

l'intégrale

PSI | PSI*

J.-N. BEURY

**EXERCICES
INCONTOURNABLES**

Physique

exercices incontournables

**CONFORME
AU NOUVEAU
PROGRAMME**

Les exercices incontournables
du programme

Les méthodes de résolution
étape par étape

Les erreurs à éviter

Les corrigés détaillés

DUNOD

Conception et création de couverture : Atelier 3+

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2014

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

www.dunod.com

ISBN : 978-2-10-071463-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Partie 1

Électronique

- | | |
|----------------------------|----|
| 1. ALI – Oscillateurs | 3 |
| 2. Électronique numérique | 18 |
| 3. Modulation-Démodulation | 25 |

Partie 2

Phénomènes de transport

- | | |
|---------------------------------------|----|
| 4. Transport de charge | 33 |
| 5. Transfert thermique par conduction | 37 |
| 6. Diffusion de particules | 59 |
| 7. Statistique des fluides | 64 |

Partie 3

Bilans macroscopiques

- | | |
|---|----|
| 8. Bilans d'énergie | 69 |
| 9. Relation de Bernoulli | 85 |
| 10. Bilans dynamiques et thermodynamiques | 89 |

Partie 4

Électromagnétisme

- | | |
|---|-----|
| 11. Champ électrique en régime stationnaire | 113 |
| 12. Condensateur | 133 |
| 13. Champ magnétique en régime stationnaire | 137 |
| 14. Électromagnétisme dans l'ARQS | 143 |
| 15. Milieux ferromagnétiques | 173 |

Partie 5

Conversion de puissance

16. Puissance électrique en régime sinusoïdal	181
17. Transformateur	189
18. Conversion électro-magnéto-mécanique	193
19. Machine synchrone	197
20. Machine à courant continu	212
21. Conversion électronique statique	220

Partie 6

Ondes

22. Phénomènes de propagation non dispersifs	235
23. Ondes sonores dans les fluides	246
24. Ondes électromagnétiques dans le vide	261
25. Absorption et dispersion	279
26. Interface entre deux milieux	298

Index	303
--------------	------------

Partie 1

Électronique

Plan

1. ALI – Oscillateurs	3
1.1 : Montages fondamentaux avec des ALI	3
1.2 : Oscillateur de relaxation	8
1.3 : Oscillateur à pont de Wien	11
1.4 : Oscillateur à résistance négative	14
2. Électronique numérique	18
2.1 : Condition de Shannon	18
2.2 : Filtrage numérique avec Scilab	21
3. Modulation-Démodulation	25
3.1 : Modulation d’amplitude	25
3.2 : Démodulation d’amplitude	28

ALI-Oscillateurs

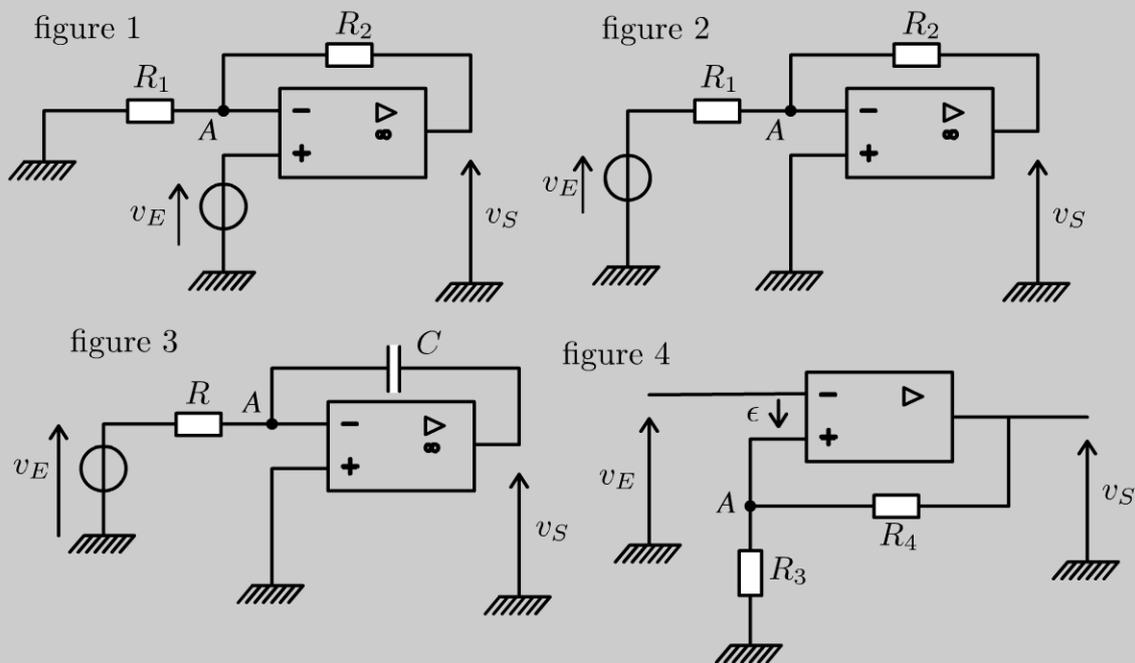
1

Exercice 1.1 : Montages fondamentaux avec des amplificateurs linéaires intégrés (ALI)

On considère quatre montages avec des amplificateurs linéaires intégrés idéaux.

On pose $\beta = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$.

1. Déterminer la fonction de transfert pour les figures 1 et 2.
2. Déterminer la relation entre $v_E(t)$ et $v_S(t)$ par deux méthodes pour la figure 3. À $t = 0$, on applique une tension continue $v_E = -V_0 < 0$ au dispositif et le condensateur est déchargé. Déterminer la tension de sortie $v_S(t)$ pour $t > 0$.
3. Pour quelle valeur de v_E la tension de sortie de la figure 4 passe-t-elle de la valeur $v_S = V_{\text{sat}}$ à $v_S = -V_{\text{sat}}$? Tracer le graphe représentant v_S en fonction de v_E . Comment appelle-t-on ce montage ?



Analyse du problème

Cet exercice reprend quelques montages fondamentaux avec des amplificateurs linéaires intégrés en régime linéaire ou en régime de saturation. On va voir plusieurs méthodes permettant d'obtenir l'équation différentielle.

Cours : La méthode générale pour la mise en équation dans les montages avec des amplificateurs linéaires intégrés est d'écrire

- le théorème de Millman ou la loi des noeuds en termes de potentiels à tous les noeuds sauf à la masse et à la sortie,
- l'équation de fonctionnement de l'amplificateur linéaire intégré : saturation positive ou saturation négative ou régime linéaire ($\varepsilon = 0$ pour un amplificateur linéaire intégré idéal).



Figure 1 : On suppose l'amplificateur linéaire intégré idéal en régime linéaire puisqu'on a une rétroaction de la sortie sur l'entrée inverseuse. Aucun courant ne rentre dans les entrées (+) et (-) et $\varepsilon = 0 - v_A = 0$.

On a deux inconnues : v_A et v_S . Il faut deux équations :

- théorème de Millman en A :

$$v_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{v_S}{R_2}$$

- amplificateur linéaire intégré idéal en régime linéaire :

$$\varepsilon = v_E - v_A = 0$$

Comme $v_A = v_E$, on a :

$$\frac{v_S}{v_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

C'est un montage non-inverseur.

Figure 2 : On suppose l'amplificateur linéaire intégré idéal en régime linéaire puisqu'on a une rétroaction de la sortie sur l'entrée inverseuse. Aucun courant ne rentre dans les entrées (+) et (-) et $\varepsilon = 0 - v_A = 0$.

On a deux inconnues : v_A et v_S . Il faut deux équations :

- théorème de Millman en A :

$$v_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{v_E}{R_1} + \frac{v_S}{R_2}$$

- amplificateur linéaire intégré idéal en régime linéaire :

$$\varepsilon = 0 - v_A = 0$$

Comme $v_A = 0$, on a :

$$\frac{v_S}{v_E} = -\frac{R_2}{R_1}$$

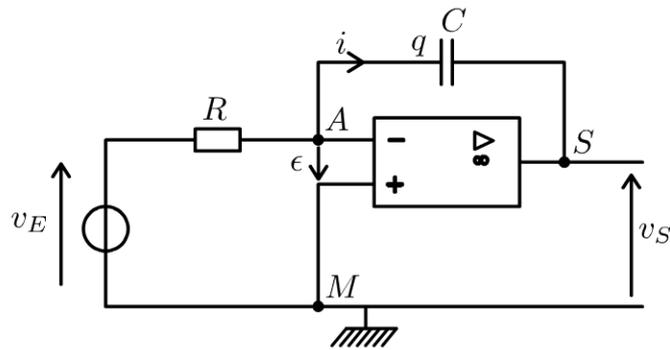
C'est un montage inverseur.

Figure 3 :

Première méthode

On cherche à obtenir directement l'équation différentielle.

On suppose l'amplificateur linéaire intégré idéal en régime linéaire puisqu'on a une rétroaction de la sortie sur l'entrée inverseuse. Aucun courant ne rentre dans les entrées (+) et (-) et $\varepsilon = 0 - v_A = 0$.



On a deux inconnues : v_A et v_S . Il faut donc deux équations :

- loi des noeuds en termes de potentiels en A :

$$\frac{v_e}{R} - i = 0$$

Il faut relier l'intensité i à la tension de sortie v_S . Soit q la charge du condensateur. On a $i = \frac{dq}{dt}$ et $q = C(v_A - v_S)$.

- amplificateur linéaire intégré idéal en régime linéaire :

$$\varepsilon = 0 = 0 - v_A$$

Soit :

$$\frac{v_e}{R} + C \frac{dv_S}{dt} = 0$$

On obtient finalement :

$$v_S(t) - v_S(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_e(t) dt$$

On a donc un montage intégrateur. L'amplificateur linéaire intégré doit rester en régime linéaire pour fonctionner en intégrateur.

Deuxième méthode

On se place en régime sinusoïdal forcé pour calculer la fonction de transfert. On pourra en déduire directement l'équation différentielle.

Les deux équations sont :

- théorème de Millman en A :

$$\underline{V}_A \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right) = \frac{V_E}{R} + \underline{V}_S jC\omega$$

- amplificateur linéaire intégré idéal en régime linéaire :

$$\underline{\varepsilon} = 0 = 0 - \underline{V}_A$$

On a alors :

$$\underline{V_S} = -\frac{V_E}{jRC\omega}$$

Soit :

$$j\omega\underline{V_S} = -\frac{V_E}{RC}$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{dv_S}{dt} = -\frac{v_e}{RC}$$

On retrouve bien le même résultat qu'avec la méthode 1.

À $t = 0$, $v_S = 0$ et $v_E = -V_0$. On intègre de 0 à t :

$$v_S(t) - 0 = \frac{V_0}{RC}t$$



Ce résultat est valable uniquement jusqu'à 15 V où on a une saturation de l'amplificateur linéaire intégré.

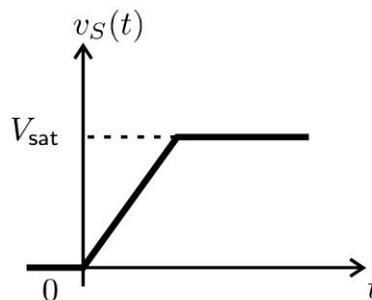


Figure 4 :

On n'a pas de rétroaction de la sortie sur l'entrée inverseuse. Le régime linéaire ne peut pas être stable. On a donc uniquement un régime de saturation positive ou négative. On définit :

$$\varepsilon = v_A - v_e$$

Cours

On a plusieurs modes de fonctionnement possible de l'amplificateur linéaire intégré. Pour analyser un tel montage, on fait des hypothèses de fonctionnement et on vérifie les hypothèses à la fin des calculs.



1^{re} hypothèse :

Supposons l'amplificateur linéaire intégré en régime de saturation positive. Les deux équations sont :

- théorème de Millman en A :

$$v_A \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{v_S}{R_4}$$

Soit :

$$v_A = \frac{R_3}{R_3 + R_4} v_S = \beta v_S$$

- amplificateur linéaire intégré en régime de saturation positive :

$$v_S = +V_{\text{sat}}$$

Remarque : On aurait pu appliquer la formule du diviseur de tension pour calculer V_A puisque $i_+ = 0$.



Vérification des hypothèses : Il faut que $\epsilon > 0$. Comme $v_A = \beta V_{\text{sat}}$, on doit avoir :

$$v_E < \beta V_{\text{sat}}$$

2^e hypothèse :

Supposons l'amplificateur linéaire intégré en régime de saturation négative. Les deux équations sont :

- théorème de Millman en A : C'est la même équation d'avec la première hypothèse. On a :

$$v_A = \beta v_S$$

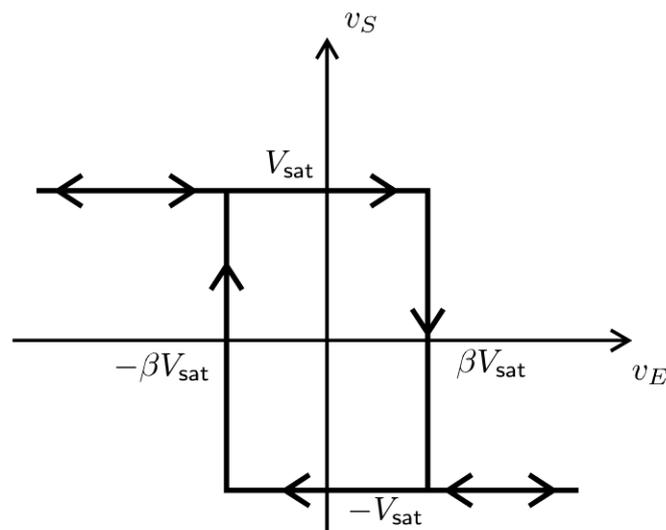
- amplificateur linéaire intégré en régime de saturation négative :

$$v_S = -V_{\text{sat}}$$

Vérification des hypothèses : Il faut que $\epsilon < 0$. Comme $v_A = -\beta V_{\text{sat}}$, on doit avoir :

$$v_E > -\beta V_{\text{sat}}$$

Conclusion : On a la caractéristique suivante :



Explication du sens de parcours du cycle :

- On augmente la tension v_E à partir d'une valeur inférieure à $-\beta V_{\text{sat}}$. La tension de sortie vaut V_{sat} . v_S vaut V_{sat} tant que v_E est inférieure à βV_{sat} .

On a un basculement de la tension de sortie de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$ quand v_E vaut βV_{sat} . Au delà, v_S vaut $-V_{\text{sat}}$ puisque v_E est comparée à $-\beta V_{\text{sat}}$.

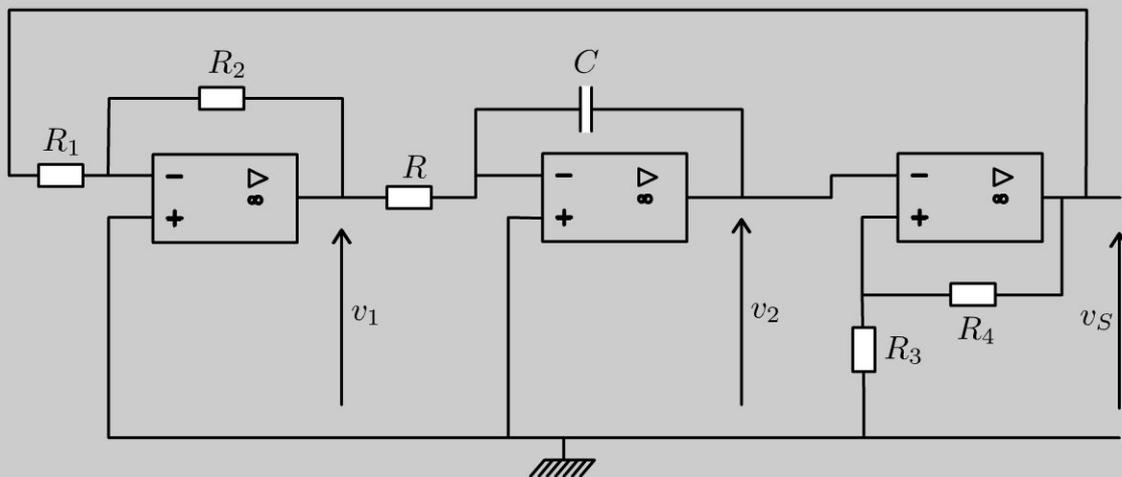
- On diminue la tension v_E à partir d'une valeur supérieure à βV_{sat} . La tension de sortie vaut $-V_{\text{sat}}$. v_S vaut $-V_{\text{sat}}$ tant que v_E est supérieure à $-\beta V_{\text{sat}}$. On a un basculement de la tension de sortie de $-V_{\text{sat}}$ à V_{sat} quand v_E vaut $-\beta V_{\text{sat}}$. Au delà, v_S vaut V_{sat} puisque v_E est comparée à βV_{sat} .

Une fois le basculement effectué, le seuil de comparaison change. Ce montage permet d'éviter des rebonds successifs. Le cycle est appelé cycle à hystérésis.

Exercice 1.2 : Oscillateur de relaxation

On considère le montage suivant reprenant les figures décrites dans l'exercice précédent. À l'instant $t=0$, la tension de sortie v_S est égale à $v_S = V_{\text{sat}} = 14,7 \text{ V}$ et le condensateur est déchargé. On donne : $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 4,7 \text{ k}\Omega$; $R = 10 \text{ k}\Omega$; $C = 10 \text{ nF}$; $R_3 = 4,7 \text{ k}\Omega$; $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$.

1. Étudier l'évolution ultérieure des tensions $v_S(t)$, $v_1(t)$ et $v_2(t)$.
2. Tracer les graphes de ces trois tensions et calculer la fréquence des signaux obtenus.



Analyse du problème

Dans l'exercice précédent, on a analysé en détail le fonctionnement de chaque montage à amplificateur linéaire intégré. On travaille en régime transitoire. Il faut donc étudier le montage en partant de $t=0$ avec une saturation positive d'après l'énoncé. On reste en saturation positive tant que v_2 est inférieure à βV_{sat} . On calcule le temps t_1 correspondant au premier basculement puis le temps t_2 correspondant au deuxième basculement.

Il ne faut pas utiliser les notations complexes pour analyser le montage globalement car le circuit n'est pas linéaire. Par contre, on peut utiliser les complexes pour déterminer l'équation différentielle reliant v_1 et v_2 .



1. Régime de saturation positive entre $t = 0$ et $t = t_1$:

La tension de sortie vaut : $v_S = 14,7 \text{ V}$.

On en déduit que : $v_1 = -\frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}} = -6,9 \text{ V}$.

On a vu que $\frac{dv_2}{dt} = \frac{-v_1}{RC} = \frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}}$.

On a donc :

$$v_2(t) - v_2(0) = \frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}} t = 69000 t$$

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue. Le condensateur est déchargé à $t = 0$, donc :

$$v_2(t) = 69000 t$$

Vérification des hypothèses : Il faut que $v_2 < \beta V_{\text{sat}}$.

Pour $t = t_1$, v_2 atteint $\beta V_{\text{sat}} = 4,7 \text{ V}$. Il y a basculement de la tension de sortie de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$.

Pour $t = t_1$, on a : $69000 t_1 = \beta V_{\text{sat}}$. D'où :

$$t_1 = 6,81 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Régime de saturation négative entre $t = t_1$ et $t = t_2$:

La tension de sortie vaut : $v_S = -14,7 \text{ V}$.

On en déduit que : $v_1 = \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}} = 6,9 \text{ V}$.

On a vu que $\frac{dv_2}{dt} = \frac{-v_1}{RC} = -\frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}}$.

On a donc :

$$v_2(t) - v_2(t_1) = -\frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}}(t - t_1) = -69000(t - t_1)$$

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue. La tension aux bornes du condensateur vaut $4,7 \text{ V}$ à $t = t_1$, donc :

$$v_2(t) = 4,7 - 69000(t - t_1)$$

Vérification des hypothèses : il faut que $v_2 > -\beta V_{\text{sat}}$

Pour $t = t_2$, v_2 atteint $-\beta V_{\text{sat}} = -4,7 \text{ V}$. Il y a basculement de la tension de sortie de $-V_{\text{sat}}$ à V_{sat} .

Pour $t = t_2$, on a : $v_2(t_2) = -4,7 = 4,7 - 69000(t_2 - t_1)$. D'où :

$$t_2 - t_1 = 1,36 \times 10^{-4} \text{ s}$$



Attention au montage intégrateur avec les conditions initiales. Il est inutile de remplacer t_1 par une expression qui peut être compliquée. Il est préférable de garder des termes en $t - t_1$.



2. Régime de saturation positive entre $t = t_2$ et $t = t_3$:

La tension de sortie vaut : $v_S = 14,7$ V.

On en déduit que : $v_1 = -\frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}} = -6,9$ V.

On a vu que $\frac{dv_2}{dt} = \frac{-v_1}{RC} = \frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}}$.

On a donc :

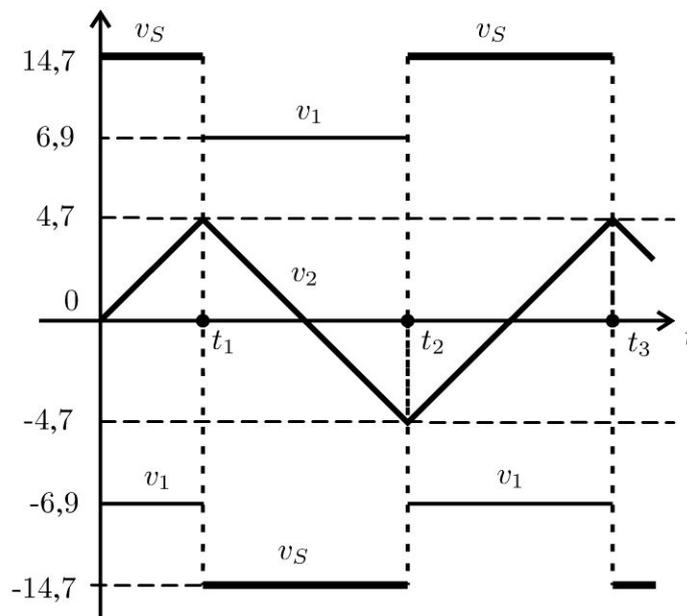
$$v_2(t) - v_2(t_2) = \frac{1}{RC} \frac{R_2}{R_1} V_{\text{sat}} t = 69000 t$$

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue. La tension aux bornes du condensateur vaut $-4,7$ V à $t = t_2$, donc :

$$v_2(t) = -4,7 + 69000(t - t_2)$$

Vérification des hypothèses : Il faut que $v_2 < \beta V_{\text{sat}}$.

Pour $t = t_3$, v_2 atteint $\beta V_{\text{sat}} = 4,7$ V. Il y a basculement de la tension de sortie de V_{sat} à $-V_{\text{sat}}$.



Oscillations périodiques :

On a des signaux périodiques de période $T = t_3 - t_1$.

D'après l'étude précédente, on a $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$. La période des oscillations est :

$$T = 2(t_2 - t_1)$$

La fréquence des signaux est donc :

$$f = \frac{1}{T} = 3670 \text{ Hz}$$

Exercice 1.3 : Oscillateur à pont de Wien*

L'amplificateur linéaire intégré est idéal et fonctionne en régime linéaire. La tension v_E est une tension sinusoïdale, de pulsation ω . On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

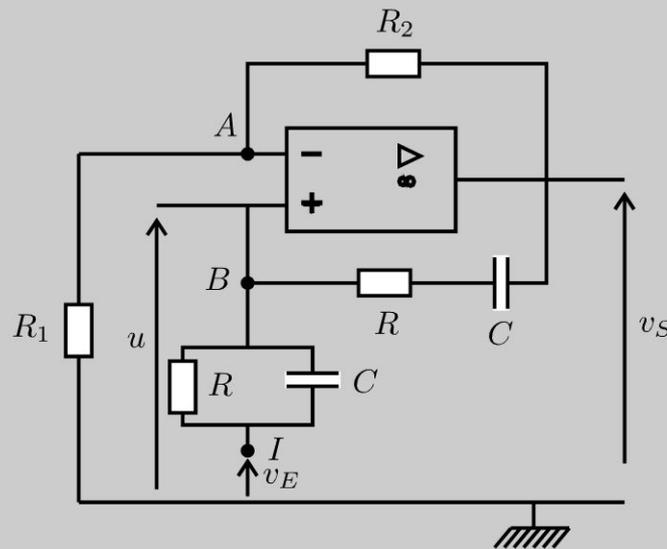
et $X = x - \frac{1}{x}$.

1. Déterminer $K = \frac{V_S}{U}$. Exprimer \underline{U} en fonction de $\underline{V_E}$ et $\underline{V_S}$. Montrer que l'on

peut écrire : $\underline{U} = \underline{T} \underline{V_E} + \frac{1}{3 + jX} \underline{V_S}$.

2. Exprimer $\underline{V_S}$ en fonction de K , X et $\underline{V_E}$.

3. Déterminer la valeur du couple (K, ω) pour laquelle on a des oscillations sinusoïdales avec une tension d'entrée nulle.



Analyse du problème

Après avoir déterminé la fonction de transfert, on va en déduire la condition pour avoir des oscillations sinusoïdales avec une tension d'entrée nulle.



1. On applique le théorème de Millman en A et comme l'amplificateur linéaire intégré est idéal en régime linéaire : $\epsilon = 0$. On a donc :

$$\begin{cases} \frac{V_A}{R_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V_S}{R_2} \\ \underline{V_A} = \underline{U} \end{cases}$$

D'où $\underline{U} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V_S}{R_2}$, soit : $\underline{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{V_S}$.

On en déduit :

$$K = \frac{V_S}{\underline{U}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

On applique le théorème de Millman en B :

$$\underline{V}_B \left(\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \right) = \frac{V_S}{R + \frac{1}{jC\omega}} + \underline{V}_E \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right)$$



Pour bien mener à terme les calculs, il ne faut pas multiplier par l'expression conjuguée. Il est préférable de faire intervenir le plus vite possible des termes en $jx = jRC\omega$.



D'où :

$$\underline{V}_B \left(1 + jRC\omega + \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}} \right) = \frac{V_S}{1 + \frac{1}{jRC\omega}} + \underline{V}_E (1 + jRC\omega)$$

Comme $\underline{V}_B = \underline{U}$, on a :

$$\underline{U} \left(1 + jx + \frac{1}{1 + \frac{1}{jx}} \right) = \frac{V_S}{1 + \frac{1}{jx}} + \underline{V}_E (1 + jx)$$

On multiplie par $1 + \frac{1}{jx}$:

$$\underline{U} \left((1 + jx) \left(1 + \frac{1}{jx} \right) + 1 \right) = \underline{V}_S + \underline{V}_E (1 + jx) \left(1 + \frac{1}{jx} \right)$$

D'où :

$$\underline{U} \left(3 + j \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) = \underline{V}_S + \underline{V}_E \left(2 + j \left(x - \frac{1}{x} \right) \right)$$

On obtient finalement :

$$\underline{U} = \underline{V}_E \frac{2 + j \left(x - \frac{1}{x} \right)}{3 + j \left(x - \frac{1}{x} \right)} + \frac{\underline{V}_S}{3 + j \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

soit :

$$\underline{U} = \underline{T} \underline{V}_E + \frac{1}{3 + jX} \underline{V}_S \quad \text{avec} \quad \underline{T} = \frac{2 + jX}{3 + jX}$$

2. D'après la question 1 : $\underline{U} = \frac{V_S}{K}$. On a donc :

$$\frac{V_S}{K} = \frac{2 + jX}{3 + jX} \underline{V_E} + \frac{1}{3 + jX} \underline{V_S}$$

Soit : $\underline{V_S} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{3 + jX} \right) = \frac{2 + jX}{3 + jX} \underline{V_E}$. On obtient finalement :

$$\underline{V_S} = \frac{K(2 + jX)}{3 - K + jX} \underline{V_E}$$

3. Obtention de l'équation différentielle

On fait le produit en croix :

$$\underline{V_S} \left(3 - K + j \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) = K \left(2 + j \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) \underline{V_E}$$

On multiplie par jx :

$$\underline{V_S} ((3 - K) jx + (jx)^2 + 1) = K (2jx + (jx)^2 + 1) \underline{V_E}$$

Pour en déduire l'équation différentielle reliant $v_S(t)$ et $v_E(t)$, il faut remplacer formellement $jx = \frac{j\omega}{\omega_0}$ par $\frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dt}$, $\underline{V_E}$ par $v_E(t)$ et $\underline{V_S}$ par $v_S(t)$.



On en déduit directement l'équation différentielle reliant $v_S(t)$ et $v_E(t)$:

$$(3 - K) \frac{1}{\omega_0} \frac{dv_S}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2v_S}{dt^2} + v_S = K \left(2 \frac{1}{\omega_0} \frac{dv_E}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2v_E}{dt^2} + v_E \right)$$

Pour $v_E = 0$, on a l'équation d'un oscillateur harmonique si $K = 3$. On a alors :

$$\frac{d^2v_S}{dt^2} + \omega_0^2 v_S = 0$$

On a donc des oscillations sinusoïdales de pulsation $\omega = \omega_0$.

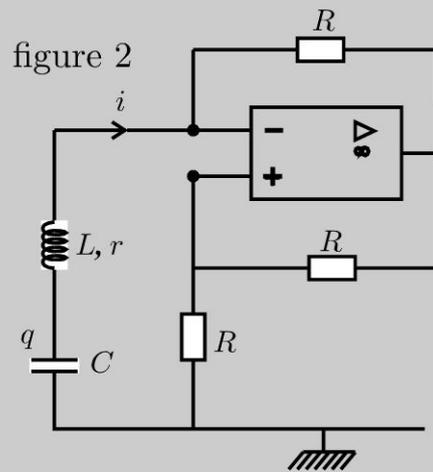
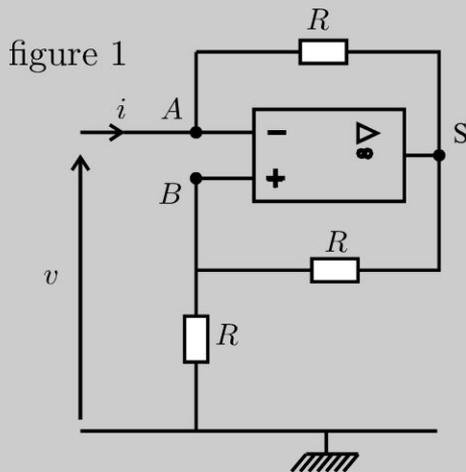
Remarque

On va étudier dans l'exercice suivant la naissance des oscillations. Le terme $(3 - K)$ ne peut pas être rigoureusement nul en pratique. Il doit être négatif pour observer la naissance des oscillations.

Exercice 1.4 : Oscillateur à résistance négative

L'amplificateur linéaire intégré est idéal. On note V_{sat} et $-V_{\text{sat}}$ les tensions de saturation positive et négative.

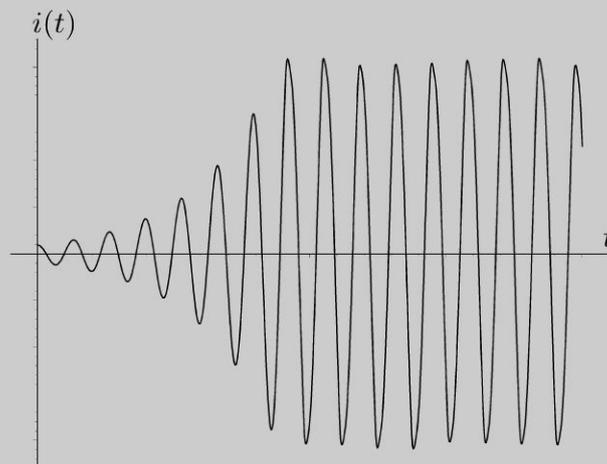
1. On considère le montage de la figure 1. Donner la relation entre v et i en régime linéaire et en régime de saturation. Quelle est la condition sur i pour être en régime linéaire ? Construire le graphe $v = f(i)$. Dans quelle partie le montage est-il équivalent à une résistance négative ? Donner une interprétation physique.



2. Pour le montage de la figure 2, établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$ en régime linéaire et en régime de saturation.

3. Quelle est la condition sur R pour avoir des oscillations sinusoïdales ?

4. Interpréter l'enregistrement suivant avec des conditions initiales quasi nulles. Pourquoi doit-on avoir $r < R$ pour avoir des oscillations quasi sinusoïdales ?



Analyse du problème

La connaissance de la caractéristique du dipôle de la figure 1 permettant de simplifier l'étude du montage de la figure 2.

On va étudier la naissance des oscillations avec une phase initiale d'amplification où l'amplificateur linéaire intégré est en régime linéaire.



1. Régime linéaire :

Bilan des inconnues : v_S , v et v_B . On cherche à les exprimer en fonction de i .

Il faut donc écrire 3 équations :

$$\left| \begin{array}{l} \text{théorème de Millman en } B \\ \text{loi des noeuds en termes de potentiels en } A \\ \text{amplificateur linéaire intégré idéal en régime linéaire} \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\left| \begin{array}{l} v_B \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{v_S}{R} \\ i + \frac{(v_S - v)}{R} = 0 \\ \varepsilon = v_B - v = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{D'où : } v_S = R \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) v = 2v.$$

On en déduit que :

$$v = -Ri \text{ (en convention récepteur)}$$

Il ne faut pas oublier de **vérifier les hypothèses**. Les calculs précédents sont valables à condition d'être en régime linéaire. Il faut donc que $|v_S| \leq V_{sat}$.

Les relations précédentes donnent : $v_S = -2Ri$.

On appelle i_0 la valeur de i pour laquelle v_S vaut $-V_{sat}$:

$$i_0 = \frac{V_{sat}}{2R}$$

Pour être en régime linéaire, on doit donc avoir :

$$|i| \leq i_0$$

Régime de saturation positive ou négative :

Les trois équations s'écrivent :

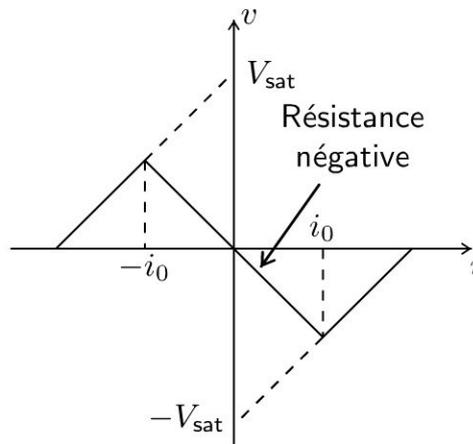
$$\left| \begin{array}{l} v_B \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{v_S}{R} \\ i + \frac{(v_S - v)}{R} = 0 \\ v_S = \pm V_{sat} \end{array} \right.$$

On a alors :

$$v = Ri + V_S$$

Caractéristique :

On en déduit la caractéristique donnant v en fonction de i :



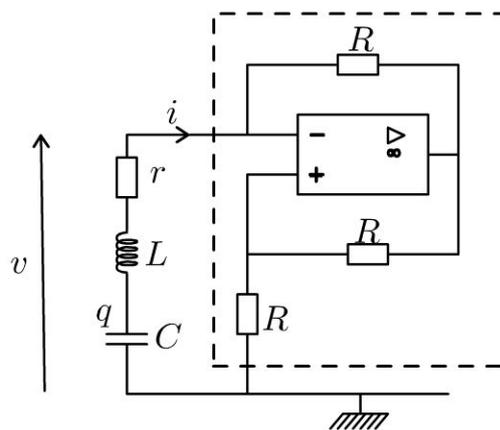
Pour $i \in [-i_0, i_0]$, le montage est équivalent à une résistance négative. C'est en fait un générateur de tension proportionnelle à l'intensité. L'énergie vient de l'alimentation de l'amplificateur linéaire intégré qui n'est pas représentée sur le schéma mais qu'il ne faut pas oublier en TP !

2. On a étudié dans la question précédente le dipôle représenté en pointillés.

Régime linéaire :

L'équation différentielle s'écrit :

$$v = -L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} - ri = -Ri$$



D'après les orientations de i et q ,

$$i = -\frac{dq}{dt}$$



De très nombreuses erreurs de signe sont commises lors de la mise en équation : loi d'Ohm, relation entre i et q , relation entre q et la tension aux bornes du condensateur.



En dérivant l'équation précédente par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{(r - R)}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Le système est donc divergent si $R > r$. Ce régime reste valable tant que la tension v_S n'atteint pas la saturation de l'amplificateur opérationnel. On n'a plus la même équation différentielle une fois la saturation atteinte.

Régime de saturation positive ou négative :

L'équation différentielle s'écrit :

$$v = -L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} - ri = Ri + v_S$$

On est en régime de saturation avec $v_S = \pm V_{sat}$. En dérivant l'équation précédente par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{(r + R)}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

On a donc un régime convergent.

3. Pour $r = R$, on retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$$

On peut donc avoir des oscillations sinusoïdales.

Remarque : Dans l'exercice précédent, on a utilisé une deuxième méthode qui utilise la fonction de transfert permettant de trouver une condition pour avoir des oscillations sinusoïdales.



4. Analyse de la courbe :

- À $t = 0$, les conditions initiales sont quasi nulles. L'amplificateur linéaire intégré est en régime linéaire. On a une phase d'amplification. L'énergie reçue vient de l'alimentation de l'amplificateur linéaire intégré. On observe sur la courbe un régime pseudo-périodique divergent.
- Il y a ensuite une saturation de l'amplificateur linéaire intégré. On n'a plus la même équation différentielle et on observe une phase d'amortissement.
- On a ensuite une alternance des phases d'amplification et d'amortissement. Un équilibre peut se créer et on obtient d'après la figure des solutions quasi sinusoïdales.

Conclusion :

- $r > R$: le système ne peut pas démarrer. On a toujours une phase d'amortissement et on ne peut pas observer la naissance des oscillations.
- $r = R$ est un cas théorique puisqu'en pratique, on n'a pas l'égalité parfaite.
- $r < R$: on peut observer la naissance des oscillations.

Exercice 2.1 Condition de Shannon

On souhaite réaliser l'échantillonnage d'un signal $s(t)$. Les paramètres de l'échantillonnage sont : N nombre de points, et f_e fréquence d'échantillonnage.

1. Que vaut la période d'échantillonnage et l'intervalle minimum entre deux raies pour $N = 1000$ et $f_e = 20$ kHz. Comment s'applique le théorème de Shannon dans ces conditions ? Comment diminuer l'intervalle minimum entre deux raies ? Comment échantillonner un signal de fréquence plus élevée ?

2. Le nombre de points d'échantillonnage est imposé pour un oscilloscope. Proposer une valeur de t_{obs} pour visualiser deux signaux sinusoïdaux de fréquence 4000 et 4020 Hz avec $N = 4096$.

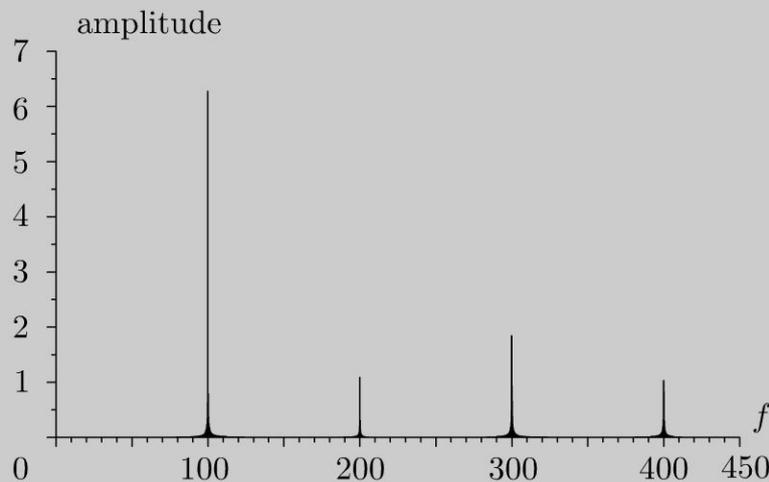
3. On souhaite visualiser le spectre de Fourier d'un signal créneau d'amplitude 5 V et de fréquence 100 Hz.

Le programme suivant permet de visualiser un signal et le spectre de Fourier. Cet algorithme sera utilisé dans l'exercice suivant. Proposer une valeur de N et de la fréquence d'échantillonnage.

```
clear
N=... //nombre de points au total
Fe = ..., Te = 1/Fe, amp = 5, F = 100, T = 1/F, Nbperiode = round(N * Te/T),
Nbptsignal = round(T/Te)
t = [0 : Te : (N - 1) * Te]
for i = 1 : N
j = modulo(i, Nbptsignal)
if (j < (Nbptsignal/2)) then
s(i) = amp
else s(i) = -amp
end;
end;
//spectre de Fourier
pasf = Fe/N //pas en fréquence
f = pasf * [0 : N - 1]
sfft=fft(s, -1)
xset("window",1) //fenêtre numéro 1
clf
```

```
xset("font size",0.5)
subplot(2,1,1);
plot2d(t, s)
xlabel("Signal en fonction du temps")
subplot(2,1,2);
plot2d3(f(1 : N/2), 1/N * 2 * abs(sfft(1 : N/2))) //spectre corrigé en divisant par
N et *2 car fonction paire de la TF.
xlabel("Spectre de Fourier") //plot2d3 permet d'afficher les raies
```

4. On observe le spectre de Fourier d'un signal créneau avec $f_e = 900$ Hz. Interpréter.



Analyse du problème

Il faut bien définir les paramètres de l'échantillonnage pour pouvoir appliquer le théorème de Shannon. Si le théorème de Shannon n'est pas vérifié, on observe un repliement du spectre.



1. a) L'échantillonnage permet de prélever un ensemble de N valeurs prises à des instants discrets séparés de T_e que l'on appelle la période d'échantillonnage.

Le premier point correspond à $t = 0$, le deuxième à $t = T_e$, le $i^{\text{ème}}$ point à $t = (i - 1) T_e$ et le $N^{\text{ème}}$ point à $t = (N - 1) T_e$.

La durée d'observation du signal est donc égale à $t_{\text{obs}} = (N - 1) T_e$. Si N est très grand, alors on fait souvent l'approximation que $t_{\text{obs}} \approx N T_e$.

La période d'échantillonnage vaut : $T_e = \frac{1}{f_e} = 50 \mu\text{s}$.

L'intervalle minimal entre deux raies dans le domaine spectral est :

$$\Delta f = \frac{1}{t_{\text{obs}}} = \frac{1}{N T_e} = \frac{f_e}{N} = 20 \text{ Hz}$$

D'après le théorème de Shannon, la fréquence la plus haute du signal $s(t)$ doit être inférieure à la demi-fréquence d'échantillonnage :

$$f_{\max \text{ du signal}} < \frac{f_e}{2}$$

On doit donc avoir : $f_{\max \text{ du signal}} < 10 \text{ kHz}$

b) On a vu que $\Delta f = \frac{f_e}{N}$ et $f_{\max \text{ du signal}} < \frac{f_e}{2}$.

- Si on veut augmenter la précision en fréquences dans le domaine spectral, on peut augmenter le nombre de points d'échantillonnage (ce qui revient à augmenter la durée d'observation) ou diminuer la fréquence d'échantillonnage.
- Si on veut augmenter la fréquence maximale du signal à étudier, il vaut augmenter la fréquence d'échantillonnage pour vérifier le théorème de Shannon.

2. On peut modifier la durée d'observation en modifiant la base de temps.

On a alors : $f_e = \frac{N}{t_{\text{obs}}}$ et $\Delta f = \frac{1}{t_{\text{obs}}}$.

Si t_{obs} diminue, alors f_e augmente et Δf augmente. Il faut donc trouver un compromis entre f_e et Δf .

la durée d'observation doit vérifier deux conditions :

- $f_e \geq 10 \text{ kHz}$, soit :

$$t_{\text{obs}} \leq \frac{N}{f_e} \approx 0,4 \text{ s}$$

- $\Delta f \leq 10 \text{ Hz}$, il faut avoir :

$$t_{\text{obs}} \geq \frac{1}{\Delta f} = 0,1 \text{ s}$$

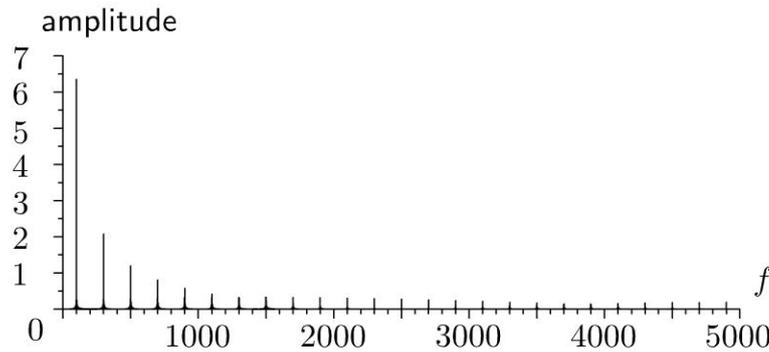
On choisit une durée d'observation d'environ 0,4 s.

3. Le signal créneau contient un grand nombre d'harmoniques impairs. La décroissance est en $1/n$. Si on souhaite visualiser l'harmonique 30, il faut une fréquence d'échantillonnage supérieure à $2f_{\max \text{ du signal}} \approx 2 \times 30 \times f = 6000 \text{ Hz}$.

On choisit par exemple $f_e = 6000 \text{ Hz}$ et $N = 4000$. On a souvent intérêt à prendre un nombre de points multiples de 2^k afin de réduire les temps de calcul puisqu'on peut appliquer un algorithme rapide de FFT. On prend donc $N = 4096$.

L'intervalle minimal entre deux raies dans le domaine spectral est :

$$\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{6000}{4096} = 1,46 \text{ Hz}$$



4. Le théorème de Shannon n'est pas vérifié. La demi-fréquence d'échantillonnage est 450 Hz. L'amplitude des harmoniques n'est pas une fonction décroissante. On observe un repliement du spectre :

- La fréquence à 500 Hz est 50 Hz au dessus de $\frac{f_e}{2}$. Elle apparaît sur le spectre 50 Hz au dessous de 450 Hz, soit à 400 Hz.
- La fréquence à 700 Hz est 250 Hz au dessus de $\frac{f_e}{2}$. Elle apparaît sur le spectre 250 Hz au dessous de 450 Hz, soit à 200 Hz.

On peut donc observer à cause de l'échantillonnage un repliement des fréquences élevées parmi les fréquences basses.

Au cinéma, la fréquence d'échantillonnage est de 24 images par seconde. C'est le même phénomène qui fait tourner les roues des voitures à l'envers.

Exercice 2.2 Filtrage numérique avec Scilab

On souhaite réaliser un filtrage numérique avec un passe-bas du premier ordre.

1. Déterminer l'équation différentielle reliant l'entrée V_E et la sortie V_S aux bornes du condensateur pour un circuit RC série. Définir ω_c la pulsation de coupure à -3 dB.

2. Le signal d'entrée est échantillonné avec une période d'échantillonnage T_e tel que $V_E[k] = V_S(kT_e)$ avec $T_e = \frac{1}{f_e}$ et k variant de 1 à N . On veut construire la

suite $V_S[k] = V_S(kT_e)$. Intégrer l'équation différentielle entre les points de mesures kT_e et $(k+1)T_e$. On utilise la méthode des trapèzes $\frac{(V_S(k+1)T_e + V_S(kT_e))}{2} T_e$ pour évaluer l'intégrale de $V_S dt$ entre kT_e et

$(k+1)T_e$. On part de $V_S[1] = 0$, montrer que la relation de récurrence peut se mettre sous la forme : $V_S[k+1] = A V_S[k] + B (V_E[k+1] + V_E[k])$. Exprimer A et B en fonction de T_e , et ω_c .

