de groupe s'obtient en dérivant la relation de dispersion :

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar}{m} k \text{ donc } v_g = \frac{\hbar k_0}{m}$$

b) La fonction $\alpha(k)$ est égale à la constante α_0 dans l'intervalle $\left[k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2} \right]$, nulle partout ailleurs. Exprimons l'intégrale, limitée à cet intervalle, en remplaçant k et x par les expressions fournies par l'énoncé :

$$\Psi(x, t) = \int_{k=k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} \alpha_0 e^{-i(\omega_0 t + v_g k t - v_g k_0 t - kX - kv_g t)} dk$$

$$\Psi(x, t) = \alpha_0 \int_{k=k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} e^{-i(\omega_0 t - v_g k_0 t - kX)} dk$$

Effectuons le changement de variable d'intégration proposé par l'énoncé $K = k - k_0$ donc $k = K + k_0$ et $dk = dK$:

$$\Psi(x, t) = \alpha_0 \int_{K=-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} e^{-i(\omega_0 t - v_g k_0 t - KX - k_0 X)} dK$$

$$\Psi(x, t) = \alpha_0 e^{-i((\omega_0 - v_g k_0)t - k_0 X)} \int_{K=-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} e^{iKX} dK$$

On retrouve donc bien la formule donnée par l'énoncé avec $\beta = (\omega_0 - v_g k_0)t - k_0 X$.

c) Le calcul de l'intégrale est simple :

$$I = \int_{K=-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} e^{iKX} dK = \left[\frac{1}{iX} e^{iKX} \right]_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}}$$

$$\text{soit } I = \frac{e^{iX\frac{\Delta k}{2}} - e^{-iX\frac{\Delta k}{2}}}{iX} = \frac{2i \sin \frac{X\Delta k}{2}}{2i\frac{X\Delta k}{2}} \cdot \Delta k$$

$$\text{soit } I = \Delta k \cdot \text{sinc} \frac{X\Delta k}{2} \text{ donc } \Psi(x, t) = \alpha_0 e^{-i\beta} \Delta k \text{ sinc} \frac{X\Delta k}{2}$$

qui est bien la forme attendue. La densité linéique de probabilité est, par définition :

$$\rho(x, t) = \Psi(x, t) \cdot \Psi^*(x, t) = \alpha_0^2 \Delta k^2 \text{ sinc}^2 \frac{X\Delta k}{2}$$

d) Le pic de probabilité correspond au maximum de $\rho(x, t)$, et est donc atteint, à la date t , lorsque $X = 0$ (maximum de la fonction sinus cardinal carré), soit

$$x - v_g t = 0 \text{ soit } x = v_g t$$

v_g est donc la vitesse de déplacement du maximum de la fonction ρ , c'est donc celle de déplacement du paquet d'onde, ce qui est bien la définition de la vitesse de groupe.

e) Les bords de l'enveloppe délimitant le paquet d'ondes sont obtenus pour

$$\frac{X\Delta k}{2} = \pm \pi \text{ soit } X = \pm \frac{2\pi}{\Delta k}$$

La largeur du paquet est donc

$$\Delta X = \frac{2\pi}{\Delta k} - \left(-\frac{2\pi}{\Delta k} \right) = \frac{4\pi}{\Delta k} \text{ donc } \Delta X \cdot \Delta k = 4\pi$$

Or $\Delta k = \frac{\Delta p}{\hbar}$ donc

$$\Delta X \cdot \frac{\Delta p}{\hbar} = 4\pi \text{ soit } \Delta X \cdot \Delta p = 2\hbar$$

qui est conforme à l'inégalité d'Heisenberg spatiale (on rappelle que \hbar n'est que l'ordre de grandeur du produit, et le coefficient 2 n'est donc pas gênant.

f) La condition de normalisation s'écrit

$$\int_{X=-\infty}^{+\infty} \psi(X, t) dX = 1 \text{ soit } \int_{X=-\infty}^{+\infty} \alpha_0^2 \Delta k^2 \operatorname{sinc}^2 \frac{X\Delta k}{2} dX = 1$$

Effectuons le changement de variable $u = \frac{X\Delta k}{2}$ soit $X = \frac{2u}{\Delta k}$ et $dX = \frac{2}{\Delta k} du$. La condition de normalisation s'écrit donc

$$\alpha_0^2 \Delta k^2 \int_{X=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2 u \cdot \frac{2}{\Delta k} du = 1$$

et en utilisant le résultat donné par l'énoncé :

$$\alpha_0^2 \Delta k^2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{\Delta k} = 1 \text{ donc } \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta k}}$$

21.5

a) D'après le cours :

$$(E) : i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t)$$

b) Les deux termes de la combinaison linéaire s'écrivent :

$$[\psi^* \cdot E] : \psi^* \left[i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = -\psi^* \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi\psi^*$$

$$[\psi \cdot E^*] : \psi \left[-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] = -\psi \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V(x)\psi\psi^*$$

La soustraction des deux relations donne

$$(E') : i\hbar \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right]$$

c) Calculons la dérivée temporelle de ρ et la dérivée spatiale de J .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \psi \psi^*}{\partial t} = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{i\hbar}{2m} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right]$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{i\hbar}{2m} \left[\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right]$$

L'équation (E') s'écrit donc :

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = -i\hbar \frac{\partial J}{\partial x} \text{ soit } \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

qui est bien l'équation de conservation particulaire du cours.

d) Pour la fonction d'onde $\psi(x, t) = \psi_0 e^{-i(\omega t - kx)}$:

$$J(x, t) = \frac{-i\hbar}{2m} \left[\psi_0^* e^{i(\omega t - kx)} \cdot ik\psi_0 e^{-i(\omega t - kx)} - \right.$$

$$\left. \psi_0 e^{-i(\omega t - kx)} \cdot (-ik)\psi_0^* e^{i(\omega t - kx)} \right] = |\psi_0|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

qui est bien l'expression de J donnée dans le cours pour la particule libre.

21.6

a) Par définition de la fonction d'onde stationnaire :

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-i\omega t} \phi(x) = 2iA \sin(kx) e^{-i\omega t}$$

b) La densité linéique de probabilité est égale au carré de la fonction d'onde est

$$\rho(x) = \psi(x, t) \cdot \psi^*(x, t) = 4|A|^2 \sin^2(kx)$$

La condition de normalisation s'écrit

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1 \text{ soit } \int_{x=0}^a 4|A|^2 \sin^2(kx) dx = 1$$

On linéarise le sinus carré : $\sin^2(kx) = \frac{1 - \cos(2kx)}{2}$ donc

$$2|A|^2 \int_{x=0}^a (1 - \cos(2kx)) dx = 2|A|^2 \left[x - \frac{\sin(2kx)}{2k} \right]_0^a$$

$$= 2|A|^2 \left[a - \frac{\sin(2ka)}{2k} \right]$$

Or la relation de quantification pour le puits de potentiel infini de largeur a s'écrit $k = n\frac{\pi}{a}$ où n est un entier naturel non nul, donc

$$\sin(2ka) = \sin(2n\pi) = 0$$

La condition de normalisation s'écrit donc

$$2|A|^2 a = 1 \text{ soit } |A| = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

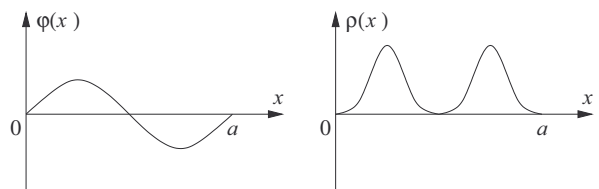
En prenant $A = -i\alpha$:

$$\alpha = |A| = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

c) En remplaçant A par son expression, on a donc

$$\phi(x) = 2\alpha \sin(kx) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a} \text{ et } \rho(x) = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a}$$

Voici l'allure des deux graphes :



21.7

- a) Les solutions dans les deux domaines s'écrivent pour $x \leq 0$ et $x > 0$ respectivement :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \\ \varphi_2(x) = A_2 e^{\frac{x}{\delta}} + B_2 e^{-\frac{x}{\delta}} \end{cases}$$

- b) Lorsque $x \rightarrow +\infty$ dans le milieu 2, $e^{\frac{x}{\delta}} \rightarrow +\infty$, il est donc nécessaire que $A_2 = 0$.
- c) La hauteur de la marche étant finie, il y a continuité de φ et de φ' en $x = 0$, donc

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = B_2 \\ ik(A_1 - B_1) = -\frac{B_2}{\delta} \end{cases}$$

- d) Pour $x > 0$,

$$\Psi(x, t) = B_2 e^{-i\omega t} e^{-\frac{x}{\delta}}$$

$$\text{donc } \rho(x, t) = \Psi(x, t)\Psi^*(x, t) = |B_2|^2 e^{-\frac{2x}{\delta}}$$

Cette densité décroît exponentiellement avec x mais n'est pas nulle, il est donc possible de trouver une particule dans le domaine $x > 0$, alors que c'est interdit par la mécanique classique car l'énergie potentielle $V(x) = V_0$ étant supérieure à l'énergie mécanique E , l'énergie cinétique serait négative.