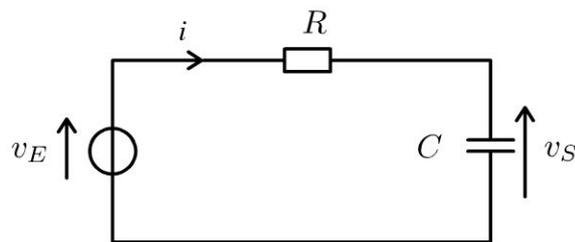
3. En s'aidant de l'énoncé de l'exercice précédent, réaliser un programme Scilab permettant de créer un signal d'entrée constitué de 1024 points et une fréquence d'échantillonnage de 1200 Hz, le signal de sortie après passage dans le filtre et la visualisation du signal et du spectre des signaux d'entrée et de sortie. Quel est le spectre de Fourier des signaux d'entrée et de sortie ?

Analyse du problème

Le théorème de Shannon doit être vérifié quand on fait du traitement numérique du signal. Comme pour le traitement analogique du signal, le traitement numérique du signal permet de transformer les signaux.



1.



L'équation différentielle entre l'entrée et la sortie s'écrit :

$$v_E = v_S + RC \frac{dv_S}{dt}$$

En notation complexe, on a : $\underline{V}_E = \underline{V}_S + jRC\omega \underline{V}_S$. On en déduit la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

C'est un filtre passe-bas du premier ordre. La pulsation de coupure à -3 dB est : $\omega_c = \frac{1}{RC}$. On obtient alors :

$$\frac{dv_S}{dt} + \omega_c v_S = \omega_c v_E$$

2. On sépare les variables : $dv_S = -\omega_c v_S(t) dt + \omega_c v_E(t) dt$.
On intègre entre les points de mesure kT_e et $(k+1)T_e$:

$$\begin{aligned} V_S((k+1)T_e) - V_S(kT_e) &= -\omega_c \frac{(V_S(k+1)T_e + V_S(kT_e))}{2} T_e + \dots \\ &\dots + \omega_c \frac{(V_E(k+1)T_e + V_E(kT_e))}{2} T_e \end{aligned}$$

On a alors :

$$V_S((k+1)T_e) \left(1 + \frac{\omega_c T_e}{2}\right) = V_S(kT_e) \left(1 - \frac{\omega_c T_e}{2}\right) + \dots \\ \dots + \omega_c T_e \frac{(V_E(k+1)T_e + V_E(kT_e))}{2}$$

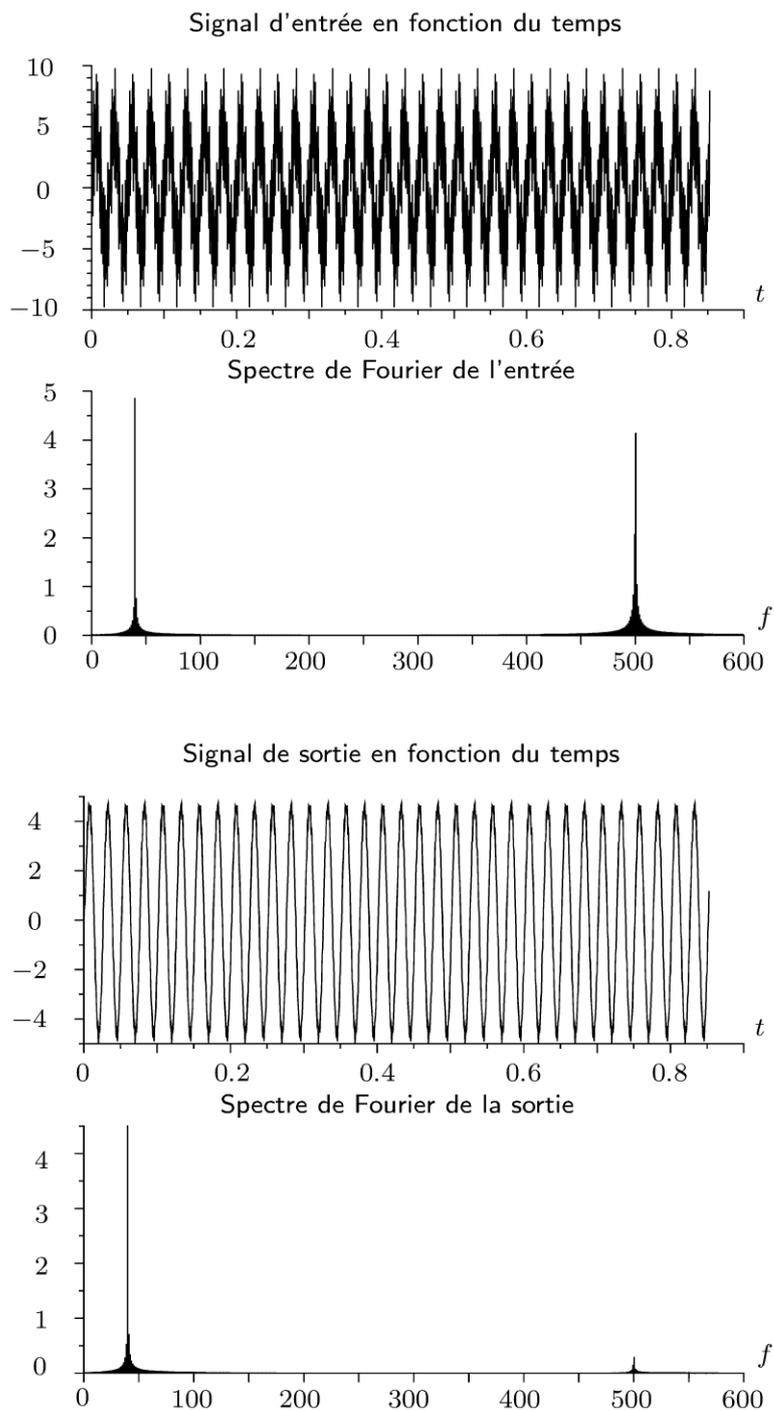
On en déduit finalement :

$$V_S((k+1)T_e) = V_S(kT_e) \frac{1 - \frac{\omega_c T_e}{2}}{1 + \frac{\omega_c T_e}{2}} + \omega_c T_e \frac{(V_E(k+1)T_e + V_E(kT_e))}{2 \left(1 + \frac{\omega_c T_e}{2}\right)}$$

$$\text{On pose alors : } A = \frac{1 - \frac{\omega_c T_e}{2}}{1 + \frac{\omega_c T_e}{2}} \text{ et } B = \frac{\omega_c T_e}{2 \left(1 + \frac{\omega_c T_e}{2}\right)}.$$

3. Le programme suivant permet de visualiser le signal d'entrée et de sortie.

```
clear
N = 1024, Fe = 1000, Te = 1/Fe, fc = 150, omegac = 2 * pi * fc
t = [0 : Te : (N - 1) * Te]
amp = 5, ve = amp * sin(2 * pi * 460 * t)
//signal de sortie
vs(1) = 0, A = (1 - omegac * Te/2)/(1 + omegac * Te/2),
B = omegac * Te/(2 * (1 + omegac * Te/2))
for i = 1 : N - 1
vs(i + 1) = A * vs(i) + B * (ve(i + 1) + ve(i))
end;
//spectre de Fourier
pasf = Fe/N, f = pasf * [0 : N - 1]
sfft=fft(vs, -1), efft=fft(ve, -1)
xset("window",1) //fenêtre numéro 1
clf, subplot(2,1,1);
plot2d(t, ve)
xset("font size",0.5)
xlabel("Signal en fonction du temps")
subplot(2,1,2);
plot2d3(f(1 : N/2), 1/N * 2 * abs(efft(1 : N/2)))
//spectre corrigé en divisant par N et *2 car fonction paire de la TF.
xlabel("Spectre de Fourier") //plot2d3 permet d'afficher les raies
xset("window",2) //fenêtre numéro 2
clf
subplot(2,1,1);
plot2d(t, vs)
xset("font size",0.5)
xlabel("Signal en fonction du temps")
subplot(2,1,2);
plot2d3(f(1 : N/2), 1/N * 2 * abs(sfft(1 : N/2)))
//spectre corrigé en divisant par N et *2 car fonction paire de la TF.
xlabel("Spectre de Fourier") //plot2d3 permet d'afficher les raies
On observe bien une très forte atténuation de la sinusoïde à 500 Hz.
```



Modulation – Démodulation

Exercice 3.1 Modulation d'amplitude

Pour transmettre un signal qui contient de l'information (par exemple une onde sonore de fréquence f_1), on module l'amplitude d'une porteuse de fréquence f_2 très supérieure à f_1 . Le signal modulant qui contient l'information est $u_1 = U_0 + U_{1m} \cos(\omega_1 t)$. En sortie d'un multiplieur, on a le signal $v_S = ku_1u_2$. La porteuse haute fréquence est $u_2 = U_{2m} \cos(\omega_2 t)$.

1. Montrer que le signal modulé s'écrit :

$v_S = A_{\text{mod}} \cos(\omega_2 t)$ où $A_{\text{mod}} = A(1 + m \cos(\omega_1 t))$ est l'amplitude modulée.

Exprimer A en fonction de k , U_0 et U_{1m} . Exprimer le taux de modulation m en fonction de U_0 et U_{1m} . Représenter le spectre de Fourier du signal modulé.

2. Construire la courbe $v_S(t)$ avec $U_0 = 1 \text{ V}$; $U_{1m} = 0,5 \text{ V}$; $f_1 = 1\,000 \text{ Hz}$; $U_{2m} = 1 \text{ V}$; $f_2 = 10\,000 \text{ Hz}$ et $k = 1$. Construire la courbe avec $U_{1m} = 1,5 \text{ V}$, les autres paramètres demeurant inchangés. Interpréter ? Dans quel cas est-on en sur-modulation ?

Analyse du problème

La modulation d'amplitude permet de transmettre à grande distance un signal sonore occupant la bande de fréquence 20 Hz – 20 kHz. Pour obtenir le spectre de Fourier, il faut linéariser le produit de fonctions sinusoïdales. L'allure des courbes obtenues dépend du taux de modulation



1. Le signal de sortie est :

$$v_S = ku_1u_2 = kU_{2m}(U_0 + U_{1m}\cos(\omega_1 t))\cos(\omega_2 t).$$

Il suffit de mettre U_0 en facteur pour obtenir la forme souhaitée :

$$v_S = ku_1u_2 = kU_{2m}U_0 \left(1 + \frac{U_{1m}}{U_0} \cos(\omega_1 t) \right) \cos(\omega_2 t)$$

On a bien $v_S = A_{\text{mod}} \cos(\omega_2 t)$ avec $A_{\text{mod}} = A(1 + m \cos(\omega_1 t))$;

$$A = kU_{2m}U_0 \text{ et } m = \frac{U_{1m}}{U_0}.$$

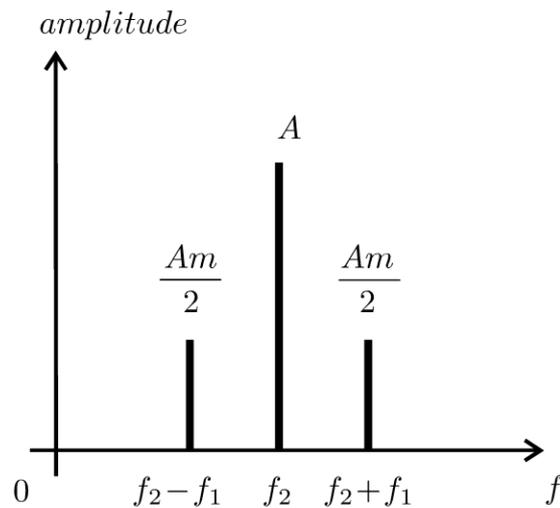
Pour obtenir le spectre de Fourier, il faut linéariser le produit de deux cosinus :

$$\begin{aligned} v_S &= A(1 + m \cos(\omega_1 t)) \cos(\omega_2 t) \\ &= A \cos(\omega_2 t) + Am \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_1 t) \end{aligned}$$

Soit :

$$v_S = A \cos(\omega_2 t) + \frac{Am}{2} (\cos((\omega_2 + \omega_1) t) + \cos((\omega_2 - \omega_1) t))$$

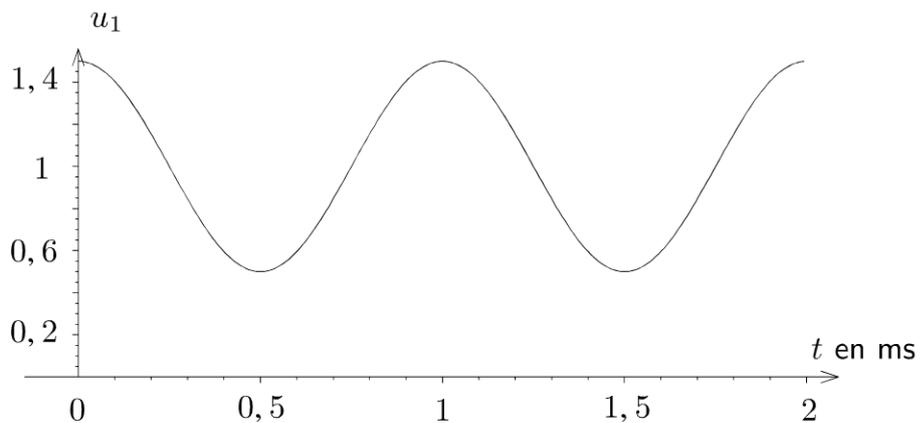
On a le spectre de Fourier :



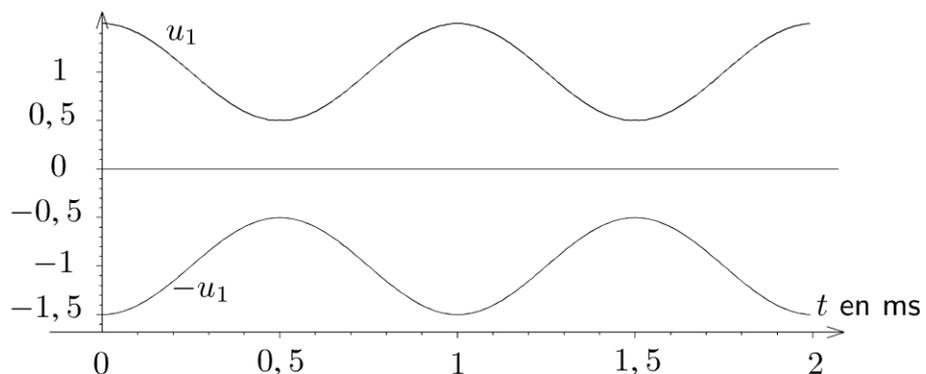
2. Première courbe : $m = \frac{U_{1m}}{U_0} = 0,5 < 1$

Il faut bien identifier le terme lent u_1 et le terme rapide u_2 . On va multiplier u_1 par un terme rapide qui varie entre -1 et 1 .

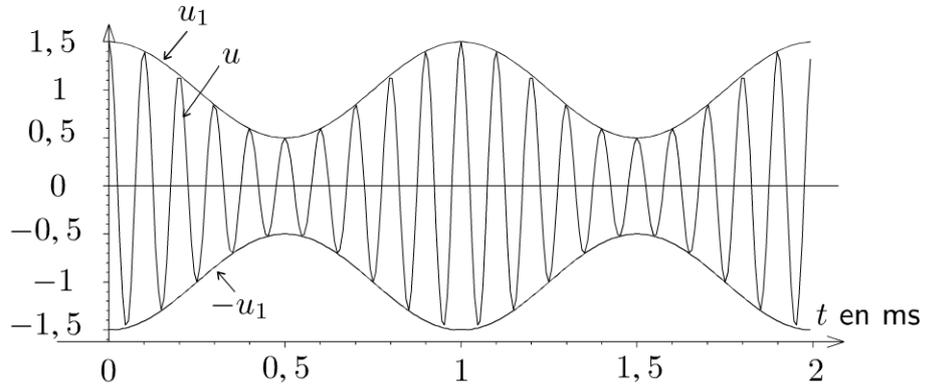
On représente d'abord le terme lent u_1 :



On représente ensuite le terme lent $-u_1$:

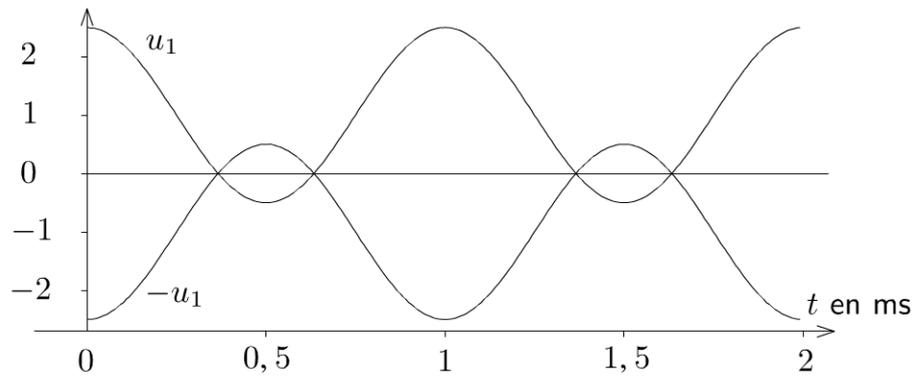


Il reste à multiplier par le terme rapide qui varie entre -1 et 1 avec une fréquence 10 fois plus grande que le terme lent :

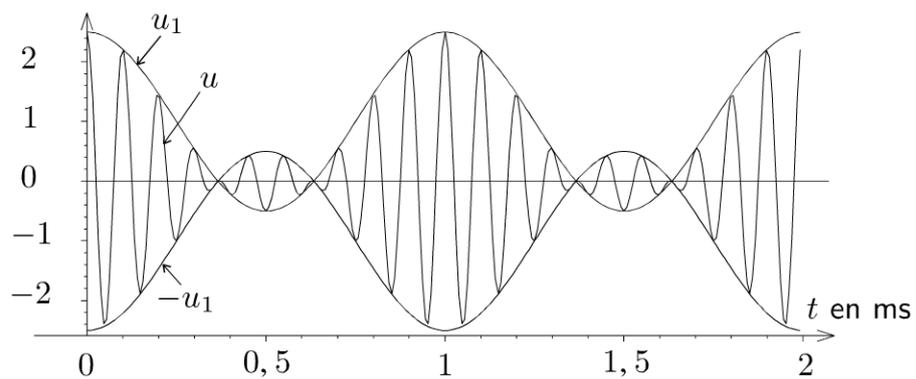


Deuxième courbe : $m = \frac{U_{1m}}{U_0} = 1,5 > 1$

On a un chevauchement des courbes u_1 et $-u_1$.



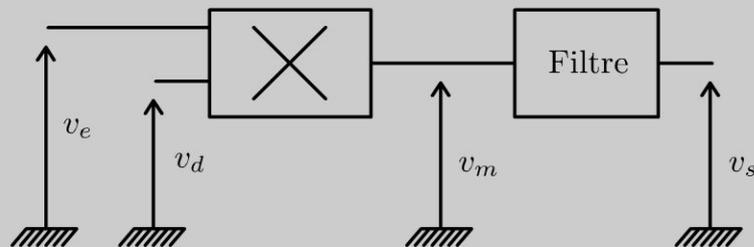
On en déduit la courbe représentant u en fonction du temps :



On est en surmodulation.

Exercice 3.2 Démodulation d'amplitude

Cet exercice est la suite de l'exercice précédent où on a réalisé une modulation d'amplitude. Pour récupérer l'information contenue dans un signal modulé en amplitude, on réalise une démodulation synchrone à l'aide d'un multiplieur. La tension de sortie du multiplieur est : $v_m = kv_e v_d$.



On place, sur la première entrée, le signal à démoduler, réceptionné par voie hertzienne, dont l'équation est $v_e(t) = V_0(1 + m \cos(\omega_1 t)) \cos(\omega_2 t)$ et on impose, sur la seconde entrée, la tension $v_d(t) = V_d \cos(\omega_2 t)$.

1. Représenter le spectre du signal de sortie du multiplieur.
2. Proposer un filtre permettant de récupérer en sortie le signal contenant l'information. Déterminer alors la tension de sortie du filtre.

Analyse du problème

La démodulation d'amplitude permet de récupérer le signal contenant l'information. On va étudier dans cet exercice le principe de la démodulation synchrone avec un multiplieur et un filtre passe-bas pour récupérer uniquement certaines composantes spectrales du signal.



1. En sortie du multiplieur on a :

$$\begin{aligned} v_m(t) &= kV_0V_d(1 + m \cos(\omega_1 t)) \cos^2(\omega_2 t) \\ &= kV_0V_d(1 + m \cos(\omega_1 t)) \left(\frac{1 + \cos(2\omega_2 t)}{2} \right) \end{aligned}$$

Soit :

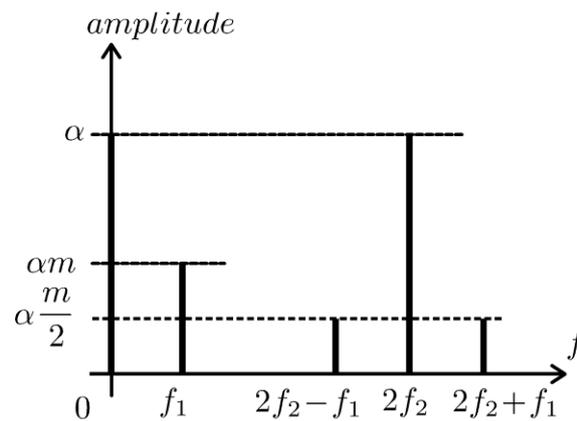
$$v_m(t) = \frac{kV_0V_d}{2} (1 + m \cos(\omega_1 t) + \cos(2\omega_2 t) + m \cos(\omega_1 t) \cos(2\omega_2 t))$$

On en déduit :

$$v_m(t) = \frac{kV_0V_d}{2} \left(1 + m \cos(\omega_1 t) + \cos(2\omega_2 t) + \frac{m}{2} \cos(2\omega_2 + \omega_1)t + \frac{m}{2} \cos(2\omega_2 - \omega_1)t \right)$$

$$\text{On pose } \alpha = \frac{kV_0V_d}{2}.$$

On en déduit le spectre de la tension $v_m(t)$:

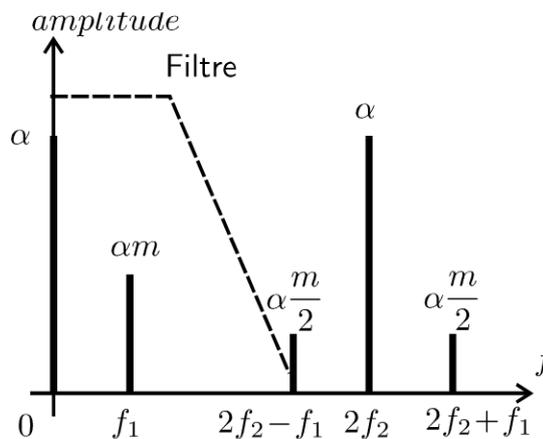


- Fréquence nulle : amplitude α
- Fréquence f_1 : amplitude αm
- Fréquence $2f_2$: amplitude α
- Fréquence $2f_2 - f_1$: amplitude $\alpha \frac{m}{2}$
- Fréquence $2f_2 + f_1$: amplitude $\alpha \frac{m}{2}$

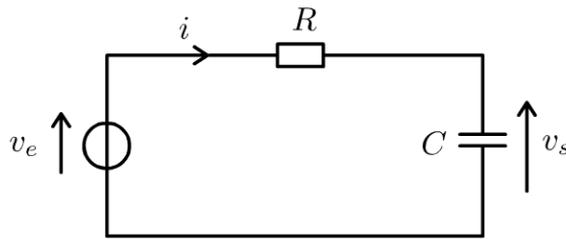
2. Le signal contenant l'information est la partie du spectre :

- Fréquence nulle : amplitude α
- Fréquence f_1 : amplitude αm

Il faut supprimer les composantes spectrales $2f_2$, $2f_2 - f_1$ et $2f_2 + f_1$. On peut utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure supérieure à f_1 pour filtrer les composantes spectrales supérieures à f_1 . On obtient alors le spectre suivant :



On peut utiliser un circuit RC pour réaliser un filtre passe-bas :



On reconnaît un diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_S}{V_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

On peut identifier à la forme canonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

L'identification donne : $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $H_0 = 1$. La fréquence de coupure à -3 dB :

$$f_c = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

La tension de sortie est :

$$v_s(t) = \frac{kV_0V_d}{2}(1 + m \cos(\omega t))$$

On récupère bien une tension avec les fréquences et les amplitudes proportionnelles à celles du signal contenant l'information.

Ce montage fonctionne même si on est en surmodulation ($m > 1$).

Partie 2

Phénomènes de transport

Plan

4. Transport de charge	33
4.1 : Module de Drude	33
5. Transfert thermique par conduction	37
5.1 : Ailette de refroidissement	37
5.2 : Simple et double vitrage	42
5.3 : Fil parcouru par un courant	45
5.4 : Résistance thermique entre deux sphères	47
5.5 : Résistance thermique entre deux cylindres coaxiaux	50
5.6 : Chauffage d'une pièce	53
5.7 : Effet de cave	55
6. Diffusion de particules	59
6.1 : Profil de concentration en régime permanent	59
6.2 : Diffusion dans un cylindre	61
7. Statistique des fluides	64
7.1 : Pression en fonction de l'altitude pour l'atmosphère isotherme	64

Transport de charge

Exercice 4.1 : Modèle de Drude

On considère un fil de cuivre d'axe Oz , de longueur L et de section S et parcouru par un courant d'intensité I . On modélise le cuivre par un réseau cristallin constitué d'ions positifs fixes dans lequel des électrons de conduction se déplacent librement. On admet qu'un atome de cuivre libère en moyenne un électron de conduction. On appelle n le nombre d'atomes de cuivre par unité de volume et \vec{v} la vitesse moyenne des électrons. On modélise l'agitation thermique des électrons et les collisions sur les ions du réseau et entre eux par une force de frottement égale à $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Le champ électrique extérieur appliqué au cuivre est constant et vaut $\vec{E} = E\vec{u}_z$.

Données pour le cuivre : conductivité = $\gamma = 5,9 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$; masse volumique = $\mu = 8,96 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; masse molaire = $M = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$; $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Données pour un électron : $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$; $q = -e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

1. Déterminer en régime permanent la conductivité γ du cuivre en fonction de e , m , n et τ .
2. Calculer n et la constante de temps τ .
3. Déterminer la résistance du fil du cuivre en fonction de γ , L et S .
4. Déterminer la densité volumique de puissance cédée par le champ électrique au métal. Quelle est la puissance cédée par le champ électrique au fil de cuivre ? Comment appelle-t-on cette puissance ?

Analyse du problème

On utilise la mécanique modèle classique pour étudier la conduction dans les métaux. On écrit le principe fondamental de la dynamique à un électron. En régime permanent, on en déduit la vitesse d'un électron ce qui permet d'en déduire la conductivité du métal.



1. On suppose pour simplifier que chaque électron se déplace à la vitesse \vec{v} .

Système : électron de masse m et de charge $q = -e$.

Référentiel : terrestre galiléen.

Bilan des forces :

- force électrique : $q\vec{E} = -e\vec{E}$



- force de frottement : $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$
- On néglige le poids devant ces forces.

Principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

On en déduit :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

Comme le champ électrique est constant, la solution est :

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E} + \vec{A} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

avec \vec{A} un vecteur d'intégration qui peut être calculé par les conditions initiales.

Le deuxième terme correspond au régime libre qui tend vers 0 au bout de quelques τ .

On suppose que l'on se place en régime permanent. Le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$$

On en déduit le vecteur densité volumique de courant :

$$\vec{j} = nq\vec{v} = n(-e)\left(-\frac{e\tau}{m}\vec{E}\right) = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$$

Le conducteur ainsi modélisé vérifie la **loi d'Ohm locale** :

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}$$

La conductivité du cuivre est :

$$\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

2. La masse volumique est : $\mu = \frac{M}{N_A}n$, d'où $n = \frac{\mu N_A}{M} = 8,4 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$.



Il faut utiliser les unités du système international en physique pour effectuer les applications numériques. Il faut donc exprimer la masse molaire en $\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$.



La constante de temps est $\tau = \frac{m\gamma}{ne^2} = 2,5 \times 10^{-14} \text{ s}$.

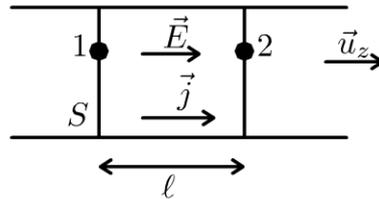
Cette valeur est très faible ce qui justifie l'hypothèse faite précédemment du régime permanent.

Remarque : La constante de temps a le même ordre de grandeur pour tous les métaux.



3. On pose $\vec{E} = E \vec{u}_z$ et $\vec{j} = j \vec{u}_z$.

On considère un déplacement $\vec{dl} = dz \vec{u}_z$ colinéaire au champ électrique \vec{E} du point 1 au point 2.



$$\text{On a : } dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{j}{\gamma} \cdot \vec{dl} = -\frac{j}{\gamma} dz.$$

$$\text{On intègre entre le point 1 et 2 : } \int_1^2 dV = V_2 - V_1 = -\frac{j\ell}{\gamma}.$$

Le conducteur est orienté vers la droite. On a donc $\vec{dS} = dS \vec{u}_z$.

$$\text{L'intensité du courant électrique est : } I = \frac{dq}{dt} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = jS.$$

$$\text{On a donc : } U = V_1 - V_2 = \frac{I \ell}{S \gamma}.$$

On en déduit la résistance du fil de cuivre définie par la loi d'Ohm en convention récepteur : $U = RI$.

La résistance du fil de cuivre de longueur ℓ et de section S est :

$$R = \frac{\ell}{\gamma S}$$

4. Pour faire un bilan de puissance, on multiplie scalairement le principe fondamental de la dynamique en régime permanent par \vec{v} :

$$0 = q\vec{E} \cdot \vec{v} - \frac{m}{\tau} \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Le premier terme est la puissance algébriquement reçue du champ électrique :

$$P_{\text{elec}} = q\vec{E} \cdot \vec{v} > 0$$

Le deuxième terme est la puissance algébriquement reçue de la force de frottement :

$$P_{\text{frott}} = -\frac{m}{\tau} v^2 < 0$$

L'électron reçoit donc effectivement de la puissance du champ électrique qu'il perd aussitôt pour fournir de la puissance au métal.
Le champ électrique fournit donc effectivement de la puissance au métal : c'est l'effet Joule.

Remarque : L'effet Joule se manifeste souvent par un échauffement de la matière mais pas nécessairement.



On considère maintenant un volume $d\tau$ qui contient $n d\tau$ charges mobiles.

Une charge fournit au métal une puissance : $\frac{m}{\tau} v^2 = q \vec{E} \cdot \vec{v}$.

L'ensemble des charges contenu dans le volume $d\tau$ fournit donc à la matière une puissance : $dP = (q \vec{E} \cdot \vec{v}) (n d\tau)$. Comme $\vec{j} = nq\vec{v}$. On a donc : $dP = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$.

La densité volumique de puissance cédée par le champ électrique au métal est :

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$$

C'est la **forme locale de la loi de Joule**.

La puissance cédée par le champ électrique au fil de cuivre est :

$$P = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{j^2}{\gamma} (S\ell)$$

Comme $I = jS$, on peut exprimer P en fonction de I :

$$P = \frac{I^2}{S^2\gamma} (S\ell) = \frac{\ell}{\gamma S} I^2 = RI^2$$

Cette puissance est appelée également puissance dissipée par effet Joule.

Remarque : On retrouve la formule vue dans le cours d'électrocinétique en première année.

Transfert thermique par conduction

Exercice 5.1 : Ailette de refroidissement

On considère une barre de cuivre cylindrique de rayon $a = 5 \text{ mm}$, de longueur L . En $x = 0$, la barre de cuivre est en contact avec un milieu à la température $T_0 = 330 \text{ K}$. Tout le reste de la tige est en contact avec l'air ambiant de température uniforme $T_e = 300 \text{ K}$. On appelle $\lambda = 400 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ la conductivité thermique du cuivre et $h = 12 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre de cuivre et l'air. On se place en régime stationnaire. On

pose $\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$.

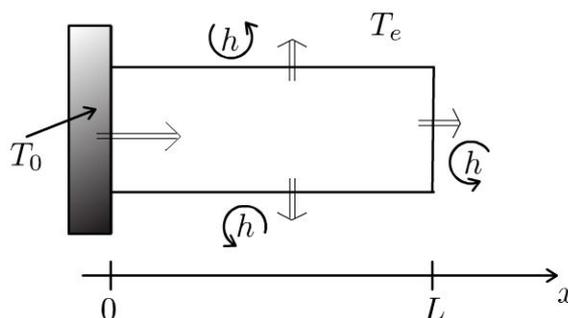
1. On considère que la longueur de la tige est quasi-infinie. Déterminer numériquement le profil de température $T(x)$ en tout point de la barre de cuivre.
2. On remplace la tige précédente par une tige de longueur $L = 20 \text{ cm}$. Déterminer numériquement $T(x)$. Calculer $T(L)$.

Analyse du problème

Cet exercice traite d'une ailette de refroidissement utilisée par exemple pour refroidir un microprocesseur. Il faut être capable d'effectuer un bilan thermique sur une tranche d'épaisseur dx pour obtenir l'équation différentielle en $T(x)$. On utilisera la continuité de la température ou du flux thermique pour déterminer les constantes d'intégration.



1.



Comme $a \ll L$ (le rayon du tube est très petit devant la longueur), on peut considérer que la température ne dépend que de x .

Cours : Premier principe de la thermodynamique

Il faut prendre l'initiative d'effectuer un bilan thermique sur un volume élémentaire de section $S = \pi a^2$ compris entre x et $x + dx$ pendant une durée dt .

La transformation est isobare puisque le système est en contact avec l'air qui maintient une pression constante. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

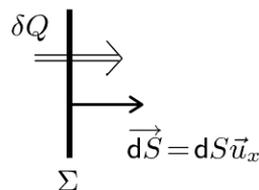
$$dH = \delta W' + \delta Q$$

- dH est la variation d'enthalpie du système entre t et $t + dt$. Dans l'exercice, elle est nulle puisqu'on est en régime stationnaire (on dit aussi régime permanent).
- $\delta W'$ est le travail reçu autre que celui des forces de pression. Ici : $\delta W' = 0$
- δQ est le transfert thermique algébriquement reçu pendant dt .

On divise souvent le premier principe de la thermodynamique par dt pour faire apparaître des puissances thermiques.

Puissance thermique par conduction traversant une surface Σ

Soit une surface Σ orientée suivant \vec{u}_x .



Le transfert thermique δQ qui traverse la surface Σ pendant dt est :

$$\delta Q = \Phi dt$$

Φ est la **puissance thermique** par conduction qui traverse Σ . On l'appelle également **flux thermique**. Le terme puissance thermique est préférable puisqu'il fait référence à l'unité du flux thermique (le Watt).

On peut l'écrire avec le vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th} . On a alors :

$$\delta Q = \Phi dt = \int \int_{M \in \Sigma} \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} dt$$

On projette sur \vec{u}_x . Le transfert thermique qui traverse S pendant dt dans le sens \vec{u}_x est :

$$\delta Q = \int \int_{M \in \Sigma} j_{th} dS dt$$

Loi de Fourier

La loi de Fourier s'écrit :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

λ est la conductivité thermique du milieu (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Elle est toujours positive. Le signe $-$ vient du fait que le transfert thermique se fait spontanément des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides.

Conditions aux limites

On n'a pas de discontinuité de la température à l'interface solide-solide ou solide-fluide immobile car le transfert thermique est de même nature (transfert thermique conductif). Le contact est supposé parfait.

On utilise très souvent la continuité du flux thermique au niveau des interfaces. Les interfaces ne peuvent pas accumuler d'énergie car l'épaisseur est infiniment petite.

On a une discontinuité de la température à l'interface solide-fluide en mouvement. On note T_P la température de la paroi solide et T_F la température de fluide en mouvement. On utilise souvent la loi de Newton :

$$\delta Q = hS(T_P - T_F)dt$$

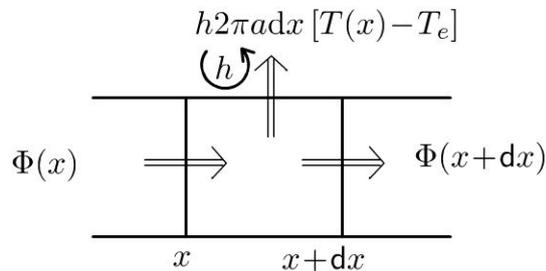


Il faut faire très attention aux signes. Comme le transfert thermique se fait du corps le plus chaud vers le corps le plus froid, δQ est donc orienté algébriquement de la paroi vers le fluide.

Cours : h est appelé coefficient de transfert conducto-convectif ou coefficient d'échange entre le solide et le fluide (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$). Tout se passe comme si on avait une discontinuité de la température au niveau de la paroi. On fait l'approximation qu'une petite épaisseur d'air est quasiment au repos sur une très faible épaisseur appelée couche limite thermique.



On fait un bilan thermique sur une tranche comprise entre x et $x + dx$:



$\Phi(x)$ est la puissance thermique qui rentre en x .

$\Phi(x + dx)$ est la puissance thermique qui sort en $x + dx$.

$h2\pi adx [T(x) - T_e]$ est la puissance thermique qui sort à travers la surface latérale $2\pi adx$



Si $T(x) > T_e$, le transfert thermique est positif et effectivement dirigé vers l'extérieur. C'est bien une puissance thermique effectivement perdue.



La transformation est isobare. Le premier principe de la thermodynamique sur une tranche s'écrit en régime stationnaire :

$$dH = 0 = \delta Q = \Phi(x)dt - \Phi(x + dx)dt - h2\pi adx [T(x) - T_e] dt$$

On a donc :

$$\Phi(x) - \Phi(x + dx) - h2\pi adx [T(x) - T_e] = 0$$

La loi de Fourier est : $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$.

La puissance thermique $\Phi(x)$ qui traverse la surface πa^2 orientée suivant \vec{u}_x est :

$$\Phi(x) = j_{\text{th}} \pi a^2 = -\lambda \frac{dT}{dx} \pi a^2$$

On en déduit que :

$$-\frac{d\Phi}{dx} dx - h 2\pi a dx [T(x) - T_e] = \lambda \pi a^2 \frac{d^2 T}{dx^2} dx - h 2\pi a dx [T(x) - T_e]$$

$$= 0$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a} T = -\frac{2h}{\lambda a} T_e$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$. Soit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_e}{\delta^2}$$

- Solution générale de l'équation homogène.

L'équation caractéristique est : $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$, soit $r = \pm \frac{1}{\delta}$.

La solution générale est donc : $T_{SG} = A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$.

- Solution particulière de l'équation différentielle avec second membre :

$$T_{SP} = T_e$$

La solution de l'équation différentielle est :

$$T(x) = T_e + A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

Il faut deux conditions aux limites pour déterminer A et B :

- Le contact est parfait en $x = 0$, donc $T(0) = T_0 = T_e + A + B$.
- La température doit rester finie si $x \rightarrow \infty$. On a donc $A = 0$.

La constante d'intégration B est : $B = T_0 - T_e$. On obtient :

$$T(x) = T_e + (T_0 - T_e) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

Numériquement, on a :

$$T(x) = 300 + 30 \exp\left(-\frac{x}{0,289}\right)$$

2. On a toujours :

$$T(x) = T_e + A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$$

La distance caractéristique vaut $\delta = 28,9$ cm. La longueur de la tige vaut 20 cm. On ne peut plus considérer comme dans la question précédente que la longueur est très grande devant la distance caractéristique. On n'a donc plus les mêmes conditions aux limites.

Le contact est parfait en $x = 0$, donc $T(0) = T_0 = T_e + A + B$.

La deuxième condition aux limites est plus délicate à trouver. On a une discontinuité de la température à cause du flux conducto convectif en $x = L$.

Il faut raisonner sur la **continuité du flux thermique** en $x = L$.



La continuité du flux thermique en $x = L$ permet d'obtenir la deuxième équation :

$$j_{\text{th}}(L)\pi a^2 = h\pi a^2 [T(L) - T_e]$$

En utilisant la loi de Fourier, on a :

$$-\lambda \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = h [T(L) - T_e]$$

Comme $\frac{dT}{dx} = \frac{A}{\delta} \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) - \frac{B}{\delta} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$, on a :

$$\frac{-\lambda A}{\delta} \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda B}{\delta} \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) = h \left(A \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) \right)$$

On a un système à deux équations et deux inconnues :

$$\begin{cases} T_0 = T_e + A + B \\ \frac{-\lambda A}{\delta} \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + \frac{\lambda B}{\delta} \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) = h \left(A \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) \right) \end{cases}$$

La résolution numérique donne : $A = 5,92$ et $B = 24,08$.

On a donc :

$$T(x) = 300 + 5,92 \exp\left(\frac{x}{0,289}\right) + 24,08 \exp\left(-\frac{x}{0,289}\right)$$

Pour $x = L$, la température est égale à 324 K.

Remarque : Si la longueur de la tige est supérieure à 3, alors on peut considérer que la tige est de longueur quasi-infinie. On retrouve alors la résolution plus simple de la question 1.

Exercice 5.2 : Simple et double vitrage

On considère une pièce à la température $T_i = 20^\circ\text{C}$. La température extérieure est $T_e = 5^\circ\text{C}$. On étudie les transferts thermiques avec l'extérieur à travers une vitre en verre de conductivité thermique $\lambda = 1,15 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, de largeur 60 cm, de hauteur 60 cm et d'épaisseur 3 mm. On suppose qu'il n'y a pas de flux sortant à travers les autres parois de la pièce. On se place en régime stationnaire.

1. Définir et calculer la résistance thermique de la vitre. En déduire le flux thermique sortant à travers le simple vitrage.

2. On remplace le simple vitrage par un double vitrage constitué d'une vitre de 3 mm d'épaisseur, d'une couche d'air de conductivité thermique $\lambda_{\text{air}} = 0,025 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, d'épaisseur 10 mm et d'une autre vitre identique à la première. Donner le schéma thermique équivalent. Calculer le flux thermique sortant à travers le double vitrage et les différentes températures dans le double vitrage. Interpréter.

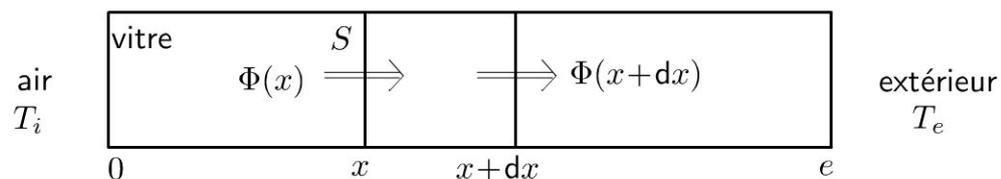
Analyse du problème

En régime stationnaire, on a continuité du flux thermique en l'absence de production de chaleur. On pourra alors utiliser la notion de résistance thermique et travailler sur un schéma thermique équivalent. En appliquant le diviseur de tension, on pourra déterminer les différentes températures.

L'énoncé ne donne pas le coefficient de transfert conducto-convectif entre la vitre et l'air. On néglige donc la discontinuité de température aux interfaces vitre-air.



1. On appelle S la surface de la vitre. Le transfert thermique se fait suivant l'axe Ox dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.



Cours : La transformation est isobare. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit sur une tranche en régime stationnaire :

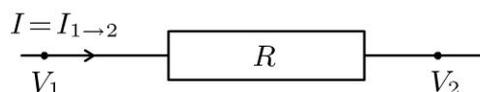
$$dH = 0 = \delta Q = \Phi(x) dt - \Phi(x+dx) dt$$

On a donc conservation du flux thermique :

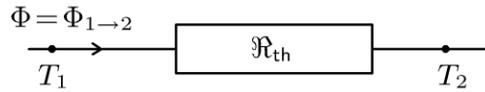
$$\Phi(x) = \Phi(x+dx) = cte$$

On note Φ le flux à travers les différentes sections de la vitre.

La loi d'Ohm s'écrit en convention récepteur : $V_1 - V_2 = RI_{1 \rightarrow 2}$. R est toujours positif.



La résistance thermique est définie par analogie : $T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{th} \Phi_{1 \rightarrow 2}$.



Interprétation physique : Si $T_1 > T_2$, le transfert thermique se fait des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides d'après le deuxième principe de la thermodynamique.

Analogie avec l'électrocinétique :

$$\begin{aligned} T &\rightarrow V \\ \mathfrak{R}_{th} &\rightarrow R \\ \Phi = P_{th} &\rightarrow I \end{aligned}$$

Le flux à travers une surface S à l'abscisse x est :

$$\Phi = jS = -\lambda \frac{dT}{dx} S$$

On sépare les variables et on intègre entre $x = 0$ et $x = e$.

$$dT = -\frac{\Phi}{\lambda S} dx, \text{ d'où } T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{\lambda S} e.$$

$$\text{On obtient : } T_1 - T_2 = \frac{e}{\lambda S} \Phi.$$

La résistance thermique est :

$$\mathfrak{R}_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

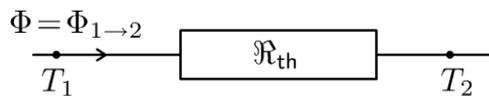
Remarque : On peut la retrouver par analogie avec l'électricité. La résistance d'un fil conducteur de conductivité γ , de section S et de longueur L est :

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

Dans de nombreux exercices, on fera le schéma thermique équivalent.



On est en régime stationnaire. Il n'y a pas de création de chaleur dans la vitre. On a donc conservation du flux thermique.



La résistance thermique est définie par analogie avec l'électricité : $T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{th} \Phi_{1 \rightarrow 2}$.

En coordonnées cartésiennes, la résistance thermique est :

$$\mathfrak{R}_{th} = \frac{e}{\lambda S} = 7,25 \times 10^{-3} \text{K.W}^{-1}$$

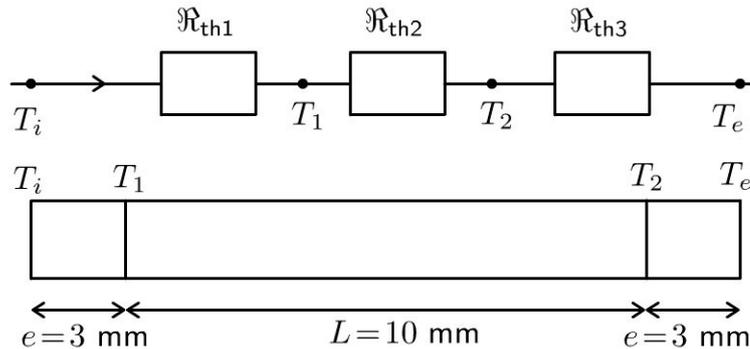
La surface S vaut : $S = 0,6 \times 0,6 = 0,36 \text{ m}^2$.

On en déduit le flux thermique sortant pour le simple vitrage :

$$\Phi = \frac{T_i - T_e}{\mathfrak{R}_{th}} = 2070 \text{ W}$$

2. On se place toujours en régime stationnaire. Il n'y a pas de terme de création. On a conservation du flux thermique à travers les différentes sections du double vitrage.

On peut donc utiliser le schéma électrique suivant avec des résistances thermiques en série.



Les résistances thermiques sont :

$$\mathfrak{R}_{th1} = \frac{e}{\lambda S} = 7,25 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_{th2} = \frac{L}{\lambda_{air} S} = 1,11 \text{ K.W}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_{th3} = \frac{e}{\lambda S} = 7,25 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

La résistance thermique équivalente est :

$$\mathfrak{R}_{theq} = \mathfrak{R}_{th1} + \mathfrak{R}_{th2} + \mathfrak{R}_{th3} = 1,13 \text{ K.W}^{-1}$$

On en déduit le flux thermique sortant :

$$\Phi_2 = \frac{T_i - T_e}{\mathfrak{R}_{th1} + \mathfrak{R}_{th2} + \mathfrak{R}_{th3}} = 13,3 \text{ W}$$

On a un flux thermique sortant 155 fois plus faible que dans la question 1. D'où l'intérêt du double vitrage pour l'isolation thermique.