21.8

- a) Les deux équations spatiales de Schrödinger sont du type oscillateur harmonique ; notons avec l'indice 1 les grandeurs pour $x < 0$ et 2 pour $x > 0$:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \\ \varphi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \end{cases}$$

- b) La particule incidente se propage dans le milieu 1 dans le sens des x croissants ; si elle passe la marche, elle continuera à se propager dans le milieu 2 dans le sens des x croissants ; si elle rebondit sur la marche, elle se propagera dans le milieu 1 dans le sens des x décroissants ; En aucun cas, elle ne peut se propager dans le milieu 2 dans le sens des x décroissants. Voici les ondes associées aux quatre termes définissant φ_1 et φ_2 :

$$\Psi_1(x, t) = \varphi_1(x)e^{-i\omega t} = A_1 e^{-i(\omega t - k_1 x)} + B_1 e^{-i(\omega t + k_1 x)}$$

$$\Psi_2(x, t) = \varphi_2(x)e^{-i\omega t} = A_2 e^{-i(\omega t - k_2 x)} + B_2 e^{-i(\omega t + k_2 x)}$$

Les arguments du type $\omega t - kx$ traduisent une propagation dans le sens des x croissants, ceux du type $\omega t + kx$ dans le sens des x décroissants. L'onde d'amplitude A_1 est donc l'onde **incidente** (sens des x croissants dans 1), celle d'amplitude A_2 est l'onde **réfléchie** (sens des x décroissants dans 1), celle d'amplitude B_1 est l'onde **transmise** (sens des x croissants dans 2), et nécessairement $B_2 = 0$ (pas d'onde dans 2 dans le sens des x décroissants).

- c) La hauteur de la marche étant finie, il y a continuité de φ et de φ' en $x = 0$, donc

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 \\ ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = ik_2 A_2 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 1 + \frac{B_1}{A_1} = \frac{A_2}{A_1} \\ 1 - \frac{B_1}{A_1} = \frac{k_2}{k_1} \frac{A_2}{A_1} \end{cases}$$

En posant $r = \frac{B_1}{A_1}$ et $t = \frac{A_2}{A_1}$, on obtient le système

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ 1 - r = \frac{k_2}{k_1} t \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \\ t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \end{cases}$$

Les vecteurs densité de courant de probabilité associés aux trois ondes sont respectivement

$$\begin{cases} \vec{J}_i = |\Psi_i|^2 \frac{\hbar k_1}{m} \vec{u}_x = A_1^2 \frac{\hbar k_1}{m} \vec{u}_x \\ \vec{J}_r = -B_1^2 \frac{\hbar k_1}{m} \vec{u}_x \\ \vec{J}_t = A_2^2 \frac{\hbar k_2}{m} \vec{u}_x \end{cases}$$

- d) On en déduit les rapports des densités de courant de probabilité :

$$R = \frac{\|\vec{J}_r\|}{\|\vec{J}_i\|} = \left(\frac{B_1}{A_1}\right)^2 \cdot \frac{k_1}{k_1} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \cdot \frac{k_2}{k_1} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

- e) R est la probabilité de réflexion et T celle de transmission d'une particule incidente sur la marche de potentiel. On remarque que

$$R + T = \frac{k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2 + 4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = 1$$

ce qui prouve que la somme des probabilités vaut 1.

- f) Exprimons les deux termes :

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \text{ et } k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m\left(E - \frac{E}{2}\right)}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{mE}{\hbar^2}}$$

donc $k_1 = k_2 \sqrt{2}$. On en déduit

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{(k_2 \sqrt{2} - k_2)^2}{(k_2 \sqrt{2} + k_2)^2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \approx 0,029$$

$$T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{4k_2^2 \sqrt{2}}{(k_2 \sqrt{2} + k_2)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \approx 0,971$$

Par définition du coefficient de transmission, la probabilité de transmission d'une particule est de 0,971. Statistiquement, sur 1000 particules incidentes, 971 sont transmises.

21.9

a) La densité linéique de probabilité de présence ρ est exprimée en m^{-1} donc ψ est exprimé en $m^{-\frac{1}{2}}$ et il en est de même de A . ω_0 est en radian par seconde.

b) On a

$$\rho(x) = \psi(x, t)\psi^*(x, t) = |A|^2 e^{-\frac{m\omega_0 x^2}{\hbar}}$$

La condition de normalisation s'écrit

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1$$

soit, en posant $\alpha = \frac{m\omega_0}{\hbar}$

$$|A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1 \text{ donc } |A| = \left(\frac{2m\omega_0}{\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{donc } A = \left(\frac{2m\omega_0}{\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\theta}$$

c) Par identification à la solution stationnaire

$$\psi(x, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \varphi(x) \text{ donc } E = \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

d) En remplaçant $\psi(x, t)$ dans l'équation de Schrödinger, ou $\varphi(x) = Ae^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2}$ dans l'équation spatiale

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\varphi(x) = 0$$

On calcule

$$\begin{cases} \varphi'(x) = -A \frac{m\omega_0}{\hbar} x e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2} \\ \varphi''(x) = A \left[-\frac{m\omega_0}{\hbar} + \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2} x^2 \right] e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2} \end{cases}$$

$$\text{donc } -\frac{m\omega_0}{\hbar} + \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2} x^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x)) = 0$$

et en utilisant l'expression de E obtenue à la question (c)

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

On reconnaît l'énergie potentielle d'un oscillateur élastique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

e) La valeur moyenne est

$$\langle x \rangle = \int_{x=-\infty}^{+\infty} x\rho(x) dx$$

Cette intégrale (convergente) est celle d'une fonction impaire, elle vaut donc zéro.

f) De même

$$\langle \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \rangle = \frac{1}{2}m\omega_0^2 \int_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 \rho(x) dx$$

En utilisant l'intégrale donnée par l'énoncé

$$\langle \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \rangle = \frac{1}{2}m\omega_0^2 |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}} = \frac{m\omega_0^2}{4\alpha}$$

$$\langle \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{4}$$

21.10

a) Pour $x < 0$, le potentiel est infini donc la probabilité de présence est nulle. Les formes proposées sont celles données dans le cours dans le cas $x \in [0, a]$ où l'énergie est positive et le potentiel nul, et pour $x > a$ où l'énergie E est inférieure au potentiel V_0 .

b) φ ne peut pas diverger pour $x \rightarrow +\infty$, donc nécessairement $B_2 = 0$.

c) Les conditions de continuité donnent :

- en $x = 0$, il y a une discontinuité infinie du potentiel donc il y a continuité de φ :

$$\varphi(0^+) = 0$$

- en $x = a$, il y a discontinuité finie du potentiel donc il y a continuité de φ et de sa dérivée :

$$\varphi(a^-) = \varphi(a^+) \text{ et } \varphi'(a^-) = \varphi'(a^+)$$

Les trois équations sont donc :

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ A_1 e^{ika} + B_1 e^{-ika} = A_2 e^{-\frac{a}{\delta}} \\ ikA_1 e^{ika} - ikB_1 e^{-ika} = -\frac{A_2}{\delta} e^{-\frac{a}{\delta}} \end{cases}$$

d) Le système s'écrit

$$B_1 = -A_1 \text{ et } \begin{cases} 2iA_1 \sin(ka) = A_2 e^{-\frac{a}{\delta}} \\ 2ikA_1 \cos(ka) = -\frac{A_2}{\delta} e^{-\frac{a}{\delta}} \end{cases}$$

En divisant ces deux égalités, on en déduit que

$$\tan(ka) = -k\delta = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}$$

Conservons l'information $\tan(ka) < 0$ et élevons au carré :

$$\tan^2(ka) = \frac{E}{V_0 - E}$$

$$\text{soit } (V_0 - E) \sin^2(ka) = E \cos^2(ka) = E - E \sin^2(ka)$$

$$\text{soit } \sin^2(ka) = \frac{E}{V_0} \text{ donc } |\sin(ka)| = \sqrt{\frac{E}{V_0}} = \frac{k}{k_0}$$

e) Posons $x = ka$: l'équation s'écrit alors

$$|\sin x| = \frac{x}{k_0 a} \text{ soit } |\sin x| = \frac{x}{\beta} \text{ avec } \beta = k_0 a$$

avec $\tan(x) < 0$ donc $x \in]\frac{\pi}{2} + p\pi, \pi + p\pi]$, p entier. En utilisant les graphes proposés par l'énoncé, on constate que

- si $\beta < \frac{\pi}{2}$ soit $k_0 < \frac{\pi}{2a}$, la seule solution de l'équation est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ donc sa tangente est positive et on la rejette ; le problème n'a donc pas de solution stationnaire ;
- si $\beta > \frac{\pi}{2}$ soit $k_0 > \frac{\pi}{2a}$, il y a un nombre fini de solutions ; en particulier pour $\beta = 5\pi$, soit $k_0 = \frac{5\pi}{a}$, le graphe donné par l'énoncé prouve qu'il y a 5 solutions de tangentes négatives, et que les premières sont proches de $x = \pi$ ($k = \frac{\pi}{a}$), $x = 2\pi$ ($k = \frac{2\pi}{a}$), $x = 3\pi$ ($k = \frac{3\pi}{a}$) ; il y a donc un nombre fini de solutions stationnaires et le problème est quantifié ;
- pour $\beta \gg \frac{\pi}{2}$ soit $k_0 \gg \frac{\pi}{2a}$, la droite est presque confondue avec l'axe des abscisses, il y a donc un très grand nombre de solutions qui sont proches de $x = n\pi$ soit $k = \frac{n\pi}{a}$, n entier naturel non nul, qui est bien la relation de quantification pour le puits de potentiel infini.

21.11

- a) $\delta_2 = \frac{1}{k_2}$ est la distance caractéristique de pénétration, aussi appelée épaisseur de peau.
- b) Considérons les deux cas.
- Barrière très haute : $V_0 \rightarrow +\infty$ donc $k_2 \rightarrow +\infty$ et $\text{sh}(k_2 a) \rightarrow +\infty$. L'équivalent de T est :

$$T \approx \frac{4k_1^2 k_2^2}{k_2^4 \text{sh}^2(k_2 a)} = \frac{4k_1^2}{k_2^2 \text{sh}^2(k_2 a)} \rightarrow 0$$

- Barrière très large : $a \rightarrow +\infty$ donc $\text{sh}(k_2 a) \rightarrow +\infty$. L'équivalent de T est :

$$T \approx \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2 \text{sh}^2(k_2 a)} \rightarrow 0$$

Dans les deux cas, le coefficient de transmission tend vers zéro et la barrière est pratiquement infranchissable.

- c) Si $a \gg \frac{1}{k_2}$, alors $ak_2 \gg 1$ et le sinus hyperbolique a pour équivalent

$$\text{sh}(k_2 a) = \frac{e^{k_2 a} - e^{-k_2 a}}{2} \approx \frac{e^{k_2 a}}{2}$$

Comparons les ordres de grandeur des deux termes du dénominateur en estimant leur rapport : comme E est du même ordre de grandeur que V_0 , k_1 et k_2 sont du même ordre de grandeur ($k_1 \approx k_2 \approx k$) et

$$\frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2 \text{sh}^2(k_2 a)} \approx \frac{4k^4}{(2k^2)^2 \text{sh}^2(k_2 a)} \approx \frac{1}{e^{2k_2 a}} \ll 1$$

On en déduit l'équivalent :

$$T \approx \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2 \frac{e^{2k_2 a}}{4}} = \frac{16k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} e^{-2k_2 a}$$

qui est bien la forme attendue avec $T_0 = \frac{16k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2}$.

21.12

- a) D'après le cours, la barrière est constituée si $eU_0 > E$, soit $V_0 > E$.
- b) L'exponentielle varie de 0 à 1 lorsque son argument $\frac{2a}{\delta}$ varie de 0 à 5 environ. Pour pouvoir distinguer les variations de a , il faut que la dérivée de l'exponentielle reste significativement non nulle, ce qui est le cas quand $\frac{2a}{\delta}$ reste de l'ordre de 1 donc si $a \approx \delta$.
- c) Un courant électrique est détecté si certains électrons parviennent à franchir la barrière de potentiel énergétique. Cette possibilité, interdite en physique classique, est possible en physique quantique : c'est l'effet tunnel.
- d) La mesure du courant donne accès à la probabilité de traversée de la barrière de potentiel par les électrons :

$$i = \frac{dq}{dt} = e \frac{dN}{dt} = \beta \cdot T = \beta T_0 e^{-\frac{2a}{\delta}}$$

La connaissance de T donne accès à a d'après l'expression exponentielle. Si on note d la distance de la base de la plaque à la pointe, l'altitude de la cellule est donc $z = d - a$. La connaissance de z pour chaque cellule donne accès au relief de la plaque.

- e) Le rapport des intensités est égal au rapport des coefficients de transmission :

$$T_2 = T_1 + \frac{19}{100} T_1 \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = 1,19 \Leftrightarrow \frac{T_0 e^{-\frac{2a_1}{\delta}}}{T_0 e^{-\frac{2a_2}{\delta}}} = 1,19$$

$$\text{soit } e^{\frac{2}{\delta}(a_2 - a_1)} = 1,19$$

$$\text{donc } a_2 - a_1 = \frac{\delta}{2} \ln 1,19 = 0,87 \text{ nm}$$

21.13

a) Approximation WKB.

i) Calculons les dérivées de $\varphi(x)$

$$\begin{cases} \varphi'(x) = f'(x)e^{i\theta(x)} + if(x)\theta'(x)e^{i\theta(x)} \\ \varphi''(x) = f''(x)e^{i\theta(x)} + 2if'(x)\theta'(x)e^{i\theta(x)} + \\ if(x)\theta''(x)e^{i\theta(x)} - f(x)\theta'^2(x)e^{i\theta(x)} \end{cases}$$

On injecte dans l'équation de Schrödinger spatiale

$$\begin{aligned} & \left[f''(x) - f(x)\theta'^2(x) \right] e^{i\theta(x)} + \\ & i \left[2f'(x)\theta'(x) + f(x)\theta''(x) \right] e^{i\theta(x)} + \\ & \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} f(x)e^{i\theta(x)} = 0 \end{aligned}$$

En simplifiant par $e^{i\theta(x)}$, en négligeant le terme $f''(x)$ selon l'approximation WKB, et en identifiant les coefficients de i et les autres

$$\begin{cases} 2f'(x)\theta'(x) + f(x)\theta''(x) = 0 \\ -f(x)\theta'^2(x) + \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} f(x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} 2f'(x)\theta'(x) + f(x)\theta''(x) = 0 \\ \theta'^2(x) = \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} \end{cases}$$

ii) La seconde équation donne

$$-\alpha'^2(x) = -\frac{2m(V(x) - E)}{\hbar^2}$$

Or $V(x) > E$ donc

$$\alpha'(x) = \sqrt{\frac{2m(V(x) - E)}{\hbar^2}}$$

$$\text{et } \alpha(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{2m(V(u) - E)}{\hbar^2}} du$$

La première équation s'écrit

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\theta''(x)}{2\theta'(x)}$$

En primitivant chaque terme

$$\ln|f(x)| = -\frac{1}{2} \ln|\alpha'(x)| + K$$

$$\text{donc } |f(x)| = K_0 |\alpha'(x)|^{-\frac{1}{2}}$$

et en jouant sur le signe de K_0

$$f(x) = K_0 \left[\sqrt{\frac{2m(V(x) - E)}{\hbar^2}} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{soit } f(x) = K_0 \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right]^{-\frac{1}{4}} [V(x) - E]^{-\frac{1}{4}}$$

$$\text{soit } f(x) = \varphi_0 [V(x) - E]^{-\frac{1}{4}}$$

En reconstituant l'expression, on a bien

$$\varphi(x) = \varphi_0 [V(x) - E]^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha(x)}$$

iii) On peut écrire

$$\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} = \left[\frac{V(b) - E}{V(a) - E} \right]^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha(b) + \alpha(a)}$$

Or $V(a) = V(b)$ et

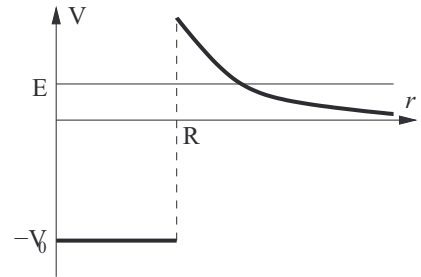
$$\alpha(b) - \alpha(a) = \int_a^b \sqrt{\frac{2m(V(u) - E)}{\hbar^2}} du$$

On en déduit

$$T = \left| \frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} \right|^2 = e^{-2 \int_a^b \sqrt{\frac{2m(V(u) - E)}{\hbar^2}} du}$$

b) Radioactivité α .

i) Voici l'allure du graphe, qui laisse apparaître un puits de potentiel quand la particule alpha est dans le noyau, puis une énergie potentielle d'interaction électrostatique entre le noyau d'hélium de charge $+2e$ et le noyau fils de charge $(Z - 2)e$.



ii) L'énergie E est inférieure à la barrière de potentiel, mais cette barrière est de largeur finie, la probabilité de franchissement par effet tunnel n'est donc pas nulle. On identifie la probabilité de franchissement radiale au coefficient de transmission T , on calcule ce coefficient grâce à la formule intégrale.