On peut calculer les différentes températures en utilisant le diviseur de tension :

$$T_1 - T_i = \frac{\mathfrak{R}_{th1}}{\mathfrak{R}_{theq}} (T_e - T_i)$$



Il ne faut pas écrire T_1 au lieu de $T_1 - T_i$. Il faut considérer une tension et non un potentiel pour appliquer le diviseur de tension.



De même, on a :

$$T_2 - T_i = \frac{\mathfrak{R}_{th1} + \mathfrak{R}_{th2}}{\mathfrak{R}_{theq}} (T_e - T_i)$$

L'application numérique donne : $T_1 = 19,9^\circ\text{C}$ et $T_2 = 5,1^\circ\text{C}$.

Exercice 5.3 : Fil parcouru par un courant

On considère un fil cylindrique de conductivité électrique γ , de conductivité thermique λ , de rayon a et de longueur L . On suppose que $T(0) = T(L) = T_0$. Le fil est parcouru par un courant électrique d'intensité constante I . On néglige les pertes thermiques à travers la surface latérale. On se place en régime stationnaire.

1. Déterminer la température $T(x)$ dans le fil.
2. Pour quelle abscisse la température passe-t-elle par un maximum ?
3. Ce résultat était-il prévisible par une analyse physique ?

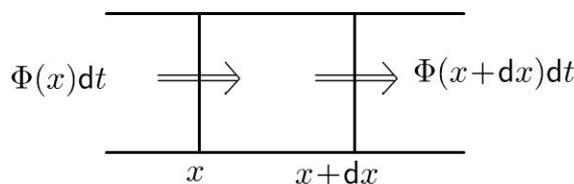
Analyse du problème

En régime stationnaire, on n'a pas continuité du flux thermique car le fil reçoit de la puissance du circuit électrique. Il faut faire attention aux signes lors de l'écriture du premier principe de la thermodynamique.

Une analyse des symétrie du problème permet de prévoir qualitativement où la température est maximale dans le fil.



1. On considère une tranche de section $S = \pi a^2$ comprise entre x et $x + dx$ pendant dt . La résistance de longueur dx et de section S est : $dR = \frac{dx}{\gamma S}$.



Pour une transformation isobare, le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$dH = \delta W' + \delta Q$$

- En régime stationnaire, $dH = H(t + dt) - H(t) = 0$
- $\delta W'$ est le travail reçu autre que celui des forces de pression. Ici le système reçoit un travail électrique. En convention récepteur, le travail reçu est : $\delta W_{\text{elec}} = dR I^2 dt = \frac{dx}{\gamma S} I^2 dt$.

- δQ est le transfert algébriquement reçu. Il vaut :

$$\Phi(x)dt - \Phi(x + dx)dt = -\frac{d\Phi}{dx}dxdt$$



Attention aux erreurs de signe pour le travail électrique reçu. Il faut bien mettre un signe + devant dRI^2dt car c'est bien une énergie reçue par le système de la part du circuit électrique. Cette énergie reçue est également appelée énergie dissipée par effet Joule.



La loi de Fourier est :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Le flux thermique ou la puissance thermique à travers la section S d'abscisse x est :

$$\Phi = j_{th}S = -\lambda \frac{dT}{dx} \pi a^2$$

On obtient donc pour le premier principe :

$$-\frac{d\Phi}{dx}dxdt + \frac{dx}{\gamma S} I^2 dt = 0 = \lambda \pi a^2 \frac{d^2 T}{dx^2} dxdt + \frac{dx}{\gamma \pi a^2} I^2 dt$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4}$$

On intègre une première fois :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4} x + A$$

Une deuxième intégration permet d'écrire :

$$T = -\frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4} \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration A et B :

$$\begin{cases} T(0) = T_0 = B \\ T(L) = T_0 = -\frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4} \frac{L^2}{2} + AL + B \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} B = T_0 \\ A = \frac{I^2}{\lambda \gamma \pi^2 a^4} \frac{L}{2} \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$T(x) = \frac{I^2}{2\lambda \gamma \pi^2 a^4} (-x^2 + Lx) + T_0$$

2. On calcule la dérivée de T par rapport à x pour déterminer où la température passe par un maximum :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{I^2}{2\lambda\gamma\pi^2a^4} (-2x + L)$$

La dérivée est nulle pour $x = \frac{L}{2}$.

La température est donc maximale au milieu du fil.

3. Chaque élément de longueur dx du fil reçoit la même énergie électrique.

Les températures sont égales aux deux extrémités. Le plan $x = \frac{L}{2}$ est un plan de symétrie pour la température. La température est donc croissante entre $x = 0$ et $x = \frac{L}{2}$ puis décroissante entre $x = \frac{L}{2}$ et L .

On peut donc prévoir qualitativement que la température est maximale au milieu du fil.

Exercice 5.4 : Résistance thermique entre deux sphères

On considère un matériau conducteur compris entre deux sphères de centre O , de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), de conductivité thermique λ . Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues constantes à la température T_1 pour $r = R_1$ et à la température T_2 pour $r = R_2$. On se place en régime stationnaire.

1. Montrer que l'on a conservation du flux thermique. En déduire la résistance thermique de ce matériau en fonction de λ , R_1 et R_2 . Étudier le cas particulier où R_1 et R_2 sont très proches.

2. En utilisant la résistance thermique entre une sphère de rayon r et une sphère de rayon $r + dr$, proposer une deuxième méthode permettant de déterminer la résistance thermique entre les deux sphères.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$. Exprimer la température $T(r)$ en tout point du matériau. En déduire une troisième méthode permettant de déterminer la résistance thermique entre les deux sphères.

Analyse du problème

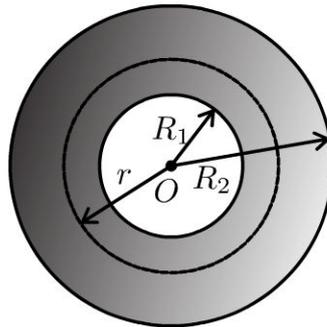
En régime stationnaire, on a continuité du flux thermique (ou de la puissance thermique) car il n'y a pas de terme de création. On peut donc définir une résistance thermique. On va voir trois méthodes pour déterminer la résistance thermique entre deux sphères.



1. On a une invariance du problème par rotation d'angle θ et ϕ . La température ne dépend donc que de r en régime stationnaire. Le vecteur densité de courant thermique est :

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Comme T ne dépend que de r , alors $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}}\vec{u}_r$. Les surfaces isothermes sont des sphères de rayon r .



On appelle μ la masse volumique du matériau et c_p la capacité thermique massique du matériau. On suppose la transformation isobare. On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume compris entre les sphères de rayon r et $r + dr$ pendant une durée dt :

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 dr \mu c_p (T(t + dt) - T(t)) &= 4\pi r^2 dr \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \\ &= \Phi(r) dt - \Phi(r + dr) dt \end{aligned}$$

En régime stationnaire $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$, on a donc :

$$\Phi(r) = \Phi(r + dr) = \text{cte} = \Phi$$

On note Φ le flux thermique (ou la puissance thermique) à travers une sphère de rayon r (r compris entre R_1 et R_2).

On a alors :

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{dS} = j_{\text{th}} 4\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2$$

On sépare les variables :

$$dT = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda} \frac{dr}{r^2}$$

On intègre entre R_1 et R_2 :

$$T_2 - T_1 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

D'où :

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

La résistance thermique est définie par :

$$T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}$$

On en déduit finalement la résistance thermique entre les deux sphères :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Si R_2 et R_1 sont proches. On pose $R_2 = R_1 + e$. On fait un développement limité à l'ordre 1 :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2} = \frac{e}{4\pi\lambda R_1 R_2} \simeq \frac{e}{4\pi\lambda R_1^2}$$

On retrouve la formule démontrée en coordonnées cartésiennes :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

avec $e = R_2 - R_1$ et $S = 4\pi R_1^2$.

Remarque : On pourra faire cette approximation dans les exercices si l'épaisseur est petite devant R_1 .



2. La résistance thermique comprise entre une sphère de rayon r et une sphère de rayon $r + dr$ est d'après la question précédente :

$$d\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{dr}{\lambda 4\pi r^2}$$

Les résistances sont en série puisque le flux est le même à travers les différentes sphères de rayon r . Il reste à intégrer entre R_1 et R_2 pour obtenir la résistance thermique entre les deux sphères :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

3. On a vu dans la question 1 que :

$$0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} dr dt = -\frac{\partial \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 4\pi r^2 \right)}{\partial r} dr dt$$

Après simplification, on a :

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Comme T ne dépend que de r , on a :

$$r^2 \frac{dT}{dr} = A$$

D'où : $dT = \frac{A dr}{r^2}$. L'intégration donne :

$$T = -\frac{A}{r} + B$$

On calcule A et B en utilisant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T_1 = -\frac{A}{R_1} + B \\ T_2 = -\frac{A}{R_2} + B \end{cases}$$

D'où : $A = \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$ et $B = T_1 + \frac{A}{R_1}$.

Le flux de 1 vers 2 est :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = j_{\text{th}} 4\pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = -\frac{A}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \lambda 4\pi$$

Finalement, on retrouve bien : $T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}$ avec :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Exercice 5.5 : Résistance thermique entre deux cylindres coaxiaux

On considère un matériau conducteur compris entre deux cylindres coaxiaux, de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), de conductivité thermique λ . Les parois cylindriques de ce matériau sont maintenues constantes à la température T_1 pour $r = R_1$ et à la température T_2 pour $r = R_2$. On se place en régime stationnaire. On néglige les effets de bord.

1. Montrer que l'on a conservation du flux thermique. En déduire la résistance thermique entre deux cylindres de hauteur H en fonction de λ , R_1 , R_2 et H . Étudier le cas particulier où R_1 et R_2 sont très proches.
2. En utilisant la résistance thermique entre un cylindre de rayon r et un cylindre de rayon $r + dr$, proposer une deuxième méthode permettant de déterminer la résistance thermique entre les deux cylindres de hauteur H .
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$. Exprimer la température $T(r)$ en tout point du matériau. En déduire une troisième méthode permettant de déterminer la résistance thermique entre les deux cylindres de hauteur H .

Analyse du problème

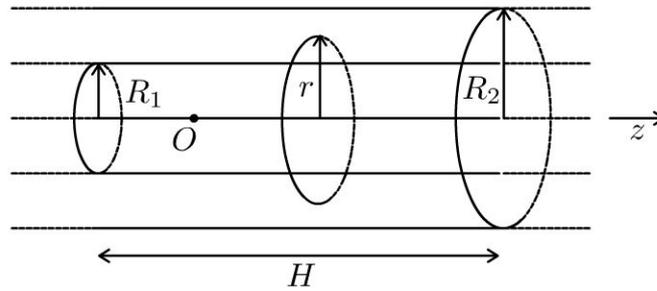
En régime stationnaire, on a continuité du flux thermique (ou de la puissance thermique) car il n'y a pas de terme de création. On peut donc définir une résistance thermique. On va voir trois méthodes pour déterminer la résistance thermique entre deux cylindres.



1. On a une invariance du problème par rotation d'angle θ et translation d'axe Oz . La température ne dépend donc que de r en régime stationnaire. Le vecteur densité de courant thermique est :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Comme T ne dépend que de r , alors $\vec{j}_{th} = j_{th} \vec{u}_r$. Les surfaces isothermes sont des cylindres de rayon r .



On appelle μ la masse volumique du matériau et c_p la capacité thermique massique du matériau. On suppose la transformation isobare. On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume compris entre les cylindres de rayon r et $r+dr$, de hauteur H pendant une durée dt :

$$\begin{aligned} 2\pi r H dr \mu c_p (T(t+dt) - T(t)) &= 2\pi r H dr \mu c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \\ &= \Phi(r) dt - \Phi(r+dr) dt \end{aligned}$$

En régime stationnaire, on a donc :

$$\Phi(r) = \Phi(r+dr) = cte = \Phi$$

On note Φ le flux thermique (ou la puissance thermique) à travers un cylindre de rayon r (r compris entre R_1 et R_2) et de hauteur H .

On a alors :

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} = j_{th} 2\pi r H = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H$$

On sépare les variables :

$$dT = -\frac{\Phi}{\lambda 2\pi H} \frac{dr}{r}$$

On intègre entre R_1 et R_2 :

$$T_2 - T_1 = -\frac{\Phi}{\lambda 2\pi H} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

D'où :

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{\lambda 2\pi H} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

La résistance thermique est définie par :

$$T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{\text{th}} \Phi_{1 \rightarrow 2}$$

On en déduit finalement la résistance thermique entre les deux cylindres :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Si R_2 et R_1 sont proches. On pose $R_2 = R_1 + e$. On fait un développement limité à l'ordre 1 :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln\left(\frac{R_1 + e}{R_1}\right) = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) = \frac{e}{\lambda 2\pi R_1 H}$$

On retrouve la formule démontrée en coordonnées cartésiennes :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

avec $e = R_2 - R_1$ et $S = 2\pi R_1 H$.

Remarque : On pourra faire cette approximation dans les exercices si l'épaisseur est petite devant R_1 .



2. La résistance thermique comprise entre un cylindre de rayon r (hauteur H) et un cylindre de rayon $r+dr$ (hauteur H) est d'après la question précédente :

$$d\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{dr}{\lambda 2\pi r H}$$

Les résistances sont en série puisque le flux est le même à travers les différents cylindres de rayon r . Il reste à intégrer entre R_1 et R_2 pour obtenir la résistance thermique entre les deux cylindres de hauteur H :

$$\mathfrak{R}_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

3. On a vu dans la question 1 que :

$$0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} dr dt = -\frac{\partial \left(-\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H \right)}{\partial r} dr dt$$

Après simplification, on a :

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Comme T ne dépend que de r , on a :

$$r \frac{dT}{dr} = A$$

D'où : $dT = \frac{A dr}{r}$. L'intégration donne :

$$T = A \ln r + B$$

On calcule A et B en utilisant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T_1 = A \ln R_1 + B \\ T_2 = A \ln R_2 + B \end{cases}$$

D'où : $A = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ et $B = T_1 - A \ln R_1$.

Le flux de 1 vers 2 est :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = j_{th} 2\pi r H = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r H = -\frac{A}{r} 2\pi r H = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \lambda 2\pi H$$

Finalement, on retrouve bien : $T_1 - T_2 = \mathfrak{R}_{th} \Phi_{1 \rightarrow 2}$ avec :

$$\mathfrak{R}_{th} = \frac{1}{\lambda 2\pi H} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

Exercice 5.6 : Chauffage d'une pièce

On souhaite maintenir constante la température d'une pièce à $T_i = 20^\circ \text{C}$. La résistance thermique des 4 murs et du sol est $\mathfrak{R}_{th1} = 10,0 \times 10^{-3} \text{K.W}^{-1}$. La résistance thermique du plafond et des tuiles est $\mathfrak{R}_{th2} = 2,0 \times 10^{-3} \text{K.W}^{-1}$. La température de l'extérieur est $T_e = 10^\circ \text{C}$. On se place en régime stationnaire.

1. Calculer la puissance thermique P à apporter à la pièce pour maintenir constante la température.

2. On améliore l'isolation thermique en rajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique de ce matériau afin de réaliser une économie de 50% sur la puissance thermique P .

Analyse du problème

On étudie la puissance thermique nécessaire pour maintenir constante la température d'une pièce. Comme on se place en régime stationnaire sans terme de création, on pourra utiliser l'association série et parallèle des résistances thermiques. Il faut faire attention aux signes lors de l'orientation des différentes puissances thermiques.



1. On suppose la transformation isobare. On applique le premier principe de la thermodynamique à la pièce pendant une durée dt . En régime stationnaire, on a :

$$dH = \delta W' + \delta Q$$

En régime stationnaire, $dH = H(t + dt) - H(t) = 0$.

$\delta W'$ est le travail reçu autre que celui des forces de pression. Ici $\delta W' = 0$.

En divisant par dt , on a :

$$0 = P_{\text{totale reçue}}$$

$P_{\text{totale reçue}}$ est la puissance thermique algébriquement reçue par la pièce.

Il y a trois puissances thermiques algébriquement reçues par la pièce :

$$P_{\text{totale reçue}} = P + P_1 + P_2$$

- P est la puissance thermique apportée par le chauffage (par exemple un radiateur électrique).
- $P_1 = \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th1}}}$ est la puissance thermique reçue de l'extérieur à travers les 4 murs et le sol.
- $P_2 = \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th2}}}$ est la puissance thermique reçue de l'extérieur à travers les tuiles et le plafond.



Dans l'écriture du premier principe, les puissances sont algébriquement reçues par le système. Il faut donc écrire $T_e - T_i$ et non $T_i - T_e$ car $\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th1}}}$ est une puissance algébriquement orientée de l'extérieur vers l'intérieur. Ici $T_e < T_i$, donc $P_1 < 0$. C'est donc en fait une puissance effectivement fournie à l'extérieur.



On en déduit que :

$$P = - \left(\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th1}}} + \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{\text{th2}}} \right)$$

D'où

$$P = 6000 \text{ W}$$

Remarque : Les deux résistances thermiques sont en parallèle. La résistance thermique est définie par :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th}}} = \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th1}}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{th2}}}$$

La puissance algébriquement reçue de l'extérieur est $\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{th}}$. Le premier principe s'écrit alors :

$$0 = P + \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{th}}$$

On retrouve le même résultat que précédemment.



2. On souhaite avoir la même température avec une puissance thermique $P' = 3000 \text{ W}$. On appelle \mathfrak{R}'_{th2} la résistance thermique de la plaque de matériau isolant que l'on rajoute entre le plafond et les tuiles. En régime stationnaire, la résistance thermique du plafond, de la plaque de matériau et des tuiles est alors : $\mathfrak{R}_{th2} + \mathfrak{R}'_{th2}$.

Remarque : Les deux résistances sont bien en série car on se place en régime stationnaire sans terme de création. On a conservation du flux thermique (ou de la puissance thermique) à travers les différentes sections du plafond, du matériau isolant et des tuiles.



Le bilan thermique s'écrit alors :

$$P' = - \left(\frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{th1}} + \frac{T_e - T_i}{\mathfrak{R}_{th2} + \mathfrak{R}'_{th2}} \right)$$

On a alors :

$$P' = (T_i - T_e) \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_{th1}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{th2} + \mathfrak{R}'_{th2}} \right)$$

D'où :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_{th2} + \mathfrak{R}'_{th2}} = \frac{P'}{T_i - T_e} - \frac{1}{\mathfrak{R}_{th1}} = \frac{P'\mathfrak{R}_{th1} - (T_i - T_e)}{(T_i - T_e)\mathfrak{R}_{th1}}$$

On obtient finalement :

$$\mathfrak{R}'_{th2} = \frac{(T_i - T_e)\mathfrak{R}_{th1}}{P'\mathfrak{R}_{th1} - (T_i - T_e)} - \mathfrak{R}_{th2}$$

Application numérique : $\mathfrak{R}'_{th2} = 3,0 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$.

Exercice 5.7 : Effet de cave

L'atmosphère occupe le demi-espace $x < 0$ et le sol le demi-espace $x > 0$. La température au niveau du sol est : $T(0) = T_0 + a \cos(\omega t)$. On utilisera la notation complexe : $\underline{T}(0) = T_0 + a \exp(j\omega t)$. Pour le sol, on note $\mu = 3,0 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ la masse volumique, $c = 515 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ la capacité

thermique massique et $\lambda = 1,2 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ la conductivité thermique. On pose

$$\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$$

1. On cherche une solution de la forme : $\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x) \exp(j\omega t)$.

Déterminer $\underline{f}(x)$. En déduire $T(x,t)$.

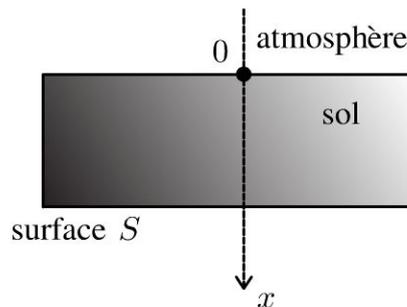
2. Calculer les variations de température à une profondeur de 50 cm pour une amplitude de variation journalière de la température $T(0)$ de 15°C autour d'une température moyenne de 3°C en hiver.

Analyse du problème

On étudie les répercussions dans le sol des variations de température de l'atmosphère. Il faut savoir établir l'équation de la diffusion à une dimension en écrivant le premier principe de la thermodynamique à un système bien choisi.



1.



On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume de section S , compris entre x et $x + dx$ pendant une durée dt :

$$\mu c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = \Phi(x) dt - \Phi(x + dx) dt = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dt$$

En utilisant la loi de Fourier, on a :

$$\Phi = jS = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S$$

On en déduit l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

En notation complexe, on a :

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x) \exp(j\omega t)$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors : $\frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial \underline{T}}{\partial t}$

avec $\frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} \exp(j\omega t)$ et $\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = \underline{f}(x) j\omega \exp(j\omega t)$.

L'équation différentielle devient :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} \exp(j\omega t) = \frac{\mu c}{\lambda} \underline{f}(x) j\omega \exp(j\omega t)$$

En simplifiant, on a :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} - \frac{\mu c}{\lambda} j\omega \underline{f}(x) = 0$$

D'après l'énoncé, on pose $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$. On obtient finalement :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} - \frac{2j}{\delta^2} \underline{f}(x) = 0$$

L'équation caractéristique est : $r^2 - \frac{2j}{\delta^2} = 0$, soit :

$$r^2 = \frac{2j}{\delta^2}$$



Il faut savoir que $j = \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right)$, donc $\sqrt{j} = \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$.



On en déduit :

$$r = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \left(\frac{1+j}{\sqrt{2}} \right) = \pm \frac{1+j}{\delta}$$

On obtient alors :

$$\underline{f}(x) = \underline{A} \exp\left(\frac{-(1+j)x}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(\frac{(1+j)x}{\delta}\right)$$

La température complexe est :

$$\underline{T} = T_0 + \left(\underline{A} \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(\frac{-jx}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(\frac{jx}{\delta}\right) \right) \exp(j\omega t)$$

Il reste à déterminer les deux constantes d'intégration complexes avec les conditions aux limites :

- Le sol a une profondeur infinie. Comme la température doit rester finie, on a nécessairement $\underline{B} = 0$.
- Pour $z = 0$, on a : $\underline{T}(0) = T_0 + a \exp(j\omega t)$. D'où $\underline{A} = a$.

On obtient alors :

$$\underline{T} = T_0 + a \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$

On revient aux grandeurs réelles. Soit :

$$T(x,t) = T_0 + a \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

2. Application numérique : $\delta = 14,6$ cm. Pour $x = 50$ cm, on a :

$$T(x,t) = 3 + 0,49 \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

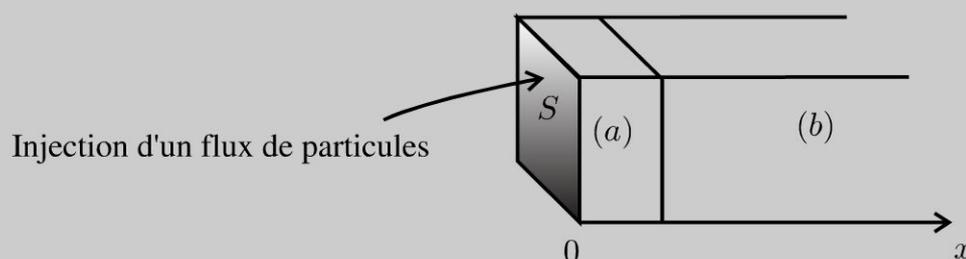
On a donc des variations très faibles de la température à une profondeur de 50 cm. Le sol n'est plus gelé à cette profondeur. C'est l'effet de cave.

On retrouve une profondeur caractéristique comme dans l'exercice sur l'effet de peau. Au delà de quelques δ , les variations de température sont négligeables.

Diffusion de particules

Exercice 6.1 : Profil de concentration en régime permanent

On considère une solution contenant un composé de densité particulaire n dépendant uniquement de la coordonnée spatiale x . Dans la région (a) de longueur δ , la densité particulaire est variable avec x , alors que dans la région (b) elle est constante de valeur n_S . Sur le plan de cote $x = 0$ est injecté un flux constant de l'espèce étudiée. On appelle D le coefficient de diffusion dans la région (a).



1. Démontrer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la densité particulaire $n(x,t)$ en régime variable.
2. Exprimer en régime stationnaire la densité particulaire $n(x)$ ainsi que le flux de particules injecté en fonction de $n_0 = n(0)$, n_S , δ , D et S .

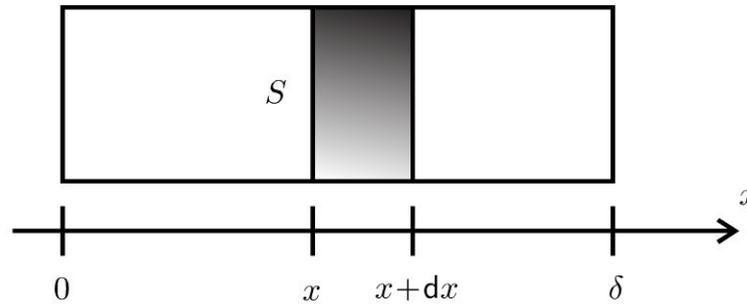
Analyse du problème

On utilise les coordonnées cartésiennes pour traiter cet exercice de diffusion de particules. On effectue un bilan de particules pendant dt sur volume Sdx pour obtenir l'équation aux dérivées partielles.

En régime stationnaire, on obtient une équation différentielle avec une seule variable. On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration.



1. On effectue un bilan de particules pendant dt sur un volume de section S compris entre x et $x + dx$:



La variation du nombre de particules pendant dt est égale au nombre de particules qui rentrent pendant dt – le nombre de particules qui sortent pendant dt + le nombre de particules qui sont produites pendant dt .

- On appelle d^2N la variation du nombre de particules pendant dt . À l'instant t , le nombre de particules est $n(t)Sdx$. À l'instant $t + dt$, le nombre de particules est $n(t + dt)Sdx$. On a donc :

$$d^2N = (n(t + dt) - n(t)) Sdx = \frac{\partial n}{\partial t} dt Sdx$$

- Ce qui rentre pendant dt à l'abscisse x : $j_D(x) Sdt$.
- Ce qui sort pendant dt à l'abscisse $x + dx$: $j_D(x + dx) Sdt$.
- Il n'y a pas de particules produites dans le volume Sdx .

Le bilan de particules s'écrit donc :

$$\frac{\partial n}{\partial t} dt Sdx = j_D(x) Sdt - j_D(x + dx) Sdt = -\frac{\partial j_D}{\partial x} Sdx dt$$

La loi de Fick s'écrit :

$$\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{u}_x$$

On obtient l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

2. En régime stationnaire, on a : $\frac{d^2n}{dx^2} = 0$. Une première intégration permet

d'écrire : $\frac{dn}{dx} = A$. Une deuxième intégration donne :

$$n(x) = Ax + B$$

On utilise les conditions aux limites pour déterminer A et B :

- Pour $x = 0$: $n(0) = n_0 = B$.
- Pour $x = \delta$: $n(\delta) = n_S = A\delta + B$.

On obtient finalement : $B = n_0$ et $A = \frac{n_S - n_0}{\delta}$.

La densité particulaire $n(x)$ est donc :

$$n(x) = \frac{n_S - n_0}{\delta}x + n_0$$

Le vecteur densité de flux de particules est :

$$\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n = -A \vec{u}_x = -\frac{n_S - n_0}{\delta} \vec{u}_x$$

Le flux de particules à travers une surface S est :

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_D \cdot \vec{dS} = j_S S = -\frac{n_S - n_0}{\delta} S$$

Remarque : En régime stationnaire sans terme de création, on a conservation du flux de particules à travers les différentes sections du cylindre (a). On vérifie que si $n_S > n_0$, le flux est bien positif.

Exercice 6.2 : Diffusion dans un cylindre

On considère un cylindre d'axe Oz , de longueur L très grande devant le rayon R_2 . On creuse dans ce cylindre une cavité cylindrique de même axe, de rayon R_1 , remplie d'un gaz avec une densité particulaire n_1 maintenue constante. On néglige les effets de bord ce qui revient à considérer la diffusion radiale entre $r = R_1$ et $r = R_2$. On note D le coefficient de diffusion. L'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

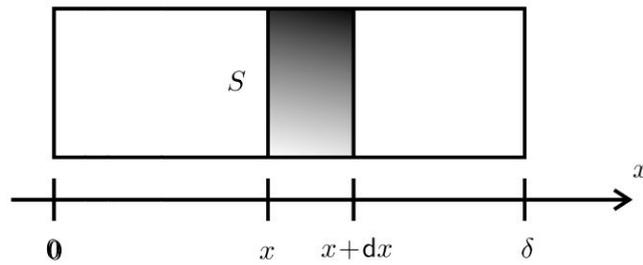
1. Démontrer l'équation aux dérivées partielles sur n dans le cas à une dimension (variable notée x) en régime variable. En déduire la généralisation de cette équation avec l'opérateur laplacien.
2. On se place en régime stationnaire. Exprimer la densité particulaire $n(r)$ pour r compris entre R_1 et R_2 en fonction de n_1 , r , D , R_1 et j_{D1} (densité de flux de particules pour $r = R_1$). En déduire le vecteur densité de flux de particules en fonction de j_{D1} , R_1 et r .

Analyse du problème

En régime stationnaire, on obtient une équation différentielle avec une seule variable. On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration : continuité de la densité particulaire et continuité du flux de particules à la traversée d'une surface.



1. On effectue un bilan de particules pendant dt sur un volume de section S compris entre x et $x + dx$:



La variation du nombre de particules pendant dt est égale au nombre de particules qui rentrent pendant dt – le nombre de particules qui sortent pendant dt + le nombre de particules qui sont produites pendant dt .

- On appelle d^2N la variation du nombre de particules pendant dt . À l'instant t , le nombre de particules est $n(t)Sdx$. À l'instant $t + dt$, le nombre de particules est $n(t + dt)Sdx$. On a donc :

$$d^2N = (n(t + dt) - n(t)) Sdx = \frac{\partial n}{\partial t} dt Sdx$$

- Ce qui rentre pendant dt à l'abscisse x : $j_D(x) Sdt$.
- Ce qui sort pendant dt à l'abscisse $x + dx$: $j_D(x + dx) Sdt$.
- Il n'y a pas de particules produites dans le volume Sdx .

Le bilan de particules s'écrit donc :

$$\frac{\partial n}{\partial t} dt Sdx = j_D(x) Sdt - j_D(x + dx) Sdt = -\frac{\partial j_D}{\partial x} Sdxdt$$

La loi de Fick s'écrit :

$$\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{u}_x$$

On obtient l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

La généralisation avec le Laplacien s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$$

2. On en déduit l'équation aux dérivées partielles avec les coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r} D \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right)$$

En régime stationnaire, on a :

$$\frac{d\left(r \frac{dn}{dr}\right)}{dr} = 0$$

On a donc : $r \frac{dn}{dr} = A$

On sépare les variables : $dn = A \frac{dr}{r}$. Soit :

$$n = A \ln r + B$$

On a deux constantes d'intégration A et B . Il faut donc deux conditions aux limites.

En régime permanent, sans terme de création, on a conservation du flux de particules à travers un cylindre de hauteur h et de rayon r (avec r compris entre R_1 et R_2).

Le flux de particules est :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{j}_D \cdot \vec{dS} = j_D 2\pi r h = -D \frac{dn}{dr} 2\pi r h = -D \left(\frac{A}{r}\right) 2\pi r h \\ &= -2\pi A h D \end{aligned}$$

Le flux de particules ne dépend pas de r .

On a deux conditions aux limites :

- Continuité de la densité particulaire pour $r = R_1$:

$$n_1 = A \ln R_1 + B$$

- Continuité du flux de particules pour $r = R_1$:

$$\Phi = j_{D1} 2\pi R_1 h = -2\pi A h D$$

On a donc :

$$\begin{cases} A = -j_{D1} R_1 \\ B = n_1 + \frac{j_{D1} R_1}{D} \ln R_1 \end{cases}$$

On a finalement :

$$n = -\frac{j_{D1} R_1}{D} \ln r + n_1 + \frac{j_{D1} R_1}{D} \ln R_1 = -\frac{j_{D1} R_1}{D} \ln \frac{r}{R_1} + n_1$$

Le vecteur densité de flux de particules est :

$$\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n = j_{D1} \frac{R_1}{r} \vec{u}_r$$

Remarque : On vérifie l'homogénéité et la pertinence de de la dernière relation. Si $j_{D1} > 0$, on a bien un flux de particules dirigé suivant $+\vec{u}_r$.

Statistique des fluides

Exercice 7.1 : Pression en fonction de l'altitude pour l'atmosphère isotherme

On assimile l'atmosphère à un gaz parfait de masse molaire M . On suppose l'atmosphère isotherme au repos dans le référentiel terrestre galiléen. Peut-on considérer la pression uniforme dans l'atmosphère sur une hauteur de 100 m ?

Analyse du problème

Il faut d'abord étudier la pression en fonction de l'altitude : on étudie une particule de fluide (échelle mésoscopique) de volume $d\tau$. Il faut rajouter au poids la résultante des forces de pression qui s'exerce sur ce volume.

L'énoncé ne donne pas de valeurs numériques. Il faut en proposer et supposer le champ de pesanteur uniforme.



a) Système : particule de fluide de volume $d\tau$, de masse volumique μ .

Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre galiléen. O est un point lié à la Terre à l'altitude $z = 0$. On définit l'axe Oz verticale ascendante du lieu. Les axes Ox et Oy sont définis de façon à avoir la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ortho-normée directe.

Bilan des forces :

- Poids de la particule de fluide : $dm\vec{g} = \mu\vec{g}d\tau$.
- Résultante des forces de pression qui s'exercent sur le volume $d\tau$:

$$- \left(\overrightarrow{\text{grad}} p \right) d\tau$$

Principe fondamental de la dynamique à l'équilibre :

$$\mu \vec{g} d\tau - \left(\overrightarrow{\text{grad}} p \right) d\tau = \vec{0}$$

On projette le PFD sur la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z} = 0 \\ -\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z} = 0 \\ -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} - \mu g = 0 \end{cases}$$

Comme $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z} = 0$ et $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z} = 0$, p ne dépend pas de x et de y . On

a alors : $\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} = \frac{dp}{dz}$ puisque p est fonction d'une seule variable. On a alors :

$$-\frac{dp}{dz} - \mu g = 0$$

La masse volumique pour un gaz parfait est :

$$\mu = \frac{pM}{RT}$$

On sépare les variables :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

On suppose le champ de pesanteur uniforme.

On intègre entre $z = 0$ où la pression vaut p_0 et l'altitude z où la pression vaut $p(z)$:

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{Mg}{RT}(z - 0)$$

On en déduit finalement :

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT}z\right)$$

b) Application numérique en proposant :

$$M = 29 \text{ g.mol}^{-1} = 29 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1} ; R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} ;$$

$$T = 273 \text{ K} ; g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$$

Au niveau du sol : $p_0 = 1 \text{ bar}$

Pour une altitude de 100 m, $p = 0,988 \text{ bar}$.

On a une variation relative $\left|\frac{p - p_0}{p_0}\right|$ de 1,2 %. On peut donc considérer la pression uniforme.

Partie 3

Bilans macroscopiques

Plan

8. Bilans d'énergie	69
8.1 : Machine frigorifique	69
8.2 : Cycle de Rankine	73
8.3 : Turboréacteur	75
8.4 : Cycle industriel de réfrigération	79
9. Relation de Bernoulli	85
9.1 : Tube de Pitot	85
9.2 : Débitmètre	86
10. Bilans dynamiques et thermodynamiques	89
10.1 : Pompe et dénivellation	89
10.2 : Force exercée par un liquide sur un tuyau coudé	93
10.3 : Force subie par un réservoir	96
10.4 : Fonctionnement d'une hélice	101
10.5 : Force exercée sur une plaque	106

Bilans d'énergie

Exercice 8.1 : Machine frigorifique

On étudie le cycle de l'eau d'une machine frigorifique. La capacité thermique massique de l'eau liquide est c . La température critique de l'eau est $T_{cr} = 647$ K. L'eau dans l'état D est à la température $T_1 = 288$ K sur la courbe de rosée. L'eau subit les transformations réversibles suivantes :

- DA : condensation isotherme à la température T_1 . L'eau dans l'état A est sur la courbe d'ébullition.
- AB : détente adiabatique réversible. L'eau dans l'état B est à la température $T_0 = 268$ K. Le titre massique en vapeur au point B est noté x_B .
- BC : vaporisation isotherme. Le titre massique en vapeur au point C est noté x_C .
- CD : compression adiabatique réversible.

Les enthalpies massiques de vaporisation pour les températures T_0 et T_1 sont notées respectivement l_0 et l_1 .

La variation d'entropie massique pour un liquide dont la température évolue de T_1 à T_2 est : $s_2 - s_1 = c_l \ln \frac{T_2}{T_1}$. La variation d'entropie massique au cours d'un déplacement sur le palier d'équilibre liquide-vapeur à la température T_0 est :

$$\Delta s = \frac{\Delta h}{T_0}.$$

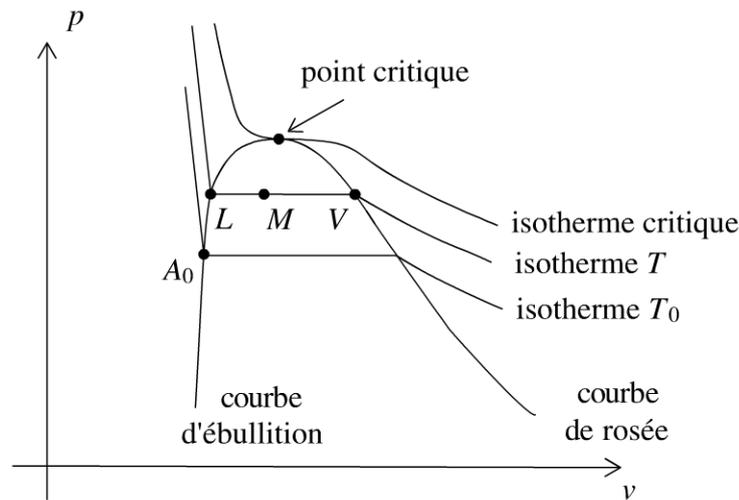
1. Représenter le cycle dans le diagramme de Clapeyron. Déterminer les titres massiques en vapeur x_B et x_C en fonction de c , T_0 , T_1 , l_0 et l_1 .
2. Déterminer les transferts thermiques massiques reçus par l'eau au cours des transformations BC et DA . Déterminer le travail massique reçu par l'eau au cours du cycle.
3. La machine frigorifique consomme du travail et prélève un transfert thermique à la source froide (température T_0). Calculer l'efficacité de la machine frigorifique.

Analyse du problème

Il faut être très attentif lors de la lecture de l'énoncé : bien identifier les paliers de pression et regarder si l'énoncé donne des tables thermodynamiques complètes ou incomplètes. On retrouve l'efficacité de Carnot puisqu'on a une machine cyclique ditherme constituée de 2 isothermes et 2 adiabatiques réversibles.

Cours :

On représente souvent le diagramme de Clapeyron représentant la pression p en fonction du volume massique v du corps pur.



1. Étude thermodynamique avec des tables complètes ou des diagrammes thermodynamiques

On connaît les enthalpies, entropies massiques du liquide saturant et de la vapeur saturante pour différentes températures. On utilisera très souvent le théorème des moments avec l'entropie massique, l'enthalpie massique ou le volume massique. Si dans une transformation, l'entropie joue un rôle important (exemple adiabatique réversible, donc isentropique), on utilisera le théorème des moments avec s :

$$x_V = \frac{s - s_L}{s_V - s_L} = \frac{LM}{LV}$$

On utilisera également une relation qui est dérivée du théorème des moments : $s = x_V s_V + (1 - x_V) s_L$.

De même, on peut écrire : $x_V = \frac{h - h_L}{h_V - h_L} = \frac{LM}{LV}$ et $x_V = \frac{v - v_L}{v_V - v_L} = \frac{LM}{LV}$.

2. Étude thermodynamique avec des tables incomplètes

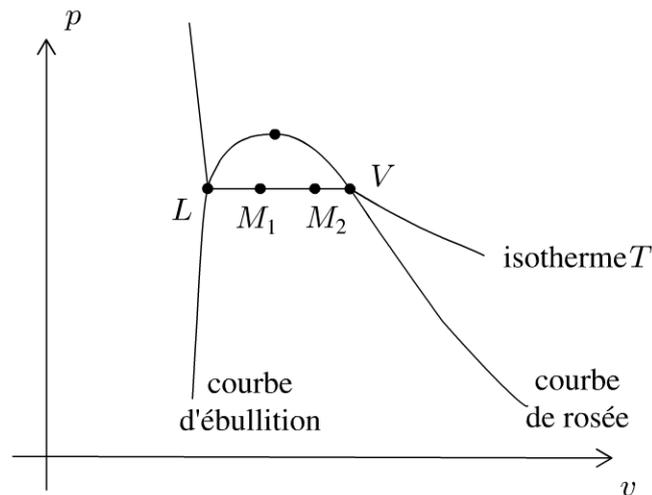
Si l'énoncé donne des tables thermodynamiques incomplètes, on utilisera des modèles approchés. Souvent, on donne c la capacité thermique massique du liquide. On prendra alors le modèle du liquide incompressible. On appelle l la chaleur latente massique de vaporisation (notée parfois dans les exercices l_v ou L) à la température T .

Variation d'enthalpie massique entre A_0 et L :

Pour un liquide incompressible, on a : $dh = cdT$. On en déduit que :

$$\Delta h_{A_0 \rightarrow L} = c(T - T_0)$$

Variation d'enthalpie massique entre M_1 et M_2 sur le palier :



On se déplace sur le palier d'équilibre liquide-vapeur du point M_1 au point M_2 .

En un point M du palier, on a : $h_M = x_V h_V + (1 - x_V) h_L$.

Au point M_1 , on a : $h_1 = x_{V1} h_V + (1 - x_{V1}) h_L$.

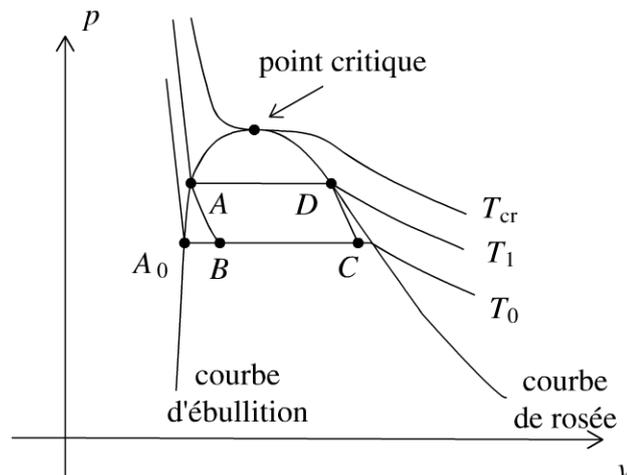
Au point M_2 , on a : $h_2 = x_{V2} h_V + (1 - x_{V2}) h_L$.

On a donc : $h_2 - h_1 = x_{V2} (h_V - h_L) - x_{V1} (h_V - h_L)$. La chaleur latente massique de vaporisation est définie par $l_V = h_V - h_L$. On a donc :

$$h_2 - h_1 = (x_{V2} - x_{V1}) l_V (T)$$



1. Le diagramme de Clapeyron est le diagramme (p, v) .



La transformation AB est isentropique :

On choisit le chemin AA_0B car l'entropie est une fonction d'état. La variation d'entropie massique entre A et B ne dépend pas du chemin suivi :

$$S_B - S_A = (S_B - S_{A0}) + (S_{A0} - S_A)$$

On considère une masse m d'eau. L'entropie massique est définie par $s = \frac{S}{m}$.

On en déduit que :

$$s_B - s_A = 0 = (s_B - s_{A0}) + (s_{A0} - s_A) = x_B \frac{l_0}{T_0} + c_l \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) = 0$$

Ce qui donne :

$$x_B = \frac{T_0}{l_0} c_l \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right)$$

La transformation CD est isentropique :

On choisit le chemin CA_0AD . On a donc :

$$\begin{aligned} s_D - s_C = 0 &= (s_D - s_A) + (s_A - s_{A0}) + (s_{A0} - s_C) \\ &= -x_C \frac{l_0}{T_0} + c_l \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) + \frac{l_1}{T_1} = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$x_C = \frac{T_0}{l_0} c_l \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) + \frac{T_0}{T_1} \frac{l_1}{l_0}$$

2. Calcul de $q_{B \rightarrow C}$:

Le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime stationnaire s'écrit :

$$\Delta h_{B \rightarrow C} = q_{B \rightarrow C} = q_0$$

Le transfert thermique massique q_0 reçu au cours de cette transformation est :

$$q_0 = (x_C - x_B) l_0 = \frac{T_0}{T_1} l_1$$

Calcul de $q_{D \rightarrow A}$:

La transformation $D \rightarrow A$ est isobare. Le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime stationnaire s'écrit :

$$\Delta h_{D \rightarrow A} = q_{D \rightarrow A} = q_1$$

Le transfert thermique massique q_1 reçu au cours de cette transformation est :

$$q_1 = -l_1$$

Calcul de w :

Pour calculer le travail massique reçu au cours du cycle, il faut écrire le premier principe de la thermodynamique sur un cycle :

$$0 = w + q_0 + q_1$$

On a alors :

$$w = -q_0 - q_1$$

3. L'efficacité est définie par :

$$\eta = \frac{\text{utile}}{\text{dépense}} = \frac{q_0}{w}$$

On a donc :

$$\eta = -\frac{q_0}{q_1 + q_0} = -\frac{\frac{T_0}{T_1}l_1}{-l_1 + \frac{T_0}{T_1}l_1} = -\frac{T_0}{T_1} \frac{T_1}{T_0 - T_1}$$

d'où :

$$\eta = \frac{T_0}{T_1 - T_0} = \frac{T_F}{T_C - T_F} = 13,4$$

On retrouve bien l'efficacité de Carnot puisqu'on a une machine cyclique ditherme réversible.

Remarque : En pratique le point C doit se trouver sur la courbe de rosée pour avoir une compression monophasique. Pour ne pas avoir des gouttes de liquide dans le compresseur, on réalise même une surchauffe de la vapeur avant d'entrer dans le compresseur. Cette surchauffe se fait à pression constante. On arrive à un point C' dans le domaine de la vapeur sèche.

Exercice 8.2 : Cycle de Rankine

Le cycle de Rankine est le cycle de base des centrales nucléaires. La pompe d'alimentation porte l'eau liquide saturante (état 0) de la basse pression p_0 du condenseur à la pression p_1 du générateur de vapeur (GV) de façon adiabatique réversible (état 1). L'eau liquide comprimée entre ensuite dans le générateur de vapeur, isobare, où elle est chauffée jusqu'à la température T_2 du changement d'état (état 1'), puis totalement vaporisée (état 2). La vapeur saturante sèche produite subit ensuite une détente adiabatique réversible (2-3) dans une turbine. Le fluide pénètre ensuite dans le condenseur isobare pour y être totalement condensé (état 0) à la température T_1 . On appelle T_{cr} la température critique de l'eau. On négligera le travail consommé par la pompe devant les autres termes énergétiques de l'installation. On admet que $h_1 = h_0$. On donne : $t_1 = 30 \text{ °C}$; $t_2 = 300 \text{ °C}$ et $t_{cr} = 374 \text{ °C}$.

La variation d'entropie massique pour un liquide dont la température évolue de T_1 à T_2 est : $s_2 - s_1 = c_l \ln \frac{T_2}{T_1}$. La variation d'entropie massique au cours d'un déplacement sur le palier d'équilibre liquide-vapeur à la température T_1 est :

$$\Delta s = \frac{\Delta h}{T_1}$$

Extraits de tables thermodynamiques pour l'eau sur le palier d'équilibre liquide-vapeur :

- liquide saturant à $p_1 = 85,9$ bar et 300 °C : $s = 3,24$ kJ.kg⁻¹.K⁻¹ ; $h = 1345$ kJ.kg⁻¹
- liquide saturant à $p_0 = 0,04$ bar et 30 °C : $s = 0,44$ kJ.kg⁻¹.K⁻¹ ; $h = 126$ kJ.kg⁻¹
- vapeur saturante sèche à $85,9$ bar et 300 °C : $s = 5,57$ kJ.kg⁻¹.K⁻¹ ; $h = 2749$ kJ.kg⁻¹
- vapeur saturante sèche à $0,04$ bar et 30 °C : $s = 8,46$ kJ.kg⁻¹.K⁻¹ ; $h = 2566$ kJ.kg⁻¹

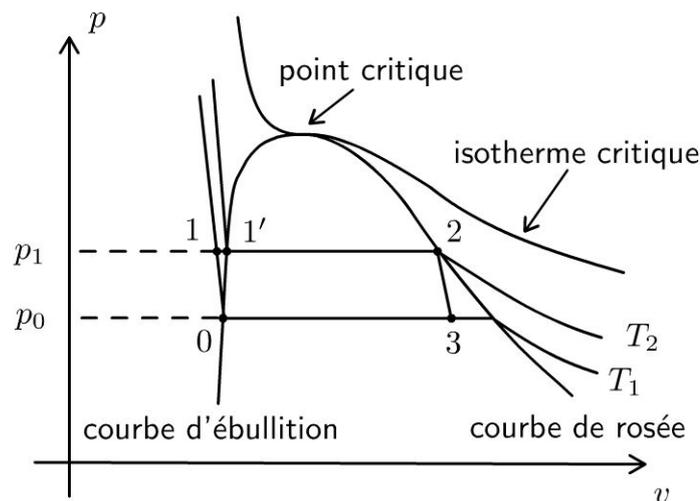
1. Représenter l'allure du cycle décrit par le fluide dans le diagramme de Clapeyron.
2. Déterminer le titre massique et l'enthalpie massique de la vapeur à la sortie de la turbine.
3. Calculer l'efficacité du cycle $\eta = \frac{-w_{\text{turbine}}}{q_{GV}}$.
4. Dans quel état se trouve le fluide à la fin de la détente dans la turbine ? Pourquoi est-ce un inconvénient pour les parties mobiles de la machine ?

Analyse du problème

Il faut être très attentif lors de la lecture de l'énoncé : bien identifier les paliers de pression et regarder si l'énoncé donne des tables thermodynamiques complètes ou incomplètes. L'efficacité n'est pas égale à l'efficacité de Carnot puisqu'on n'a pas une machine cyclique ditherme réversible. Il faut bien remarquer qu'une transformation isobare n'est pas nécessairement réversible.



1. Le diagramme de Clapeyron est le diagramme (p, v) .



2. La transformation $2 \rightarrow 3$ est adiabatique réversible, donc isentropique. On a alors :

$$s_3 = s_2 = s_V(T_2) = 5,57 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

On utilise le théorème des moments sur le palier d'équilibre liquide-vapeur à la température T_1 . Le titre massique en vapeur au point 3 est :

$$x_V = \frac{LM}{LV} = \frac{s_3 - s_L(T_1)}{s_V(T_1) - s_L(T_1)} = \frac{s_V(T_2) - s_L(T_1)}{s_V(T_1) - s_L(T_1)}$$

$$= \frac{5,57 - 0,44}{8,46 - 0,44} = 0,64$$

On en déduit l'enthalpie massique au point 3 :

$$h_3 = x_V h_V(T_1) + (1 - x_V) h_L(T_1) = 1687,6 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

3. On applique le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime stationnaire.

Pour la transformation 2 → 3 :

$$h_3 - h_2 = w_{it}$$

puisque la turbine est calorifugée. w_{it} est le travail indiqué massique reçu par le fluide. Il est toujours négatif pour une turbine.

Pour la transformation 1 → 2 :

$$h_2 - h_1 = q_{GV}$$

puisque'il n'y a pas de partie mobile de la machine, c'est à dire pas de travail autre que celui des forces de pression.

Calcul de l'efficacité :

$$\eta = \frac{-w_{turbine}}{q_{GV}} = \frac{-(h_3 - h_2)}{(h_2 - h_1)} = \frac{-(1687,6 - 2749)}{2749 - 126} = 40,5 \%$$

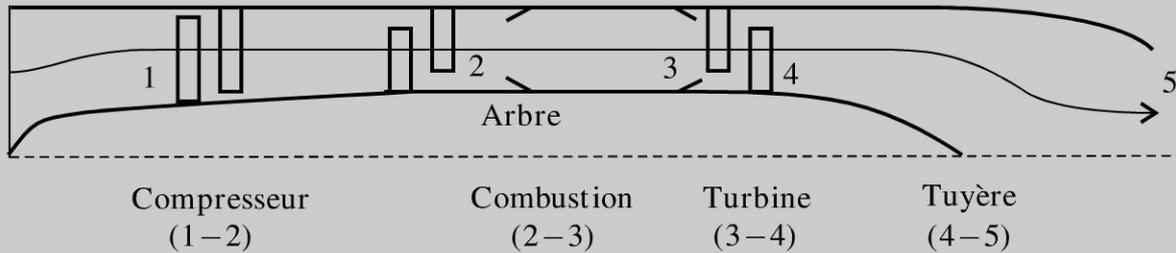
4. D'après le diagramme (p, v) , la vapeur est saturante à la fin de la détente. Il y a donc des conditions difficiles pour les parties mobiles de la machine à cause de la corrosion.

Remarque : Le cycle de Rankine malgré les inconvénients d'un mélange humide est utilisé dans la marine : propulsion des sous-marins nucléaires, porte-avion Charles de Gaulle. Une contrainte importante est d'avoir une chaufferie la plus fiable et la plus compacte possible. Par contre, la turbine est très sensible à la corrosion.

Exercice 8.3 : Turboréacteur

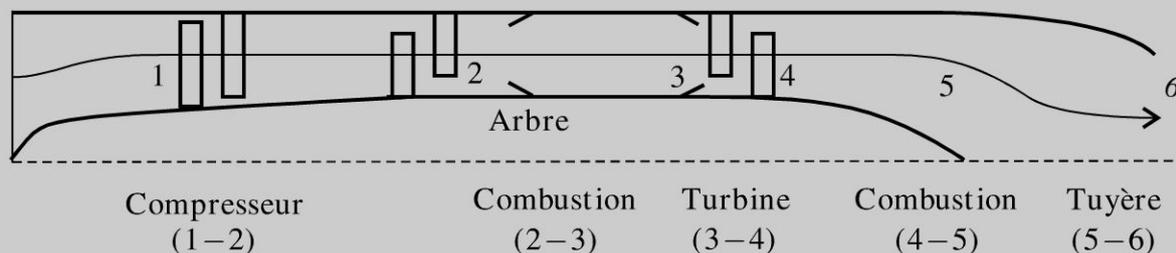
Un compresseur axial aspire l'air ambiant. Après compression, l'air est chauffé dans la chambre de combustion jusqu'à la température ($T_3 = 1250 \text{ K}$). Après détente partielle dans la turbine axiale, l'air est envoyé dans la tuyère où la détente s'effectue jusqu'à la pression ambiante ($P_5 = 1,00 \text{ bar}$). Le compresseur est uniquement entraîné par la turbine, qui lui transmet intégralement la puis-

sance mécanique que lui fournit l'écoulement. On rappelle que $P_2 = P_3$. On donne le taux de compression du compresseur : $\frac{P_2}{P_1} = 6,15$.



L'air est assimilé à un gaz parfait. On donne $c_p = 1,00 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et $\gamma = 1,40$. L'énergie cinétique sera négligée, sauf à la sortie de la tuyère. Le débit massique d'air aspiré par le turboréacteur vaut $D_M = 50,00 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Le compresseur aspire l'air ambiant défini par sa pression $P_1 = 1,00 \text{ bar}$ et sa température $T_1 = 288 \text{ K}$. Les évolutions à l'intérieur des turbomachines (compresseurs et turbines) et des tuyères sont supposées adiabatiques, réversibles. On négligera les pertes de charge de l'air à l'intérieur des chambres de combustion : les évolutions y sont isobares. On définit le rendement thermique du turboréacteur (noté η_{th}) comme étant le rapport entre l'énergie cinétique massique reçue par l'air, notée e_c , et la (ou la somme des) quantité(s) de chaleur massique(s) fournie(s) par la (ou les) chambre(s) de combustion, notée $q_{\text{combustion}}$.

1. Calculer la température T_2 (sortie du compresseur), le travail indiqué massique de compression, la température T_4 , la pression P_4 à la sortie de la turbine, la température T_5 et la vitesse c_5 à la sortie de la tuyère.
2. Calculer la quantité de chaleur massique fournie à l'air lors de la combustion, notée $q_{2-3} = q_{\text{combustion}}$. Calculer l'énergie cinétique massique de l'air à la sortie de la tuyère. En déduire le rendement thermique η_{th} de ce turboréacteur.



La configuration est identique à la précédente mais on insère une seconde chambre de combustion entre la turbine et la tuyère. Lors de cette seconde combustion, l'air est à nouveau chauffé jusqu'à la température de 1930 K ($T_5 = 1930 \text{ K}$). La détente s'effectue ensuite dans la tuyère jusqu'à la pression ambiante ($P_6 = 1,00 \text{ bar}$).

Comme précédemment la turbine entraîne le compresseur, le taux de compression est identique et la température de fin de première combustion aussi ($T_3 = 1250 \text{ K}$). On rappelle que $P_2 = P_3$ et que $P_4 = P_5$.

3. Calculer T_2, T_4, P_4, T_6 à la sortie de la tuyère et la vitesse c_6 à la sortie de cette tuyère.

4. Calculer la quantité de chaleur massique fournie à l'air lors de la seconde combustion, notée q_{4-5} . En déduire la quantité de chaleur massique fournie globalement à l'air, notée $q_{\text{combustion}} = q_{2-3} + q_{4-5}$. Calculer l'énergie cinétique massique de l'air à la sortie de la tuyère. En déduire le rendement thermique η_{th} , de ce turboréacteur. Comparer les paramètres des deux turboréacteurs étudiés et conclure.

Analyse du problème

On retrouve les éléments classiques en thermodynamique industrielle : compresseur, turbine, chambre de combustion. Pour chaque élément, on applique le premier principe de la thermodynamique en régime permanent pour un système ouvert à une entrée et une sortie. Comme le compresseur est entraîné par la turbine, le travail fourni par la turbine est récupéré entièrement par le compresseur.



1. La compression est adiabatique, réversible avec un gaz parfait. On peut donc appliquer les lois de Laplace pour la transformation $1 \rightarrow 2$:

$T_1 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$. On a donc :

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 484 \text{ K}$$

On applique au compresseur le premier principe de la thermodynamique à un système ouvert en régime permanent : $\Delta h = w_i = c_p (T_2 - T_1)$.

$q_e = 0$ car la transformation est adiabatique et $\Delta h = c_p (T_2 - T_1)$ car on a un gaz parfait.

On a donc :

$$w_i = c_p (T_2 - T_1) = 196 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Le compresseur est entraîné par la turbine. Le travail fourni par la turbine est récupéré par le compresseur : $|w_{34}| = w_{12}$.

Comme $w_{34} < 0$, on a $w_{12} + w_{34} = 0 = c_p (T_2 - T_1) + c_p (T_4 - T_3)$, d'où :

$$T_4 = T_3 - T_2 + T_1 = 1054 \text{ K}$$

La transformation $3 \rightarrow 4$ est adiabatique, réversible avec un gaz parfait. On

peut appliquer les lois de Laplace : $T_3 P_3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_4 P_4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, donc :

$$P_4 = P_3 \left(\frac{T_3}{T_4} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 3,39 \text{ bar}$$

La transformation 4 → 5 est adiabatique, réversible, gaz parfait. On peut appliquer les lois de Laplace pour la transformation 4 → 5 :

$$T_4 P_4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_5 P_5^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \text{ On a donc :}$$

$$T_5 = T_4 \left(\frac{P_4}{P_5} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 744 \text{ K}$$

On applique à la tuyère le premier principe pour un système ouvert en régime permanent : $h_5 - h_4 + \frac{1}{2}c_5^2 = 0$ car on néglige toutes les vitesses sauf celle en sortie de la tuyère. On a donc :

$$c_5 = \sqrt{2(h_4 - h_5)} = \sqrt{2c_p(T_4 - T_5)} = 787 \text{ m.s}^{-1}$$

2. On applique à la chambre de combustion le premier principe pour un système ouvert en régime permanent :

$$h_3 - h_2 = q_{23} = q_{\text{combustion}} = c_p(T_3 - T_2) = 766 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

$w_i = 0$ car il n'y a pas de partie mobile de la machine. On a donc :

$$e_c = \frac{1}{2}c_5^2 = 310 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Le rendement thermique vaut :

$$\eta_{th} = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{\frac{1}{2}c_5^2}{q_{23}} = 40,4 \%$$

3. On retrouve les mêmes résultats que dans la question 1 : $T_2 = 484 \text{ K}$; $T_4 = 1054 \text{ K}$ et $P_4 = 3,39 \text{ bar}$.

La transformation 5 → 6 est adiabatique, réversible avec un gaz parfait. On peut appliquer les lois de Laplace pour la transformation 5 → 6 :

$$T_5 P_5^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_6 P_6^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

On a donc :

$$T_6 = T_5 \left(\frac{P_5}{P_6} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1362 \text{ K}$$

On applique à la tuyère le premier principe pour un système ouvert en régime permanent : $h_6 - h_5 + \frac{1}{2}c_6^2 = 0$ car on néglige toutes les vitesses sauf celle

en sortie de la tuyère. On a donc :

$$c_6 = \sqrt{2(h_5 - h_6)} = \sqrt{2c_p(T_5 - T_6)} = 1066 \text{ m.s}^{-1}$$

4. On applique à la chambre de combustion le premier principe pour un système ouvert en régime permanent :

$$h_5 - h_4 = q_{45} = c_p(T_5 - T_4) = 876 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

$w_i = 0$ car il n'y a pas de partie mobile de la machine.
On en déduit que :

$$q_{\text{combustion}} = q_{23} + q_{45} = 1642 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

L'énergie cinétique massique est :

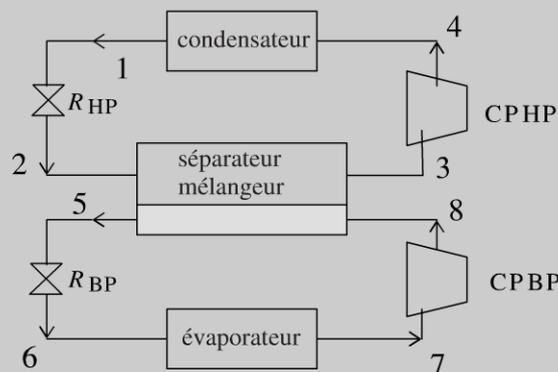
$$e_c = \frac{1}{2}c_6^2 = 568 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Le rendement thermique vaut :

$$\eta_{th} = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{e_c}{q_{\text{combustion}}} = 34,6 \%$$

Le turboréacteur de la 2^e partie a un moins bon rendement que celui de la 1^{re} partie. On récupère moins d'énergie cinétique pour un coût identique.

Exercice 8.4 : Cycle industriel de réfrigération



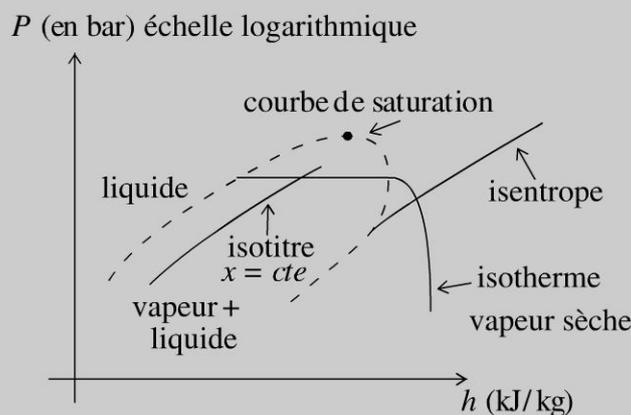
Le condenseur et l'évaporateur sont des échangeurs permettant respectivement la condensation et l'évaporation totale du fluide qui les traverse ; dans les états 1 et 7, le fluide est respectivement à l'état de liquide saturant et de vapeur saturante sèche. Ces échangeurs sont calorifugés. Les évolutions du fluide y sont supposées réversibles. R_{HP} et R_{BP} sont des robinets de laminage, respectivement haute et basse pression, qui assurent, sans partie mobile, des détentes supposées adiabatiques :

- Le fluide pénètre dans R_{HP} sous une haute pression égale à P_1 (état 1) et en ressort sous une pression intermédiaire P_2 (état 2).
- Le fluide pénètre dans R_{BP} , sous la pression intermédiaire égale à P_5 (état 5) et en ressort sous une basse pression P_6 (état 6). CPHP et CPBP sont des compresseurs, respectivement haute et basse pression, qui assurent des compressions également supposées adiabatiques et réversibles du fluide à l'état gazeux :
- Le fluide pénètre dans CPHP sous une pression intermédiaire P_3 (état 3) et en ressort sous la haute pression P_4 (état 4).
- Le fluide pénètre dans CPBP sous basse pression P_7 (état 7) et en ressort sous la pression intermédiaire P_8 (état 8).

À la sortie de R_{HP} (état 2), et à la sortie de CPBP (état 8), le fluide pénètre dans le mélangeur-séparateur (MS) et ressort à l'état de vapeur sèche saturante (état 3) vers CPHP et à l'état de liquide saturant (état 5) vers R_{BP} . L'échangeur MS est parfaitement calorifugé, dépourvu de partie mobile, et les évolutions du fluide y sont supposées réversibles.

Données : $P_1 = 15$ bar, $P_2 = P_8 = 4,0$ bar, $P_6 = 1,5$ bar. Débit du cycle basse pression : $D_{BP} = 1,50$ kg·s⁻¹. Débit du cycle haute pression : $D_{BP} = 2,43$ kg·s⁻¹. Puissance thermique de réfrigération $P = 240$ kW (reçue par le fluide au niveau de l'évaporateur).

1. Étude du diagramme des frigoristes : $P(h)$



L'abscisse est l'enthalpie massique h du fluide étudié, exprimée en kJ.kg⁻¹, avec une échelle linéaire. L'ordonnée est la pression P , exprimée en bar (1 bar = 10⁵ Pa), avec une échelle logarithmique.

Quelle est la forme des isothermes à l'intérieur de la courbe de saturation ? On justifiera précisément la réponse fournie. Trouver l'équation d'une isotherme d'un gaz parfait dans le diagramme étudié ; y a-t-il accord avec les isothermes du diagramme réel du fluide Forane 502, représenté en annexe ?

2. Étude du cycle haute pression (1 → 2 → 3 → 4)

Le fluide frigorigène étudié ici est le Forane 502. Tracer le cycle 1, 2, 3, 4 sur le diagramme fourni en annexe. Présenter, sous forme de tableau, les caractéristiques (h, P, T, x) de chacun des états 1, 2, 3 et 4 par lecture directe sur ce dia-

gramme ainsi complété. Retrouver le titre massique en vapeur x du fluide dans l'état 2.

3. Étude du cycle basse pression (5 → 6 → 7 → 8)

Tracer le cycle 5, 6, 7, 8 sur le diagramme fourni en annexe. Déterminer les valeurs de P, T, x et h pour les états 5 et 6 du fluide. Faire de même pour le fluide dans l'état 7 ; en déduire les valeurs pour l'état 8. Présenter, sous forme de tableau, les caractéristiques (h, P, T, x) de chacun des états 5, 6, 7 et 8.

4. Bilan énergétique

Calculer la puissance mécanique échangée dans CPHP et CPBP. Calculer la puissance thermique échangée dans l'évaporateur et dans le condenseur. Calculer le COP (coefficient de performance) de l'installation frigorifique étudiée :

$$\text{COP} = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{P_{\text{th, évaporateur}}}{P_{\text{méca CP HP+BP}}}$$

Calculer le COP du cycle réfrigérant idéal de Carnot ayant mêmes températures de source froide et de source chaude. En déduire le rendement du cycle étudié par rapport au cycle de Carnot : $\eta = \frac{\text{COP}}{\text{COP}_{\text{Carnot}}}$.

Commenter.

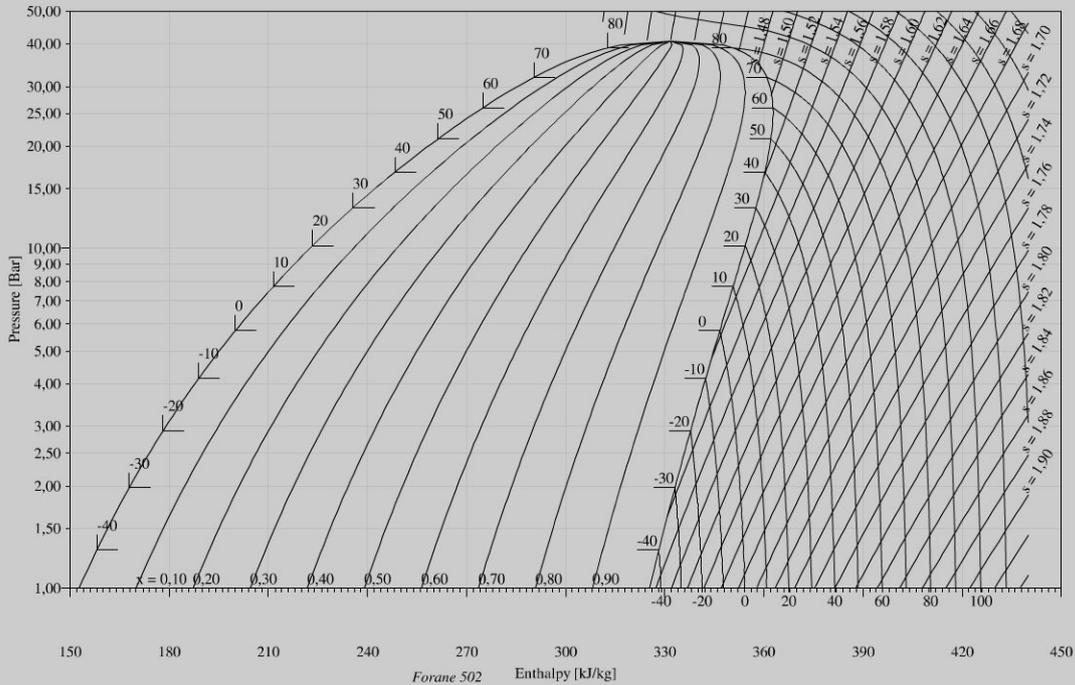


Figure 1
Diagramme des frigorigènes du forane 502. s en $\text{kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

Analyse du problème

Cet exercice utilise le diagramme des frigoristes très utilisé pour des cycles de réfrigération. Le théorème des moments permet de donner une relation entre le titre massique en vapeur et les enthalpies massiques sur un palier d'équilibre liquide-vapeur.



1. Les isobares sont confondues avec les isothermes à l'intérieur de la courbe de saturation et sont représentées par des segments de droite horizontaux.

D'après la deuxième loi de Joule, l'enthalpie d'un gaz parfait n'est fonction que de la température donc sur une isotherme h est constante. Les isothermes pour un gaz parfait sont donc des droites verticales dans le domaine où le fluide est gazeux, ce qui est en désaccord avec la figure fournie.

2. Tracé du cycle : voir figure à la fin du corrigé.

	1	2	3	4
h (kJ.kg ⁻¹)	245	245	343	366
p (bar)	15	4	4	15
T (°C)	36	-11	-11	44
x	0	0,36	1	vapeur sèche

Les grandeurs en gras dans le tableau ci-dessus sont données par l'énoncé, les autres sont lues sur le diagramme.

On utilise le théorème des moments pour calculer le titre massique en vapeur :

$$x = \frac{LM}{LV} = \frac{h_2 - h_L(-10^\circ\text{C})}{h_V(-10^\circ\text{C}) - h_L(-10^\circ\text{C})}$$

avec $h_2 = h_1 = 245 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $h_L(-10^\circ\text{C}) = 188 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $h_V(-10^\circ\text{C}) = h_3 = 343 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

On en déduit que : $x = \frac{245 - 188}{343 - 188} = 0,37$. C'est tout à fait cohérent avec la lecture sur le diagramme.

3.

	5	6	7	8
h (kJ.kg ⁻¹)	188	188	328	347
p (bar)	4	1,5	1,5	4
T (°C)	-11	-37	-37	3
x	0	0,16	1	vapeur sèche

Comme dans le tableau précédent, les grandeurs en gras dans le tableau ci-dessus sont données par l'énoncé, les autres sont lues sur le diagramme.

4. Compresseur HP : $P_{\text{méca CP HP}} = D_{\text{HP}}(h_4 - h_3) = 55,9 \text{ kW}$.

Compresseur BP : $P_{\text{méca CP BP}} = D_{\text{BP}}(h_8 - h_7) = 28,5 \text{ kW}$.

On en déduit la puissance mécanique reçue par les deux compresseurs :

$$P_{\text{méca CP HP+BP}} = 84,4 \text{ kW}$$

La puissance thermique algébriquement reçue par l'évaporateur est :

$$P_{\text{th,évaporateur}} = D_{\text{BP}}(h_7 - h_6) = 210 \text{ kW}$$

La puissance thermique algébriquement reçue par le condenseur est :

$$P_{\text{th,condenseur}} = D_{\text{HP}}(h_1 - h_4) = -294 \text{ kW}$$

On a bien une valeur négative puisqu'on a un changement d'état vapeur → liquide.

$$\text{COP} = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{P_{\text{th,évaporateur}}}{P_{\text{méca CP HP+BP}}} = \frac{210}{84,4} = 2,49.$$

$$\text{COP}_{\text{Carnot}} = \frac{T_F}{T_C - T_F} = 3,23$$

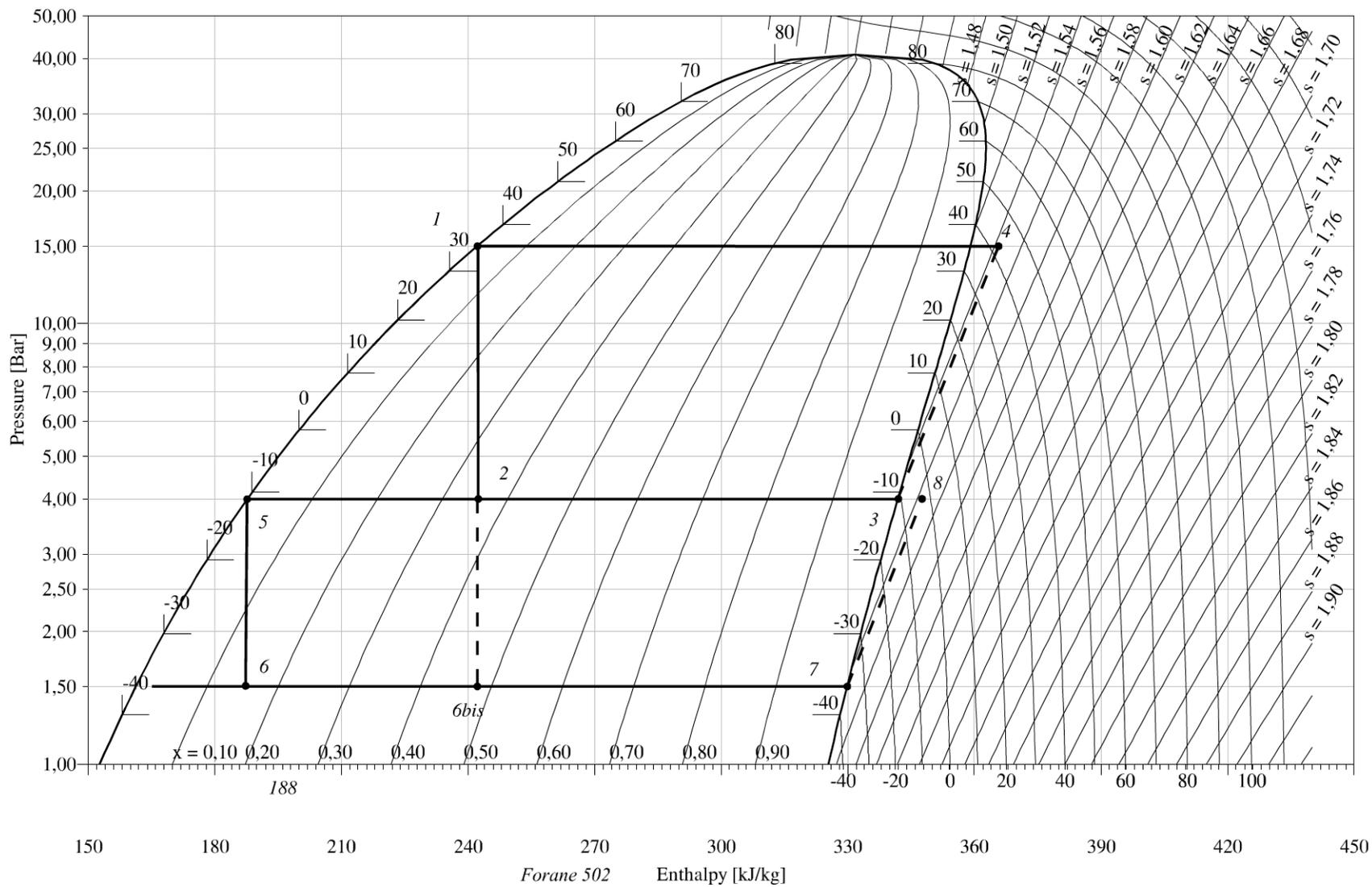
avec $T_F = -37 + 273 \text{ K}$ et $T_C = 36 + 273 \text{ K}$. Il faut choisir les températures de T_C et T_F de façon à obtenir le plus grand COP pour la machine de Carnot. Cela revient à prendre T_F le plus grand et T_C le plus petit. Nous en

déduisons le rendement du cycle : $\eta = \frac{\text{COP}}{\text{COP}_{\text{Carnot}}} = \frac{2,49}{3,23} = 77\%$. C'est

normal d'avoir un rendement inférieur à 1. Le cycle réel n'est pas un cycle de Carnot. Le laminage n'est pas réversible. Le transfert thermique isobare ($4 \rightarrow 1' \rightarrow 1$) nécessiterait une infinité de sources de chaleur pour être réversible.



Attention à ne pas confondre les courbes isochores (non utilisées dans l'exercice) et les courbes isentropes, de pentes plus importantes.

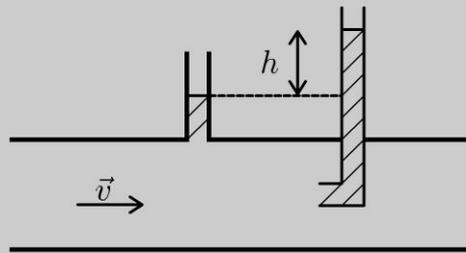


Relation de Bernoulli

9

Exercice 9.1 : Tube de Pitot

On considère un fluide qui s'écoule dans une canalisation horizontale. L'écoulement est homogène, permanent, parfait et incompressible. Exprimer la vitesse v en fonction de g et de h .



Cours : Théorèmes de Bernoulli

Il existe deux versions très importantes des théorèmes de Bernoulli selon la nature de l'écoulement.

- Ecoulement homogène, parfait, permanent, incompressible, irrotationnel (HPPII),

$$\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz = cte$$
 en tout point de l'écoulement.

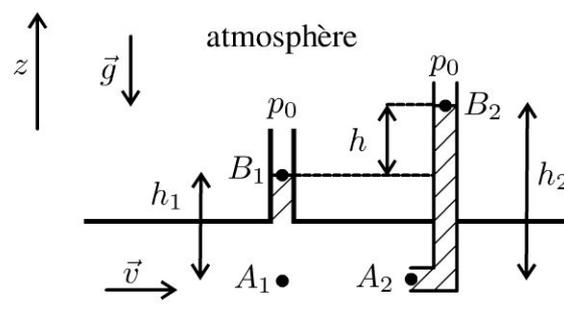
- Ecoulement homogène, parfait, permanent, incompressible (HPPI), $\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz = cte$ sur une ligne de courant. Attention la constante ne prend pas la même valeur sur une autre ligne de courant.

Attention à bien vérifier que l'axe Oz est bien orienté vers le haut. Dans ce cas, on a $+gz$ dans le théorème de Bernoulli.

Si l'écoulement est parfait et les lignes de courant sont horizontales, alors on peut appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides dans la direction verticale.



1.



$A_1 \rightarrow A_2$

L'écoulement est homogène, parfait, permanent et incompressible (HPPI). On peut donc appliquer le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant horizontale $A_1 \rightarrow A_2$. Le point A_2 est un point d'arrêt. La vitesse est donc nulle en ce point. Le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{p_{A1}}{\mu} + \frac{1}{2}v_{A1}^2 + gz_{A1} = \frac{p_{A2}}{\mu} + \frac{1}{2}v_{A2}^2 + gz_{A2}$$

Le vecteur vitesse au point A_1 est \vec{v} . On a donc :

$$p_{A2} - p_{A1} = \frac{1}{2}\mu v^2 \text{ (eq.1)}$$

 $A_1 \rightarrow B_1$

L'écoulement est parfait et les lignes de courant sont horizontales. On peut donc appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides homogènes et incompressibles : $\frac{p_{A1}}{\mu} + gz_{A1} = \frac{p_{B1}}{\mu} + gz_{A2}$. Le point B_1 est en contact avec l'air. On a donc $p_{B1} = p_0$. Soit :

$$p_{A1} = p_0 + \mu gh_1 \text{ (eq.2)}$$

 $A_1 \rightarrow B_1$

La vitesse est nulle au point A_2 et la pression au point B_2 vaut p_0 puisque le fluide est en contact avec l'atmosphère. Le fluide est immobile. On peut donc appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides homogènes et incompressibles :

$$p_{A2} = p_0 + \mu gh_2 \text{ (eq.3)}$$

On fait la différence (eq.3) - (eq.1). On obtient :

$$p_{A2} - p_{A1} = \mu g (h_2 - h_1) = \mu gh$$

En utilisant l'équation 1 : $p_{A2} - p_{A1} = \frac{1}{2}\mu v^2$, on en déduit :

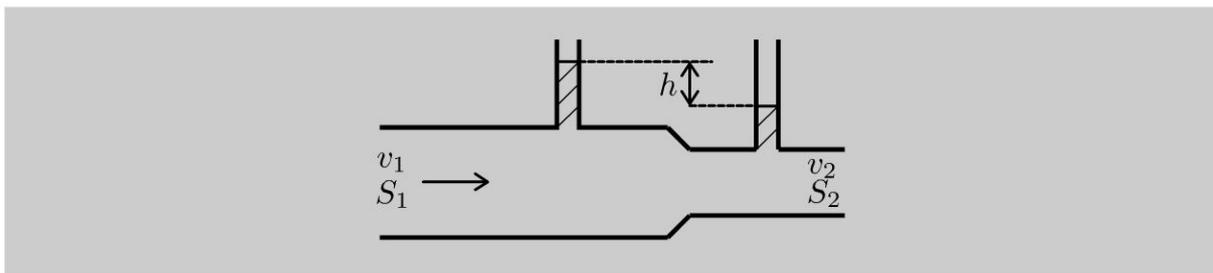
$$v = \sqrt{2gh}$$

Cette relation permet de mesurer la vitesse d'écoulement d'un fluide à partir de la hauteur h .

Exercice 9.2 : Débitmètre

On considère un fluide qui s'écoule dans une canalisation horizontale. L'écoulement est homogène, permanent, parfait et incompressible.

1. Exprimer le débit volumique en fonction de S_1, S_2, g et h .
2. Si $S_2 < S_1$, comparer les pressions à l'entrée et à la sortie de la canalisation.



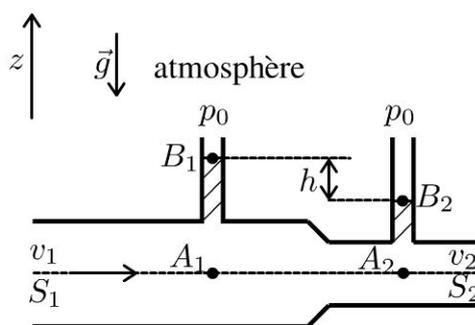
Analyse du problème

Avant d'appliquer le théorème de Bernoulli, il faut bien regarder si toutes les hypothèses sont bien vérifiées. Si l'écoulement est parfait et les lignes de courant sont horizontales, alors on peut appliquer la relation de la statique des fluides dans la direction verticale.

Comme l'écoulement est incompressible, on utilisera la conservation du débit volumique.



1.



$A_1 \rightarrow A_2$

L'écoulement est homogène, parfait, permanent et incompressible (HPPI). On peut appliquer le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant $A_1 \rightarrow A_2$, soit :

$$\frac{p_{A_1}}{\mu} + \frac{1}{2}v_{A_1}^2 + gz_{A_1} = \frac{p_{A_2}}{\mu} + \frac{1}{2}v_{A_2}^2 + gz_{A_2}$$

On en déduit :

$$p_{A_1} - p_{A_2} = +\frac{1}{2}\mu(v_2^2 - v_1^2) \quad (eq.1)$$

Conservation du débit volumique

L'écoulement est incompressible. On a donc la conservation du débit volumique :

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (eq.2)$$

$A_1 \rightarrow B_1$ et $A_2 \rightarrow B_2$

L'écoulement est parfait et les lignes de courant sont horizontales, alors on peut appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides homogènes et incompressibles dans la direction verticale, donc :

$$p_{A_1} = p_{B_1} + \mu g h_1$$

On peut appliquer la même relation pour $A_2 \rightarrow B_2$, soit

$$p_{A_2} = p_{B_2} + \mu g h_2$$

Les points B_1 et B_2 sont en contact avec l'atmosphère, donc $p_{B_1} = p_{B_2} = p_0$. On en déduit que :

$$p_{A_1} - p_{A_2} = \mu g h \text{ (eq.3)}$$

Des équations (1) et (3), on en déduit :

$$\mu g h = \frac{1}{2} \mu (v_2^2 - v_1^2)$$

En utilisant l'équation (2), on a :

$$2gh = \left(\left(\frac{v_1 S_1}{S_2} \right)^2 - v_1^2 \right) = v_1^2 \left(\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right)$$

Soit :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1}}$$

Le débit volumique est :

$$D_V = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}$$

2. Si $S_2 < S_1$, alors $v_2 > v_1$ d'après la conservation du débit volumique. D'après le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant $A_1 \rightarrow A_2$, on a

$$p_{A_2} < p_{A_1}$$

Un rétrécissement du conduit provoque une dépression. Cet effet s'appelle l'effet Venturi. Exemple d'application : trompe à eau utilisée en chimie.

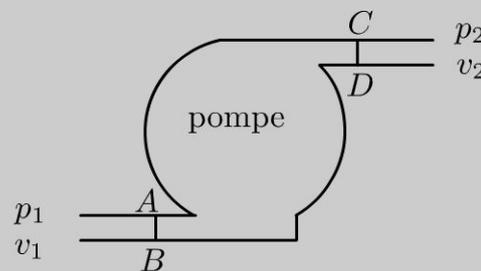
Bilans dynamiques et thermodynamiques

Exercice 10.1 : Pompe et dénivellation

On considère un écoulement homogène, parfait, permanent, incompressible. On appelle D_m le débit massique. Calculer la puissance à fournir à la pompe pour que l'eau franchisse la dénivellation de hauteur H en fonction de D_m, μ, p_1, p_2, g et H . On rappelle que $dh = T ds + \frac{1}{\mu} dp$.

On rappelle que $dh = T ds + \frac{1}{\mu} dp$.

On appelle p_1, v_1 la pression et la vitesse de l'eau à l'entrée de la pompe et p_2, v_2 la pression et la vitesse de l'eau à la sortie de la pompe. La section S_1 à l'entrée de la pompe est égale à la section S_2 en sortie.



Analyse du problème

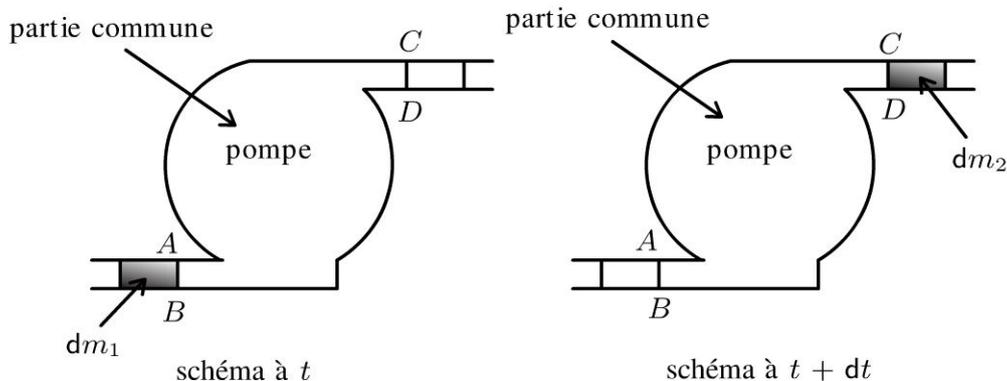
Il faut effectuer des bilans pour calculer la puissance. On ne peut pas appliquer le théorème de Bernoulli car on ne peut pas définir de ligne de courant à l'intérieur de la pompe. Le raisonnement sur les systèmes ouverts est très important et peut s'appliquer pour le premier principe, le deuxième principe de la thermodynamique, le théorème de la quantité de mouvement, le théorème du moment cinétique, le théorème de l'énergie cinétique...

Cours : Méthode pour effectuer des bilans avec des systèmes ouverts

On considère un régime **permanent** d'écoulement avec **une entrée et une sortie**.

Le fluide compris entre AB et CD est un système ouvert. On ne peut pas appliquer le premier principe de la thermodynamique. Il faut se ramener à un système fermé Σ défini de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_2 qui sort pendant dt .



On a bien un système fermé. On note avec un indice les différentes grandeurs de la partie commune : énergie interne U_{PC} , énergie mécanique E_{mPC} , masse m_{PC} ... Comme on est en régime permanent, les différentes grandeurs de la partie commune sont les mêmes à t et à $t + dt$. On a donc :

$$U_{PC}(t) = U_{PC}(t + dt)$$

$$E_{mPC}(t) = E_{mPC}(t + dt)$$

$$M_{PC}(t) = M_{PC}(t + dt)$$

Conservation de la masse :

La masse du système fermé est la même à t et à $t + dt$:

- Masse du système fermé à t : $M_{PC}(t) + dm_1$.
- Masse du système fermé à $t + dt$: $M_{PC}(t + dt) + dm_2$.

Comme $M_{PC}(t) = M_{PC}(t + dt)$, on a donc :

$$dm_1 = dm_2 = dm$$

On note par la suite dm la masse qui rentre pendant dt et qui est aussi égale à la masse qui sort pendant dt . Le débit massique vaut $D_m = \frac{dm}{dt}$. On a conservation du débit massique puisque l'écoulement est permanent.

Premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime permanent :

On applique le premier principe de la thermodynamique au système fermé Σ défini précédemment pendant dt :

$$dU + dE_m = \delta W + \delta Q$$

Calcul de la variation d'énergie interne :

$$dU = U_{\Sigma}(t + dt) - U_{\Sigma}(t)$$

- $U_{\Sigma}(t) = U_{PC}(t) + dm u_1$. L'énergie interne de la masse qui rentre pendant dt s'exprime avec l'énergie interne massique u_1 à l'entrée et dm la masse qui rentre pendant dt .
- $U_{\Sigma}(t + dt) = U_{PC}(t + dt) + dm u_2$.

En régime permanent, u_1 et u_2 sont indépendants du temps et $U_{PC}(t) = U_{PC}(t + dt)$. On a donc :

$$dU = dm (u_2 - u_1)$$

Calcul de la variation d'énergie mécanique :

$$dE_m = E_{m\Sigma}(t + dt) - E_{m\Sigma}(t)$$

- $E_{m\Sigma}(t) = E_{mPC}(t) + \frac{1}{2}dmv_1^2 + dmgz_1$.
- $E_{m\Sigma}(t + dt) = E_{mPC}(t + dt) + \frac{1}{2}dmv_2^2 + dmgz_2$.

On a vu qu'en régime permanent $E_{mPC}(t) = E_{mPC}(t + dt)$, on a donc :

$$dE_m = dm \left(\frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 - \frac{1}{2}v_1^2 - gz_1 \right)$$

Calcul du transfert thermique :

On appelle q le **transfert thermique massique algébriquement reçu** par le système Σ pendant dt . On a alors :

$$\delta Q = q dm$$

Calcul du travail :

Il y a trois termes : travail des forces de pression à l'entrée, travail des forces de pression à la sortie et travail autre que celui des forces pression (appelé travail indiqué ou travail utile). Dans tous les cas, c'est un **travail algébriquement reçu** de l'extérieur.

- Travail des forces de pression à l'entrée : c'est un travail positif car les forces de pression sont motrices. On définit un axe Ox orienté vers la droite. La force de pression est $\vec{F}_1 = p_1 S_1 \vec{u}_x$. Le travail élémentaire vaut : $\delta W_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{dl}_1 = p_1 S_1 dl_1$. On peut exprimer le volume $S_1 dl_1$ de la masse qui rentre pendant dt en fonction de la masse volumique μ . On a donc :

$$\delta W_1 = \frac{p_1}{\mu_1} dm$$

- Travail des forces de pression à la sortie : c'est un travail négatif car les forces de pression sont résistantes. On définit un axe Ox orienté vers la droite. La force de pression est $\vec{F}_2 = -p_2 S_2 \vec{u}_x$. Le travail élémentaire vaut : $\delta W_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{dl}_2 = -p_2 S_2 dl_2$. On peut exprimer le volume $S_2 dl_2$ de la masse qui sort pendant dt en fonction de la masse volumique μ . On a donc :

$$\delta W_2 = \frac{p_2}{\mu_2} dm$$

Le travail indiqué peut s'exprimer en fonction du travail indiqué massique w_i . w_i est le travail massique fourni aux parties mobiles de la machine. Il est algébriquement reçu par le fluide. $w_i > 0$ pour un compresseur et $w_i < 0$ pour une turbine.

On a donc :

$$\delta W = \frac{p_1}{\mu_1} dm - \frac{p_2}{\mu_2} dm + w_i dm$$

Le premier principe s'écrit :

$$dm \left(u_2 - u_1 + \frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 - \frac{1}{2} v_1^2 - g z_1 \right) = dm \left(\frac{p_1}{\mu_1} - \frac{p_2}{\mu_2} + w_i + q \right)$$

Tout se passe comme si une masse dm passait de l'état 1 à l'état 2.

On simplifie par dm et on fait apparaître l'enthalpie massique définie par

$$h = u + \frac{p}{\mu}$$

Remarque : L'inverse de la masse volumique est le volume massique qui est peu utilisé en mécanique des fluides. De plus la notation habituelle en thermodynamique du volume massique v est utilisée ici pour désigner la vitesse...

On a donc :

$$h_2 - h_1 + \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 + g (z_2 - z_1) = w_i + q$$

C'est une expression que l'on peut appliquer par coeur à condition de bien connaître les hypothèses : régime permanent d'écoulement pour un système ouvert à une entrée et une sortie.

Si on multiplie par dm et on divise par dt . On a :

$$D_m \left(h_2 - h_1 + \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 + g (z_2 - z_1) \right) = P_i + P_{th}$$

P_i est la puissance indiquée, c'est à dire $P_i = \frac{dm w_i}{dt}$ et P_{th} est la puissance thermique algébriquement reçue.



L'écoulement est parfait. La transformation est donc adiabatique et réversible, c'est à dire isentropique.

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit pour la pompe en régime permanent :

$$D_m \left(h_2 - h_1 + \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 + g (z_2 - z_1) \right) = P_i + P_{th}$$

$P_{th} = 0$ car la transformation est adiabatique.