21.14

Première partie.

a) Les symétries et invariances sont celles de la sphère donc

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

 Choisissons pour surface de Gauss Σ une sphère de rayon r . Le flux du champ électrique vaut

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

 Si $r \geq r_0$, la charge intérieure est la charge totale de l'atome, elle vaut 0 et $E(r) = 0$. Si $r \leq r_0$

$$Q_{\text{int}} = 2e + \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 2e \left[1 - \frac{r^3}{r_0^3} \right]$$

$$\text{donc } E(r) = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 r_0^2} \left[\frac{r_0^2}{r^2} - \frac{r}{r_0} \right]$$

 b) On en déduit le potentiel électrique en primitivant $\vec{E} = -\text{grad } U(r)$

$$U(r) = \begin{cases} K \text{ si } r \geq r_0 \\ \frac{e}{2\pi\epsilon_0 r_0^2} \left[\frac{r_0^2}{r} + \frac{r^2}{2r_0} \right] + K' \text{ si } r \leq r_0 \end{cases}$$

 Le potentiel étant nul à l'infini, $K = 0$. En assurant la continuité en $r = r_0$

$$\frac{e}{2\pi\epsilon_0 r_0^2} \left[1 + \frac{1}{2} \right] + K' = 0$$

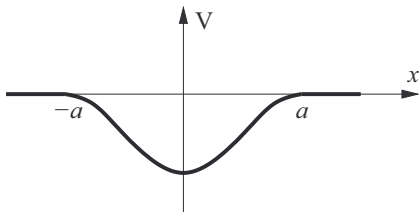
$$\text{donc } U(r) = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 r_0^2} \left[\frac{r_0^2}{r} + \frac{r^2}{2r_0} - \frac{3}{2} \right] \text{ si } r \leq r_0$$

 c) L'énergie potentielle est nulle si l'électron est à l'extérieur du nuage, donc si $x < -a$ et $x > a$. Si l'électron est à l'intérieur du nuage, par application du théorème de Pythagore

$$r = \sqrt{\frac{r_0^2}{4} + x^2}$$

$$\text{donc } V(x) = -eU(x) = -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 r_0^2} \left[\frac{r_0^2}{\sqrt{\frac{r_0^2}{4} + x^2}} + \frac{\frac{r_0^2}{4} + x^2}{2r_0} - \frac{3}{2} \right]$$

d) Voici l'allure du graphe.


Deuxième partie.

a) Par la méthode de séparation des variables, on obtient

$$\begin{cases} u(t) = e^{-i\omega t} \text{ avec } E = \hbar\omega \\ \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}\varphi(x) = 0 \end{cases}$$

 b) Pour $-a \leq x \leq a$, on reconnaît la solution complexe de l'équation d'oscillateur harmonique. Pour $x < a$ et $x > a$, on a la même type d'équation différentielle en remplaçant V_0 par 0, donc le même type de solutions en remplaçant k par K . Pour $x > a$, le terme manquant est $B_3 e^{-iKx}$ qui correspond à une fonction d'onde

$$B_3 e^{-i(\omega t + Kx)}$$

 se propageant dans la zone $x > a$ dans le sens des x décroissants. Cette onde ne peut correspondre qu'à un flot d'électrons venant de $+\infty$, alors que l'énoncé précise que le faisceau vient de la gauche, donc $B_3 = 0$.

 c) Les relations de continuité pour les marches de potentiel de hauteur finie en $x = -a$ et en $x = a$ s'écrivent

$$\begin{cases} A_1 e^{-iKa} + B_1 e^{iKa} = A_2 e^{-ika} + B_2 e^{ika} \\ iKA_1 e^{-iKa} - iKB_1 e^{iKa} = ikA_2 e^{-ika} - ikB_2 e^{ika} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} A_2 e^{ika} + B_2 e^{-ika} = A_3 e^{iKa} \\ ikA_2 e^{ika} - ikB_2 e^{-ika} = iKA_3 e^{iKa} \end{cases}$$

 d) R et T sont les coefficients de réflexion et de transmission du flot d'électrons sur la cuvette rectangulaire. Ce sont aussi les probabilités de réflexion et de transmission, et leur somme vaut 1.

Troisième partie.

 a) R s'annule quand

$$\sin(2ka) = 0 \text{ soit } 2ka = n\pi \text{ soit } k = \frac{n\pi}{2a}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{soit } E = E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2} - V_0$$

Avec les valeurs numériques données,

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2}{4} - 1 \text{ donc } E_1 = 1,5, E_2 = 8,9, E_3 = 21,2, \dots$$

ce qui est cohérent avec le graphe.

 b) Lorsque $R = 0$, $T = 1$ et les électrons traversent les nuages électroniques sans être absorbés, d'où l'effet de transparence de Ramsauer.

c) Pour $n = 1$, on a

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} - V_0$$

21.15

a) D'après la relation de Planck-Einstein

$$\omega_1 = \frac{E_1}{\hbar} \text{ et } \omega_2 = \frac{E_2}{\hbar}$$

b) Les fonctions d'onde s'écrivent

$$\psi_1(x, t) = e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \varphi_1(x) \text{ et } \psi_2(x, t) = e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \varphi_2(x)$$

c) On en déduit les densités linéiques de probabilité de présence.

$$\begin{cases} \rho_1(x, t) = \psi_1(x, t) \cdot \psi_1^*(x, t) = |\varphi_1(x)|^2 \\ \rho_2(x, t) = \psi_2(x, t) \cdot \psi_2^*(x, t) = |\varphi_2(x)|^2 \end{cases}$$

d) La superposition des deux ondes est

$$\Psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)$$

La densité associée est

$$\rho(x, t) = \left[e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \varphi_1(x) + e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \varphi_2(x) \right] \cdot$$

$$\left[e^{i\frac{E_1}{\hbar}t} \varphi_1^*(x) + e^{i\frac{E_2}{\hbar}t} \varphi_2^*(x) \right]$$

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= [\varphi_1(x)\varphi_1^*(x)] + [\varphi_2(x)\varphi_2^*(x)] \\ &+ \left[\varphi_1(x)\varphi_2^*(x)e^{i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t} + \varphi_1^*(x)\varphi_2(x)e^{-i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t} \right] \end{aligned}$$

$$\rho(x, t) = \rho_1(x) + \rho_2(x) + \Phi(x)e^{i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t} + \Phi^*(x)e^{-i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t}$$

$$\rho(x, t) = \rho_1(x) + \rho_2(x) + r(x)e^{i\theta(x)} e^{i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t} +$$

$$r(x)e^{-i\theta(x)} e^{-i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t}$$

$$\rho(x, t) = \rho_1(x) + \rho_2(x) +$$

$$r(x) \left[e^{i\theta(x)} e^{i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t} + e^{-i\theta(x)} e^{-i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t} \right]$$

$$\rho(x, t) = \rho_1(x) + \rho_2(x) + 2r(x) \cos \left[\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t + \theta(x) \right]$$

C'est donc une fonction périodique du temps, il y a oscillations quantiques de probabilité

$$\omega_{12} = \frac{|E_2 - E_1|}{\hbar}$$

21.16

a) On reprend le raisonnement du cours, on exprime

$$\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \text{ avec } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{ika} + Be^{-ika} = 0 \end{cases} \text{ donc } 2iA \sin(ka) = 0$$

$$\text{donc } ka = n\pi \text{ et } E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}, n \in \mathbb{N}$$

b) La densité de probabilité de présence est

$$\rho(x, t) = \Psi(x, t)\Psi^*(x, t) = |A_1|^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} + |A_2|^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{a} +$$

$$\left[A_1 A_2^* e^{-i\frac{(E_1-E_2)t}{\hbar}} + A_1^* A_2 e^{i\frac{(E_1-E_2)t}{\hbar}} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi x}{a}$$

La relation de normalisation s'écrit

$$\forall t, \int_{x=0}^a \rho(x, t) dx = 1$$

c) Pour les valeurs proposées, on obtient

$$\rho(x, t) = \frac{1}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a} +$$

$$\frac{2}{a} \cos \frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi x}{a}$$

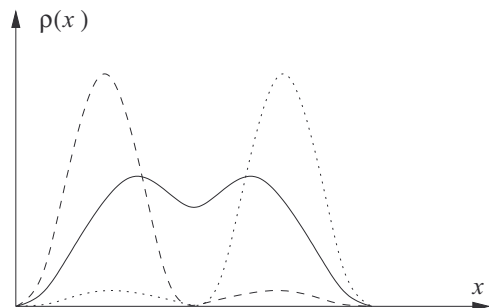
Les trois intégrales se calculent sans difficulté.

$$\begin{cases} \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \\ \int_0^a \sin^2 \frac{2\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \\ \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} dx = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \int_0^a \rho(x, t) dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{2} + 0 = 1$$

La condition de normalisation est bien vérifiée.

d) On peut tracer l'allure de la fonction quand le cosinus vaut -1, 0 et 1.