P_i est la puissance à fournir à la pompe, que l'on va noter P . Pour un compresseur, on a $P > 0$ alors que pour une turbine, on a $P < 0$.
 Pour calculer $h_2 - h_1$, on utilise :

$$dh = Tds + \frac{1}{\mu}dp$$

$ds = 0$ car la transformation est isentropique. On intègre entre l'état 1 et l'état 2, soit : $h_2 - h_1 = \frac{1}{\mu}(p_2 - p_1)$.

On a :

$$P = D_m \left(\frac{1}{\mu}(p_2 - p_1) + \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 + gH \right)$$

L'écoulement est incompressible. On a donc conservation du débit volumique :

$$D_V = v_1 S_1 = v_2 S_2$$

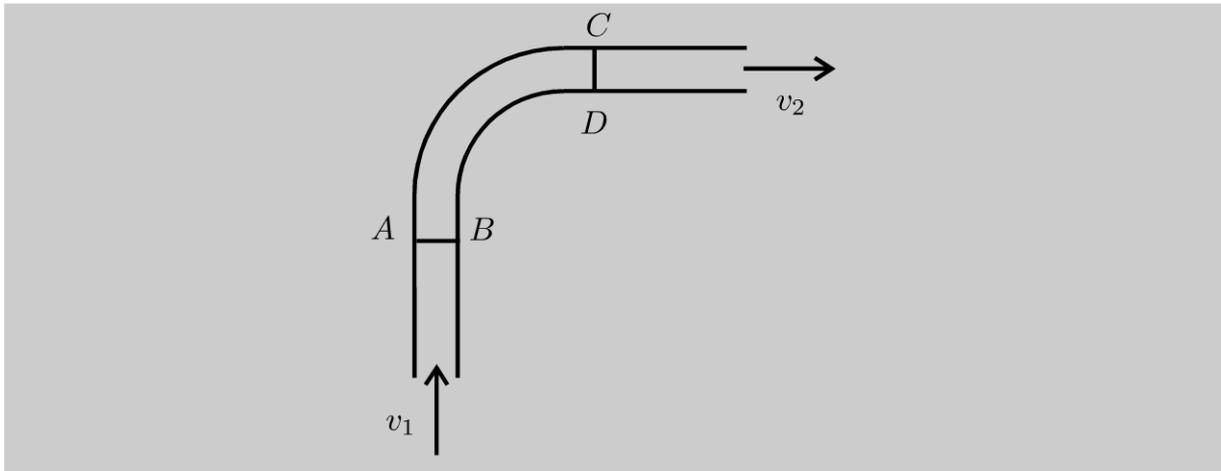
Comme $S_1 = S_2$, alors $v_1 = v_2$. On en déduit finalement :

$$P = D_m \left(\frac{1}{\mu}(p_2 - p_1) + gH \right)$$

Exercice 10.2 : Force exercée par un liquide sur un tuyau coudé

On considère un tuyau coudé horizontal de section S constante. L'écoulement de l'eau est homogène, parfait, permanent, incompressible. On néglige les variations d'altitude dans le tuyau. On appelle v_1 et v_2 respectivement les vitesses à l'entrée et à la sortie du tuyau. On appelle p_1 et p_2 les pressions respectivement à l'entrée et à la sortie du tuyau. On suppose que la pression est uniforme à l'entrée et à la sortie du tuyau.

1. Montrer que $p_1 = p_2$.
2. Exprimer la force exercée par le fluide sur le coude dans le plan horizontal en fonction de D_v, μ, S , et p_1 .



Analyse du problème

On peut appliquer le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant puisque les hypothèses HPPI sont vérifiées. Le fluide compris entre AB et CD est un système ouvert. Il faut donc se ramener à un système fermé pour appliquer le théorème de la quantité de mouvement.



1. L'écoulement est incompressible. On a donc la conservation du débit volumique : $D_v = S_1 v_1 = S_2 v_2$. Comme $S_1 = S_2$, on a donc $v_1 = v_2$ que l'on appellera v dans la deuxième question.

L'écoulement est homogène, parfait, permanent, incompressible (HPPI). Le théorème de Bernoulli s'écrit sur une ligne de courant entre l'entrée et la sortie :

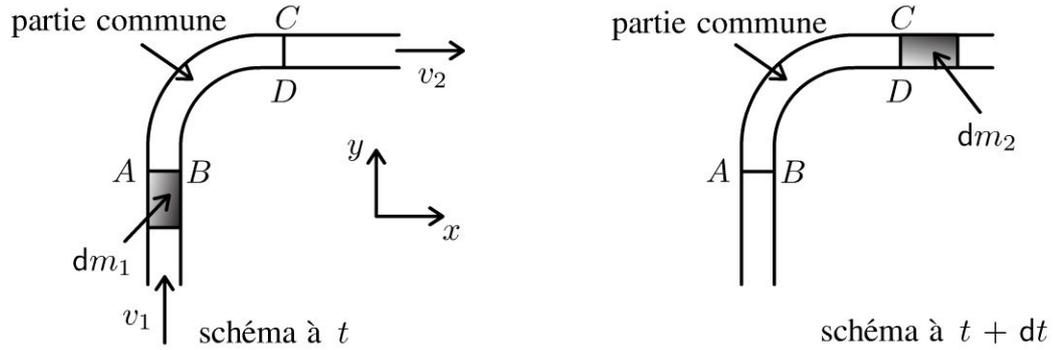
$$\frac{p_2}{\mu} + \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 = \frac{p_1}{\mu} + \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1$$

On néglige les variations d'altitude dans le tuyau, donc $z_1 = z_2$. Comme $v_1 = v_2$, on a donc : $p_1 = p_2$.

2. Définition du système fermé :

On ne peut pas appliquer le théorème de la quantité de mouvement à un système ouvert. Il faut se ramener à un système fermé Σ défini de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_2 qui sort pendant dt .



Régime permanent d'écoulement :

On est en régime permanent, donc la quantité de mouvement de la partie commune à t est la même qu'à $t + dt$: $\vec{p}_{PC}(t) = \vec{p}_{PC}(t + dt)$.
 On a conservation du débit massique, donc $dm_1 = dm_2 = dm$.

Bilan de quantité de mouvement :

A t , la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{PC}(t) + dm \vec{v}_1$$

A $t + dt$, la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{PC}(t + dt) + dm \vec{v}_2$$

On a donc :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = dm (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

D'où :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Bilan des actions extérieures :

- Force de pression à l'entrée : $p_1 S \vec{u}_y$.
- Force de pression à la sortie : $-p_2 S \vec{u}_x$.
- Poids du système fermé : $m \vec{g}$.
- Force que le coude exerce sur l'eau. Cette force est l'opposée de la force \vec{F} que l'eau exerce sur le coude.

Le théorème de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = p_1 S \vec{u}_y - p_2 S \vec{u}_x + m \vec{g} - \vec{F}$$

On a donc :

$$\vec{F} = p_1 S \vec{u}_y - p_2 S \vec{u}_x + m \vec{g} - D_m (v_2 \vec{u}_x - v_1 \vec{u}_y)$$

Le débit massique est $D_m = \mu S v$. On en déduit :

$$\vec{F} = (p_1 S + \mu S v^2) \vec{u}_y - (p_2 S + \mu S v^2) \vec{u}_x + m \vec{g}$$

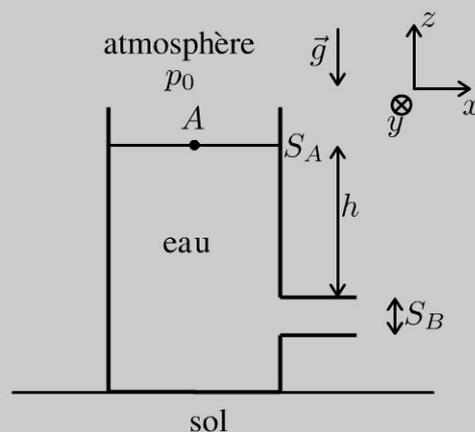
Le débit volumique est $D_v = S v$, on a donc : $v^2 = \frac{D_v^2}{S^2}$. Comme $p_2 = p_1$, la force \vec{F}' que le fluide exerce sur le coude dans le plan horizontal est donc :

$$\vec{F}' = \left(p_1 S + \mu \frac{D_v^2}{S} \right) \vec{u}_y - \left(p_1 S + \mu \frac{D_v^2}{S} \right) \vec{u}_x$$

Exercice 10.3 : Force subie par un réservoir

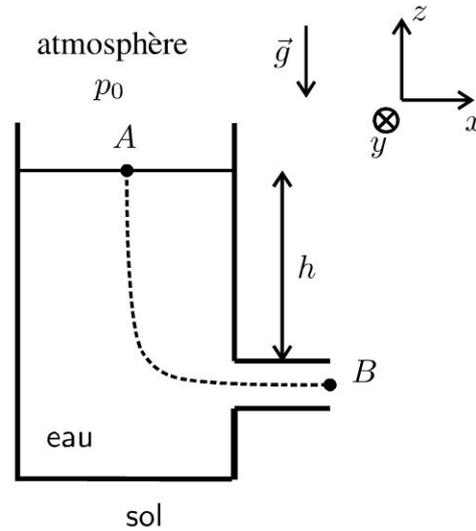
On considère un réservoir muni d'une vidange. On suppose que $S_B \ll S_A$. L'écoulement est homogène, parfait et incompressible.

1. Au bout d'une durée très courte un régime quasistationnaire est établi. Montrer que la vitesse de sortie vaut alors $v_B = \sqrt{2gh}$.
2. Exprimer la force que l'eau exerce sur le réservoir.
3. Quelle est la condition sur le coefficient de frottement f pour que le réservoir ne glisse pas ?



1. Théorème de Bernoulli

L'écoulement est incompressible. On a donc conservation du débit volumique : $D_v = v_A S_A = v_B S_B$. Comme $S_B \ll S_A$, alors $v_A \ll v_B$.



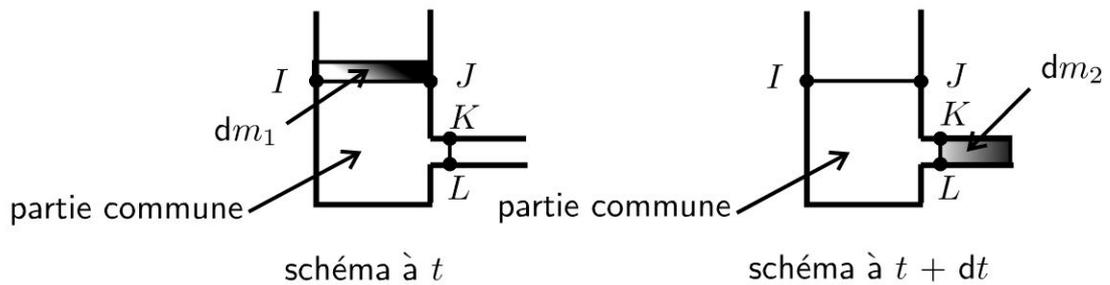
L'écoulement est homogène, parfait, quasistationnaire et incompressible (HPPI). On peut donc appliquer le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant $A \rightarrow B$:

$$\frac{p_A}{\mu} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{p_B}{\mu} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B$$

L'entrée et la sortie sont en contact avec l'air. On a donc $p_A = p_B = p_0$. De plus $z_A - z_B = H$. La vitesse en A est négligeable devant la vitesse en B . On a donc :

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

2. Définition du système fermé



Le fluide compris entre IJ et KL est un système ouvert. On ne peut pas appliquer le théorème de la quantité de mouvement. Il faut se ramener à un système fermé Σ défini de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_2 qui sort pendant dt .

Régime permanent d'écoulement :

On est en régime permanent, donc la quantité de mouvement de la partie commune à t est la même qu'à $t + dt$: $\vec{p}_{PC}(t) = \vec{p}_{PC}(t + dt)$.

On a conservation du débit massique, donc $dm_1 = dm_2 = dm$.

Bilan de quantité de mouvement :

A t , la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{PC}(t) + dm \vec{v}_1$$

A $t + dt$, la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{PC}(t + dt) + dm \vec{v}_2$$

On a donc :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = dm (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

D'où :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Bilan des actions extérieures :

- Force de pression à l'entrée : $-p_0 S_A \vec{u}_z$.
- Force de pression à la sortie : $-p_0 S_B \vec{u}_x$.
- Poids du système fermé : $m \vec{g}$.
- Force que le réservoir exerce sur l'eau. Cette force est l'opposée de la force \vec{F}_1 que l'eau exerce sur le réservoir.

Le théorème de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x + m \vec{g} - \vec{F}_1$$

On néglige la vitesse à l'entrée. On a donc :

$$\vec{F}_1 = m \vec{g} - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x - D_m v_B \vec{u}_x$$

3. Le système mécanique étudié est le réservoir.



On ne considère pas l'eau à l'intérieur !



On suppose que le référentiel terrestre est galiléen.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Poids du réservoir : $M\vec{g}$.
- Force \vec{F}_1 que l'eau exerce sur le réservoir. Cette force a été déterminée dans la question précédente.
- Réaction du support \vec{R} que l'on peut décomposer en une réaction tangentielle \vec{T} et une réaction normale \vec{N} .
- Force de pression atmosphérique \vec{F}_p

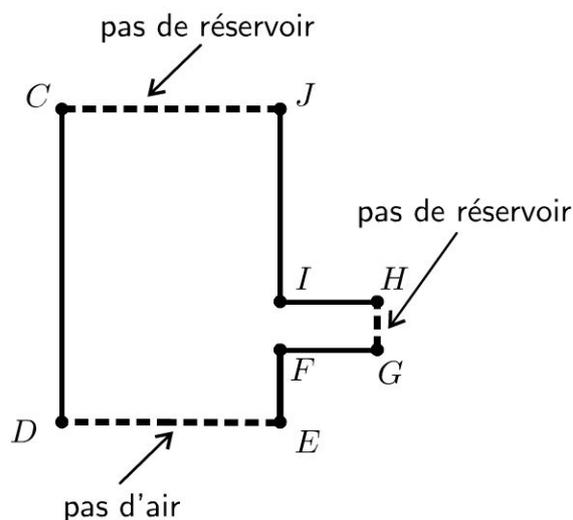
Méthode pour calculer les forces de pression sur le réservoir

On a souvent besoin en mécanique des fluides de calculer la résultante des forces de pression \vec{F}_p qui s'exercent sur une surface qui n'est pas fermée. On utilise souvent la méthode consistant à définir une surface fermée fictive.

On cherche à calculer \vec{F}_p la résultante des forces de pression de l'air qui s'exercent sur le réservoir. Ces forces s'exercent sur la surface Σ_1 constitué des parties CD , EF , FG , HI et IJ (traits pleins sur la figure). Elles ne s'appliquent pas sur les parties DE (pas d'air), GH (pas de réservoir) et CJ (pas de réservoir).



On définit la surface Σ_2 constituée des parties DE , GH et CJ (traits en pointillés sur la figure).



On définit ainsi la surface $\Sigma_1 + \Sigma_2$ fictive et entourée d'air. Elle n'a pas de réalité physique mais la résultante des forces de pression de l'air sur cette surface fermée fictive $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est nulle puisque la pression p_0 est uniforme. On pourra alors en déduire très facilement \vec{F}_p .



La surface $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est une surface fermée.

$$\oiint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} -p_0 \vec{dS}_{ext} = - \iiint_V \vec{\text{grad}} p_0 d\tau = \vec{0}$$

La résultante des forces de pression de l'air sur cette surface fermée $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est nulle puisque la pression p_0 est uniforme.

On peut décomposer cette somme en deux termes :

- Résultante des forces de pression de l'air qui s'exercent sur Σ_1 : \vec{F}_p .
- Résultante des forces de pression de l'air qui s'exercent sur Σ_2 : $p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x$.

On a donc : $\vec{0} = \vec{F}_p + p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x$.

Soit :

$$\vec{F}_p = p_0 S_B \vec{u}_x$$

Étude de l'équilibre du réservoir

On applique le théorème de la quantité de mouvement au réservoir à l'équilibre :

$$\vec{0} = M\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_p$$

On a vu dans la question précédente que :

$$\vec{F}_1 = m\vec{g} - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x - D_m v_B \vec{u}_x$$

On projette \vec{T} et \vec{N} sur \vec{u}_x et \vec{u}_z . On a donc :

$$\vec{0} = M\vec{g} + m\vec{g} - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x - D_m v_B \vec{u}_x + T\vec{u}_x + N\vec{u}_z + p_0 S_B \vec{u}_x$$

On peut être surpris que le poids de l'eau n'apparaît pas dans l'équation précédente traduisant l'équilibre du réservoir mais il intervient bien dans la force \vec{F}_1 .

En projection sur \vec{u}_x et \vec{u}_z , on a :
$$\begin{cases} -D_m v_B + T = 0 \\ -mg - Mg - p_0 S_A + N = 0 \\ 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} T = D_m v_B \\ N = mg + Mg + p_0 S_A \\ 0 \end{cases}$$

La condition pour que le réservoir ne glisse pas est que :

$$|T| \leq f |N|$$

Soit :

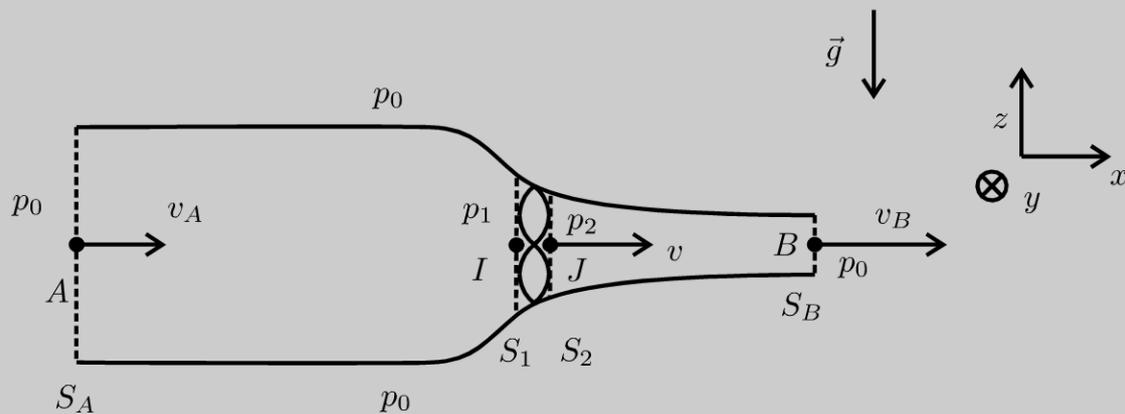
$$D_m v_B \leq f(mg + Mg + p_0 S_A)$$

Exercice 10.4 : Fonctionnement d'une hélice

On considère un écoulement homogène, parfait et incompressible. L'hélice est animée d'un mouvement de rotation autour de son axe fixe, à vitesse angulaire constante. On néglige son épaisseur ce qui revient à supposer que $S_1 = S_2$. On néglige les effets de la pesanteur. Le mouvement du fluide autour de l'hélice est supposé stationnaire dans le référentiel terrestre galiléen et à symétrie de révolution autour de $x'x$. On considère un tube de courant représenté sur la figure ci-dessous qui englobe l'hélice. La pression p_0 est supposée uniforme autour du tube de courant. On appelle D_m le débit massique. On rappelle que :

$$dh = T ds + \frac{1}{\mu} dp$$

1. Exprimer $p_2 - p_1$ en fonction de v_A, v_B et μ .
2. Exprimer la force exercée par l'hélice sur le fluide de deux façons et en déduire la vitesse v du fluide au niveau de l'hélice en fonction de v_A et v_B .
3. Déterminer la puissance de la force exercée par l'hélice sur le fluide en fonction de D_m, v_A et v_B par deux méthodes.



Analyse du problème

L'écoulement est HPPI. On pourra donc appliquer le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant. Attention, on ne peut pas l'appliquer directement entre A et B car la ligne de courant n'est pas définie au niveau de l'hélice. Il faut donc l'appliquer entre A et I puis entre J et B.

Le fluide compris entre I et J est un système ouvert. Il faut se ramener à un système fermé pour pouvoir appliquer le bilan de quantité de mouvement, le premier principe de la thermodynamique et le théorème de l'énergie cinétique.



1. L'écoulement est incompressible. On a donc la conservation du débit volumique. On note v_1 la vitesse au point I et v_2 la vitesse au point J . On a donc : $D_V = v_1 S_1 = v_2 S_2$. Comme $S_1 = S_2$ alors $v_1 = v_2$ que l'on notera v par la suite.

L'écoulement est HPPI (homogène, parfait, permanent et incompressible).

Le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant $A \rightarrow I$ s'écrit :

$$\frac{p_A}{\mu} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{p_1}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz_I$$

Comme $z_A = z_I$ et $p_A = p_0$, on a donc :

$$\frac{p_0}{\mu} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{p_1}{\mu} + \frac{v^2}{2} \text{ (eq.1)}$$

Le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant $J \rightarrow B$ s'écrit de même :

$$\frac{p_0}{\mu} + \frac{v_B^2}{2} = \frac{p_2}{\mu} + \frac{v^2}{2} \text{ (eq.2)}$$

En faisant la différence des équations 1 et 2, on a :

$$\frac{p_2 - p_1}{\mu} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}$$

Remarque : Si l'hélice est plongée dans un liquide de masse volumique élevée, alors la pression p_1 peut devenir faible et inférieure à la pression de vapeur saturante. Des poches de vapeur peuvent se former contre l'hélice. C'est le phénomène de cavitation et l'implosion de ces poches de vapeur conduit à la détérioration de l'hélice.



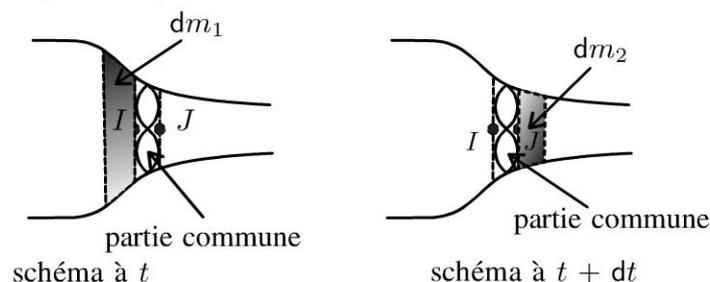
2.

a. Première méthode : système ouvert compris entre I et J

Définition du système fermé :

Le fluide compris entre I et J est un système ouvert. On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : partie commune (PC) comprise entre I et J + masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: partie commune (PC) comprise entre I et J + masse dm_2 qui sort pendant dt .



Bilan de quantité de mouvement :

A l'instant t , la quantité de mouvement du système fermé Σ est :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{PC}(t) + dm_1 \vec{v}_1$$

A l'instant $t + dt$, la quantité de mouvement du système fermé Σ est :

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{PC}(t + dt) + dm_2 \vec{v}_2$$

Comme on est en régime permanent, on a : $\vec{p}_{PC}(t) = \vec{p}_{PC}(t + dt)$. La quantité de mouvement de la partie commune (ou volume de contrôle) est la même à l'instant t et à l'instant $t + dt$. On a conservation du débit massique, donc :

$$dm_1 = dm_2 = D_m dt$$

Comme $v_1 = v_2$ on en déduit :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{0}$$

Bilan des actions extérieures :

- Forces de pesanteur négligées d'après l'énoncé.
- Force \vec{F}_1 exercée par l'hélice sur le fluide.
- Forces de pression extérieures : forces de pression s'exerçant sur surface $S_1 : p_1 S_1 \vec{u}_x$ + forces de pression s'exerçant sur la surface $S_2 : -p_2 S_2 \vec{u}_x$ + forces de pression s'exerçant sur la surface latérale : $\iint -p_0 \vec{dS}_{ext} = \vec{0}$ par symétrie puisque les forces s'annulent deux par deux.

Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \vec{0} = \vec{F}_1 + p_1 S_1 \vec{u}_x - p_2 S_2 \vec{u}_x$$

En utilisant le résultat de la question 1, on en déduit que :

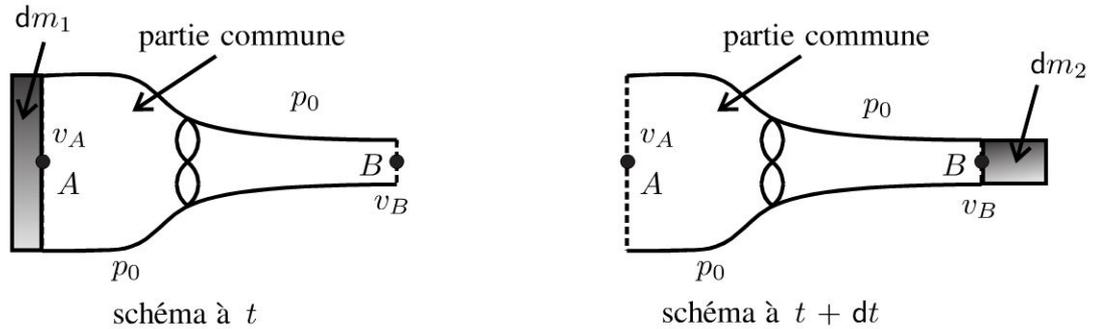
$$\vec{F}_1 = (p_2 - p_1) S \vec{u}_x = \frac{\mu (v_B^2 - v_A^2)}{2} S \vec{u}_x$$

b. Deuxième méthode : système ouvert compris entre A et B

Définition du système fermé :

Le fluide compris entre A et B est un système ouvert. On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : partie commune (PC) comprise entre A et B + masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: partie commune (PC) comprise entre A et B + masse dm_2 qui sort pendant dt .



Bilan de quantité de mouvement :

A l'instant t , la quantité de mouvement du système fermé Σ est :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{PC}(t) + dm_1 \vec{v}_A$$

A l'instant $t + dt$, la quantité de mouvement du système fermé Σ est :

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{PC}(t + dt) + dm_2 \vec{v}_B$$

Comme on est en régime permanent, on a : $\vec{p}_{PC}(t) = \vec{p}_{PC}(t + dt)$. La quantité de mouvement de la partie commune (ou volume de contrôle) est la même à l'instant t et à l'instant $t + dt$. On a conservation du débit massique, donc :

$$dm_1 = dm_2 = D_m dt$$

On en déduit :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

Bilan des actions extérieures :

- Forces de pesanteur négligées d'après l'énoncé.
- Force \vec{F}_1 exercée par l'hélice sur le fluide.
- Forces de pression extérieures : $\oiint -p_0 \vec{dS}_{ext} = - \iiint_V \vec{\text{grad}} p_0 d\tau = \vec{0}$

car la surface est fermée et la pression est uniforme.

Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m (\vec{v}_B - \vec{v}_A) = \vec{F}_1$$

c. On a deux expressions de la force \vec{F}_1 exercée par l'hélice sur le fluide :

$$\vec{F}_1 = D_m (\vec{v}_B - \vec{v}_A) = \frac{\mu (v_B^2 - v_A^2)}{2} S \vec{u}_x$$

On a donc : $\mu S v (v_B - v_A) = \frac{\mu S (v_B - v_A) (v_B + v_A)}{2}$.

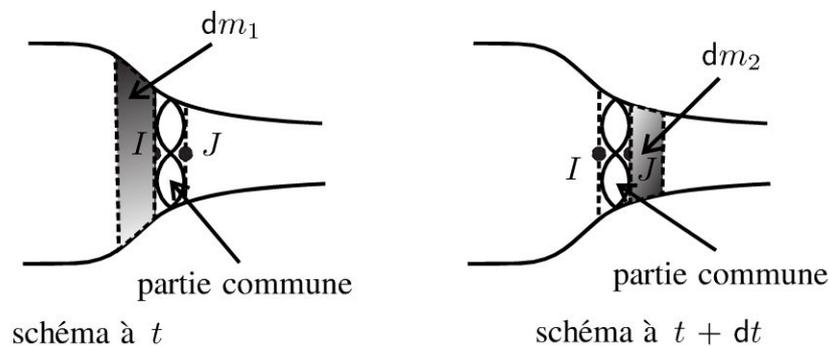
En simplifiant, on a donc :

$$v = \frac{v_A + v_B}{2}$$

3. a. Première méthode : Premier principe de la thermodynamique

On considère le système ouvert compris entre I et J . On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : partie commune (PC) comprise entre I et J + masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: partie commune (PC) comprise entre I et J + masse dm_2 qui sort pendant dt .



On a vu dans l'exercice 9.1 l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert en régime permanent avec une entrée et une sortie :

$$dm (h_2 - h_1) = \delta W_i + \delta Q$$

L'écoulement est parfait. La transformation est donc adiabatique et réversible, c'est-à-dire isentropique. On a donc $\delta Q = 0$.

W_i est le travail indiqué (travail reçu des parties mobiles de la machine). On a $W_i = P dt$.

En divisant par dt , on a :

$$P = D_m (h_2 - h_1)$$

Pour calculer $h_2 - h_1$, on utilise :

$$dh = T ds + \frac{1}{\mu} dp$$

$ds = 0$ car la transformation est isentropique. On intègre entre l'état 1 et l'état 2, soit : $h_2 - h_1 = \frac{1}{\mu} (p_2 - p_1)$.

On a donc :

$$P = D_m \frac{p_2 - p_1}{\mu} = \frac{\mu S v}{\mu} (p_2 - p_1)$$

On a vu dans la question 1 que $p_2 - p_1 = \frac{\mu (v_B^2 - v_A^2)}{2}$.

On en déduit la puissance de la force exercée par l'hélice sur le fluide :

$$P = \frac{1}{2} D_m (v_B^2 - v_A^2)$$

Interprétation physique

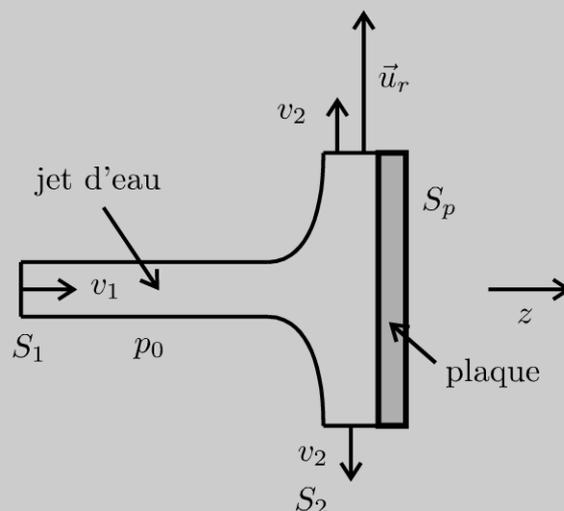
Si $S_B < S_A$ alors $v_B > v_A$. L'hélice fournit de la puissance au fluide ($P > 0$). C'est le cas étudié dans cet exercice.

Si $S_B > S_A$ alors $v_B < v_A$. L'hélice absorbe de la puissance du fluide ($P < 0$).

Exercice 10.5 : Force exercée sur une plaque

On considère un jet d'eau qui frappe une plaque immobile dans le référentiel terrestre galiléen. L'écoulement de l'eau est homogène, parfait, permanent et incompressible. On appelle p_0 la pression atmosphérique et on néglige les effets de la pesanteur. La vitesse de l'eau dans le jet est $v_1 = v_1 \vec{u}_z$ et la vitesse de l'eau en un point de la surface de sortie est $\vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_r$ en notant \vec{u}_r le vecteur radial des coordonnées cylindriques. On représente sur la figure ci-dessous un tube de courant. On note S_1 la surface de la section droite du jet incident, S_2 la surface de la section droite de sortie du jet et S_p la surface de la plaque.

Calculer la force subie par la plaque de la part de l'eau et de l'air en considérant deux systèmes différents.



Analyse du problème

On va appliquer le théorème de la quantité de mouvement à deux systèmes différents. Le premier système contiendra uniquement le fluide alors que le deuxième système contiendra les obstacles. On verra que les calculs sont souvent plus simples quand on englobe les obstacles.



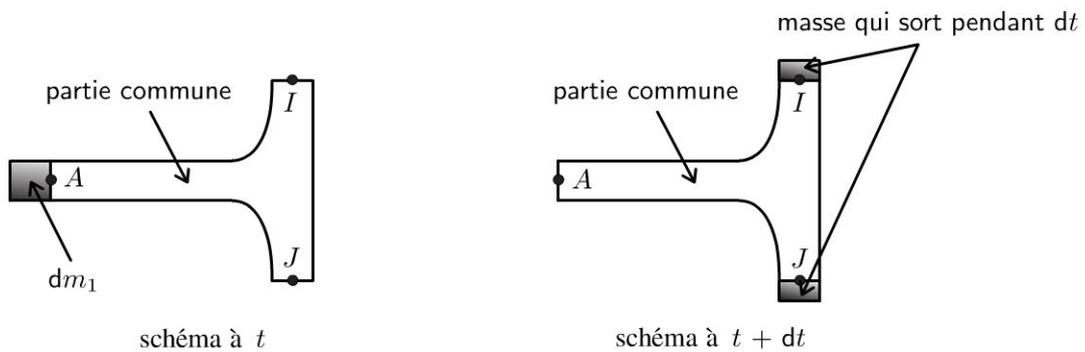
Attention : on a une invariance par rotation autour de l'axe Oz . La figure représente uniquement une projection pour un angle θ donné.



a. Première méthode : système ouvert compris entre A et IJ

Définition du système fermé :

Le fluide compris entre A et IJ est un système ouvert.



On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : partie commune (PC) comprise entre A et IJ + masse dm_1 qui rentre pendant dt .
- Système fermé Σ à $t + dt$: partie commune (PC) comprise entre A et IJ + masse qui sort pendant dt . Attention, cette masse est répartie sur une couronne d'axe Oz et en chaque point la vitesse est $v_2 \vec{u}_r$.

Bilan de quantité de mouvement :

A l'instant t , la quantité de mouvement du système fermé Σ est : $\vec{p}(t) = \vec{p}_{PC}(t) + dm_1 \vec{v}_1$

A l'instant $t + dt$, la quantité de mouvement du système fermé Σ est : $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{PC}(t + dt) + \vec{0}$. En effet, la somme des quantités de mouvement des petites masses qui sortent pendant dt est nulle car elles s'annulent deux par deux.

Comme on est en régime permanent, on a : $\vec{p}_{PC}(t) = \vec{p}_{PC}(t + dt)$. La quantité de mouvement de la partie commune (ou volume de contrôle) est la même à l'instant t et à l'instant $t + dt$. On a $dm_1 = D_m dt$.

On en déduit que :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = -D_m \vec{v}_1$$

Bilan des actions extérieures :

- Forces de pesanteur négligées d'après l'énoncé.
- Force \vec{F}_1 exercée par la plaque sur l'eau.
- Forces de pression extérieures : \vec{F}_p .



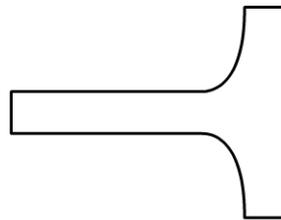
Le calcul des forces de pression extérieure est délicat. On utilise souvent la méthode suivante : on se ramène à un système fermé soumis à des forces de pression uniforme.



Méthode pour calculer les forces de pression extérieure sur le fluide

On cherche à calculer la résultante des forces de pression extérieure qui s'exercent sur le fluide. Ces forces s'exercent sur la surface Σ_1 représentée en traits pleins sur la figure.

On définit la surface Σ_2 représentée en traits pointillés sur la figure.



La surface $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est une surface fermée.

$$\oiint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} -p_0 \vec{dS}_{ext} = - \iiint_V \vec{\text{grad}} p_0 d\tau = \vec{0}$$

La résultante des forces de pression sur cette surface fermée $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est nulle puisque la pression p_0 est uniforme.

On peut décomposer cette somme en deux termes :

- résultante des forces de pression qui s'exercent sur Σ_1 : \vec{F}_p .
- résultante des forces de pression qui s'exercent sur Σ_2 : $-p_0 S_p \vec{u}_z$.

On a donc : $\vec{0} = \vec{F}_p - p_0 S_p \vec{u}_z$.

Soit :

$$\vec{F}_p = -p_0 S_p \vec{u}_z$$

Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = -D_m \vec{v}_1 = p_0 S_p \vec{u}_z + \vec{F}_1$$

La force que la plaque exerce sur l'eau est donc :

$$\vec{F}_1 = -D_m \vec{v}_1 - p_0 S_p \vec{u}_z$$

D'après le principe des actions réciproques, la force que l'eau exerce sur la plaque est : $-\vec{F}_1 = D_m \vec{v}_1 + p_0 S_p \vec{u}_z$.

La force que l'air ambiant exerce sur la plaque est $-p_0 S_p \vec{u}_z$.

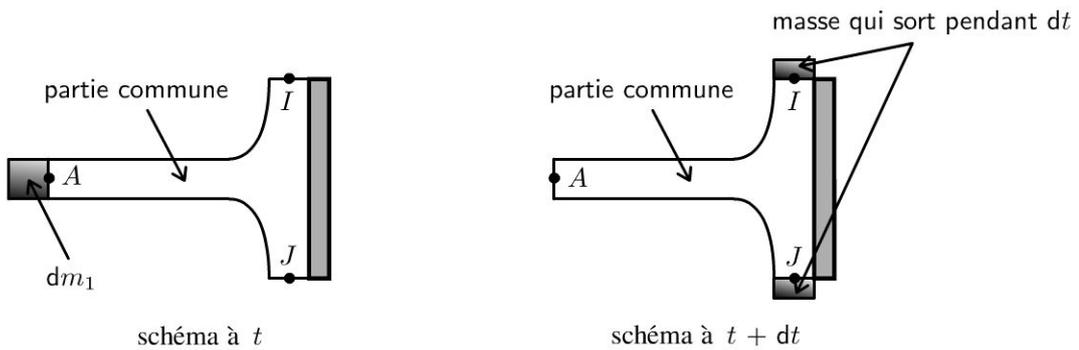
On en déduit donc la force subie par la plaque de l'eau et de l'air ambiant est

$$\vec{F}_2 = D_m \vec{v}_1$$

b. Deuxième méthode : système ouvert compris entre A et IJ en englobant la plaque

On reprend quasiment le même système que précédemment mais on englobe la plaque. On va voir que les calculs vont être beaucoup plus simples.

Définition du système fermé :



On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : partie commune (PC) comprise entre A et IJ + masse dm_1 qui rentre pendant dt + plaque.
- Système fermé Σ à $t + dt$: partie commune (PC) comprise entre A et IJ + masse qui sort pendant dt .

On a le même bilan de quantité de mouvement puisque la plaque est immobile :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = -D_m \vec{v}_1$$

Bilan des actions mécanique extérieures :

- Forces de pesanteur négligées d'après l'énoncé.
- Force \vec{F}_{op} exercée par un opérateur pour maintenir la plaque en équilibre.

- Forces de pression extérieures. La résultante des forces de pression extérieures est nulle car la pression est uniforme et s'applique sur une surface fermée :

$$\oiint -p_0 \vec{dS}_{ext} = - \iiint_V \vec{\text{grad}} p_0 d\tau = \vec{0}$$

On a donc :

$$-D_m \vec{v}_1 = \vec{0} + \vec{F}_{op} + \vec{0}$$

Il reste à appliquer le théorème de la quantité de mouvement à la plaque immobile dans le référentiel terrestre galiléen. Elle est soumise à \vec{F}_{op} (force exercée par un opérateur pour la maintenir en équilibre) et à \vec{F}_2 (force exercée par l'eau et l'air ambiant). On a donc $\vec{F}_{op} + \vec{F}_2 = \vec{0}$, soit :

$$\vec{F}_2 = D_m \vec{v}_1$$

On retrouve bien le résultat établi avec la première méthode.



On retient qu'il est souvent plus simple d'englober les obstacles pour calculer la force qui s'exerce sur un obstacle.

Partie 4

Électromagnétisme

Plan

11. Champ électrique en régime stationnaire	113
11.1 : Champ et potentiel créés par deux fils infinis	113
11.2 : Champ créé par une boule	115
11.3 : Champ dans une cavité cylindrique	117
11.4 : Champ de gravitation créé par la Terre	120
11.5 : Distribution volumique entre deux sphères concentriques	121
11.6 : Distribution volumique entre deux plans	123
11.7 : Champ électrostatique entre deux plaques	130
12. Condensateur	133
12.1 : Condensateur plan	133
13. Champ magnétique et régime stationnaire	137
13.1 : Champ créé par un fil cylindrique	137
13.2 : Champ créé par un solénoïde infini	139
13.3 : Champ créé par une bobine torique	141
14. Électromagnétisme dans l'ARQS	143
14.1 : Rail de Laplace	143
14.2 : Moteur asynchrone	148
14.3 : Alternateur d'une éolienne	153
14.4 : Pince ampèremétrique	156
14.5 : Courants de Foucault dans un cylindre	160
14.6 : Cylindre, courants induits et ARQS	163
14.7 : Calculs d'inductance propre	167
14.8 : Énergie magnétique du câble coaxial	169
15. Milieux ferromagnétiques	173
15.1 : Cycle d'Hystérésis	173

Champ électrique en régime stationnaire

Exercice 11.1 : Champ et potentiel créés par deux fils infinis

On considère un fil infini d'axe Oz portant une densité linéique de charges constante λ .

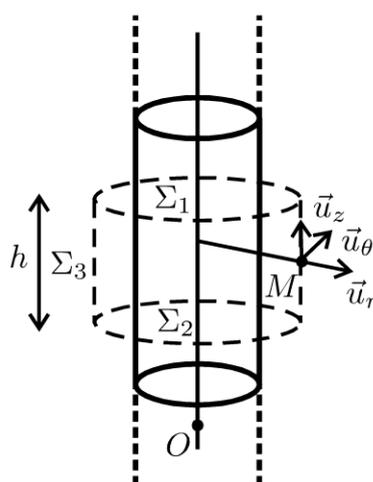
1. Déterminer le champ électrostatique \vec{E} .
2. En déduire le potentiel électrostatique V .
3. On considère deux fils infinis parallèles à l'axe Oz situés en $(x = -a, y = 0)$ et $(x = a, y = 0)$ portant respectivement des densités linéiques de charges $-\lambda$ et $+\lambda$. Donner l'expression du potentiel en un point de l'espace défini par les distances r_1 et r_2 aux deux fils, en choisissant $V = 0$ à égale distance des deux fils.

Analyse du problème

Il y a plusieurs méthodes pour calculer le champ électrostatique. Comme la distribution est hautement symétrique, il est plus simple d'utiliser le théorème de Gauss. On applique le théorème de superposition pour calculer le potentiel créé par deux fils infinis.



1. Calcul du champ électrostatique en trois étapes



- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie des charges (sources du champ), donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_r$.

- La distribution D de charges est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz , donc \vec{E} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et z . Bilan : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.
- On applique le théorème de Gauss à la surface fermée (Σ) : cylindre de hauteur h passant par M et de rayon r :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_{\Sigma_3} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) 2\pi r h$$

Les trois surfaces formant (Σ) sont : (Σ_1) surface supérieure, (Σ_2) surface inférieure et (Σ_3) surface latérale. Le flux à travers la surface supérieure et la surface inférieure est nul car le champ électrostatique est orthogonal au vecteur élément de surface.



On ne peut pas prendre comme surface de Gauss un cylindre infini ! La surface de Gauss doit être une surface fermée. Le vecteur élément de surface doit être orienté vers l'extérieur.



Le point M est nécessairement à l'extérieur du fil. La charge intérieure est : $Q_{int} = \lambda h$.
On en déduit le champ électrostatique :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Interprétation physique :

Le champ électrostatique diverge à partir des charges positives et converge vers les charges négatives.

2. On en déduit directement le potentiel électrostatique à partir de la relation $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$.

On considère un déplacement quelconque dans l'espace :

$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

On a alors :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E(r) \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z) = -E(r) dr$$

Soit :

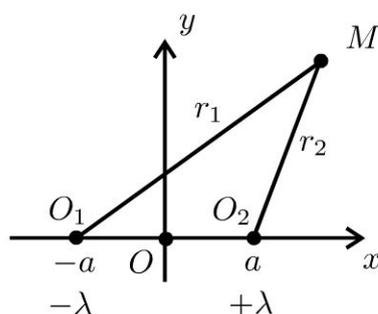
$$dV = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

On intègre la relation précédente :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + cte$$

La distribution est infinie. On ne peut donc pas choisir : $V(\infty) = 0$. L'énoncé ne précise pas la constante dans cette question.

3.



On applique le théorème de superposition.

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 + cte' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} + cte'$$

D'après l'énoncé, $V = 0$ si $r_1 = r_2$. On a donc :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

Exercice 11.2 : Champ créé par une boule

On considère une boule de centre C , de rayon R uniformément chargée de densité volumique de charges ρ .

1. Exprimer la charge Q de la boule en fonction de ρ et de R .
2. Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace.
3. Exprimer l'énergie électrostatique de cette sphère en fonction de Q et R .

Analyse du problème

Il y a plusieurs méthodes pour calculer le champ électrostatique. Comme la distribution est hautement symétrique, il est plus simple d'utiliser le théorème de Gauss.



1. La densité volumique de charges est uniforme, la charge totale vaut donc : $Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$.

2. Calcul du champ électrostatique en trois étapes :

- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_r$.

- La distribution D de charges est invariante par rotations d'angle θ et ϕ , donc \vec{E} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et ϕ . Bilan :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

- Théorème de Gauss appliqué à la surface fermée (Σ) : sphère passant par M et de rayon r .

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \oiint_{\Sigma} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) 4\pi r^2$$

Il y a deux cas :

Si M est à l'extérieur de la sphère ($r \geq R$) :

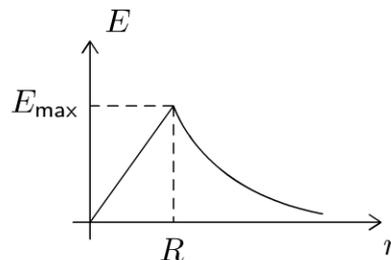
$dq = \rho d\tau$, donc $Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = Q$. On a donc :

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Si M est à l'intérieur de la sphère ($r \leq R$) :

$Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$, donc

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{3Q}{4\pi R^3} r \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \vec{u}_r$$



Le champ est maximal pour $r = R$ et vaut : $E_{max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$.

Interprétation physique :

Si $r \geq R$, le champ est le même que celui créé par une charge ponctuelle Q situé au point O .

Le potentiel et le champ sont continus en tout point de l'espace. C'est normal car on a une distribution volumique.

Le champ diverge à partir des charges positives. Il est normal aux surfaces équipotentielles et dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

Les surfaces équipotentielles sont des sphères de centre O . Les lignes de champ sont des droites qui divergent à partir de O si $Q > 0$. Les lignes de champ sont des droites qui convergent vers O si $Q < 0$.

3. La densité volumique d'énergie électrostatique est $u_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$.

Il y a deux cas :

Si $r \leq R$:

Le champ électrostatique est : $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \vec{u}_r = E_{\max} \frac{r}{R} \vec{u}_r$. On a alors :

$$\begin{aligned} W_1 &= \iiint \frac{\varepsilon_0}{2} \left(E_{\max} \frac{r}{R} \right)^2 dr r d\theta r \sin \theta d\phi = \frac{\varepsilon_0 E_{\max}^2}{2} \frac{4\pi}{R^2} \int_{r=0}^R r^4 dr \\ &= \frac{\varepsilon_0 E_{\max}^2}{2} \frac{4\pi}{R^2} \frac{R^5}{5} \end{aligned}$$

D'où :

$$W_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0 R^3}{5} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2$$

Si $r \geq R$:

Le champ électrostatique est : $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = E_{\max} \frac{R^2}{r^2} \vec{u}_r$. On a alors :

$$\begin{aligned} W_2 &= \iiint \frac{\varepsilon_0}{2} \left(E_{\max} \frac{R^2}{r^2} \right)^2 dr r d\theta r \sin \theta d\phi \\ W_2 &= \frac{\varepsilon_0 E_{\max}^2}{2} 4\pi R^4 \int_{r=R}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\varepsilon_0 E_{\max}^2}{2} 4\pi R^4 \frac{1}{R} = 2\pi\varepsilon_0 E_{\max}^2 R^3 \end{aligned}$$

D'où :

$$W_2 = 2\pi\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 R^3$$

$$\text{Bilan : } W = W_1 + W_2 = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R} \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{8} \right) = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R} \frac{6}{40}, \text{ d'où :}$$

$$W = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R} \frac{3}{20}.$$

Exercice 11.3 : Champ dans une cavité cylindrique

Un cylindre infini d'axe O_1z possédant une charge volumique uniforme ρ , présente une cavité cylindrique infinie (d'axe O_2z avec O_2 différent de O_1) vide de charges.