On voit bien les oscillations de la particule entre les deux bords de la cavité.

e) La période des oscillations quantiques est

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{12}} = \frac{2\pi\hbar}{|E_1 - E_2|} = \frac{8ma^2}{3h}$$

f) On assimile

$$\Delta E \simeq E_2 - E_1 = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2ma^2} = \frac{3h^2}{8ma^2}$$

$$\text{donc } \Delta E \times T = h$$

C'est conforme à l'**inégalité de Heisenberg temps-énergie**.

21.17

Préliminaire. L'énergie potentielle élastique est

$$E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

La longueur de chacun des ressorts, par application du théorème de Pythagore, est $\ell = \sqrt{x^2 + b^2}$ donc

$$V(x) = 2 \times \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + b^2} - \ell_0)^2$$

Le graphe est bien celui de cette fonction.

- a) L'énergie est inférieure à V_0 , le franchissement de la barrière de potentiel est possible par effet tunnel.
- b) Le potentiel est symétrique par rapport à $x = 0$; la densité linéique de probabilité de présence est donc elle-aussi symétrique par rapport à $x = 0$, donc ρ est une fonction paire de x :

$$\rho(-x) = \rho(x) \text{ soit } \varphi^2(-x) = \varphi^2(x)$$

$$\text{soit } [\varphi(-x) - \varphi(x)] \cdot [\varphi(-x) + \varphi(x)] = 0$$

$$\text{donc } \varphi(-x) = \varphi(x) \text{ ou } \varphi(-x) = -\varphi(x)$$

φ est donc paire ou impaire.

c) Il y a a priori 6 relations de continuité :

- continuité de φ en $x = -3a$ (discontinuité infinie de potentiel)
- continuité de φ et de φ' en $x = -a$ (discontinuité finie de potentiel)
- continuité de φ et de φ' en $x = a$ (discontinuité finie de potentiel)
- continuité de φ en $x = 3a$ (discontinuité infinie de potentiel).

On vérifie sur les solutions proposées que

$$\varphi_i(-3a) = \varphi_i(3a) = 0 \text{ et } \varphi_p(-3a) = \varphi_p(3a) = 0$$

Les relations de continuité en $x = -a$ et en $x = +a$ donnent les mêmes relations ; il suffit donc de les écrire en $x = a$:

$$\begin{cases} I_0 \operatorname{sh} \frac{a}{\delta_i} = I \sin(2k_i a) \\ I_0 \operatorname{ch} \frac{a}{\delta_i} = -k_i I \cos(2k_i a) \end{cases} \quad \begin{cases} P_0 \operatorname{ch} \frac{a}{\delta_p} = P \sin(2k_p a) \\ P_0 \operatorname{sh} \frac{a}{\delta_p} = -k_p P \cos(2k_p a) \end{cases}$$

En faisant le rapport entre les égalités, on élimine les constantes :

$$\delta_i \operatorname{th} \frac{a}{\delta_i} = -\frac{1}{k_i} \tan(2k_i a) \text{ et } \delta_p \operatorname{coth} \frac{a}{\delta_p} = -\frac{1}{k_p} \tan(2k_p a)$$

Ce sont bien les deux relations demandées par l'énoncé.

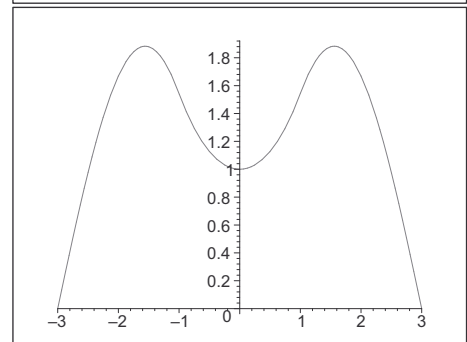
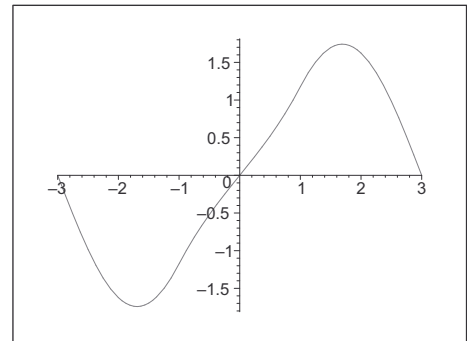
d) En remplaçant δ_i et k_i , on obtient une équation en E_i , et de même pour E_p .

e) La condition $ka = \frac{\pi}{2}$ donne

$$k^2 = \frac{\pi^2}{4a^2} \text{ soit } \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{\pi^2}{4a^2} \text{ soit } E = E_1 \text{ avec } E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

C'est l'énergie minimale (voir section 14.3) de la particule dans un puits de potentiel infini de largeur $2a$; en effet, $E \ll V_0$ et la situation est proche de celle où $x \in [-3a, a]$ et $x \in [a, 3a]$ forment deux puits de potentiel infini de même largeur $2a$.

f) Les deux fonctions sont continues et de dérivée continue en $x = \pm a$, nulles en $x = \pm 3a$, φ_i est impaire et φ_p paire. Voici l'allure des courbes :



g) Si $E_i \simeq E_p$, les fonctions d'onde

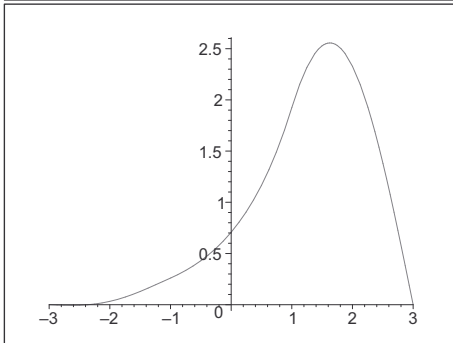
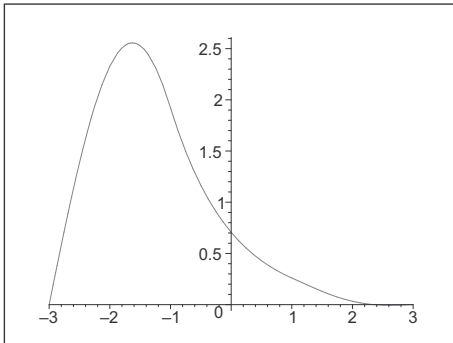
$$\Psi_p(x, t) = \varphi_p(x) e^{-i \frac{E_p}{\hbar} t} \text{ et } \Psi_i(x, t) = \varphi_i(x) e^{-i \frac{E_i}{\hbar} t}$$

ont même pulsation $\omega = \omega_i = \omega_p \simeq \frac{E_0}{\hbar}$. Les superpositions sont donc stationnaires

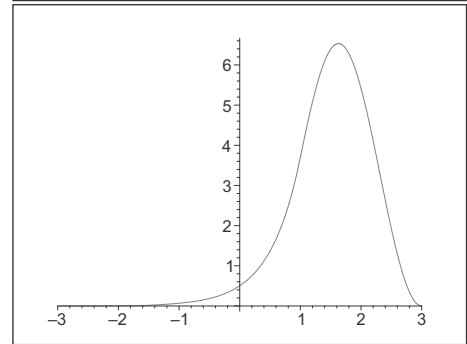
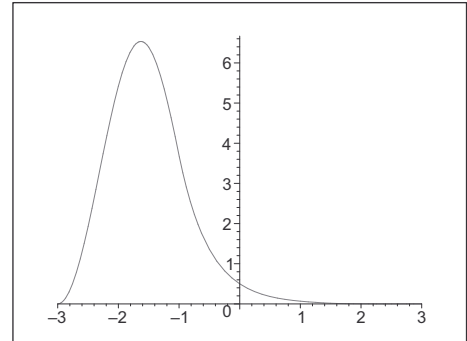
$$\Psi_{G,D}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\varphi_p(x) e^{-i \frac{E_p}{\hbar} t} \mp \varphi_i(x) e^{-i \frac{E_i}{\hbar} t} \right]$$

$$\Psi_{G,D}(x, t) \simeq [\varphi_p(x) \pm \varphi_i(x)] e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t}$$

Les allures des fonctions spatiales $\varphi_G(x)$ et $\varphi_D(x)$



et celles des densités associées $\rho_G(x) = \varphi_G^2(x)$ et $\rho_D(x) = \varphi_D^2(x)$



font apparaître respectivement un lobe de probabilité importante à gauche (G) ou à droite (D). Le coefficient $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est un coefficient de normalisation.

h) Le calcul est le même que celui du cours : il y a oscillation quantique entre les deux états (G) et (D), donc oscillation de retournement à la pulsation :

$$\omega_{G,D} = \frac{\delta E}{\hbar}$$

CHAPITRE 22

Formulaire mathématique

22.1 Équations différentielles

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

- Une fonction $X(t)$ vérifie une **équation différentielle linéaire à coefficients constants** d'ordre 1 ou 2 si on peut écrire

$$aX''(t) + bX'(t) + cX(t) = d(t)$$

$d(t)$ est appelé le second membre. Si $a \neq 0$, elle est du second ordre, si $a = 0$ et $b \neq 0$, elle est du premier ordre. L'équation différentielle est habituellement accompagnée d'une ou deux conditions initiales (si t est le temps) ou aux limites.

- La solution générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants est la somme de
 - la solution générale $X_h(t)$ de l'équation homogène (sans second membre) $aX''(t) + bX'(t) + cX(t) = 0$
 - et d'une solution particulière $X_p(t)$ de l'équation complète $aX''(t) + bX'(t) + cX(t) = d(t)$.

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

La solution X_h est en général définie avec deux (si l'équation est d'ordre 2) ou une (si l'équation est d'ordre 1) constante d'intégration ; celles-ci sont calculées grâce aux conditions initiales ou aux limites.

- Les équations homogènes suivantes peuvent être résolues sans justification.
 - L'équation $X'(t) + \frac{1}{\tau}X(t) = 0$ a pour solution

$$X_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

- L'équation $X''(t) + \omega_0^2 X(t) = 0$ est appelée **équation d'oscillateur harmonique** et a pour solution

$$X_h(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ ou } X_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

- L'équation $X''(t) - \frac{1}{\tau^2} X(t) = 0$ est appelée **équation d'oscillateur hyperbolique** et a pour solution

$$X_h(t) = A \cosh \frac{t}{\tau} + B \sinh \frac{t}{\tau} \text{ ou } X_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + Be^{\frac{t}{\tau}}$$

- Dans les autres cas, on cherche les solutions réelles de l'équation homogène en résolvant l'**équation caractéristique** du second degré :

$$ar^2 + br + c = 0 \text{ de discriminant } \Delta = b^2 - 4ac$$

- si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles r_1 et r_2 et

$$X_h(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

- si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double réelle $r = -\frac{b}{2a}$ et

$$X_h(t) = (At + B) e^{r t}$$

- si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$ avec $r = -\frac{b}{2a}$ et $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$, et

$$X_h(t) = A e^{r t} \cos(\omega t + \varphi) \text{ ou } X_h(t) = e^{r t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

- La recherche d'une solution particulière (quelconque) est moins cadrée. On retient qu'on cherche en général une solution $X_p(t)$ « du même type » que le second membre $d(t)$: si $d(t)$ est constante, on cherche $X_h(t)$ constante, si $d(t)$ est affine, on cherche $X_h(t)$ affine, si $d(t)$ est une fonction exponentielle, on cherche $X_h(t)$ exponentielle de même argument, etc. Dans le cas particulier où $d(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps, on utilise la méthode complexe suivante. Une solution particulière d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type

$$aX''(t) + bX'(t) + cX(t) = D \cos(\omega t + \varphi)$$

est $X_p(t) = X_0 \cos(\omega t + \theta)$. On détermine l'amplitude X_0 et la phase θ en passant au **formalisme complexe**.

- On pose

$$\underline{X} = X_0 e^{i(\omega t + \theta)} \text{ et } \underline{d} = D e^{i(\omega t + \varphi)}$$

L'équation en complexes s'écrit

$$[-a\omega^2 + i\omega b + c] X_0 e^{i(\omega t + \theta)} = D e^{i(\omega t + \varphi)}$$

et on calcule X_0 et θ en écrivant l'égalité des modules et des arguments.

Équations différentielles à variables séparables

- La fonction $x(t)$ vérifie une **équation différentielle à variables séparables** X et t si elle vérifie une relation du type

$$a(x)x'(t) = b(t) \text{ soit } a(x) \frac{dx}{dt} = b(t)$$

avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

- Ce type d'équation peut se mettre sous la forme

$$a(x)dx = b(t)dt \text{ donc } \int_{x=x_0}^{x_1} a(x)dx = \int_{t=t_0}^{t_1} b(t)dt$$

d'où on déduit, si les fonctions $a(x)$ et $b(t)$ sont intégrables sur les intervalles en question, une relation du type

$$A(x_1) - A(x_0) = B(t_1) - B(t_0) \text{ soit } A(x_1) = A(x_0) + B(t_1) - B(t_0)$$

- Cette relation permet souvent, par inversion de la fonction A , de déterminer la valeur de x_1 à la date t_1 .

22.2 Fonctions de plusieurs variables, équations aux dérivées partielles

Fonction de plusieurs variables

- X, fonction des variables x, y, z est définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto X = f(x, y, z) \end{aligned}$$

- Il est possible que les variables soient liées les unes aux autres. En physique, c'est le cas en mécanique des fluides lorsqu'une grandeur comme la masse volumique ou la pression au sein de la particule de fluide dépend du temps t et de ses coordonnées cartésiennes x, y, z , celles-ci dépendant elles-mêmes du temps t : $P = f(x(t), y(t), z(t), t)$. Ce cas sera exclu dans la suite du propos.
- À partir d'ici, donc, on considère une fonction de plusieurs variables **indépendantes** les unes des autres. Pour fixer les idées, on considèrera majoritairement des fonctions de deux variables :

$$U = U(T, V), \quad H = H(T, P), \quad S = S(U, V)$$

$$X = f(x, y) = x^2 y^2, \quad Y = g(x, y) = x^2 e^{2y}, \quad Z = h(x, t) = e^{-\frac{x}{5}} \cos(\omega t - kx)$$

Dérivées partielles

- La **dérivée partielle** de X par rapport à une des variables x est la dérivée de X par rapport à x en supposant que toutes les autres variables sont constantes. On note $\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y$ et on lit « d rond X sur d rond x à y constant ». On omet souvent de préciser que y est constant et on écrit simplement $\frac{\partial X}{\partial x}$.
- Avec $X = x^2 y^2$, on a ainsi $\frac{\partial X}{\partial x} = 2xy^2$ et $\frac{\partial X}{\partial y} = 2x^2 y$.
- L'unité de $\frac{\partial X}{\partial x}$ est $[X] \cdot [x]^{-1}$.
- On peut dériver une grandeur plusieurs fois de suite par rapport aux diverses variables :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right), \quad \text{etc.}$$

Ainsi, avec $X = x^2 y^2$, $\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} = 4xy$.

Théorème de Schwartz

- Sous des hypothèses de régularité que nous ne détaillons pas ici, et que nous admettrons toujours vérifiées dans les cas rencontrés en physique, les dérivations par rapport à deux variables indépendantes commutent.
- **Théorème de Schwartz.** Si X est une fonction des deux variables indépendantes x et y , alors

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial x}$$

Écriture différentielle

- Soit X une fonction des deux variables indépendantes x et y . X varie lorsque x et / ou y varie : on peut donc écrire que la variation infinitésimale de X est une combinaison linéaire de celles de x et de y :

$$dX = A \cdot dx + B \cdot dy$$

Or, si y reste constant, on peut écrire $dX = A \cdot dx$, donc A est le rapport entre dX et dx quand y reste constant, soit :

$$A = \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)_y \quad \text{et} \quad B = \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)_x$$

- D'après le théorème de Schwartz, il vient

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

Équations aux dérivées partielles

- Soit X une fonction de deux variables indépendantes x et y . Une **équations aux dérivées partielles** (EDP) est une relation entre les dérivées partielles simples ou multiples de X par rapport à x et y .

- Si $A = f(x, t)$, on cite :

- l'**équation de d'Alembert** (EDA) : $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$

- l'**équation de diffusion** (EDD) : $\frac{\partial A}{\partial t} - D \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0$

- l'**équation de Klein-Gordon** : $\alpha A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0$

- qui sont elles-mêmes des cas particuliers de l'équation linéaire

$$\alpha A + \beta \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0$$

- La résolution des EDP est difficile en général. On retient trois familles très importantes de solutions pour les équations linéaires.