Montrer que le champ électrostatique est uniforme dans la cavité.

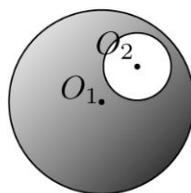
Analyse du problème

Il faut penser à utiliser le théorème de superposition. La distribution D ne possède pas suffisamment de symétrie pour pouvoir calculer facilement le champ électrostatique avec le théorème de Gauss. On va d'abord calculer le champ créé par un cylindre infini uniformément chargé en volume.



a) La distribution D est la superposition de la distribution D_1 et de la distribution D_2 .

Distribution D : Cylindre infini de densité volumique de charges ρ avec une cavité cylindrique infinie.



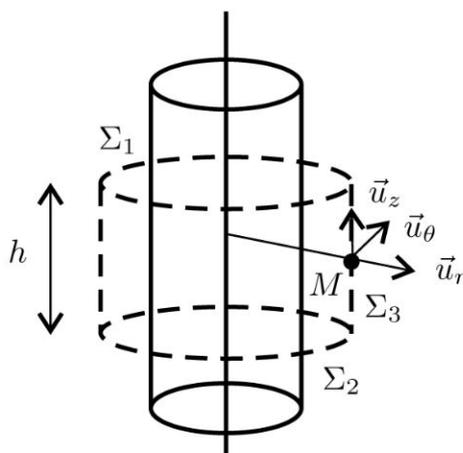
Distribution D_1 : Cylindre illimité d'axe O_1z de rayon R_1 de densité volumique de charges ρ .



Distribution D_2 : Cylindre illimité d'axe O_2z de rayon R_2 de densité volumique de charges $-\rho$.



b) Calcul du champ électrostatique créé par un cylindre infini de rayon R uniformément chargé en volume. On appelle ρ la densité volumique de charges.



Calcul du champ électrostatique en trois étapes :

- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_r$.
- La distribution D de charges est invariante par rotation d'angle θ et par translation suivant \vec{u}_z , donc \vec{E} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et z . Bilan :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

- Théorème de Gauss appliqué à la surface fermée (Σ) : cylindre de hauteur h passant par M et de rayon r .

Le flux du champ électrostatique à travers Σ_1 et Σ_2 est nul car les vecteurs éléments de surface sont orthogonaux au champ électrostatique.

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{ext} &= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot \vec{dS} \\ &= \iint_{\Sigma_3} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r \end{aligned}$$

D'où : $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{ext} = E(r) 2\pi r h$

D'après l'exercice, le point M se situe à l'intérieur de la cavité. On a donc $r \leq R$, soit $Q_{int} = \rho \pi r^2 h$.

Le champ électrostatique est donc :

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \vec{u}_r$$



Pour chaque cylindre, on a une origine différente pour les coordonnées cylindriques.



c) Pour le cylindre de centre O_1 , on définit H_1 le projeté orthogonal de M sur l'axe O_1z . On a : $\overrightarrow{H_1M} = r_1 \vec{u}_{r1}$, donc :

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho r_1}{2\varepsilon_0} \vec{u}_{r1} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \overrightarrow{H_1M}$$

Pour le cylindre de centre O_2 , on définit de même H_2 le projeté orthogonal de M sur l'axe O_2z . Il suffit de remplacer H_1 par H_2 et ρ par $-\rho$, soit :

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \overrightarrow{H_2M}$$

D'après le théorème de superposition, on en déduit le champ électrostatique à l'intérieur de la cavité :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \overrightarrow{H_1 M} - \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \overrightarrow{H_2 M} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \overrightarrow{H_1 H_2}$$

Le champ \vec{E} est uniforme à l'intérieur de la cavité.

Exercice 11.4 : Champ de gravitation créé par la Terre

Déterminer le champ de gravitation créé par la Terre en tout point de l'espace en supposant que la masse volumique de la Terre est uniforme.

Analyse du problème

Il y a plusieurs méthodes pour calculer le champ de gravitation. Comme la distribution est hautement symétrique, il est plus simple d'utiliser le théorème de Gauss pour la gravitation.



On appelle M_T la masse totale de la Terre et R le rayon de la Terre.

- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ sont des plans de symétrie pour les masses, sources du champ, donc $\vec{A}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{A} // \vec{u}_r$.
- La distribution D de masses est invariante par rotations d'angle θ et ϕ , donc \vec{A} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et ϕ . Bilan :

$$\vec{A} = A(r) \vec{u}_r$$

- Théorème de Gauss appliqué à la surface fermée (Σ) : sphère passant par M et de rayon r .

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S}_{ext} = -4\pi G M_{int} = \oiint_{\Sigma} A(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = A(r) 4\pi r^2$$

On a alors : $-4\pi G M_{int} = A(r) 4\pi r^2$, soit :

$$A(r) = \frac{-G M_{int}}{r^2}$$

Remarque : On retrouve facilement le théorème de Gauss pour la gravitation à partir du théorème de Gauss de l'électrostatique avec l'analogie suivante :

charge \rightarrow masse ; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rightarrow -G$; $\vec{E} \rightarrow \vec{A}$.



Il y a deux cas :

Si M est à l'extérieur de la sphère ($r \geq R$) :

$$dm = \mu d\tau, \text{ donc } M_{int} = \mu \frac{4}{3} \pi R^3 = M_T.$$

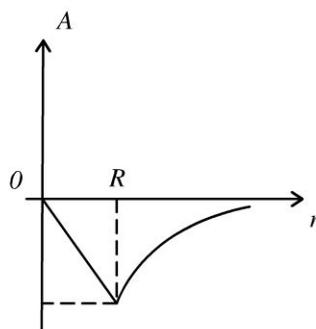
$$\text{On a donc : } \vec{A} = \frac{-G}{r^2} \mu \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{u}_r = \frac{-GM_T}{r^2} \vec{u}_r.$$

Si M est à l'intérieur de la sphère ($r \leq R$) :

$$\text{La masse intérieure à la surface de Gauss est : } M_{\text{int}} = \mu \frac{4}{3} \pi r^3.$$

$$\text{On a donc : } \vec{A} = \frac{-G}{r^2} \mu \frac{4}{3} \pi r^3 \vec{u}_r = -G \mu \frac{4}{3} \pi r \vec{u}_r. \text{ On en déduit que :}$$

$$\vec{A} = -\frac{GM_T r}{R^3} \vec{u}_r$$



Interprétation physique :

Le champ gravitationnel est bien continu en $r = R$ puisqu'on a une distribution volumique.

Si $r \leq R$, le champ décroît linéairement dans la Terre et est nul au centre. C'est prévisible puisque toutes les contributions des différentes masses au champ se compensent deux par deux.

Si $r \geq R$, le champ est le même que celui créé par une masse ponctuelle. Dans beaucoup d'exercices, on assimile la Terre à un point matériel situé au centre d'inertie de la Terre et de masse égale à la masse de la Terre.

Remarque : Le champ gravitationnel est noté parfois \vec{g} qui désigne en fait le champ de pesanteur terrestre. Il est constitué de deux termes : un terme gravitationnel $\frac{-GM_T}{r^2} \vec{u}_r$ et un terme centrifuge $\omega^2 \overrightarrow{HM}$ qui est négligeable.



Au niveau du sol : $g_0 = \frac{GM_T}{R^2} \simeq 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ avec $M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$;
 $R = 6400 \text{ km}$ et $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.kg}^{-2}.\text{m}^2$.

Exercice 11.5 : Distribution volumique entre deux sphères concentriques

On considère une charge q positive répartie en volume entre deux sphères concentriques de rayon R_1 et R_2 . On appelle $\rho(r)$ la densité volumique de charges entre R_1 et R_2 . Le champ électrostatique se met sous la forme :

$\vec{E} = a(r - R_1)\vec{u}_r$ pour $R_1 \leq r \leq R_2$ avec a une constante. On donne, pour un champ à symétrie sphérique : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE_r}{dr} + 2\frac{E_r}{r}$ avec $E_r = \vec{E}(r) \cdot \vec{u}_r$.

1. Déterminer $\rho(r)$ en fonction de a, r, R_1 et ε_0 .
2. Déterminer a en fonction de q, ε_0, R_1 et R_2 .
3. Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace. Représenter graphiquement E_r en fonction de r .

Analyse du problème

L'équation de Maxwell-Gauss permet de calculer directement la densité volumique de charges à partir du champ électrostatique. Le théorème de Gauss permet d'en déduire le champ en tout point de l'espace.



1. L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Comme $\vec{E} = a(r - R_1)\vec{u}_r$, alors :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE_r}{dr} + 2\frac{E_r}{r} = a + \frac{2a(r - R_1)}{r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On en déduit : $\rho = \varepsilon_0 \left(a + 2a - \frac{2aR_1}{r} \right)$, soit :

$$\rho = a\varepsilon_0 \left(3 - 2\frac{R_1}{r} \right)$$

2. On connaît la charge totale q . On peut l'exprimer en fonction de a en utilisant ρ .

$$q = \iiint_{\text{distribution}} \rho \, d\tau = \int_{r=R_1}^{R_2} \rho(r) 4\pi r^2 dr = \int_{r=R_1}^{R_2} a\varepsilon_0 \left(3 - 2\frac{R_1}{r} \right) 4\pi r^2 dr$$

Remarque : On peut également écrire le petit élément de volume en coordonnées sphériques : $d\tau = (dr)(r d\theta)(r \sin \theta d\phi)$.

Il reste à intégrer r entre R_1 et R_2 , θ entre 0 et π et ϕ entre 0 et 2π . On retrouve le même résultat.



On a alors :

$$q = 4\pi\varepsilon_0 a [r^3 - R_1 r^2]_{R_1}^{R_2} = 4\pi\varepsilon_0 a (R_2^3 - R_1 R_2^2 - R_1^3 + R_1^2)$$

Finalement, on a :

$$a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2 (R_2 - R_1)}$$

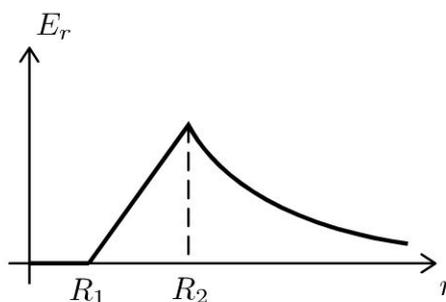
3.

- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ sont des plans de symétrie des sources du champ, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_r$.
- La distribution D de charges est invariante par rotation d'angle θ et ϕ , donc \vec{E} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et ϕ . Bilan : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.
- On applique le théorème de Gauss à une sphère de centre O et de rayon r s'écrit :
$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_S E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}.$$

Si $r \leq R_1$, $Q_{int} = 0$, donc $\vec{E} = \vec{0}$.

Si $r \geq R_2$, $Q_{int} = q$. Tout se passe comme si on avait une charge ponctuelle. Le champ vaut alors :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$



Exercice 11.6 : Distribution volumique entre deux plans

On considère une distribution volumique D de charges ρ uniforme, d'extension infinie, comprise entre deux plans $z = -\frac{a}{2}$ et $z = \frac{a}{2}$ dans le référentiel $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$.

Calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique par 3 méthodes : théorème de Gauss, équation de Maxwell-Gauss, équation de Poisson. On prendra $V(0) = 0$. Étudier le cas particulier où $a \rightarrow 0$.

Analyse du problème

Il y a plusieurs méthodes pour calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique. Le théorème de superposition permet de déduire directement le champ électrostatique créé par la distribution volumique à partir du champ créé par un plan infini.

Cours : Méthode de calcul du champ électrostatique et du potentiel électrostatique

Il y a deux stratégies pour calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique créés par une distribution de charges.

Stratégie n°1 : On calcule le champ électrostatique et on en déduit le potentiel électrostatique.

Pour calculer le champ, on a trois possibilités :

- Calcul direct du champ. Avec les plans de symétrie et d'antisymétrie, on prévoit la direction du champ. Le champ $d\vec{E}$ créé par une charge dq est donné par la loi de Coulomb :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 KM^2} \vec{u}_{K \rightarrow M} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{KM}}{KM^3}$$

On projette $d\vec{E}$ et on intègre les projections pour en déduire le champ créé par la distribution de charges.

- Utilisation de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Utilisation du théorème de Gauss pour une surface fermée S :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Cette méthode donne des résultats^S simples pour des distributions hautement symétriques. Elle se fait en 3 étapes : recherche des plans de symétrie ou d'antisymétrie, recherche des invariances et application du théorème de Gauss (la surface de Gauss est une surface fermée par exemple un cylindre de hauteur h , une sphère, un parallélépipède).

On en déduit directement le potentiel en intégrant la relation :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Stratégie n°2 : On calcule le potentiel électrostatique et on en déduit le champ électrostatique.

Pour calculer le potentiel, on a deux possibilités :

- Utilisation de la loi de Coulomb :

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 KM}$$

avec $dq = \rho d\tau$ ou σdS ou λdl suivant que la distribution est volumique, surfacique ou linéique. Il reste à intégrer pour en déduire le potentiel V .



Cette méthode n'est pas valable s'il y a des charges à l'infini.

- Utilisation de l'équation de Poisson : $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Il reste à intégrer l'équation différentielle pour déterminer le potentiel V .

Après avoir calculé le champ électrostatique, on en déduit le champ à partir de la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Propriétés importantes en électrostatique

- Pour une distribution volumique, V et \vec{E} sont définis et continus en tout point de l'espace.
- Pour une distribution surfacique, \vec{E} est discontinu à la traversée de la surface de distribution : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ avec 1 et 2 des points de part et d'autre de la surface de distribution. Le potentiel V est continu en tout point de l'espace.
- Pour une distribution linéique, V et \vec{E} ne sont pas définis sur la distribution.

Il ne faut pas oublier que les distributions surfaciques et linéiques sont des modélisations et donc une approximation. Il ne faut pas être surpris d'avoir des résultats qui divergent.

Choix de la constante pour le potentiel électrostatique

Pour une distribution finie, on doit choisir $V(\infty) = 0$.

Par contre, pour une distribution infinie, on ne peut pas choisir $V(\infty) = 0$.

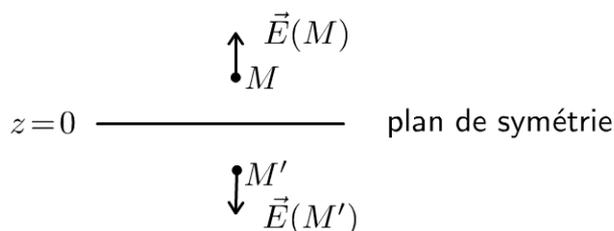
Dans ce cas, bien lire l'énoncé qui impose souvent un potentiel de référence.



Structure du champ et du potentiel

- Les plans $P = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $Q = (M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ électrostatique, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_z$.
- La distribution D de charge est invariante par translation suivant \vec{u}_x et \vec{u}_y , donc \vec{E} et V aussi. Les coordonnées du champ ne dépendent pas de x et y . Le potentiel ne dépend pas x et y . Bilan : $\vec{E} = E(z) \vec{u}_z$ et $V = V(z)$.

Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie.



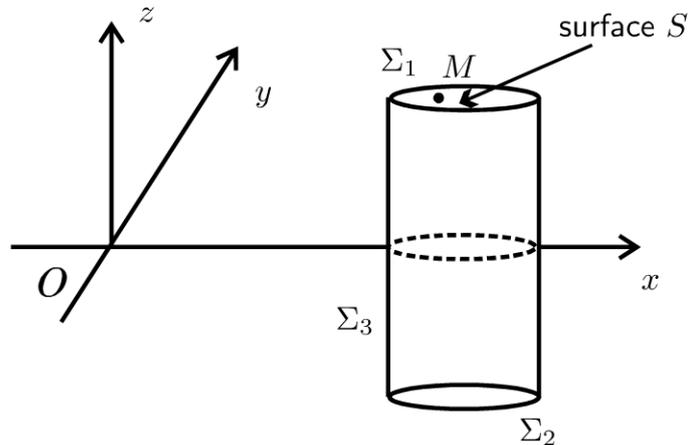
Le champ en M' est le symétrique du champ en M par rapport au plan $z = 0$, d'où :

$$\vec{E}(M') = \text{sym}(\vec{E}(M)) = -E(z) \vec{u}_z \text{ et } V(M') = V(M)$$

Soit un point M appartenant au plan $z = 0$. Les plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$, $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sont des plans de symétrie, donc $\vec{E}(M)$ appartient à leur intersection, donc $\vec{E} = \vec{0}$ pour $z = 0$.

1. Première méthode : Utilisation du théorème de Gauss

Calcul du champ avec le théorème de Gauss :



On considère un point M dans la région $z > 0$. La surface de Gauss est un cylindre passant par M représenté sur la figure ci-dessus. Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{1ext} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{2ext} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{3ext}$$

Le flux à travers la surface latérale Σ_3 est nul car le champ est orthogonal au vecteur élément de surface orienté vers l'extérieur. On a donc :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_{\Sigma_1} E(z) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z + \iint_{\Sigma_2} (-E(z)) \vec{u}_z \cdot dS (-\vec{u}_z)$$

On a donc : $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = 2E(z) S$.

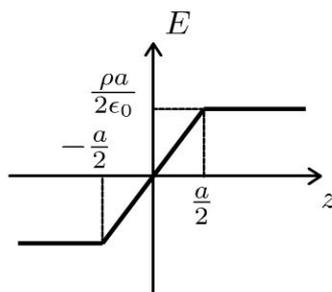
Il y a plusieurs cas pour calculer la charge intérieure :

- Si $z \geq \frac{a}{2}$, $Q_{int} = \rho a S$, on a donc $E = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$.
- Si $0 \leq z \leq \frac{a}{2}$, $Q_{int} = \rho 2z S$, on a donc $E = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$.

On en déduit le champ dans la région $z < 0$ par symétrie :

- Si $z \leq -\frac{a}{2}$, alors $E = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}$

- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq 0$, alors $E = -\frac{\rho |z|}{\epsilon_0} = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$



Si l'épaisseur a tend vers 0, on peut considérer la distribution comme surfacique. On peut définir une densité surfacique de charges σ .



Pour exprimer ρ en fonction de σ (c'est-à-dire passer d'une approximation volumique à une approximation surfacique pour les charges), il faut calculer la charge de deux façons.

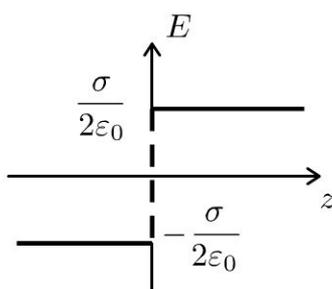


- Distribution surfacique : on considère une charge située en $z = 0$ et de surface S . La charge est $Q = \sigma S$.
- Distribution volumique : on considère une charge située dans un volume de surface S et de hauteur a . La charge est $Q = \rho Sa$.

Les deux charges doivent être égales. On a donc :

$$\sigma = \rho a$$

On retrouve bien le champ créé par un plan infini avec une discontinuité en $z = 0$.



Calcul du potentiel :

La distribution est infinie. On ne peut pas choisir : $V(\infty) = 0$. On choisit d'après l'énoncé $V(0) = 0$.

Comme la distribution est volumique, le potentiel est continu en tout point de l'espace.

On a vu que le potentiel est une fonction paire de z . Il suffit de le calculer dans la région $z \geq 0$.

On utilise la relation : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ pour calculer le potentiel.
On considère un déplacement quelconque du point M :

$$d\vec{l} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

On a donc :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E(z)\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) = -E(z) dz$$

- Si $0 \leq z \leq \frac{a}{2}$, alors $dV = -\frac{\rho z}{\epsilon_0} dz$. On intègre entre 0 et z : $V = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0}$ puisque $V(0) = 0$. Le potentiel vaut en $z = \frac{a}{2}$:

$$V\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$$

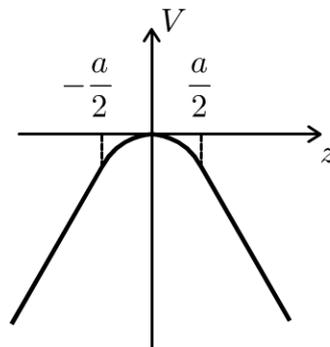
- Si $z \geq \frac{a}{2}$, alors $dV = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} dz$. On intègre entre $\frac{a}{2}$ et z :

$$V - \left(-\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}\right) = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} \left(z - \frac{a}{2}\right)$$

D'où :

$$V = \left(-\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}\right) - \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \left(z - \frac{a}{2}\right)$$

On en déduit le graphe représentant V en fonction de z :



Remarque : On a continuité du potentiel en tout point de l'espace puisqu'on a une distribution volumique. On remarque que la dérivée première de V est continue.

C'est prévisible puisque $E = -\frac{dV}{dz}$ et que le champ est continu en tout point de l'espace pour une distribution volumique.



2. Deuxième méthode : Équation de Maxwell-Gauss

On a vu que le champ électrique ne dépend que de z .

L'équation de Maxwell-Gauss est :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{dE}{dz}$$

- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, donc $E = \frac{\rho z}{\varepsilon_0} + cte$. On a vu que $E = 0$ pour $z = 0$. Soit $E = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$.
- Si $z \geq \frac{a}{2}$: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dz} = 0$ (localement il n'y a pas de charge), donc $E = cte$. Le champ est continu pour $z = \frac{a}{2}$ puisqu'on a une distribution volumique, donc $E = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$.
- Si $z \leq -\frac{a}{2}$: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dz} = 0$, donc $E = cte$. Le champ est continu pour $z = -\frac{a}{2}$, donc $E = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$.

On retrouve les mêmes résultats qu'avec la méthode 1.

3. Troisième méthode : Équation de Poisson

L'équation de Poisson est :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) V = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} V$$

Soit :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

On a vu que le champ et le potentiel sont nuls pour $z = 0$. Comme le potentiel ne dépend que de z , l'équation de Poisson s'écrit :

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$: $\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, donc $\frac{dV}{dz} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}z + A$ et $V = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}z^2 + Az + B$. Le champ électrostatique est $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dz}\vec{u}_z$. On a : $E = -\frac{dV}{dz} = \frac{\rho z}{\varepsilon_0} - A$. Or $V = 0$ et $E = 0$ pour $z = 0$. On a donc : $A = 0$ et $B = 0$. On obtient finalement : $E = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$
- Si $z \geq \frac{a}{2}$: $\frac{d^2V}{dz^2} = 0$. On a donc $V = A'z + B'$ et $E = -A'$. Le champ et le potentiel sont continus pour $z = \frac{a}{2}$. On a donc $A' = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$ et $-\frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} = A' \left(\frac{a}{2}\right) + B'$, d'où $B' = -\frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} + \frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0} = \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$.
- Si $z \leq -\frac{a}{2}$: $\frac{d^2V}{dz^2} = 0$. On a donc $V = A''z + B''$ et $E = -A''$. Le champ et le potentiel sont continus pour $z = -\frac{a}{2}$. On a donc $A'' = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$ et $-\frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} = A'' \left(-\frac{a}{2}\right) + B''$, d'où $B'' = -\frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} + \frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0} = \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$.

On retrouve les mêmes résultats qu'avec la méthode 1.

Exercice 11.7 : Champ électrostatique entre deux plaques

On considère un condensateur plan formé de deux plaques parallèles infinies et distantes de d . L'ensemble est placé dans le vide. Les plaques sont maintenues respectivement aux potentiels V_1 et V_2 . On néglige les effets de bord.

1. Rappeler les équations de Poisson et de Laplace pour l'électrostatique.
2. Déterminer le potentiel et en déduire le champ électrostatique \vec{E} qui règne entre les armatures de ce condensateur.
3. Ce condensateur est placé dans un milieu où règne une densité volumique de charges ρ uniforme. Déterminer le potentiel électrostatique et le champ électrostatique.

Analyse du problème

On va utiliser une autre méthode que le théorème de Gauss pour calculer le champ électrostatique. Avec l'équation de Poisson, on va calculer le potentiel. On pourra alors en déduire directement le champ électrostatique.



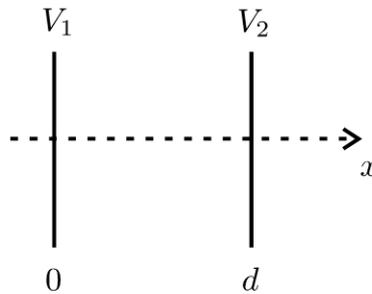
1. L'équation de Poisson en électrostatique s'écrit :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

L'équation de Laplace pour l'électrostatique est le cas particulier où la densité volumique de charges est nulle :

$$\Delta V = 0$$

2.



On néglige les effets de bord (c'est-à-dire que l'épaisseur d est faible devant les dimensions des plaques considérées comme infinies). Dans ces conditions la distribution est invariante par translation suivant \vec{u}_y et \vec{u}_z , donc V aussi. On en déduit que :

$$V = V(x)$$

Dans l'espace entre les plaques qui est vide de charge, le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

En coordonnées cartésiennes, on a $\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} = 0$. On a donc :
 $V = Ax + B$.

Conditions aux limites

$V = V_1$ pour $x = 0$ et $V = V_2$ pour $x = d$.

On en déduit : $\begin{cases} V_1 = B \\ V_2 = Ad + B \end{cases}$, soit $A = \frac{V_2 - V_1}{d}$.

Finalement, on a :

$$V = \frac{-(V_1 - V_2)}{d}x + V_1$$

On en déduit le champ électrostatique :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = \frac{V_1 - V_2}{d}\vec{u}_x$$

Le champ est uniforme entre les armatures du condensateur.

3. Entre les armatures, le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

Une première intégration donne : $\frac{dV}{dx} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}x + C_1$.

Une deuxième intégration donne : $V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$.

Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} V_1 = C_2 \\ V_2 = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \frac{d^2}{2} + C_1 d + C_2 \end{cases}$$

D'où $C_1 = \frac{V_2 - V_1}{d} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$.

On obtient :

$$V = \frac{-\rho x^2}{2\varepsilon_0} + \left(\frac{V_2 - V_1}{d} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \right) x + V_1$$

Le champ électrostatique est :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = \left(\frac{\rho x}{\varepsilon_0} - \frac{V_2 - V_1}{d} - \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \right) \vec{u}_x$$

Condensateur

Exercice 12.1 : Condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques très fines de surface S séparées d'une distance e . L'isolant entre les deux armatures a une permittivité ε_0 . On néglige les effets de bord. Les densités surfaciques de charges portées par les deux armatures sont uniformes et opposées.

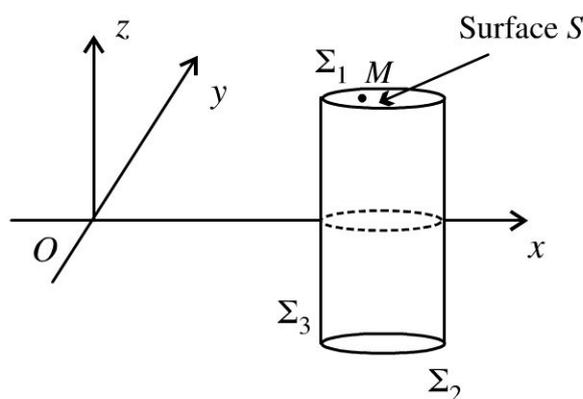
1. Déterminer le champ électrostatique créé par un plan infini de densité surfacique de charges σ .
2. En déduire le champ électrostatique créé par le condensateur en tout point de l'espace.
3. Calculer la différence de potentiel aux bornes du condensateur en fonction de la charge d'une armature, S et e . En déduire la capacité du condensateur plan.

Analyse du problème

On applique le théorème de superposition pour calculer le champ électrostatique créé par le condensateur.



1. On considère un plan infini $z = 0$ uniformément chargé en surface. On appelle σ la densité surfacique de charges.

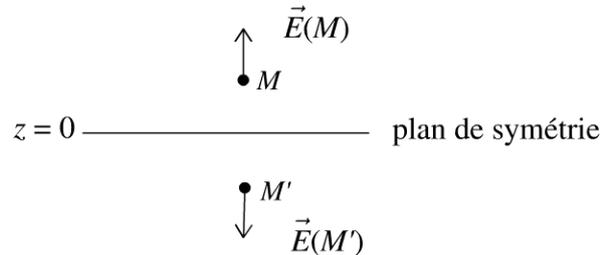


- Les plans $P = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $Q = (M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ électrostatique, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_z$.

- La distribution D de charge est invariante par translation suivant \vec{u}_x et \vec{u}_y , donc \vec{E} aussi. Les coordonnées du champ ne dépendent pas de x et y . Bilan :

$$\vec{E} = E(z) \vec{u}_z$$

- Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie.



Le champ en M' est le symétrique du champ en M par rapport au plan $z = 0$, d'où :

$$\vec{E}(M') = \text{sym}(\vec{E}(M)) = -E(z) \vec{u}_z$$

- On considère un point M dans la région $z > 0$. La surface de Gauss est un cylindre passant par M représenté sur la figure ci-dessus. Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{1ext} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{2ext} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{3ext}$$

Le flux à travers la surface latérale Σ_3 est nul car le champ est orthogonal au vecteur élément de surface orienté vers l'extérieur. On a donc :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_{\Sigma_1} E(z) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z + \iint_{\Sigma_2} (-E(z)) \vec{u}_z \cdot dS (-\vec{u}_z)$$

On a donc : $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = 2E(z) S.$

Remarque : Il est indispensable de fermer la surface de Gauss par Σ_2 . On ne peut pas fermer par Σ_4 (disque de surface S situé en $z = 0$) car le champ n'est pas défini pour $z = 0$.

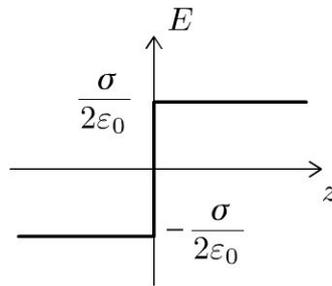


La charge intérieure vaut $Q_{int} = \sigma S$, d'où :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

On en déduit immédiatement le champ dans la région $z < 0$:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$$



Interprétation physique :

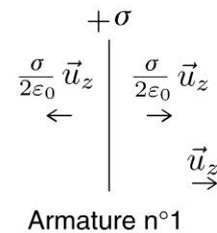
Il ne faut pas être surpris d’avoir un champ constant dans la région $z > 0$. C’est un modèle fort qui est valable pour une distribution réelle plane de grande dimension si on est loin des bords.

Si σ est positif, le champ électrostatique diverge à partir des charges positives.

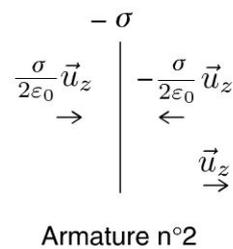
De part et d’autre de la distribution, on a une discontinuité du champ électrostatique. On vérifie que : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$.

2. On applique le théorème de superposition pour calculer le champ créé par les deux armatures qui sont assimilées à des plans infinis situés en $z = 0$ et $z = e$.

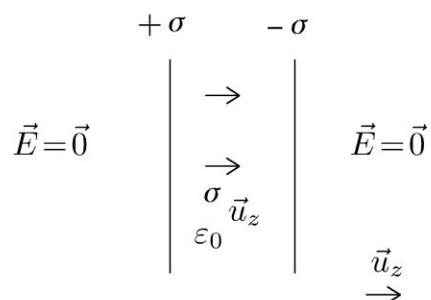
Distribution D_1 : armature de charge Q et de densité surfacique de charges $+\sigma$



Distribution D_2 : armature de charge $-Q$ et de densité surfacique de charges $-\sigma$.



Distribution D (condensateur) : armature n°1 de charge Q , de densité surfacique de charges $+\sigma$ située en $z = 0$ et armature n°2 de charge $-Q$, de densité surfacique de charges $-\sigma$ située en $z = e$.



Le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur.

Dans le condensateur, le champ vaut $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$.

On vérifie que le champ diverge à partir des charges positives et converge vers les charges négatives.

3. On calcule la différence de potentiel $V_2 - V_1$ en envisageant un déplacement d'un point A_1 de l'armature n°1 vers un point A_2 de l'armature n°2.

Entre les deux armatures, on a : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ avec $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$ et

$d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$. On obtient : $dV = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} dz$.

Il reste à intégrer entre A_1 et A_2 :

$$V_2 - V_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} (z_2 - z_1) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} e$$

On en déduit : $U = V_1 - V_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e$.

La capacité d'un condensateur est définie par :

$$Q_1 = C (V_1 - V_2)$$

en notant Q_1 la charge de l'armature n°1.

On en déduit : $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$ avec $Q_1 = \sigma S$

D'où :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

Champ magnétique en régime stationnaire

Exercice 13.1 : Champ créé par un fil cylindrique

On considère un cylindre illimité de rayon R parcouru par un courant I réparti uniformément en volume.

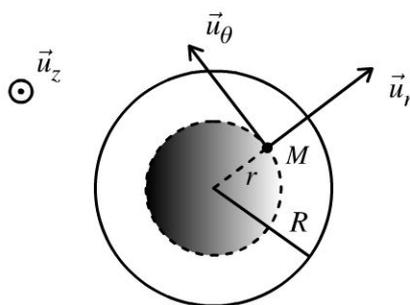
1. Déterminer en tout point de l'espace le champ magnétostatique créé par cette distribution de courants. Ce modèle est-il utilisable pour un cylindre réel ?
2. Calculer le champ maximum créé par cette distribution pour $I = 1$ A et $R = 1$ mm.

Analyse du problème

Comme la distribution de courants est hautement symétrique, on utilise le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétostatique en tout point de l'espace.



1. On repère le point M avec les coordonnées cylindriques. On pose $\vec{j} = j\vec{u}_z$.



On oriente l'intensité I dans le sens des $z > 0$. On en déduit l'intensité qui traverse une section orthogonale à l'axe Oz :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j\pi R^2$$



L'orientation du conducteur est arbitraire. Dans l'exercice, on l'oriente dans le sens des $z > 0$. Le vecteur élément de surface est donc orienté également suivant $+\vec{u}_z$.



- Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour les courants, sources du champ, donc $\vec{B}(M) \perp P$, c'est-à-dire $\vec{B}(M) // \vec{u}_\theta$.
- La distribution D est invariante par rotation d'angle θ et par translation suivant \vec{u}_z , donc \vec{B} aussi. Bilan :

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$$

- On applique le théorème d'Ampère. Le contour d'Ampère Γ est un cercle orienté suivant $+\vec{u}_\theta$ passant par M et de rayon r :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = B(r) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$



Il faut bien vérifier le signe du courant enlacé. Le courant enlacé est compté positivement si le contour sort par la face Nord du circuit ou si le courant enlacé sort par la face + d'une surface s'appuyant sur le contour.



Il y a deux cas :

Si M est l'extérieur du cylindre ($r \geq R$) :

Le courant enlacé est : $I_{\text{enlacé}} = I = j\pi R^2$.

On en déduit le champ magnétostatique à l'extérieur :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}$$

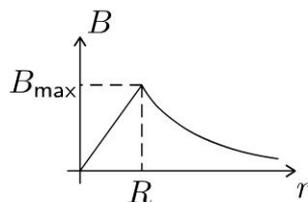
Si M est l'intérieur du cylindre ($r \leq R$) :

Le courant enlacé est : $I_{\text{enlacé}} = j\pi r^2$.

On en déduit le champ magnétostatique à l'intérieur :

$$B(r) = \frac{\mu_0 j r}{2}$$

On représente le graphe $B(r)$:



Interprétation physique :

Les lignes de champ sont des courbes fermées. Elles tourbillonnent autour des sources de courant. On peut appliquer la règle du tire-bouchon ou de la main droite pour vérifier le sens du champ \vec{B} .

À l'extérieur du cylindre, tout se passe comme si on avait un fil infini.

Le champ \vec{B} est continu en tout point de l'espace. C'est prévisible puisque la distribution est volumique.



Si $r = 0$, $\vec{B} = \vec{0}$. C'est normal puisque tous les plans contenant l'axe Oz sont des plans de symétrie.

Le modèle du cylindre illimité est valable pour un cylindre réel si on est loin des bords.

2. Le champ maximum créé par cette distribution est obtenu pour $r = R$. On obtient :

$$B_{\max} = 2 \times 10^{-4} \text{ T}$$

Remarque : La composante horizontale du champ magnétique terrestre vaut $2,5 \times 10^{-5} \text{ T}$.

Exercice 13.2 : Champ créé par un solénoïde infini

Un solénoïde circulaire est constitué de N spires ($N \gg 1$) de même rayon R , de même axe Oz , réparties régulièrement le long du cylindre de longueur ℓ et de même intensité I . On définit n le nombre de spires par mètre. On étudie le modèle limite d'un solénoïde infini, c'est-à-dire qu'on néglige les effets de bord. On admet que le champ magnétostatique est nul à l'extérieur du solénoïde.

1. Déterminer en tout point de l'espace le champ magnétostatique créé par le solénoïde infini en fonction de μ_0 , n et I .

2. Calculer le champ magnétique produit par le solénoïde utilisé au CERN pour rechercher le boson de Higgs. Pourquoi la température du solénoïde est égale à $-267 \text{ }^\circ\text{C}$?

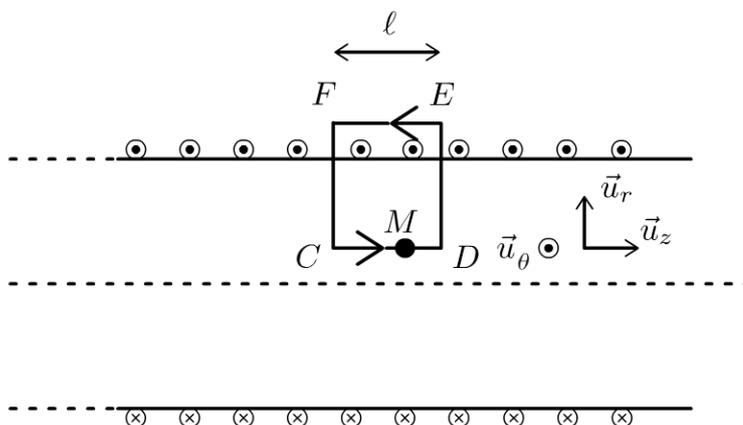
Données du solénoïde : longueur = 13 m ; diamètre = 6 m ; $I = 19500 \text{ A}$; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$; $N = 2120$.

Analyse du problème

Comme la distribution de courants est hautement symétrique, on utilise le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétostatique en tout point de l'espace.



1. On considère un point M à l'intérieur du solénoïde. On utilise les coordonnées cylindriques.



- Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie pour les courants, sources du champ, donc $\vec{B}(M) \perp P$, c'est-à-dire $\vec{B}(M) // \vec{u}_z$.
- La distribution est invariante par rotation d'angle θ et par translation suivant \vec{u}_z , donc \vec{B} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et z .
Bilan :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$$

- On applique le théorème d'Ampère au contour Γ passant par M à l'intérieur du solénoïde :

$$\oint_{CDEF} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_E^F \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_F^C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

$\int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ et $\int_F^C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ puisque le champ est orthogonal au déplacement élémentaire sur le contour.

$\int_E^F \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ puisqu'on admet que le champ est nul à l'extérieur du solénoïde.

$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{z_C}^{z_D} B \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z = B(z_D - z_C) = B\ell$$

Le contour Γ enlace $n\ell$ spires. Comme chaque spire est parcourue par un courant I , le courant enlacé est :

$$I_{\text{enlacé}} = n\ell I$$



Il faut bien vérifier le signe du courant enlacé.



On en déduit le champ magnétostatique créé par le solénoïde infini :

- À l'intérieur du solénoïde, le champ \vec{B} est uniforme et vaut :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

- À l'extérieur, le champ magnétostatique est nul d'après l'énoncé :

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

2. Application numérique : $B = 4 \text{ T}$.

C'est un champ considérable qui est 200 000 fois plus grand que la composante horizontale du champ magnétique terrestre.

On utilise des matériaux supraconducteurs refroidis à -267 °C ce qui permet de s'affranchir de l'effet Joule. C'est le plus grand solénoïde en supraconducteurs au monde.

Exercice 13.3 : Champ créé par une bobine torique

Une bobine torique est constituée de N spires jointives régulièrement enroulées sur un tore (ou un pneu) d'axe Oz et parcourues par la même intensité I . On suppose que $N \gg 1$.

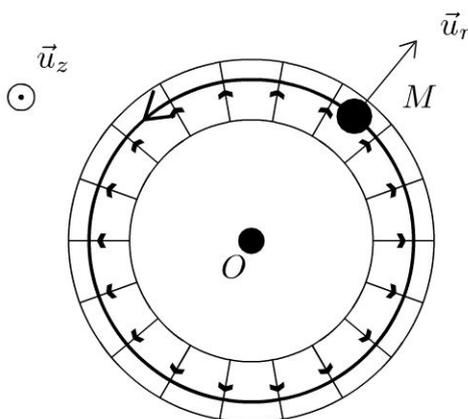
Déterminer en tout point de l'espace le champ magnétostatique créé par la bobine torique.

Analyse du problème

Comme la distribution de courants est hautement symétrique, on utilise le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétostatique en tout point de l'espace.



On considère un point M repéré par ses coordonnées cylindriques. Sur le schéma, on a représenté $N = 18$ spires.



vue de dessus

- Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour les courants, sources du champ, donc $\vec{B}(M) \perp P$, c'est-à-dire $\vec{B}(M) // \vec{u}_\theta$.
- La distribution est invariante par rotation d'angle θ (puisqu'on a un grand nombre de spires régulièrement enroulées sur le tore), donc \vec{B} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ . Bilan :

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta$$

- Le contour d'Ampère Γ est un cercle orienté dans le sens trigonométrique d'axe Oz , de rayon r passant par M . Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{2\pi} B(r, z) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = B(r) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$



Il faut bien vérifier le signe du courant enlacé.



Il y a deux cas :

Si M est à l'intérieur de la bobine torique :

Sur le schéma ci-dessus, on a représenté un contour Γ qui enlace N spires.

Le courant enlacé est donc : $I_{\text{enlacé}} = N I$. On en déduit que :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Si M est à l'extérieur de la bobine torique :

Il n'y a pas de courant enlacé. On en déduit que :

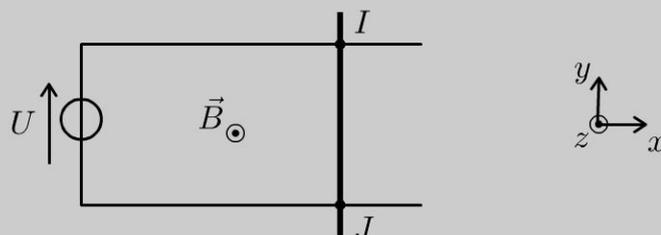
$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

Électromagnétisme dans l'ARQS

Exercice 14.1 : Rail de Laplace

On considère une tige métallique de longueur $\ell = IJ$ pouvant se déplacer sur l'axe Ox . Elle glisse sans frottement sur des rails électriques. Le dispositif est placé dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Le générateur de tension délivre une tension constante U . La résistance totale du circuit est notée R et ne dépend pas de la position sur les rails. La tige est immobile à $t = 0$. On néglige les phénomènes d'autoinduction.

1. Déterminer la vitesse de la tige et l'intensité du courant électrique circulant dans le circuit en fonction du temps.
2. Effectuer un bilan de puissance.
3. Montrer que le couplage électromécanique est parfait.



Analyse du problème

Le générateur de tension U crée un courant électrique. La tige métallique est parcourue par un courant et placée dans un champ magnétique stationnaire. Elle subit donc une force de Laplace qui la met en mouvement. On a alors une variation du flux magnétique. C'est un phénomène d'induction de Lorentz avec apparition d'une fem d'induction.

La **loi de Lenz** est une **loi de modération** : les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

On néglige le champ magnétique induit devant le champ magnétique extérieur. Pour en tenir compte, il faudrait rajouter l'inductance propre L du circuit que l'on néglige dans l'exercice.

Cours

Un phénomène d'induction apparaît lorsqu'il y a une variation du flux du champ magnétique.

Loi de Faraday et équations de Maxwell

Sauf indication contraire, on se placera dans la cadre de l'ARQS magnétique où les effets des distributions de courants dominent ceux des distributions de charges.

Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

Le champ électrique est :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

La loi de Faraday $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ est la forme intégrée de la relation de Maxwell-Faraday

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Étude des conducteurs filiformes

Il faut d'abord orienter le conducteur et rajouter **une force électromotrice d'induction e en convention générateur**.

On note Φ le flux du champ magnétique à travers le conducteur. La force électromotrice se calcule avec la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Interprétation physique

La loi de Lenz est une loi de modération : **Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.**

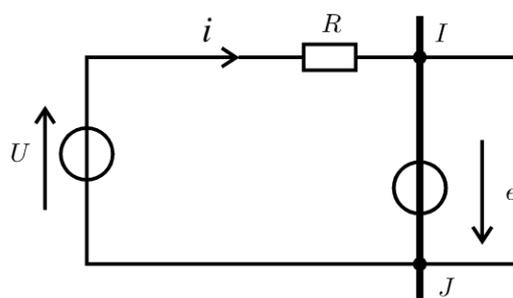


1. Équation électrique :

On oriente arbitrairement le circuit sur le schéma ci-dessous.

Comme on a un phénomène d'induction, il faut rajouter en série sur le tronçon IJ une force électromotrice d'induction e en convention générateur.

On obtient le schéma électrique :





L'orientation du circuit sert à l'orientation du vecteur élément de surface pour le calcul du flux magnétique et dans l'expression de la force de Laplace. Il ne faut pas oublier que e est toujours orienté en convention générateur.

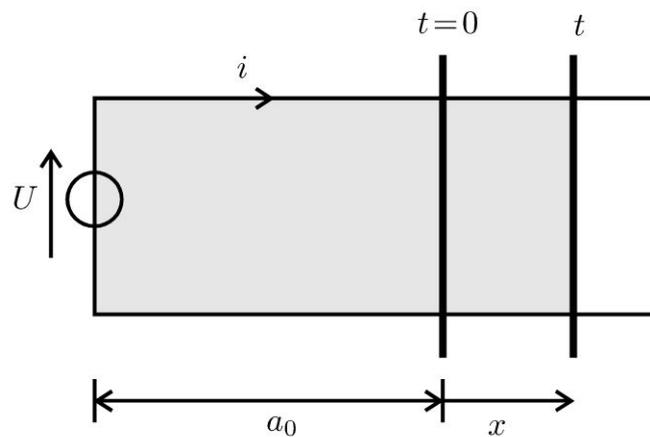


La loi des mailles s'écrit :

$$U = Ri - e$$

La loi de Faraday s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$



Le flux du champ magnétique est défini par :

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Le vecteur $d\vec{S}$ est orienté avec la règle de la main droite dans le sens de i . On a donc : $\Phi = -BS$.

Sur le schéma, on a représenté la tige à $t = 0$ et à un instant t . On appelle x le déplacement de la tige. À un instant t , la surface S vaut $\ell(a_0 + x)$. On a donc :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B\ell \frac{dx}{dt} = B\ell v$$

Équation mécanique :

Bilan des forces sur la tige :

- Poids appliqué au barycentre G
- Il n'y a pas de frottement. La réaction du rail en I et J est donc orthogonale au déplacement, c'est à dire orthogonal à \vec{u}_x .

- Force de Laplace :

$$\vec{F} = \int_I^J i \, d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_I^J i dy \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = iB [y]_I^J \vec{u}_x = -iB\ell \vec{u}_x$$

On applique le théorème de la quantité de mouvement à la tige dans le référentiel galiléen $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$. On projette sur \vec{u}_x , d'où

$$m\ddot{x} = -i\ell B$$

Équations couplées :

On obtient deux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} U = Ri - e = Ri - Bv\ell \\ m\dot{v} = -i\ell B \end{cases}$$

La deuxième équation donne : $i = -\frac{m\dot{v}}{\ell B}$ que l'on réinjecte dans la première équation. On a alors : $U = -R\frac{m\dot{v}}{\ell B} - Bv\ell$, soit

$$\dot{v} + \frac{B^2\ell^2}{mR}v = -\frac{\ell B}{mR}U$$

On définit la constante de temps du circuit :

$$\tau = \frac{mR}{B^2\ell^2}$$

Interprétation physique : On a toujours des signes + dans l'équation homogène quelque soit le signe de B . C'est tout à fait normal puisque la loi de Lenz est une loi de modération. Un terme en B au lieu de B^2 serait aberrant.