- Les solutions de type onde plane progressive harmonique (OPPH) dont l'écriture en grandeurs complexes est :

$$(\text{OPPH}) : \underline{A}(x, t) = A_0 e^{i(\omega t \pm kx + \varphi)} = \underline{A_0} e^{i(\omega t \pm kx)}$$

- Les solutions de type pseudo-onde plane progressive harmonique (OPPH*) dont l'écriture en grandeurs complexes est :

$$(\text{OPPH}^*) : \underline{A}(x, t) = A_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x + \varphi)} = \underline{A_0} e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$$

- Les solutions du type onde plane stationnaire monochromatique

$$A(x, t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

22.3 Analyse vectorielle

Généralités

- La dérivation spatiale des grandeurs est plus complexe que la dérivation temporelle : il existe en effet des champs scalaires et des champs vectoriels.

- **Dérivation spatiale des champs** :

- le **gradient** est la dérivée vectorielle d'un champ scalaire ;
- le **divergence** est la dérivée scalaire d'un champ vectoriel ;
- le **rotationnel** est la dérivée vectorielle d'un champ vectoriel.

- Les expressions de ces trois opérateurs de dérivation spatiale doivent être connus en coordonnées cartésiennes, et sont fournies par l'énoncé pour les coordonnées cylindriques et sphériques.

- L'opérateur **nalba** est un moyen mnémotechnique permettant de retrouver facilement les expressions en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

- Attention à ne pas confondre, pour une composante quelconque d'un champ vectoriel \vec{A} :
 - une lettre en indice qui signifie la composante correspondante

$$A_x, A_y, A_z, A_r, A_\theta, A_\varphi$$

- et une lettre entre parenthèses, qui signifie que le terme dépend de cette variable

$$A(x), A(y), A(z), A(r), A(\theta), A(\varphi), A(t)$$

Ainsi, l'écriture suivante en coordonnées cylindriques

$$\vec{A} = A_r(\theta, t) \vec{u}_r$$

signifie que la composante A_r selon \vec{u}_r du champ vectoriel \vec{A} ne dépend que des variables θ et t .

Gradient

- Le **gradient** est un champ vectoriel dérivé d'un champ scalaire :
 - sa direction est celle de plus forte variation,
 - son sens correspond à la croissance du champ,
 - sa norme est en unité du champ par unité de longueur.
- En coordonnées cartésiennes, $V(x, y, z)$ et

$$\vec{\text{grad}} V = \vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- En coordonnées cylindriques, $V(r, \theta, z)$ et

$$\vec{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- En coordonnées sphériques, $V(r, \theta, \varphi)$ et

$$\vec{\text{grad}} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Divergence

- La **divergence** est un champ scalaire dérivé d'un champ vectoriel. Il s'exprime en unité du champ par unité de longueur. Il est positif lorsque le champ présente un mouvement divergeant du point considéré, négatif pour un mouvement convergeant, nul pour un mouvement traversant.

- En coordonnées cartésiennes $\vec{A} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ et

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- En coordonnées cylindriques $\vec{A} \begin{vmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{vmatrix}$ et

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- En coordonnées sphériques $\vec{A} \begin{vmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{vmatrix}$ et

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

- **Théorème d'Ostrogradski.** Le flux d'un champ de vecteurs \vec{A} sortant d'une boîte fermée Σ est égal à l'intégrale triple de la divergence dans le volume V délimité par la boîte :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} d\tau$$

Rotationnel

- Le **rotationnel** est un champ vectoriel dérivé d'un champ vectoriel. Il s'exprime en unité du champ par unité de longueur. Il a pour axe l'axe de rotation locale du champ, sons sens est cohérent avec la règle du tire-bouchon.

- En coordonnées cartésiennes $\vec{A} \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix}$ et

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

- En coordonnées cylindriques $\vec{A} \begin{vmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{vmatrix}$ et

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{vmatrix}$$

- En coordonnées sphériques $\vec{A} \begin{vmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{vmatrix}$ et

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r \sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin \theta A_\varphi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{vmatrix}$$

- **Théorème de Stokes.** La circulation d'un champ de vecteurs \vec{A} le long d'un lacet orienté \mathcal{C} est égal au flux du rotationnel à travers la surface S tendue sur le lacet dans le sens cohérent avec l'orientation du lacet :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Laplacien

- Le **Laplacien scalaire** est un opérateur de double dérivation spatiale d'un champ scalaire V :

$$\Delta V = \overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\text{grad}} V$$

- En coordonnées cartésiennes $V(x, y, z)$ et

$$\Delta V = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} V = \overrightarrow{\nabla}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

- En coordonnées cylindriques $V(r, \theta, z)$ et

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

- En coordonnées sphériques $V(r, \theta, \varphi)$ et

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

- Le Laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes est défini comme le laplacien scalaire : $\vec{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{pmatrix}$ et

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} \\ \frac{\Delta A_x}{\Delta A_y} \\ \frac{\Delta A_z}{} \end{pmatrix}$$

- Dans le cas général, le **Laplacien vectoriel** est défini par

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} [\text{div} \vec{A}] - \overrightarrow{\text{rot}} [\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}]$$

Propriétés

- Soient U et V des champs scalaires, \vec{A} et \vec{B} des champs vectoriels.

* $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0}$

* si $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{0}$, alors $\exists \Phi$ tel que $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$

* $\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0$

* si $\text{div} \vec{B} = 0$, alors $\exists \vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$

* $\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} V = \Delta V$

* $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$

* $\overrightarrow{\text{grad}} (UV) = U \overrightarrow{\text{grad}} V + V \overrightarrow{\text{grad}} U$

* $\text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$

* $\text{div} (U \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \vec{A} + U \text{div} \vec{A}$

* $\overrightarrow{\text{rot}} (U \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} U \wedge \vec{A} + U \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$

22.4 Intégrales de champs et grandeurs élémentaires

Longueurs élémentaires

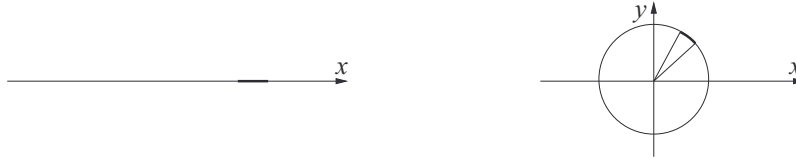
- Les calculs de **circulation** d'un champ de vecteurs le long d'une ligne \mathcal{L} nécessitent l'expression des vecteurs longueurs élémentaires $d\vec{\ell}$:

$$\int_{\mathcal{L}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

- Le **théorème de Stokes** ramène le calcul du flux d'un rotationnel à un calcul de circulation : si S est une surface tendue sur le contour fermé \mathcal{C} :

$$\iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

- Segment élémentaire : $d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x$, arc de cercle élémentaire : $d\vec{\ell} = r d\theta \vec{u}_\theta$.



Surfaces élémentaires

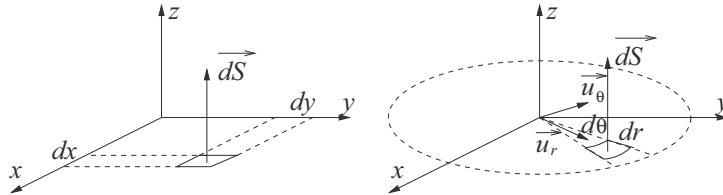
- Les calculs de **flux** d'un champ de vecteurs à travers une surface S nécessitent l'expression des vecteurs surfaces élémentaires $d\vec{S}$:

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

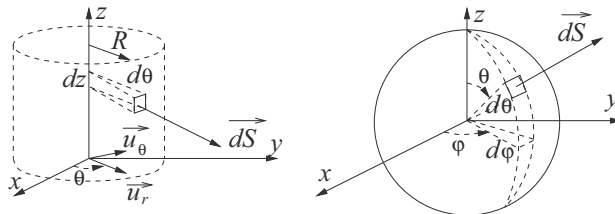
- Le **théorème d'Ostrogradski** ramène le calcul de l'intégrale triple d'une divergence à un calcul de flux : si V est un volume contenu dans une surface fermée Σ :

$$\iiint_V \text{div } \vec{A} \cdot d\tau = \oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

- Portion de plan : $d\vec{S} = dx \cdot dy \vec{u}_z$, portion de disque : $d\vec{S} = r \cdot dr \cdot d\theta \vec{u}_z$,



- portion de cylindre : $d\vec{S} = r d\theta dz \vec{u}_r$, portion de sphère : $d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$.