La solution de l'équation différentielle est :

$$v = A \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) - \frac{U}{B\ell}$$

D'après l'énoncé, $v = 0$ pour $t = 0$. On a donc : $0 = A - \frac{U}{B\ell}$

On obtient finalement :

$$v = -\frac{U}{B\ell} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$$

Comme $U = Ri - Bv\ell$, on en déduit l'intensité i :

$$i = \frac{U}{R} + \frac{Bv\ell}{R} = \frac{U}{R} - \frac{B\ell}{R} \frac{U}{B\ell} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right) = \frac{U}{R} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

Remarque : On peut également en déduire l'intensité à partir de la relation :

$$i = -\frac{m\dot{v}}{\ell B}$$



L'intensité i vaut $\frac{U}{R}$ à $t = 0$, ce qui est prévisible puisque la fem d'induction est nulle à $t = 0$. L'intensité décroît et tend vers 0 ce qui est conforme à la loi de Lenz qui est une loi de modération. La cause de l'induction est la tension U qui crée un courant. L'effet de l'induction est de créer une fem e qui annule la tension U et on n'a plus de courant dans le circuit.

2. Pour faire apparaître des termes de puissance, on multiplie la loi des mailles par l'intensité i et le théorème de la quantité de mouvement par la vitesse v .

On obtient alors :

$$\begin{cases} Ui = Ri^2 - ei = Ri^2 - Bvli \\ m \frac{dv}{dt} v = -i\ell Bv \end{cases}$$

D'où en éliminant le terme de couplage :

$$Ui = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)$$

La puissance fournie par le générateur sert à dissiper de la puissance dans la résistance et à faire varier l'énergie cinétique de la tige.

3. La puissance de la force de Laplace est :

$$P_{\text{méca}} = \vec{f} \cdot \vec{v} = -i\ell B\vec{u}_x \cdot v\vec{u}_x = -i\ell Bv$$

La puissance de la fem d'induction est :

$$P_{\text{élec}} = ei = Bvli$$

On en déduit que :

$$P_{\text{méca}} + P_{\text{élec}} = 0$$

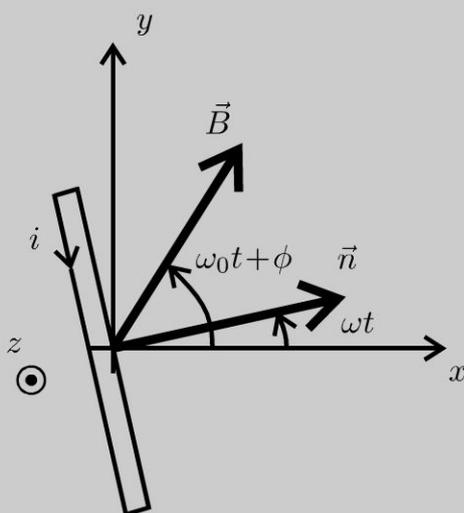
Cette relation caractérise le couplage électromécanique parfait que l'on peut généraliser dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent.

$P_{\text{élec}} = ei = Bvli$ représente algébriquement la puissance fournie par la fem d'induction puisqu'on est en convention générateur. Ici $P_{\text{élec}}$ est négative.

tif. La fem d'induction reçoit donc de l'énergie du circuit électrique. Cette puissance reçue du circuit électrique est donc intégralement transmise à la force de Laplace.

Exercice 14.2 : Moteur asynchrone

Une bobine plate fermée sur elle-même, de surface totale S , de résistance R et d'inductance L est mobile autour d'un axe Δ . Elle est placée dans un champ magnétique uniforme, de module constant B , tournant autour du même axe à la vitesse angulaire constante ω_0 . La bobine est solidaire d'un volant de grand moment d'inertie régularisant sa vitesse angulaire ω . On suppose qu'un régime permanent est atteint pour lequel la bobine tourne à une vitesse angulaire constante avec un retard de phase initial ϕ sur le champ tournant. On pose $\Omega = \omega_0 - \omega$. On note \vec{n} le vecteur normal de la bobine. On admet que la force électromotrice d'induction est : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.



1. Déterminer le courant $i(t)$ dans la bobine en régime sinusoïdal forcé en précisant sa valeur efficace et son retard de phase ψ sur la force électromotrice d'induction.
2. Donner les expressions du couple instantané Γ et du couple moyen C agissant sur la bobine. Étudier les variations de C en fonction de ω . Calculer sa valeur C_0 pour $\omega = 0$, sa valeur maximale C_m et la valeur ω_m correspondante. Dans quelles conditions a-t-on un fonctionnement moteur ?
3. Dans quelles conditions le fonctionnement moteur est-il stable ? Le moteur peut-il démarrer seul ?

Analyse du problème

On a un circuit mobile placé dans un champ magnétique dépendant du temps. On a un phénomène d'induction avec apparition d'une forme électromotrice d'induction. Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz). On utilise la loi de Faraday pour calculer la fem d'induction.



1. On suppose que les conditions de l'ARQS magnétique sont vérifiées. L'angle entre le vecteur normal à la bobine et le champ magnétique vaut :

$$(\vec{n}, \vec{B}) = \omega_0 t + \phi - \omega t$$

On a un phénomène d'induction avec un circuit mobile et un champ magnétique dépendant du temps. La force électromotrice d'induction s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Le flux du champ magnétique est :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos ((\omega_0 - \omega) t + \phi)$$

Remarque : La bobine de rayon r est constituée de N spires. La surface totale vaut alors :

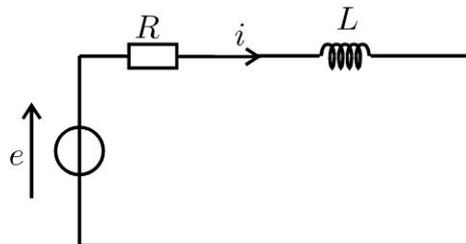
$$S = N\pi r^2$$



D'où

$$e = (\omega_0 - \omega) BS \sin ((\omega_0 - \omega) t + \phi) = BS\Omega \sin (\Omega t + \phi)$$

L'équation électrique s'obtient avec le schéma électrique équivalent en rajoutant la fem d'induction en convention générateur.



La loi des mailles s'écrit :

$$e = Ri + L \frac{di}{dt}$$

On travaille en régime sinusoïdal forcé. On utilise la notation complexe, ce qui revient à remplacer $\sin ()$ par $\exp (j ())$.

D'après l'énoncé, on appelle ψ le retard de phase de i sur e . On a donc :

$$\begin{cases} i(t) = I_m \sin (\Omega t + \phi - \psi) \\ \underline{i} = I_m \exp (j (\Omega t + \phi - \psi)) \end{cases}$$

En notation complexe, la loi des mailles s'écrit :

$$(R + jL\Omega) \underline{i} = BS\Omega \exp(j(\Omega t + \phi))$$

D'où :

$$\underline{i} = \frac{BS\Omega}{R + jL\Omega} \exp(j(\Omega t + \phi))$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} |\underline{i}| = I_m = \frac{BS\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \\ \arg(\underline{i}) = \Omega t + \phi - \psi = \Omega t + \phi - \arg(R + jL\Omega) \end{cases}$$

soit :

$$\psi = \arg(R + jL\Omega)$$

On a donc :

$$I_m = \frac{BS\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} ; \tan \psi = \frac{L\Omega}{R} \text{ et } \cos \psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} > 0$$

Interprétation physique : L'angle ψ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. i est toujours en retard de phase sur e . C'est normal, puisqu'on a un circuit inductif.

2. Le moment des forces de Laplace est : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

$\vec{\Gamma}$ est colinéaire à \vec{u}_z . On écrit par la suite : $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_z$.



Il faut utiliser la notation réelle car on a le produit de deux fonctions sinusoïdales.



$\Gamma = MB \sin((\omega_0 t + \phi) - \omega t)$ avec $M = iS$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \Gamma &= iSB \sin((\omega_0 t + \phi) - \omega t) \\ &= BS \sin(\Omega t + \phi) \frac{BS\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \sin(\Omega t + \phi - \psi) \end{aligned}$$

Or $\sin a \sin b = \frac{1}{2} (-\cos(a+b) + \cos(a-b))$. On a donc :

$$\Gamma = \frac{B^2 S^2 \Omega}{2\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \{-\cos(2\Omega t + 2\phi - \psi) + \cos(\psi)\}$$

La valeur moyenne du couple vaut donc :

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{B^2 S^2 \Omega}{2\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} \cos(\psi)$$

On a vu que $\cos \psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}}$. D'où :

$$C = \langle \Gamma \rangle = \frac{B^2 S^2 \Omega R}{2(R^2 + L^2 \Omega^2)}$$

On a un couple moteur si $\Omega > 0$, c'est-à-dire $\omega_0 > \omega$.

Pour étudier la courbe de C en fonction de ω , il faut calculer la dérivée de C par rapport à ω . On pose :

$$f(\omega) = \frac{\omega_0 - \omega}{1 + \frac{L^2(\omega_0 - \omega)^2}{R^2}}$$

La dérivée de f par rapport à ω est nulle si et seulement si :

$$\begin{aligned} -\left(1 + \frac{L^2(\omega_0 - \omega)^2}{R^2}\right) - (\omega_0 - \omega) \left(\frac{-2L^2}{R^2}(\omega_0 - \omega)\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{L^2(\omega_0 - \omega)^2}{R^2} = (\omega_0 - \omega)^2 \frac{2L^2}{R^2} &\Leftrightarrow (\omega_0 - \omega)^2 \frac{L^2}{R^2} = 1 \\ \Leftrightarrow \omega - \omega_0 = \pm \frac{R}{L} \end{aligned}$$

La valeur minimale est obtenue pour $\omega = \omega_0 + \frac{R}{L}$. La valeur maximale est obtenue pour $\omega = \omega_0 - \frac{R}{L}$. La valeur maximale du couple est :

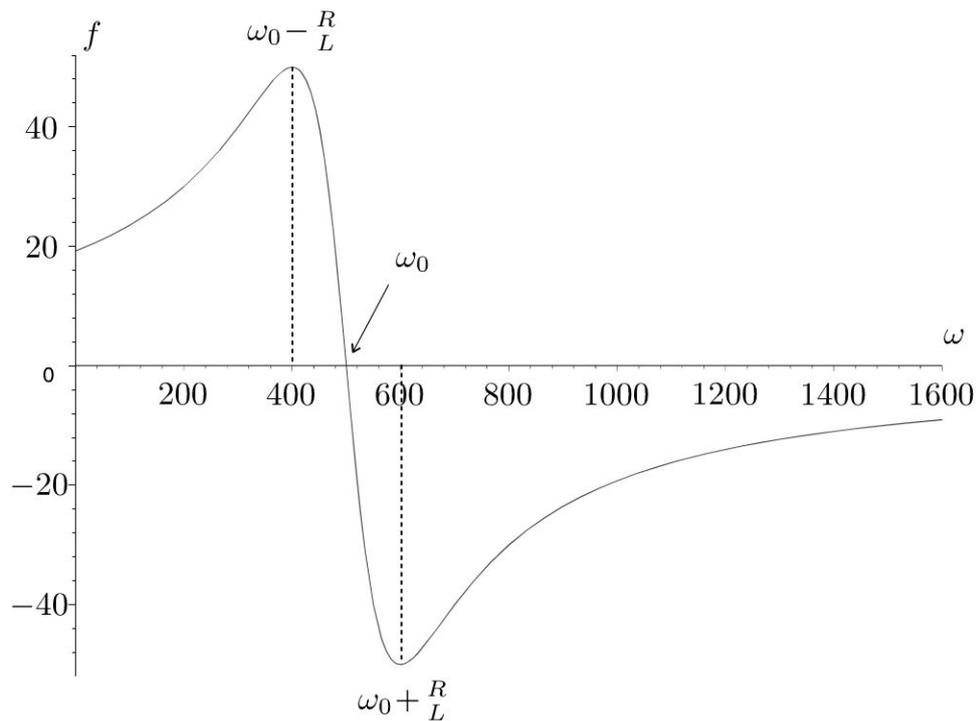
$$C_m = \frac{B^2 S^2}{2R} \frac{\frac{R}{L}}{1 + \frac{L^2(\frac{R}{L})^2}{R^2}} = \frac{B^2 S^2}{2R} \frac{R}{2}$$

D'où :

$$C_m = \frac{B^2 S^2}{4L}$$

Si $\omega \rightarrow 0$, $C = \frac{B^2 S^2}{2R} \frac{\omega_0}{1 + \frac{L^2 \omega_0^2}{R^2}} = C_0$.

On en déduit la courbe représentant f en fonction de ω .



Remarque : Ne pas tenir compte des échelles du graphe ci-dessus. Il représente simplement l'allure des courbes.



Interprétation physique :

On a un fonctionnement moteur si $0 \leq \omega < \omega_0$.

La vitesse de rotation du rotor (bobine) est inférieure à celle du champ tournant.

En régime permanent, on a en moyenne :

$$0 = \langle \Gamma \rangle + \langle \Gamma_r \rangle$$

soit $0 = C + C_r$ en appelant C_r le couple moyen résistant avec $C_r < 0$.

3. Supposons qu'à cause d'une perturbation, $|C_r|$ augmente, la bobine est freinée, donc ω diminue.

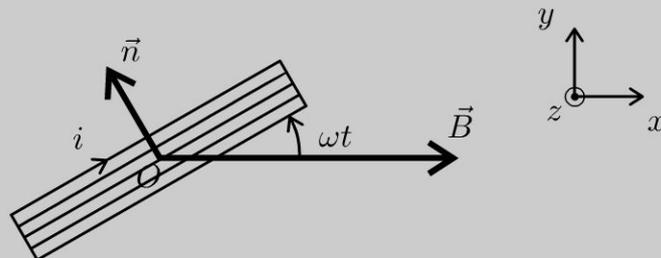
D'après la courbe :

- Si $\omega_0 - \frac{R}{L} < \omega < \omega_0$, C augmente, ce qui a pour effet d'augmenter la vitesse angulaire de la bobine. L'équilibre est donc stable.
- Si $0 < \omega < \omega_0 - \frac{R}{L}$, C diminue, ce qui a pour effet de diminuer la vitesse angulaire de la bobine. L'équilibre est donc instable.

Le moteur asynchrone peut démarrer seul à condition que le couple de frottement en valeur absolue soit inférieur à C_0 . Les T.G.V. Eurostar et Thalys sont équipés de moteurs asynchrones.

Exercice 14.3 : Alternateur d'une éolienne

Le disque éolien entraîne, par un système de démultiplication, une bobine plate en rotation autour de l'axe Oz . La bobine a une résistance r , une inductance L et elle est fermée sur une résistance R_0 . On pose $R = r + R_0$. Elle comporte N spires de surface s et se déplace dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{u}_x$.



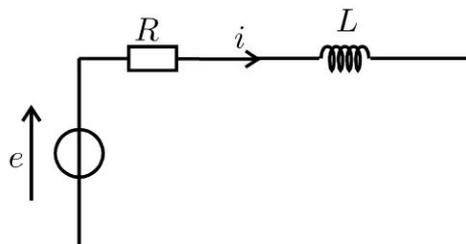
1. L'éolienne tourne à vitesse angulaire constante ω . En régime sinusoïdal forcé, l'intensité i est de la forme : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$. Déterminer I_m et ϕ .
2. Quelle est la valeur moyenne du moment $\vec{\Gamma}'$ des forces de Laplace subi par la bobine ?
3. Le moteur éolien a une puissance moyenne P . Représenter, sur un même diagramme, le moment $\|\vec{\Gamma}\|$ du couple moteur et $\|\langle \vec{\Gamma}' \rangle\|$, en fonction de ω .
4. À $t = 0$, la vitesse angulaire est nulle et on débloque l'éolienne. Analyser qualitativement le régime transitoire. Déterminer la vitesse angulaire ω_0 en régime permanent et montrer que P doit rester inférieure à une puissance critique notée P_c . Ce régime est-il stable ?

Analyse du problème

On a un circuit mobile placé dans un champ magnétique constant. On a un phénomène d'induction de Lorentz avec apparition d'une forme électromotrice d'induction. Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz).



1. On suppose que les conditions de l'ARQS magnétique sont vérifiées. L'équation électrique s'obtient avec le schéma électrique équivalent en rajoutant la fem d'induction en convention générateur.



La loi de Faraday s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Le flux du champ magnétique à travers les N spires est :

$$\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = N B s \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -N B s \sin (\omega t)$$

car la surface est orientée avec la règle de la main droite : $d\vec{S} = dS \vec{n}$.

La fem vaut donc :

$$e = N s B \omega \cos (\omega t)$$

La loi des mailles s'écrit :

$$e = R i + L \frac{di}{dt}$$

avec $\begin{cases} i = I_m \cos (\omega t + \phi) \\ \underline{i} = I_m \exp (j (\omega t + \phi)) \end{cases}$ et $\begin{cases} e = N s B \omega \cos (\omega t) \\ \underline{e} = N s B \omega \exp (j (\omega t)) \end{cases}$

En notation complexe, on a : $\underline{e} = R \underline{i} + j L \omega \underline{i}$, d'où :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j L \omega} = \frac{N s B \omega \exp (j (\omega t))}{R + j L \omega}$$

On en déduit : $\begin{cases} |\underline{i}| = I_m = \frac{N s B \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \\ \arg (\underline{i}) = \omega t + \phi = \omega t - \arg (R + j L \omega) \end{cases}$

D'où :

$$I_m = \frac{N s B \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} ; \tan \phi = -\frac{L \omega}{R} \text{ et } \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} > 0$$

ϕ est donc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0.

2. Le moment magnétique de la bobine est $\vec{M} = N I s \vec{n}$.

Le moment du couple subi par la bobine est : $\vec{\Gamma}' = \vec{M} \wedge \vec{B} = N I s \vec{n} \wedge B \vec{u}_x$

avec $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin (\omega t) \\ \cos (\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$ en projection sur $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On a donc :

$$\vec{\Gamma}' = N I s B \begin{vmatrix} -\sin (\omega t) \\ \cos (\omega t) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -N I s B \cos (\omega t) \end{vmatrix}$$

D'où :

$$\vec{\Gamma}' = -NI_m s B \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

$$\text{Or } \cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

On a donc :

$$\vec{\Gamma}' = -\frac{NI_m s B}{2} [\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi] \vec{u}_z$$

La moyenne du moment du couple est :

$$\langle \vec{\Gamma}' \rangle = -\frac{NI_m s B}{2} \cos \phi \vec{u}_z$$

La projection du moment du couple est négative. C'est normal d'après la loi de Lenz qui est une loi de modération. La création d'un courant induit s'oppose par ses effets aux causes qui lui donnent naissance. La cause est la rotation de la bobine.

3. Soit P la puissance du couple moteur. On a : $P = \Gamma \omega$. La puissance est constante, donc

$$\Gamma = \frac{P}{\omega}$$

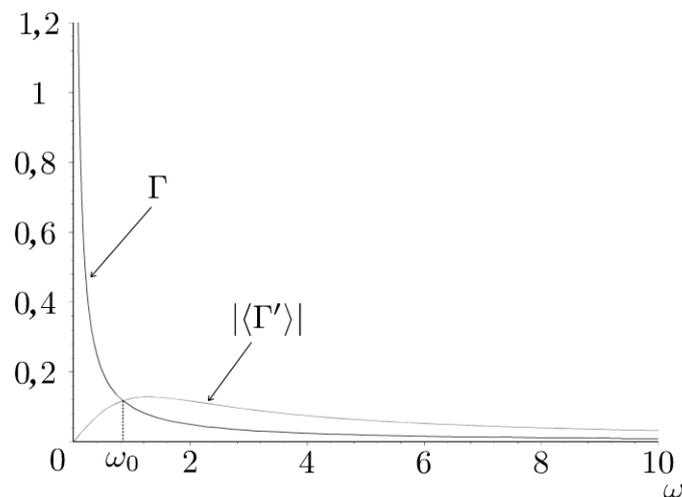
On a vu que :

$$\langle \Gamma' \rangle = -\frac{NI_m s B}{2} \cos \phi = -\frac{NsB}{2} \left(\frac{NsB\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \right) \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \right)$$

D'où

$$\langle \Gamma' \rangle = \frac{-N^2 s^2 B^2 R}{2} \frac{\omega}{R^2 + L^2 \omega^2}$$

Le graphe ci-dessous représente l'allure de Γ et de $|\langle \Gamma' \rangle|$ en fonction de ω . Le point de fonctionnement est l'intersection des deux courbes.



Remarque : Ne pas tenir compte des échelles du graphe ci-dessus. Il représente simplement l'allure des courbes.



4. À $t = 0$, on débloque l'éolienne. La vitesse angulaire ω augmente car $J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma + \Gamma' > 0$, le couple de frottement augmente et le couple moteur diminue. On atteint un régime permanent pour $\omega = \omega_0$. Le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$J \frac{d\omega}{dt} = 0 = \Gamma + \Gamma'$$

On doit avoir : $|\langle \Gamma' \rangle| = \Gamma$, soit :

$$\frac{P}{\omega_0} = \frac{N^2 s^2 B^2 R}{2} \frac{\omega_0}{R^2 + L^2 \omega_0^2}$$

D'où $2P (R^2 + L^2 \omega_0^2) = N^2 s^2 B^2 R \omega_0^2$. On a alors :

$$R^2 + L^2 \omega_0^2 = \frac{N^2 s^2 B^2 R \omega_0^2}{2P}$$

Soit :

$$\omega_0^2 = \frac{R^2}{\frac{N^2 s^2 B^2 R}{2P} - L^2}$$

Pour que ω_0 soit défini, il faut que $\frac{N^2 s^2 B^2 R}{2P} - L^2 > 0$, c'est-à-dire $\frac{N^2 s^2 B^2 R}{2P} > L^2$, soit $P < \frac{N^2 s^2 B^2 R}{2L^2}$. On pose :

$$P_c = \frac{N^2 s^2 B^2 R}{2L^2}$$

On doit donc avoir :

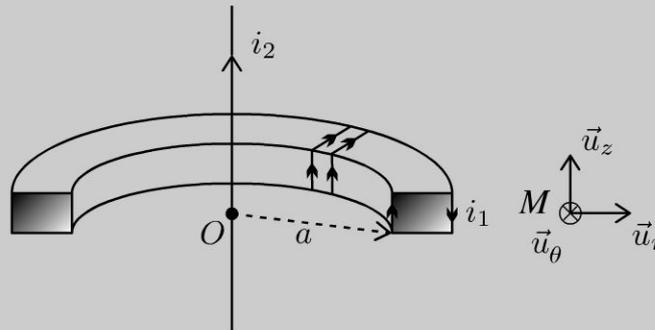
$$P < P_c$$

Si la vitesse angulaire augmente légèrement, le couple moteur est inférieur au couple résistant en norme. On a donc un ralentissement de la bobine. Le régime est donc stable.

Exercice 14.4 : Pince ampèremétrique

Une bobine torique est constituée de N spires jointives enroulées sur un tore, de section rectangulaire, de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , de hauteur h . On suppose que $N \gg 1$.

1. Calculer le flux du champ magnétique créé par la bobine torique à travers les N spires. En déduire son inductance propre L_1 .
2. Le tore (circuit 1) enlace un fil infini (circuit 2) d'axe Oz et est parcouru par un courant $i_2 = I_{2m} \cos(\omega t + \phi)$. Calculer le flux du champ magnétique créé par le circuit 2 à travers les N spires du tore. En déduire l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.
3. On court-circuite le circuit torique et on néglige sa résistance. On se place en régime sinusoïdal forcé. Déterminer la valeur efficace du courant i_1 . Quel est l'avantage de la mesure du courant induit ?



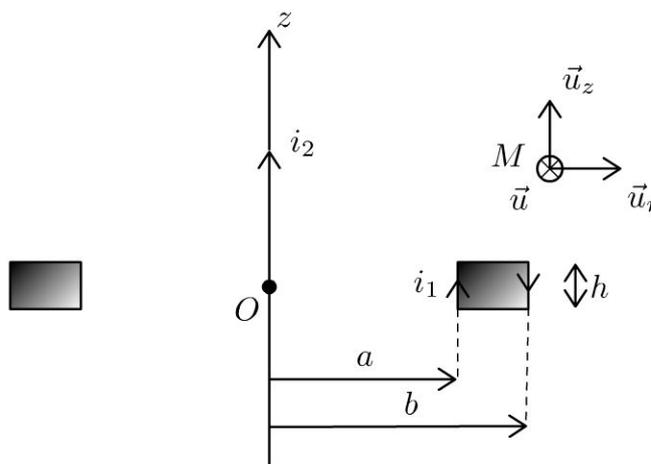
Analyse du problème

On a un problème d'induction avec deux circuits couplés. On commence par calculer l'inductance propre et l'inductance mutuelle entre les deux circuits. Le circuit 2 crée un champ magnétique variable. On a un phénomène d'induction à cause de la variation du flux magnétique à travers le circuit 1. Le flux magnétique est la somme du flux propre et du flux extérieur. En utilisant la notation complexe, on pourra en déduire la valeur efficace du courant i_1 .



1. Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des sources du champ, donc $\vec{B}_1(M) \perp P$, c'est-à-dire $\vec{B}_1(M) // \vec{u}_\theta$.

La distribution est invariante par rotation d'angle θ , donc \vec{B}_1 aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ .



D'où :

$$\vec{B}_1(M) = B_1(r, z) \vec{u}_\theta$$

On suppose que les conditions de l'ARQS magnétique sont vérifiées : on peut appliquer le théorème d'Ampère à un cercle orienté dans le sens trigonométrique d'axe Oz , de rayon r passant par M :

$$\oint \vec{B}_1 \cdot \vec{dl} = B_1(r) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

- Si M est à l'intérieur du tore : $I_{\text{enlacé}} = N i_1$ en appliquant la règle de la main droite. On en déduit :

$$\vec{B}_{1 \text{ int}} = \frac{\mu_0 N i_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- Si M est à l'extérieur du tore : $I_{\text{enlacé}} = 0$. On a donc :

$$\vec{B}_{1 \text{ ext}} = \vec{0}$$

Le flux à travers une spire est :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{spire}} &= \iint_{\text{spire}} \vec{B}_1 \cdot \vec{dS} = \iint_{\text{spire}} B_1 \cdot dr dz \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 N i_1}{2\pi} h \int_{r=a}^b \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 N i_1 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

La spire est orientée avec la règle de la main droite.

Le flux à travers les N spires de la bobine torique vaut :

$$\Phi_P = N \Phi_{\text{spire}} = \frac{\mu_0 N^2 i_1 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Ce flux est appelé flux propre. On peut l'identifier à $\Phi_P = L_1 i_1$, d'où :

$$L_1 = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

2. On appelle $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ le flux extérieur, c'est à dire le flux du champ magnétique \vec{B}_2 créé par le circuit 2 à travers le circuit 1 :

$$\Phi_{\text{ext}} = \Phi_{2 \rightarrow 1} = \sum_{\text{spires de } C_1} \int_{M \in \text{spire}} \vec{B}_2 \cdot \vec{dS}_1$$

On va calculer le champ magnétique créé par le circuit 2 :

- Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour les courants, sources du champ, donc $\vec{B}_2(M) \perp P$, c'est-à-dire $\vec{B}_2(M) // \vec{u}_\theta$.
- La distribution D est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz , donc \vec{B}_2 aussi. On a donc :

$$\vec{B}_2 = B_2(r) \vec{u}_\theta$$

- On applique le théorème d'Ampère. Le contour d'Ampère est un cercle orienté suivant \vec{u}_θ passant par M et de rayon r :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B_2(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = B_2(r) 2\pi r = \oplus \mu_0 i_2$$

On a donc :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Le flux de \vec{B}_2 à travers une spire du tore est :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1(1\text{spire})} = \iint_S \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot dr dz \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 i_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Le flux de \vec{B}_2 à travers les N spires du tore est :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = N \Phi_{2 \rightarrow 1(1\text{spire})} = \frac{\mu_0 N i_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

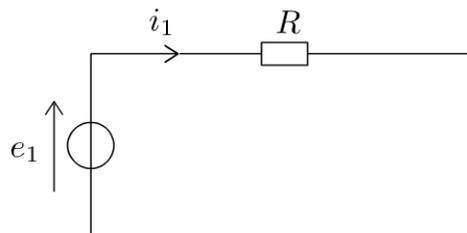
On pose $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$, d'où :

$$M = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Remarque : Si on change le sens de i_1 ou i_2 , M change de signe.



3. L'équation électrique s'obtient avec le schéma électrique équivalent en rajoutant la fem d'induction en convention générateur.



La force électromotrice d'induction est :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}$$

Le flux du champ magnétique à travers le circuit 1 est :

$$\Phi_1 = \Phi_P + \Phi_{\text{ext}} = L_1 i_1 + M i_2$$



Une erreur fréquente est de ne pas tenir compte du flux propre. Ici, le flux propre dépend de N^2 alors que le flux extérieur dépend de N . Comme N est très grand, il n'y a aucune raison de le négliger.



La loi des mailles s'écrit :

$$e_1 = R i_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

Comme la résistance est négligeable d'après l'énoncé, on a :

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

En utilisant la notation complexe, on a : $jL\omega i_1 = -jM\omega i_2$.

On en déduit une relation faisant intervenir les intensités efficaces :

$$L\omega I_{1\text{eff}} = M\omega I_{2\text{eff}}.$$

Comme $\frac{L}{M} = N$, on a :

$$I_{1\text{eff}} = \frac{M}{L} I_{2\text{eff}} = \frac{I_{2\text{eff}}}{N}$$

Une pince ampèremétrique permet donc de mesurer des courants forts (plusieurs centaines, voire plusieurs milliers d'ampères).

Exercice 14.5 : Courants de Foucault dans un cylindre

On place un cylindre conducteur d'axe Oz , de section $S_0 = \pi R^2$, de longueur L et de conductivité γ dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On suppose que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique et on néglige les effets de bord. On donne en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z.$$

1. On admet $\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$. Montrer que $\vec{E}(P) = \frac{r\omega B_0 \sin(\omega t)}{2} \vec{u}_\theta$ en utilisant deux méthodes.
2. Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.
3. Que devient la puissance moyenne dissipée par effet Joule si au lieu d'un seul conducteur cylindrique, on utilise N conducteurs cylindriques identiques, de même longueur L , de section $S'_0 = \frac{S_0}{N}$ sachant que le volume total occupé par les N cylindres est le même que précédemment ? Expliquer l'intérêt du feuilletage pour la réalisation des transformateurs.

Analyse du problème

Le champ magnétique extérieur dépend du temps. Il va donc créer un champ électrique calculé à partir de l'équation de Maxwell-Faraday. Il va y avoir naissance de courants induits dans le cylindre conducteur et donc une puissance dissipée par effet Joule.



1. L'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ permet de calculer le champ électrique :

Méthode 1 :

On utilise le rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} \right) = -\frac{\partial B}{\partial t} = B_0 \omega \sin(\omega t)$$

On se place à un instant t quelconque. On peut écrire à t fixé :

$$\frac{d(r E_\theta)}{dr} = r B_0 \omega \sin(\omega t), \text{ soit } d(r E_\theta) = r B_0 \omega \sin(\omega t) dr.$$

On intègre :

$$r E_\theta = \frac{r^2}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) + C_1, \text{ d'où } E_\theta = \frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) + \frac{C_1}{r}.$$

Le champ est défini pour $r = 0$, donc $C_1 = 0$.

Remarque : On néglige le champ magnétique créé par les courants induits.

Méthode 2 :

La deuxième méthode consiste à calculer la circulation du champ électrique et d'appliquer le théorème de Stokes pour en déduire directement le champ électrique. On utilise le théorème de Stokes dans de nombreux domaines de

la physique : théorème d'Ampère, écoulement rotationnel en mécanique des fluides (voir exercice sur le cyclone)...

On calcule la circulation de \vec{E} dans le cylindre sur un cercle de rayon r avec $0 \leq r \leq R$ car $\vec{E} = E(r) \vec{u}_\theta$.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} E(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = E(r) 2\pi r = \iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

avec S une surface qui s'appuie sur le contour Γ et orientée par la règle de la main droite suivant \vec{u}_z .

On a donc : $E(r) 2\pi r = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = (B_0 \omega \sin(\omega t)) \pi r^2$, d'où :

$$E_\theta = \frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t)$$

2. La puissance volumique dissipée par effet Joule est :

$$\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \gamma \left(\frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) \right)^2$$

On a donc :

$$dP_J = \gamma \left(\frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) \right)^2 dr r d\theta dz$$

On intègre sur tout le cylindre : r varie entre 0 et R , z entre 0 et L et θ entre 0 et 2π .

On obtient :

$$P_J = \gamma \frac{R^4}{16} (B_0 \omega \sin(\omega t))^2 2\pi L$$

La moyenne temporelle est :

$$\langle P_J \rangle = \gamma \frac{R^4}{16} B_0^2 \omega^2 \frac{1}{2} 2\pi L = \frac{\gamma B_0^2}{16} \pi L (2\pi f)^2 \left(\frac{S_0}{\pi} \right)^2$$

puisque la moyenne de $\sin^2(\omega t)$ sur une période vaut $\frac{1}{2}$.

On a donc :

$$\langle P_J \rangle = \frac{\gamma B_0^2}{4} \pi L f^2 S_0^2$$

3. On pose $K = \frac{\gamma B_0^2}{4} \pi L f^2$, soit $\langle P_J \rangle = K S_0^2$.

Si au lieu d'un seul conducteur, on utilise N conducteurs cylindriques de section S'_0 , la puissance dissipée par effet Joule est :

$$\langle P'_J \rangle = N (K (S'_0)^2)$$

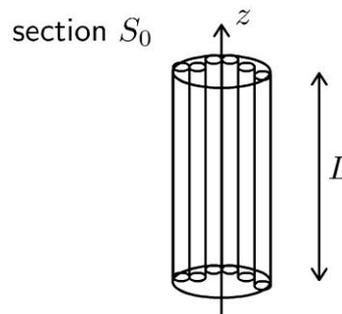
puisque la puissance totale est la somme des puissances moyennes dissipées dans chacun des conducteurs.

Comme $S'_0 = \frac{S_0}{N}$, on a :

$$\langle P'_J \rangle = N \left(K \frac{S_0^2}{N^2} \right) = \frac{\langle P_J \rangle}{N}$$

La puissance est divisée par N , d'où l'intérêt du feuilletage pour la réalisation des transformateurs.

On représente sur le schéma ci-contre quelques cylindres de surface S'_0 .



Exercice 14.6 : Cylindre, courants induits et ARQS

On place un cylindre conducteur d'axe Oz , de section $S_0 = \pi R^2$, de longueur L ($L \gg R$) et de conductivité γ dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On suppose que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place dans le cadre de l'ARQS et on néglige les effets de bord. On donne en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

1. Montrer que le champ électrique se met sous la forme $\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$.
2. On a vu dans l'exercice précédent que $\vec{E} = \frac{r \omega B_0 \sin(\omega t)}{2} \vec{u}_\theta$. Calculer par deux méthodes le champ magnétique induit. On admet que le champ magnétique induit est nul pour $r = R$.
3. Donner une condition pour que le champ magnétique induit soit négligeable devant B_0 .

Analyse du problème

Cet exercice est la suite de l'exercice précédent. L'étude des symétries est assez délicate car le dispositif créant le champ extérieur n'est pas précisé dans l'énoncé et la cause du champ électrique est un courant dépendant du temps.



1. Le champ extérieur est $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. L'énoncé ne précise pas le dispositif qui crée le champ magnétique extérieur. Il peut être créé par exemple par un solénoïde infini parcouru par un courant $I(t)$ d'axe Oz . Le champ magnétique créé par le solénoïde est alors :

$$\vec{B} = \mu_0 n I(t) \vec{u}_z$$

On peut l'identifier au champ :

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Comme le champ magnétique dépend du temps, il va créer un champ électrique.

Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie du courant $I(t)$ donc $\vec{E}(M) \in P$.

Le plan $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie du courant $I(t)$ donc $\vec{E}(M) \perp Q$.

La distribution de courants circulant dans le solénoïde est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz . Les coordonnées de \vec{E} ne dépendent pas de r et de θ .

Bilan : $\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$.

Remarque : on vérifie que \vec{B} est colinéaire à \vec{u}_z puisque $\vec{B}(M) \perp P$.

On a vu dans l'exercice précédent comment calculer le champ électrique par deux méthodes.

Cours : Approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques (ARQS)

L'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques consiste à négliger les phénomènes de propagation : il faut étudier les phénomènes physiques à des distances des sources très inférieures à la longueur d'onde dans la vide.

On peut montrer que les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

On peut donc appliquer le théorème de Gauss et le théorème d'Ampère.

On a les mêmes équations qu'en régime indépendant du temps sauf pour le champ électrique :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{E} &= -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

Le champ électrique n'est pas à circulation conservative contrairement à ce qui se passe en régime stationnaire (voir chapitre sur l'induction).



2. On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique. Le champ électrique crée un courant de conduction, noté \vec{j}_{induit} :

$$\vec{j}_{\text{induit}} = \gamma \vec{E} = \gamma E(r) \vec{u}_\theta$$

Tout se passe comme si on avait des spires d'axe Oz parcourues par un courant.

- Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ source du champ magnétique induit \vec{B}_i est un plan de symétrie, donc $\vec{B}_i(M) \perp P$ et $\vec{B}_i(M) // \vec{u}_z$.
- La distribution de courants source de \vec{B}_i est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz .
- Bilan : $\vec{B}_i = B_i(r) \vec{u}_z$.

Il y a deux méthodes pour calculer le champ magnétique induit \vec{B}_i :



Dans le cadre de l'ARQS, le calcul du champ magnétique induit se fait à partir de l'équation de Maxwell-Ampère : $\text{rot } \vec{B}_i = \mu_0 \vec{j}_{\text{induit}}$.



Méthode 1 :

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit : $\text{rot } \vec{B}_i = \mu_0 \vec{j}_{\text{induit}} = \mu_0 \gamma \vec{E}$.

On a donc : $-\frac{\partial B_{iz}}{\partial r} = \mu_0 \gamma \frac{B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t)$.

Comme le champ B_i ne dépend que de r , on peut séparer les variables :

$$dB_i = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t) dr$$

L'intégration donne : $B_i = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 r^2 \omega}{4} \sin(\omega t) + C_1$.

On admet que : $B_i(r = R) = 0$. On a donc :

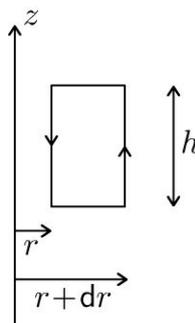
$$B_i(r = R) = 0 = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 R^2 \omega}{4} \sin(\omega t) + C_1$$

On en déduit que :

$$B_i(r) = -\mu_0 \gamma \frac{B_0 (r^2 - R^2) \omega}{4} \sin(\omega t)$$

Méthode 2 :

On applique le théorème d'Ampère à un rectangle de largeur dr et de hauteur h .



$$B_i(r + dr) h - B_i(r) h = - \iint_S \mu_0 \vec{j}_{\text{induit}} \cdot \vec{dS} = -\mu_0 \gamma E dr h$$

car dr est un infiniment petit.

On a donc :

$$\frac{dB_i}{dr} dr = -\mu_0 \gamma E dr$$

D'où :

$$dB_i = -\mu_0 \gamma \frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) dr$$

On retrouve le même calcul qu'avec la méthode 1.

3. Pour que le module de \vec{B}_i reste inférieur à B_0 , il faut que $\mu_0 \gamma \omega \frac{B_0 R^2}{4} \ll B_0$ puisque le champ magnétique induit est maximal pour $r = 0$. On doit avoir :

$$R \ll \frac{2}{\sqrt{\mu_0 \gamma \omega}}$$

On a vu dans l'exercice sur l'effet de peau que l'épaisseur de peau est

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

On doit donc avoir :

$$R \ll \sqrt{2} \delta$$

Exercice 14.7 : Calculs d'inductance propre

1. On considère un solénoïde long sans effets de bord constitué de N spires de même rayon R , de même axe Oz , réparties régulièrement le long du cylindre de longueur ℓ . Déterminer son inductance propre. En déduire l'énergie magnétique du solénoïde.

2. Une bobine torique est constituée de N spires jointives enroulées sur un tore, de section rectangulaire, de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , de hauteur h . On suppose que $N \gg 1$. Déterminer son inductance propre.

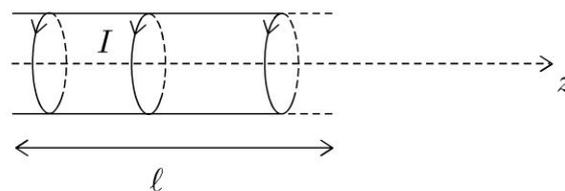
Analyse du problème

Il faut calculer le champ magnétostatique créé par la distribution de courant et calculer le flux du champ magnétique à travers les N spires. On en déduit alors l'inductance propre.



1. D'après le cours, le champ magnétostatique créé par un solénoïde infini est nul à l'extérieur et vaut $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$ à l'intérieur.

On définit $n = \frac{N}{\ell}$ le nombre de spires par mètre.



Le flux du champ propre à travers une spire est :

$$\Phi_{\text{spire}} = (\mu_0 n I \vec{u}_z) \cdot (\pi R^2 \vec{u}_z) = \mu_0 n I \pi R^2$$

en orientant la spire dans le sens du courant.

Le flux propre à travers toutes les spires du solénoïde de longueur ℓ est donc :

$$\Phi_P = N (\mu_0 n I \pi R^2) = n \ell (\mu_0 n I \pi R^2) = (\mu_0 n^2 \ell \pi R^2) I$$

L'inductance propre est définie par la relation :

$$\Phi_P = L I$$

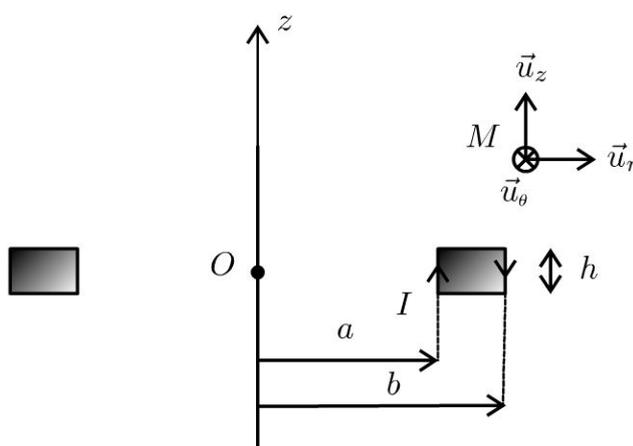
L'inductance propre du solénoïde est donc :

$$L = \mu_0 n^2 \ell \pi R^2 = \mu_0 N^2 \frac{\pi R^2}{\ell}$$

L'énergie magnétique du solénoïde est :

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \ell \pi R^2 I^2$$

2.



Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des sources du champ, donc $\vec{B}(M) \perp P$, c'est-à-dire $\vec{B}(M) // \vec{u}_\theta$.

La distribution est invariante par rotation d'angle θ , donc \vec{B} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ .

D'où :

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta$$

On applique le théorème d'Ampère à un cercle orienté dans le sens trigonométrique d'axe Oz , de rayon r passant par M :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

- Si M est à l'intérieur du tore : $I_{\text{enlacé}} = NI$ en appliquant la règle de la main droite. On en déduit :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- Si M est à l'extérieur du tore : $I_{\text{enlacé}} = 0$. On a donc :

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

Le flux du champ propre à travers une spire est :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{spire}} &= \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot dr dz \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \int_{r=a}^b \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

en orientant la spire dans le sens du courant.

Le flux à travers les N spires de la bobine torique vaut :

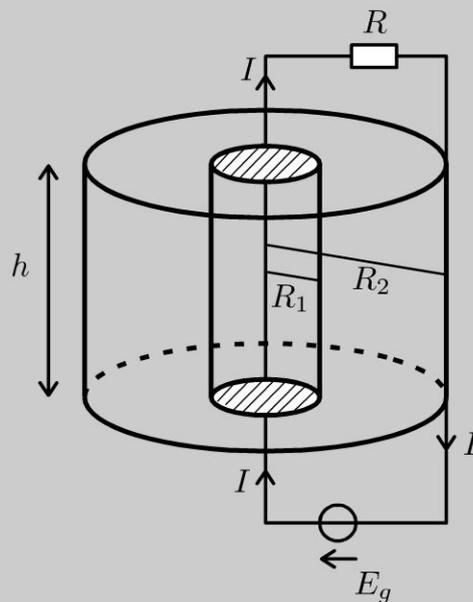
$$\Phi_P = N\Phi_{\text{spire}} = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Ce flux est appelé flux propre. On peut l'identifier à $\Phi_P = LI$.
On en déduit l'inductance propre de la bobine torique :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Exercice 14.8 : Énergie magnétique du câble coaxial

On considère un câble coaxial formé d'un conducteur cylindrique plein, de rayon R_1 , de longueur h , d'axe Oz , entouré d'un conducteur cylindrique creux, de rayon intérieur R_2 et d'épaisseur e . Le conducteur intérieur est parcouru par un courant volumique uniforme $\vec{j}_1 = j_1 \vec{u}_z$ et le conducteur extérieur est parcouru par un courant volumique uniforme $\vec{j}_2 = j_2 \vec{u}_z$. On note I l'intensité du courant électrique permanent dans le conducteur intérieur. On néglige les effets de bord et la part de l'énergie magnétique emmagasinée dans l'âme (région $r < R_1$) et celle localisée dans la gaine (région $R_2 < r < R_2 + e$) du câble coaxial.



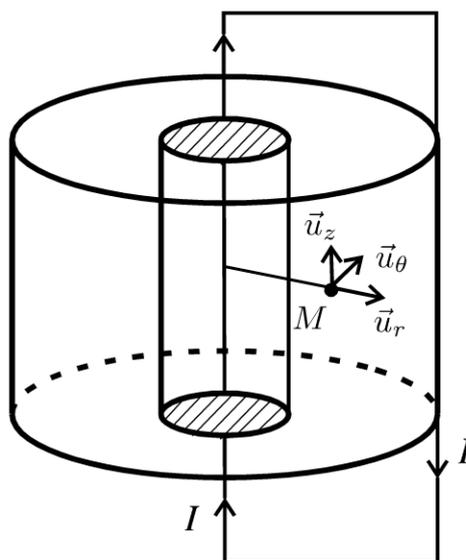
1. Déterminer le champ magnétique en tout point $M(r, \theta, z)$ de l'espace en fonction de I, R_1, R_2, e et r .
2. Déterminer l'énergie magnétique emmagasinée et en déduire l'inductance propre du câble coaxial en fonction de h, R_1, R_2 et e .

Analyse du problème

On utilise les symétries et invariances pour déterminer la structure du champ magnétique. Le théorème d'Ampère permet de calculer le champ magnétique dans tout l'espace. Le calcul de l'énergie magnétique permet d'en déduire l'inductance propre du câble coaxial.



1.



- Le plan $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courants qui est la source du champ magnétique, $\vec{B} \perp P$, donc $\vec{B} // \vec{u}_\theta$.
- La distribution est invariante par rotation d'angle θ , et par translation suivant \vec{u}_z (on néglige les effets de bord), donc les coordonnées de \vec{B} ne dépendent pas de θ et de z .