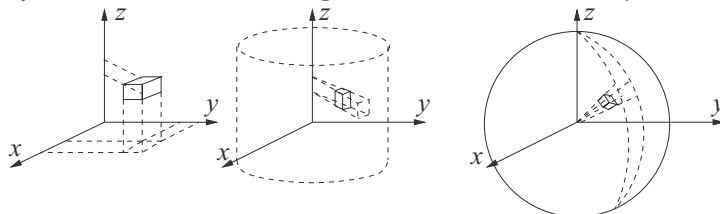


Volumes élémentaires

- Les intégrales de grandeurs scalaires sur un volume nécessitent l'expression de l'élément de volume :

$$\iiint_V \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\tau}$$

- Pavé : $d\tau = dx dy dz$, cylindre : $d\tau = r dr d\theta dz$, sphère : $d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$



Index

- absorption 632
- accélération convective 276
- accélération de Coriolis 209
- accélération locale 276
- accélération particulière 276
- amplification optique laser 637
- angle de mouillage 315
- approximation acoustique 509
- approximation dipolaire 443
- ARQS 485
- atténuation 573
- auto-inductance 440
- axe rapide 549
- axifuge 212
- barrière de potentiel 667
- bilan de masse 333
- bilan de particules 185
- bilan de puissance laser 635
- blanc d'ordre supérieur 46, 90
- bobines de Helmholtz 449
- Brewster 621
- brouillage 41, 43
- capacité 403
- champ d'interférences 39
- champ électrique de Hall 375
- champ électrique dipolaire 399
- champ électrostatique 390
- champ eulérien des vitesses 274
- champ magnétostatique 428
- chariotage 78
- chemin optique 5
- coefficient d'Einstein à l'absorption 632
- coefficient d'Einstein à l'émission spontanée 633
- coefficient d'Einstein à l'émission stimulée 633
- coefficient de compressibilité isentropique 510
- coefficient de réflexion 605, 611
- coefficient de traînée 282
- coefficient de transmission 605, 611, 667
- cohérence 7
- coin d'air 85
- compensatrice 78
- condensateur 403
- condensateur plan 403
- conductivité complexe 577
- conductivité électrique 373
- conductivité thermique 152
- contact optique 82, 87
- contraste 8
- corde de Melde 517
- couche limite 308
- courant de déplacement 482
- courants de Foucault 487
- critère de brouillage par élargissement spatial 41
- critère de brouillage par élargissement spectral 44
- densité de courant de probabilité 662
- densité de probabilité de présence 658
- densité spectrale 43
- densité volumique d'énergie sonore 511
- densité volumique de charge 390
- densité volumique de courant 428
- densité volumique de force de Laplace 436
- dérivée particulière 274
- diagramme de Mollier 347
- dioptré 604

- dipôle électrique induit 401
- dipôle magnétique 442
- diviseur de front d'onde 38
- doublet spectral 84
- écoulement incompressible 274
- écoulement laminaire 282
- écoulement stationnaire 274
- écoulement turbulent 282
- effet Joule 376
- effet tunnel 667
- effet Venturi 311
- élargissement effectif du puits 665
- élargisseur de faisceau 642
- émission 632
- énergie de confinement 664
- énergie volumique électromagnétique 484
- enveloppe 575
- épaisseur de peau 579
- équation d'Euler 309
- équation de diffusion 186
- équation de dispersion 167, 573
- équation de dispersion EDA 506
- équation de la chaleur 153
- équation de Laplace 393
- équation de Maxwell-Ampère 428
- équation de Maxwell-Thomson 428
- équation de Navier-Stokes 280
- équation de Poisson 393
- équation de Schrödinger 658
- équation locale de Poynting 483, 542
- étalement du paquet d'ondes 576
- excédent fractionnaire 96
- expérience d'Abbe 128
- faisceau laser gaussien 640
- fente rectiligne 122
- filtrage fréquentiel laser 637
- filtrage optique 126
- filtrage optique passe-bas 127
- filtrage optique passe-haut 127
- fluide incompressible 274
- focalisation 643
- fonction d'état 150
- fonction d'onde quantique 658
- fonction de réseau 15
- force d'inertie d'entraînement 210, 212
- force d'inertie de Coriolis 210
- force de Lorentz magnétique 435
- force de pression 278
- force de traînée 282
- force de viscosité 278
- force volumique de pression 278
- force volumique de viscosité 278
- formule de Torricelli 311
- formule fondamentale des réseaux 24, 35, 49
- frange brillante 8
- frange centrale brillante 39
- frange sombre 8
- franges d'égal épaisseur 86
- franges d'égal inclinaison 82
- fréquence spatiale 115, 116
- impédance acoustique 519, 607
- impédance caractéristique de ligne 508
- inégalité de Heisenberg spatiale 661
- indice complexe 580
- intensité acoustique 511
- interaction dipôle-champ extérieur 400
- interface 604
- interférences 7
- interféromètre de Michelson 78
- interfrange 8
- interfrange trous d'Young 39
- intervalle spectral 646
- inversion de population 636
- ionosphère 578
- lame à faces parallèles 40
- lame d'air 81
- lame demi-onde 549
- lame quart d'onde 549
- largeur spectrale 576
- localisation 81, 86
- loi d'absorption 632
- loi d'émission spontanée 633
- loi d'émission stimulée 633
- loi d'Ohm locale 373
- loi d'Ohm thermique 156
- loi de composition des accélérations 208
- loi de composition des vitesses 208
- loi de conservation de la charge 482
- loi de Faraday 438
- loi de Fick 186
- loi de Fourier 152
- loi de Hagen-Poiseuille 290
- loi de Jurin 314
- loi de l'énergie mécanique 211, 213
- loi de l'hydrostatique 279
- loi de la statique des fluides 217

- loi de Laplace (tensions superficielles) 313
- loi de Lenz 438
- loi de Malus 4, 547
- loi de Newton 155
- loi de Planck 153
- loi de Stefan 154, 156
- loi de Wien 154
- loi du moment cinétique 211, 213
- loi locale de conservation de la charge 370
- loi locale de conservation de la masse 274
- lois de Coulomb 250
- lois de Joule 358
- longueur de Rayleigh 640
- marche de potentiel 673, 674
- milieu dispersif 576
- mire bidimensionnelle 134
- modèle de Drude 373
- modèle de traînée 282
- modes propres laser 637
- module d'Young 514
- moment dipolaire électrique 399
- moment dipolaire magnétique 442
- montage de Fraunhofer 48
- mutuelle inductance 440
- non-localisation 39
- normalisation 658
- obtention faisceau conique 641
- obtention faisceau cylindrique 642
- onde évanescence 578, 667
- onde incidente 604
- onde monochromatique 7
- onde progressive 506
- onde progressive harmonique 506
- onde réfléchie 604
- onde stationnaire harmonique 506
- onde thermique 166
- onde transmise 604
- opacité 114
- OPPH PR 540
- ordre d'interférences 9, 39
- ordre d'interférences (coin d'air) 86
- ordre d'interférences (lame d'air) 82
- oscillateur à pont de Wien 638
- oscillations quantiques 668
- paquet d'ondes 575, 660
- particule libre 659
- pas d'un réseau 118
- peigne de Dirac 14
- perméabilité magnétique du vide 482
- permittivité diélectrique du vide 482
- plan de Fourier 119
- plasma 577
- poids 215
- point coïncident 208
- polarisabilité 401
- polarisation circulaire 547
- polarisation elliptique 547
- polarisation vitreuse 621
- polariseur 545
- pompage optique 637
- porteuse 575
- potentiel des vitesses 274
- potentiel électrique 390
- premier principe 150
- premier principe industriel 336
- principe ondulatoire 7
- propagation 573
- pseudo-OPPH 572
- puissance électrocinétique volumique 376
- puits de potentiel infini 663
- pulsation plasma 578
- radioactivité alpha 668
- rayon lumineux 4
- référentiel barycentrique 251
- référentiel géocentrique 215
- référentiel terrestre 215
- réflexion d'une onde 604
- régime de saturation 639
- relation de Bernoulli 310
- relation de continuité 605
- relation de Planck-Einstein 659
- relations de passage 605
- repliage du Michelson 79
- réseau 13
- résistance électrique 374
- résistance hydraulique 290
- roue motrice 257
- second principe 150
- séparatrice 78
- solution stationnaire 658
- spectre cannelé 47, 90
- spectre continu 43, 122
- spectre continu 43
- spectre discret 43
- spectrogoniomètre 24
- stalagmomètre 314

Index

statique des fluides 279
stigmatisme 4
surface d'onde 4
teinte de Newton 90
teinte plate 90
temps de cohérence 7
tension superficielle 308
théorème d'Ampère 431
théorème de Gauss 394
théorème de superposition 396
thermodynamique industrielle 336
train d'onde 7, 19
transfert conductif 155
transfert radiatif 156
transmission 114
transmission complexe 115
transmission d'une onde 604
transport 332
travail utile 336
trous d'Young 38
variable d'état 150
vecteur de Poynting 483, 542
vecteur de Poynting sonore 511
vecteur tourbillon 274
vent géostrophique 228
viscosité dynamique 278
vitesse de groupe 576
vitesse de groupe quantique 661
vitesse de phase 576
vitesse de phase quantique 661
waist 640
zone d'interférences 31