On obtient finalement :

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$$

On a des courants volumiques de densité uniforme. D'après les orientations, on a :

$$I = j_1 \pi R_1^2 \text{ et } -I = j_2 \pi ((R_2 + e)^2 - R_2^2)$$

On applique le théorème d'Ampère à un cercle passant par M de rayon r orienté suivant \vec{u}_θ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = B(r) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

- Si $r < R_1$: $B(r) 2\pi r = \mu_0 j_1 \pi r^2$, donc

$$B(r) = \frac{\mu_0 j_1 r}{2} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

- Si $R_1 \leq r \leq R_2$: $B(r) 2\pi r = \mu_0 j_1 \pi R_1^2 = \mu_0 I$, donc

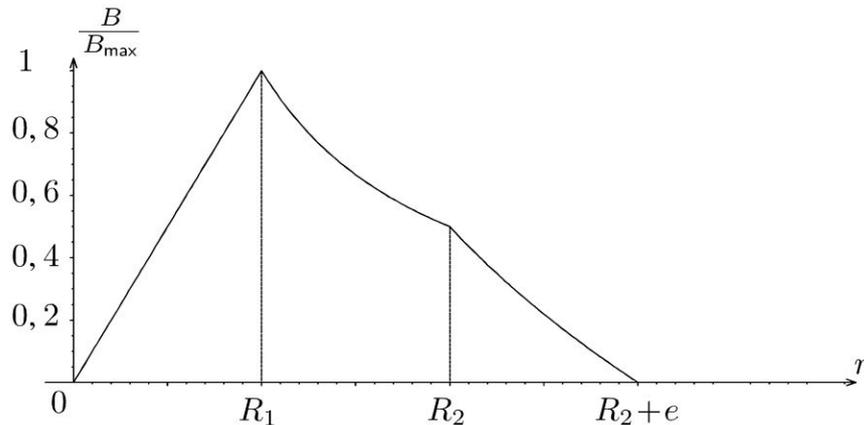
$$B(r) = \frac{\mu_0 j_1 R_1^2}{2r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- Si $R_2 < r < R_2 + e$: $B(r) 2\pi r = \mu_0 (I + j_2 \pi (r^2 - R_2^2))$, donc

$$B(r) = \frac{\mu_0 (I + j_2 \pi (r^2 - R_2^2))}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I (r^2 - R_2^2)}{2r\pi ((R_2 + e)^2 - R_2^2)}$$

- Si $r > R_2 + e$: $B(r) 2\pi r = \mu_0 (I + j_2 \pi R_2^2) = \mu_0 (I - I) = 0$, donc

$$B(r) = 0$$



On n'observe pas de discontinuité à la traversée des cylindres car on a des distributions volumiques de courants.

2. La densité volumique d'énergie magnétique est :

$$u_{em} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

L'énergie magnétique W_m emmagasinée par le câble coaxial est :

$$W_m = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

D'après l'énoncé, on néglige la part de l'énergie magnétique emmagasinée dans l'âme et dans la gaine. On a donc :

$$W_m = \iiint_{\substack{R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq z \leq h}} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2} \frac{1}{2\mu_0} (dr) (r d\theta) (dz) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) I^2$$

L'inductance propre L du câble coaxial est définie par :

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

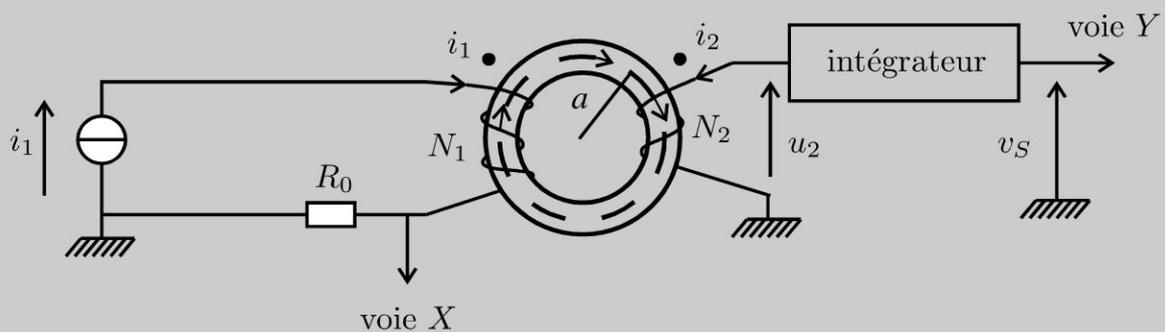
On en déduit :

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

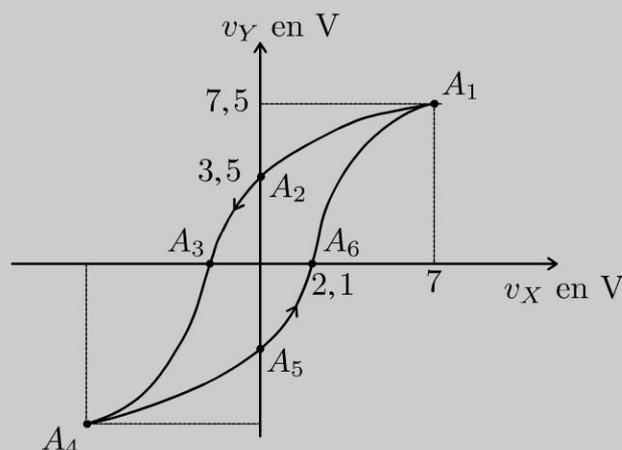
Milieux ferromagnétiques

Exercice 15.1 : Cycle d'Hystérésis

On désire tracer expérimentalement le cycle d'Hystérésis $B = f(H)$ d'un matériau se présentant sous la forme d'un tore sur lequel sont bobinés deux enroulements. L'enroulement primaire contient N_1 spires et l'enroulement secondaire contient N_2 spires. On note a son rayon moyen et S sa section. Dans les conditions expérimentales, $N_2 i_2 \ll N_1 i_1$. On ne tiendra pas compte de la résistance des enroulements. H et B sont supposés uniformes dans le tore. On donne $R_0 = 1,0 \text{ k}\Omega$.



- Déterminer la relation entre H et i_1 . Montrer que la tension v_X sur la voie X peut se mettre sous la forme : $v_X = K_1 H$. Déterminer K_1 .
- Proposer un montage avec des amplificateurs linéaires intégrés permettant d'avoir $i_2 = 0$ et de réaliser la fonction intégration. On suppose qu'à $t = 0$, $v_Y = 0$ et $B = 0$. Montrer que la tension v_Y sur la voie Y peut se mettre sous la forme : $v_Y = K_2 B$. Déterminer K_2 .
- On observe sur l'oscilloscope la courbe suivante :



Le point A_1 correspond au champ magnétique à saturation. Interpréter la courbe et les deux points A_2 et A_6 . Que représente la surface du cycle ? Les composants donnent $K_1 = 0,03$ S.I. et $K_2 = 5,0$ S.I.

Déterminer les valeurs numériques des points.

4. Déterminer la puissance moyenne fournie par le circuit primaire au matériau ferromagnétique. Interpréter avec l'aire du cycle d'hystérésis.

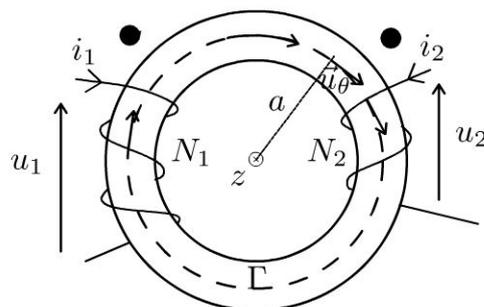
5. La ferrite présente un cycle de surface inférieure à celle du fer ainsi qu'un champ rémanent plus faible. Quel est parmi ces deux matériaux celui qui est le mieux adapté à la réalisation : d'un transformateur ? d'un aimant permanent ?

Analyse du problème

Cet exercice permet de tracer expérimentalement le cycle d'hystérésis d'un matériau magnétique. C'est un exercice d'induction. On travaille donc sur le schéma électrique équivalent en rajoutant les forces électromotrices d'induction en convention générateur. Le bilan énergétique permet d'interpréter les pertes fer.



1. On utilise les coordonnées cylindriques.



Orientation du circuit magnétique

Dans le cas d'un matériau de grande perméabilité, il y a canalisation des lignes de champ. On suppose d'après l'énoncé que l'excitation magnétique H est uniforme dans le tore. \vec{H} est donc de la forme :

$$\vec{H} = H\vec{u}_\theta$$

On applique le théorème d'Ampère au contour d'Ampère Γ (cercle orienté dans le sens horaire) :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H2\pi r = I_{\text{enlacé}} = N_1 i_1 + N_2 i_2$$



Attention aux signes pour la circulation de l'excitation magnétique. On applique la règle de la main droite pour déterminer le signe du courant enlacé.

- Loi des noeuds en termes de potentiels en A :

$$\frac{u_3 - v_A}{R} - i = 0$$

Il faut relier l'intensité i à la tension de sortie v_Y . Soit q la charge du condensateur. On a $i = \frac{dq}{dt}$ et $q = C(v_A - v_Y)$.

- Amplificateur linéaire intégré idéal en régime linéaire. Aucun courant ne rentre dans les entrées (+) et (-) et $\varepsilon = 0 - v_A = 0$.

On a donc :

$$\frac{u_3}{R} + C \frac{dv_Y}{dt} = 0$$

On obtient finalement :

$$v_Y(t) - v_Y(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_3(t') dt'$$

On a donc un montage intégrateur. L'AO doit rester en régime linéaire pour fonctionner en intégrateur.

Relation entre v_S et le champ magnétique :

La tension de sortie est donnée par :

$$v_Y(t) - v_Y(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t N_2 S \frac{dB}{dt} dt = -\frac{N_2 S}{RC} (B(t) - B(0))$$

Pour $t = 0$, $v_Y = 0$ et $B = 0$. On a donc :

$$v_Y = -\frac{N_2 S}{RC} B(t)$$

On a alors : $v_Y = K_2 B$ avec

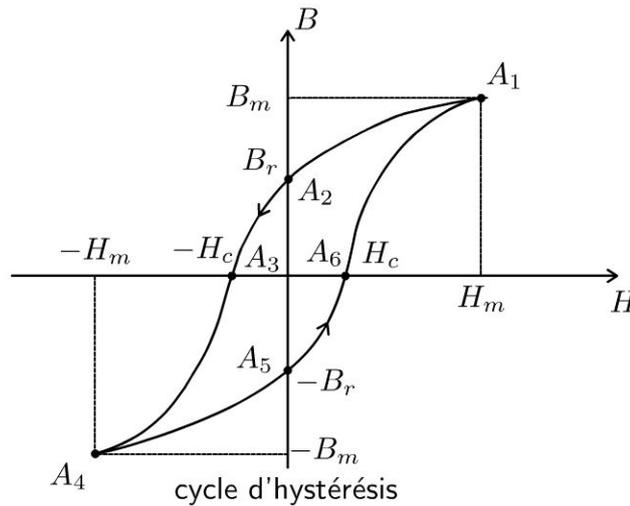
$$K_2 = -\frac{N_2 S}{RC}$$

On peut donc observer sur l'oscilloscope v_Y en fonction de v_X , c'est-à-dire B en fonction de H .

3. On observe un cycle d'hystérésis : l'aimantation et la désaimantation ne sont pas des opérations inverses l'une de l'autre.

L'excitation coercitive H_c (point A_6) est la valeur de H qui annule le champ magnétique.

Quand l'excitation magnétique est nulle (point A_2), le champ magnétique n'est pas nul. On appelle B_r le champ magnétique rémanent.



Le point A_6 correspond à l'excitation coercitive. Comme $v_X = 2,1\text{ V}$, on a :

$$H_c = \frac{2,1}{0,03} = 70 \text{ A.m}^{-1}$$

Le point A_2 correspond au champ magnétique rémanent. Comme $v_Y = 3,5\text{ V}$, on a :

$$B_r = \frac{3,5}{5} = 0,7 \text{ T}$$

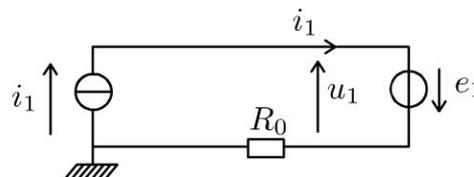
Comme $v_Y = 7,5\text{ V}$, on a :

$$B_m = \frac{7,5}{5} = 1,5 \text{ T}$$

L'excitation magnétique à saturation est :

$$H_m = \frac{7}{0,03} = 233 \text{ A.m}^{-1}$$

4. Le schéma équivalent à l'entrée est le suivant :



La puissance fournie par le circuit primaire au matériau ferromagnétique est : $P_1 = u_1 i_1 = -e_1 i_1$ car la force d'électromotrice d'induction est orientée en convention générateur. La fem e_1 vaut : $e_1 = -N_1 S \frac{dB}{dt}$.

On a donc : $P_1 = i_1 N_1 S \frac{dB}{dt}$. On a vu que $H = \frac{N_1 i_1}{2\pi a}$. On en déduit :

$$P_1 = \frac{2\pi a}{N_1} H N_1 S \frac{dB}{dt} = 2\pi a S H \frac{dB}{dt}$$

On appelle V le volume du matériau ferromagnétique. La puissance moyenne dissipée est donc :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T P_1 dt = \frac{1}{T} V \int_0^T H dB$$

La puissance moyenne est donc proportionnelle à l'aire du cycle d'hystérésis H en fonction de B . Elle est évacuée sous forme de chaleur dans le matériau.

$\int_0^T H dB = \oint H dB$ représente l'énergie dissipée par unité de volume pendant un cycle dans le matériau ferromagnétique.

Ces pertes sont appelées pertes fer. Elles correspondent à la puissance dissipée par hystérésis et par courants de Foucault (si le matériau est conducteur).

5.

- Pour réaliser un transformateur, il faut avoir une surface de cycle faible (pertes par hystérésis faibles et donc pertes fer faibles) et un faible champ rémanent. On prendra un matériau ferromagnétique doux, par exemple les ferrites doux.

Remarque : Pour négliger les pertes par courant de Foucault, on prendra une carcasse feuilletée (voir exercice « Courants de Foucault dans un cylindre »).



- Pour réaliser un aimant permanent, on souhaite avoir un matériau avec une excitation coercitive élevée. L'aimantation rémanente est difficile à supprimer. On prendra un matériau ferromagnétique dur, par exemple le fer.

Partie 5

Conversion de puissance

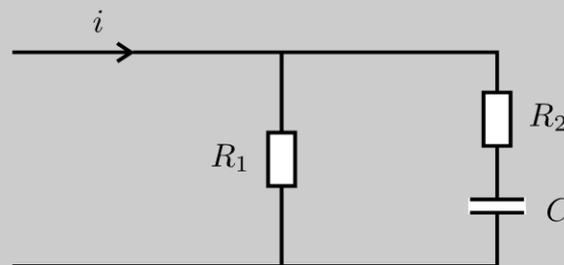
Plan

16. Puissance électrique en régime sinusoïdal	181
16.1 : Puissance moyenne consommée par un dipôle	181
16.2 : Relèvement du facteur de puissance	182
16.3 : Transfert maximal de puissance d'un générateur vers une impédance	186
17. Transformateur	189
17.1 : Transformation torique	189
18. Conversion électro-magnéto-mécanique	193
18.1 : Contacteur électromagnétique en translation	193
19. Machine synchrone	197
19.1 : Première approche du moteur synchrone	197
19.2 : Moteur synchrone et couple électromagnétique	200
19.3 : Moteur synchrone et bilan de puissance	206
20. Machine à courant continu	212
20.1 : Première approche de la machine à courant continu	212
20.2 : Machine à courant continu	215
21. Conversion électronique statique	220
21.1 : Hacheur à stockage inductif	220
21.2 : Hacheur à stockage capacitif	224
21.3 : Redressement avec un pont de diodes	228

Puissance électrique en régime sinusoïdal

Exercice 16.1 : Puissance moyenne consommée par un dipôle

On considère le montage suivant. La puissance moyenne consommée par le dipôle vaut 500 W.



On donne : $R_1 = 5,0 \Omega$; $R_2 = 4,0 \Omega$; $\frac{1}{C\omega} = 4,0 \Omega$

1. Calculer la valeur efficace de i .
2. Calculer la valeur de la puissance moyenne dissipée dans chacune des résistances.

Analyse du problème

L'utilisation de l'impédance complexe permet de calculer facilement la puissance moyenne consommée par un dipôle. Une bobine et un condensateur ne consomment pas de puissance moyenne en régime sinusoïdal forcé.



1. L'admittance équivalente du dipôle vaut :

$$\underline{Y} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4 - 4j} = \frac{9 - 4j}{5(4 - 4j)}$$

On en déduit que $\underline{Z} = 2,68 - 1,03j$.

La puissance moyenne consommée dans le dipôle vaut : $P = \text{Re}(\underline{Z}) I^2$ en notant I la valeur efficace de i .

D'où :

$$I = \sqrt{\frac{P}{\text{Re}(\underline{Z})}} = \sqrt{\frac{500}{2,68}} = 13,66 \text{ A}$$

2. Calcul de P_1 : La puissance moyenne consommée dans la résistance R_1 est : $P_1 = R_1 I_1^2 = \frac{U^2}{R_1}$. Or $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$. En prenant le module au carré et en divisant par 2, on en déduit une relation entre les grandeurs efficaces :

$$U^2 = |\underline{Z}|^2 I^2$$

Finalement, on a :

$$P_1 = \frac{|\underline{Z}|^2 I^2}{R_1} = 308 \text{ W}$$

Calcul de P_2 : La puissance moyenne consommée dans la résistance R_2 se calcule de la même façon : $P_2 = R_2 I_2^2$.

Pour calculer I_2 , il faut passer par les amplitudes complexes. On reconnaît un diviseur de courant. D'où :

$$\underline{I}_2 = \underline{I} \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}}$$

On en déduit :

$$I_2 = I \frac{R_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\frac{1}{C_2\omega}\right)^2}} = 6,9 \text{ A}$$

Finalement, on obtient :

$$P_2 = 192 \text{ W}$$

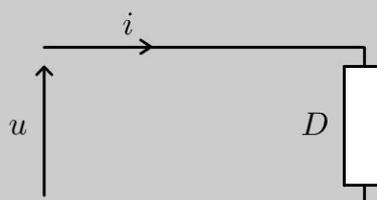
Vérification :

$$P_1 + P_2 = 308 + 192 = 500 \text{ W}.$$

Le résultat est cohérent puisque le condensateur ne consomme pas de puissance électrocinétique en moyenne. La puissance moyenne consommée par un dipôle linéaire en régime sinusoïdal forcé est la somme des puissances moyennes consommées par chacun des éléments constituant le dipôle.

Exercice 16.2 : Relèvement du facteur de puissance

On modélise une installation électrique par un dipôle inductif D d'impédance $\underline{Z} = R + jL\omega$. Le dipôle consomme une puissance moyenne $P = 4,6 \text{ kW}$. On considère le montage suivant :



$$i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \phi) ; I = 30 \text{ A}$$

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t) ; U = 220 \text{ V} ; f = 50 \text{ Hz.}$$

1. Calculer R et L .
2. Calculer la capacité à placer en parallèle sur l'installation pour relever le facteur de puissance à 1.
3. Calculer la capacité à placer en parallèle sur l'installation pour relever le facteur de puissance à 0,9. Que vaut alors le courant appelé par l'installation ?

Analyse du problème

Le relèvement du facteur de puissance permet de diminuer les pertes en ligne. L'utilisation du diagramme de Fresnel permet d'en déduire facilement les déphasages et la capacité à rajouter.



1. La puissance moyenne consommée par le dipôle est : $P = \operatorname{Re}(\underline{Z}) I^2$.
On en déduit que :

$$R = \frac{P}{I^2} = 5,11 \Omega$$

L'intensité et la tension se mettent sous la forme :

$$i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \phi) ; u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t).$$

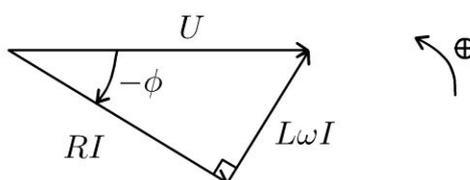
En amplitude complexe, on a : $\underline{I} = I\sqrt{2} \exp(-j\phi)$ et $\underline{U} = U\sqrt{2}$.
On en déduit que :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} \exp(j\phi)$$

On a plusieurs méthodes pour calculer ϕ le déphasage entre la tension et l'intensité :

Première méthode : Utilisation du diagramme de Fresnel en tension
L'impédance est $\underline{Z} = R + jL\omega$. On a donc : $\underline{U} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I}$.
La tension est en avance sur l'intensité puisque le circuit est inductif.
On a donc : $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$.

On représente le diagramme de Fresnel à $t = 0$ avec les valeurs efficaces des grandeurs sinusoïdales.



- Détermination du déphasage : $\cos \phi = \frac{RI}{U}$, d'où :

$$\phi = \text{Arccos} \left(\frac{RI}{U} \right) = 0,80 \text{ rad}$$

- Détermination de l'inductance : $\tan \phi = \frac{L\omega}{R}$, d'où

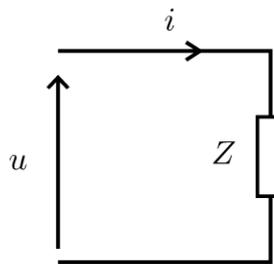
$$L = \frac{R \tan \phi}{\omega} = 1,67 \times 10^{-2} \text{ H}$$

Deuxième méthode : Utilisation de la puissance moyenne

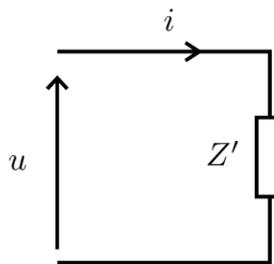
$$P = U I \cos (\phi), \text{ d'où } \cos (\phi) = \frac{4600}{220 \times 30} = 0,697.$$

Comme le circuit est inductif, $\arg (\underline{Z}) > 0$. On retrouve bien : $\phi = 0,80 \text{ rad}$.

2. On veut remplacer le dipôle d'impédance $\underline{Z} = Z \exp (j\phi)$

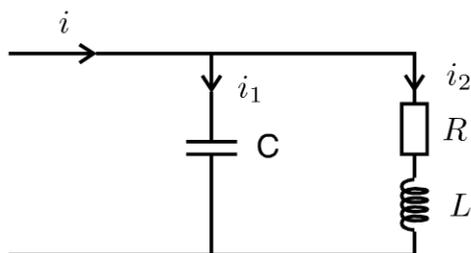


par le dipôle suivant d'impédance $\underline{Z}' = Z' \exp (j\phi')$ et d'admittance $\underline{Y}' = Y' \exp (-j\phi')$:



pour avoir $\cos \phi' = 1$, soit $\phi' = 0$.

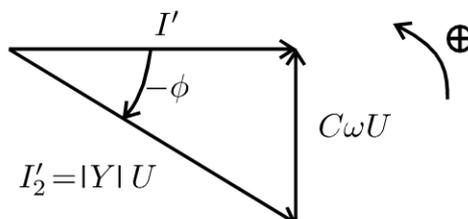
Le montage avec le condensateur en parallèle devient :



La loi des noeuds s'écrit : $\underline{I}' = \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2$, soit :

$$\underline{I}' = jC\omega\underline{U} + \underline{YU}$$

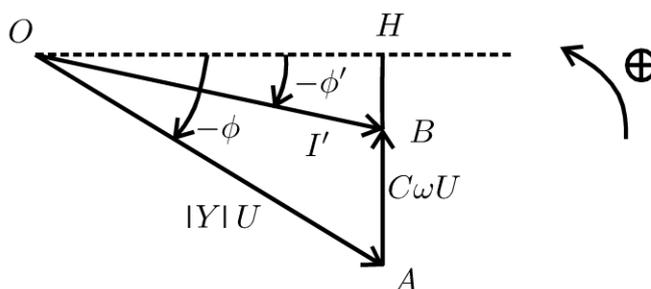
On représente le diagramme de Fresnel en intensité à $t = 0$ avec les valeurs efficaces des grandeurs sinusoïdales.



Pour avoir $\phi' = 0$, on doit avoir $\sin \phi = \frac{C\omega}{|Y|} = C\omega\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$, d'où :

$$C = \frac{\sin \phi}{\omega\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = 311 \mu\text{F}$$

3.



Dans le triangle OHA : $OH = |Y|U \cos \phi$ et $HA = |Y|U \sin \phi$.

Dans le triangle OHB : $HB = OH \tan \phi' = |Y|U \cos \phi \tan \phi'$

On en déduit le segment

$$AB = HA - HB = |Y|U \sin \phi - |Y|U \cos \phi \tan \phi' = C\omega U.$$

On obtient finalement :

$$C = \frac{|Y|U \sin \phi - |Y|U \cos \phi \tan \phi'}{\omega} = 165 \mu\text{F}$$

On visualise dans le diagramme de Fresnel l'effet du condensateur.

- Si C augmente, alors ϕ' diminue et passe par 0 (voir question précédente).
- Si on continue à augmenter la capacité, alors ϕ' augmente et le facteur de puissance diminue. On n'a pas l'effet recherché.

Le fait de rajouter un condensateur en parallèle ne modifie pas U et P . Un condensateur ne consomme pas de puissance électrocinétique en moyenne.

On a donc : $P = U I' \cos \phi'$.

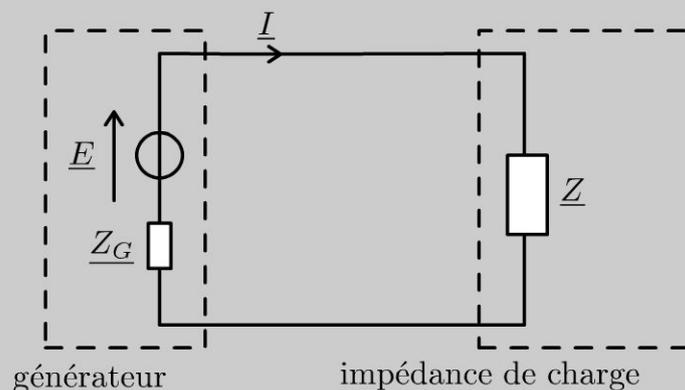
D'où

$$I' = \frac{P}{U \cos \phi'} = 23 \text{ A}$$

Pour une même puissance consommée et une même tension, le courant fourni par la centrale (par exemple EDF) est plus faible ($I' = 23 \text{ A}$ et $I = 30 \text{ A}$). On a donc des pertes par effet Joule moins importantes sur les lignes. L'utilisateur paye uniquement ce qu'il consomme, les pertes par effet Joule sur les lignes sont à la charge d'EDF qui impose aux utilisateurs d'avoir un facteur de puissance supérieur à 0,9.

Exercice 16.3 : Transfert maximal de puissance d'un générateur vers une impédance

On considère le circuit suivant où un générateur modélisé par le théorème de Thévenin alimente une impédance de charge. On pose $\underline{Z}_G = R_G + jX_G$ et $\underline{Z} = R + jX$.



1. Quelle la condition sur l'impédance de charge pour que cette impédance reçoive le maximum de puissance du générateur ?
2. Déterminer la puissance moyenne reçue par l'impédance de charge lorsqu'elle est adaptée en puissance.

Analyse du problème

L'utilisation de l'impédance complexe permet de calculer facilement la puissance moyenne consommée par un dipôle. Une bobine et un condensateur ne consomment pas de puissance moyenne en régime sinusoïdal forcé.



1. La puissance moyenne reçue par l'impédance de charge est :

$$P_{\text{moy}} = \text{Re}(\underline{Z}) I^2 = RI^2$$

Pour calculer I , il faut utiliser l'amplitude complexe :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_G + \underline{Z}}$$

En prenant le module au carré et en divisant par 2 pour avoir le carré de la valeur efficace de l'intensité, on obtient :

$$I^2 = \frac{E_m^2}{2} \frac{1}{[(R_G + R)^2 + (X_G + X)^2]}$$

On obtient :

$$P_{\text{moy}} = \frac{E_m^2}{2} \frac{R}{[(R_G + R)^2 + (X_G + X)^2]}$$

On cherche la condition sur R et X pour que P_{moy} soit maximale. Il faut que les dérivées partielles de P_{moy} par rapport à R et X soient simultanément nulles :

$$\left(\frac{\partial P_{\text{moy}}}{\partial R} \right)_X = \frac{E_m^2}{2} \frac{[(R_G + R)^2 + (X_G + X)^2] - [2R(R_G + R)]}{[(R_G + R)^2 + (X_G + X)^2]^2} = 0$$

et

$$\left(\frac{\partial P_{\text{moy}}}{\partial X} \right)_R = \frac{E_m^2}{2} \frac{R(-2(X_G + X))}{[(R_G + R)^2 + (X_G + X)^2]^2} = 0$$

Pour vérifier la deuxième équation, il faut que :

$$X = -X_G$$

En remplaçant X par $(-X_G)$ dans la première dérivée partielle puisque les deux relations doivent être vérifiées simultanément, on a :

$$\left(\frac{\partial P_{\text{moy}}}{\partial R} \right)_X = \frac{E_m^2}{2} \frac{[(R_G + R)^2] - [2R(R_G + R)]}{(R_G + R)^4}$$

soit :

$$\left(\frac{\partial P_{\text{moy}}}{\partial R} \right)_X = \frac{E_m^2}{2} \frac{(R_G + R)(R_G + R - 2R)}{(X_G + X)^4} = 0$$

On doit donc avoir :

$$R = R_G$$

La charge est adaptée en puissance si les deux conditions sont vérifiées :

$$R = R_G \text{ et } X = -X_G$$

Soit :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_G^*$$

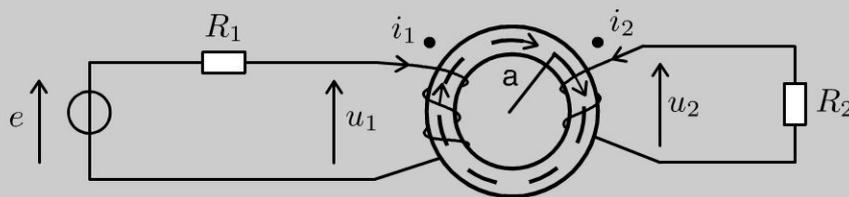
2. Lorsque l'impédance de charge est adaptée en puissance, la puissance moyenne reçue est :

$$P_{\text{moy}} = \frac{E_m^2}{8R_G}$$

Transformateur

Exercice 17.1 : Transformateur torique

Sur un tore magnétique, on dispose deux enroulements. Le primaire est constitué de N_1 spires, et relié à un générateur de force électromotrice $e(t)$ par l'intermédiaire d'une résistance R_1 . Le secondaire comprend N_2 spires, il est branché sur une résistance R_2 . Les résistances des enroulements sont nulles. Le tore est constitué d'un matériau de perméabilité $\mu = \mu_0\mu_r$ (μ_r très grand devant l'unité). Sa section est notée S . Son rayon a est grand devant le rayon b de la section S . On néglige les variations du champ magnétique à l'intérieur du tore. On le prend de la forme : $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$.



1. Déterminer le champ magnétique dans le tore. Définir les bornes homologues.
2. Établir les expressions des flux Φ_1 et Φ_2 , traversant respectivement le primaire et le secondaire.
3. Déterminer le coefficient de mutuelle inductance M existant entre les deux circuits, ainsi que leurs inductances propres respectives L_1 et L_2 , en fonction de

$L_0 = \frac{\mu_0\mu_r S}{2\pi a}$. Quelle relation existe entre M , L_1 et L_2 ?

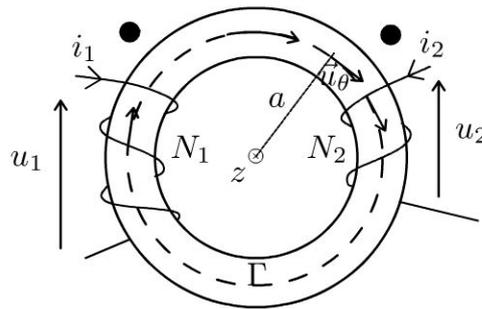
4. On étudie le cas où $e(t)$ est un échelon défini par : $e(t) = 0$ pour $t < 0$; $e(t) = E$ pour $t > 0$. Établir les équations différentielles liant i_2 et e d'une part, i_1 et e d'autre part.
5. Pour $t < 0$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont nuls. Quelles grandeurs physiques restent continues en $t = 0$? En déduire une relation entre $i_1(0^+)$ et $i_2(0^+)$.

Analyse du problème

Cet exercice traite d'un transformateur torique. Il faut faire attention aux signes lors de l'application du théorème d'Ampère. C'est un problème d'induction puisqu'on a une variation du flux magnétique. Il faut donc rajouter les fem d'induction en convention générateur dans le circuit électrique équivalent.



1. On utilise les coordonnées cylindriques.



Orientation du circuit magnétique

On applique le théorème d'Ampère au contour d'Ampère Γ (cercle orienté dans le sens horaire) :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r = \mu I_{\text{enlacé}} = \mu (N_1 i_1 + N_2 i_2)$$



Attention aux signes pour la circulation du champ magnétique. On applique la règle de la main droite pour déterminer le signe du courant enlacé.



On a donc :

$$\vec{B} = \frac{\mu}{2\pi r} (N_1 i_1 + N_2 i_2) \vec{u}_\theta \approx \frac{\mu}{2\pi a} (N_1 i_1 + N_2 i_2) \vec{u}_\theta$$

Définition des bornes homologues : Des courants entrant par les bornes homologues créent des champs magnétiques de même sens dans le circuit. Les bornes homologues sont représentées sur le schéma ci-dessus.

2. Le flux à travers une spire orientée est :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS$$

puisque le champ magnétique ne dépend pas de r .

Le flux qui traverse les N_1 spires orientées est :

$$\Phi_1 = N_1 (BS)$$

Le flux qui traverse les N_2 spires orientées est :

$$\Phi_2 = N_2 (BS)$$

On a donc :

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{\mu N_1^2 S}{2\pi a} i_1 + \frac{\mu N_1 N_2 S}{2\pi a} i_2 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 = \frac{\mu N_1 N_2 S}{2\pi a} i_1 + \frac{\mu N_2^2 S}{2\pi a} i_2 = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

3. On pose $L_0 = \frac{\mu S}{2\pi a}$. On a alors :

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_0 N_1^2 i_1 + L_0 N_1 N_2 i_2 \\ \Phi_2 = L_0 N_1 N_2 i_1 + L_0 N_2^2 i_2 \end{cases}$$

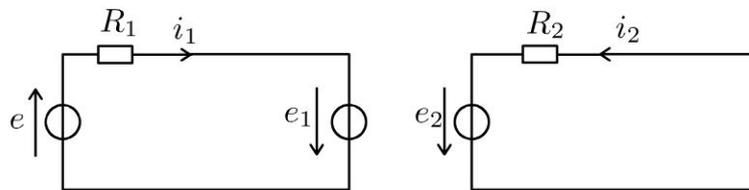
On a donc : $L_1 = L_0 N_1^2$ et $L_2 = L_0 N_2^2$.

On vérifie que $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Le couplage magnétique entre le primaire et le secondaire est parfait, toutes les lignes du champ magnétique créé par l'un des deux circuits traversent l'autre circuit :

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = L_0 N_1 N_2$$

4.



Il faut bien orienter les fem d'induction en convention générateur.



La loi des mailles permet d'écrire :

$$\begin{cases} e + e_1 = R_1 i_1 \\ e_2 = R_2 i_2 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} e = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & \text{équation (1)} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} & \text{équation (2)} \end{cases}$$

a) Pour lever le couplage, on dérive l'équation (1) et on utilise l'équation (2) pour éliminer i_1 .

L'équation (1) devient : $\frac{de}{dt} = R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2}$.

L'équation (2) s'écrit : $\frac{di_1}{dt} = \frac{-(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt})}{M}$.

On réinjecte dans (1) :

$$\frac{de}{dt} = -R_1 \frac{(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt})}{M} + L_1 \frac{-(R_2 \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2})}{M} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2}$$

D'où

$$\frac{de}{dt} = \frac{-R_1 R_2}{M} i_2 - \frac{R_1 L_2}{M} \frac{di_2}{dt} - \frac{R_2 L_1}{M} \frac{di_2}{dt} - \frac{L_1 L_2}{M} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2}$$

Or $M^2 = L_1 L_2$. On a donc :

On en déduit :

$$-\frac{de}{dt} = \frac{R_1 R_2}{M} i_2 + \frac{di_2}{dt} \frac{1}{M} (R_1 L_2 + R_2 L_1) \quad \text{équation (1')}$$

b) On dérive l'équation (2) et on utilise l'équation (1) pour éliminer i_2 .

$$\text{L'équation (2) devient : } 0 = R_2 \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M \frac{d^2 i_1}{dt^2}$$

$$\text{L'équation (1) s'écrit : } \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{M} \left(e - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} \right)$$

On réinjecte dans (2) :

$$0 = \frac{R_2}{M} \left(e - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} \right) + \frac{L_2}{M} \left(\frac{de}{dt} - R_1 \frac{di_1}{dt} - L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} \right) + M \frac{d^2 i_1}{dt^2}$$

D'où :

$$\frac{R_2}{M} e + \frac{L_2}{M} \frac{de}{dt} = \frac{R_1 R_2}{M} i_1 + \frac{R_2 L_1 + R_1 L_2}{M} \frac{di_1}{dt} \quad \text{équation (2')}$$

car $M^2 = L_1 L_2$.

On a vu que $L_1 = L_0 N_1^2$; $L_2 = L_0 N_2^2$ et $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Si $e(t) = E$, l'équation (1') s'écrit :

$$0 = \frac{R_1 R_2}{M} i_2 + \frac{di_2}{dt} \frac{L_0}{M} (R_1 N_2^2 + R_2 N_1^2), \text{ soit :}$$

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau} = 0$$

$$\text{avec } \tau = L_0 \frac{R_1 N_2^2 + R_2 N_1^2}{R_1 R_2}.$$

$$\text{L'équation (2') s'écrit alors : } \frac{R_2}{M} E = \frac{R_1 R_2}{M} i_1 + L_0 \frac{R_2 N_1^2 + R_1 N_2^2}{M} \frac{di_1}{dt}, \text{ soit :}$$

$$\tau \frac{di_1}{dt} + i_1 = \frac{E}{R_1}$$

5. On a rajouté une fem d'induction $e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}$ dans le circuit n° 1 et une

fem d'induction $e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$ dans le circuit n° 2. Φ_1 et Φ_2 ne peuvent pas varier de façon discontinue, sinon on aurait des fem e_1 et e_2 infinies.



Il est faux ici de dire que $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$. Il faut raisonner sur le flux et non pas sur les courants.



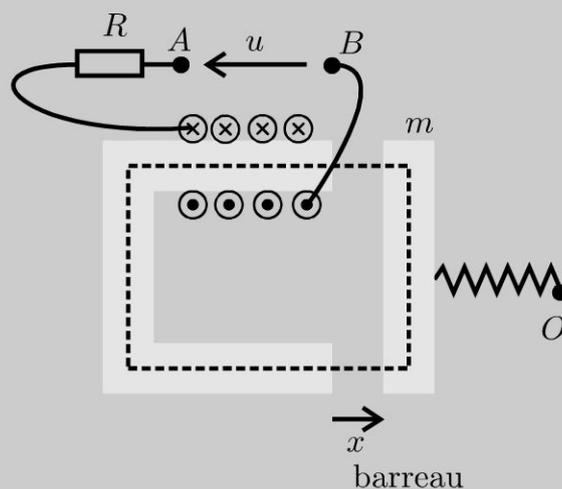
$\Phi_1(0^+) = \Phi_1(0^-) = 0$, donc $B(0) = 0$ et d'après le théorème d'Ampère :
 $N_1 i_1(0^+) + N_2 i_2(0^+) = 0$

Conversion électro-magnéto-mécanique

Exercice 18.1 : Contacteur électromagnétique en translation

On considère un noyau de fer doux immobile, en forme de U, de perméabilité $\mu_r \gg 1$. On dispose d'un enroulement de N spires relié à un générateur de force électromotrice u par l'intermédiaire d'une résistance R . Un ressort est fixé à un barreau de fer doux de perméabilité relative μ_r de masse m pouvant se déplacer sans frottement sur un axe horizontal. On définit S la section commune du noyau en U et du barreau. La forme des lignes de champ magnétique est représentée sur le schéma. On suppose le champ magnétique uniforme en tout point d'une section orthogonale aux lignes de champ.

On appelle ℓ_1 (respectivement ℓ_2) la longueur de la ligne de champ dans le noyau de fer doux (respectivement dans le barreau). On pose $\ell = \ell_1 + \ell_2$. On appelle x la distance entre le noyau de fer doux et le barreau. On suppose qu'il n'y a pas de flux de fuite.



1. Énoncer le théorème d'Ampère avec le vecteur excitation magnétique. Déterminer le champ magnétique le long de la ligne de champ. En déduire l'inductance propre en fonction de μ_0 , μ_r , N , S et x .
2. Déterminer l'énergie magnétique du système U_{em} .

3. On admet que la force électromagnétique que subit le barreau est $F = \left(\frac{\partial U_{em}}{\partial x} \right)_i$. Déterminer cette force. Est-elle attractive ou répulsive ? Pour quelle valeur de x , la norme de la force est-elle maximale ?
4. Expliquer le fonctionnement d'un contacteur électromagnétique. Quels sont les avantages et inconvénients ?

Analyse du problème

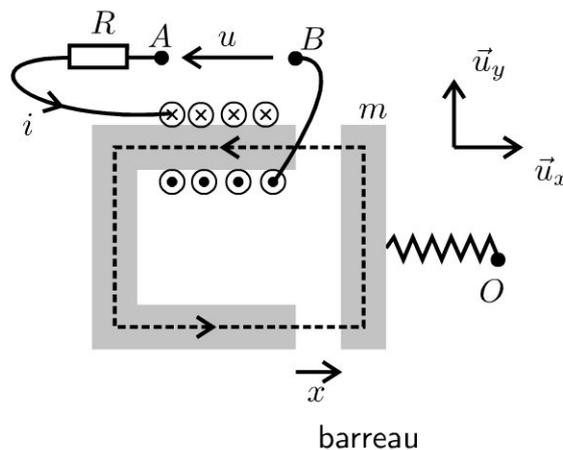
Le théorème d'Ampère permet de calculer le vecteur excitation magnétique. La force électromagnétique subie par le barreau se calcule à partir de l'énergie magnétique du système.



1. Le théorème d'Ampère avec le vecteur excitation magnétique s'écrit :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlacé}}$$

On oriente le contour d'Ampère et le champ magnétique dans le sens représenté sur le schéma. Dans le cas d'un matériau de grande perméabilité, il y a canalisation des lignes de champ. Celles-ci restent à l'intérieur du noyau magnétique et du barreau. Le champ magnétique étant à flux conservatif, le flux à travers les différentes sections du tube de champ se conserve. On suppose le champ magnétique uniforme en tout point d'une section orthogonale aux lignes de champ. Le flux à travers une section S est $\phi = BS$. Ce flux étant le même dans les différentes sections du tube de champ, on en déduit que \vec{B} est uniforme.



Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$H_{\text{noyau}} \ell_1 + H_{\text{air}} x + H_{\text{barreau}} \ell_2 + H_{\text{air}} x = Ni$$

Le champ magnétique est uniforme, donc $B_{\text{barreau}} = B_{\text{air}} = B_{\text{noyau}} = B$,

$$\text{soit } H_{\text{barreau}} = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}; H_{\text{noyau}} = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \text{ et } H_{\text{air}} = \frac{B}{\mu_0}.$$

On en déduit que $\frac{B}{\mu_0 \mu_r} \ell_1 + 2 \frac{B}{\mu_0} x + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \ell_2 = Ni$, soit :

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r Ni}{\ell + 2\mu_r x}$$

Le flux du champ magnétique à travers une spire est $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = BS$

(avec l'orientation du schéma).

Le flux du champ magnétique à travers les N spires est :

$$\Phi = N\phi = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 Si}{\ell + 2\mu_r x}$$

L'inductance propre est définie par $\Phi = Li$, soit :

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{\ell + 2\mu_r x}$$

2. L'énergie électromagnétique est :

$$U_{em} = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{\ell + 2\mu_r x} i^2$$

3. La force électromagnétique subie par le barreau est :

$$F = \left(\frac{\partial \frac{1}{2} Li^2}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{2} i^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{\ell + 2\mu_r x} \right) = - \frac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 Si^2}{(\ell + 2\mu_r x)^2}$$

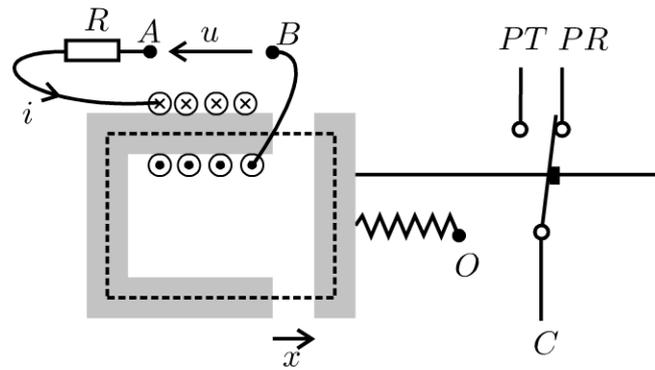
Cette force est toujours attractive. La norme de la force est maximale lorsque $x = 0$. Elle vaut :

$$|F_{\max}| = \frac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 Si^2}{\ell}$$

4.

- Lorsque la bobine est parcourue par aucun courant, le contact mobile relie les points PR et C (voir figure ci-après).
- Lorsqu'on alimente la bobine par un courant i , le barreau subit une force électromagnétique qui le rapproche du noyau de fer doux. Le déplacement du barreau entraîne le contact mobile qui passe de la position repos (PR) à la position travail (PT).

Sur le schéma, le contacteur possède un seul contact mobile. Il peut y en avoir plusieurs. Il n'y a pas forcément de bornes de sortie du contact repos.



Avantages : Il n'y a aucun point commun, même pas la masse, entre la partie commande (l'alimentation de la bobine) et la partie puissance (les contacts du contacteur). Cela assure une sécurité pour l'électronique de commande et pour l'utilisateur. Une bobine alimentée sous quelques volts peut commuter plusieurs centaines de watts.

Inconvénients : Le circuit de commande doit supporter d'importantes surtensions quand on cesse d'alimenter la bobine. Si le courant dans la bobine est coupé brutalement, il se produit aux bornes de la bobine une très brève surtension. On met souvent une diode de roue libre en parallèle de la bobine du relais pour éviter ce phénomène de surtension.

Machine synchrone

Exercice 19.1 : Première approche du moteur synchrone

Un aimant cylindrique allongé peut tourner autour de l'axe Δ passant par son centre et perpendiculaire à son moment magnétique \vec{M} . Il se trouve dans un champ magnétique, uniforme, à chaque instant, de module B constant, normal à Δ , tournant autour de cet axe à la vitesse angulaire constante ω_0 .

1. L'aimant étant immobile, quelle est la valeur moyenne du couple qui s'exerce sur lui ?

2. L'aimant étant maintenant lancé à la vitesse angulaire ω_0 , il s'établit un régime permanent où les vecteurs \vec{M} et \vec{B} font entre eux un angle α (positif si \vec{M} est en retard sur \vec{B}). Calculer le couple exercé sur l'aimant. Dans quel cas est-il moteur ? Dans le cas du fonctionnement moteur, le régime est stable si une petite augmentation du couple résistant entraîne une augmentation du couple moteur : dans quelles conditions le régime moteur est-il stable ? Calculer les valeurs maximales du couple et de la puissance.

3. Le régime stable étant établi, on introduit une variation temporelle du couple résistant qui se traduit par une augmentation de l'angle α ; on abandonne alors le moteur à lui-même, le couple résistant reprenant sa valeur initiale.

Déterminer la nature du mouvement ultérieur de l'aimant et l'expression de la période des variations de l'angle α que l'on exprimera en fonction de M , du moment d'inertie J de l'aimant et de la valeur initiale α_0 et α .

Analyse du problème

On a un circuit mobile placé dans un champ magnétique dépendant du temps. On a un phénomène d'induction avec apparition d'une forme électromotrice d'induction. Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz). On utilise la loi de Faraday pour calculer la fem d'induction.

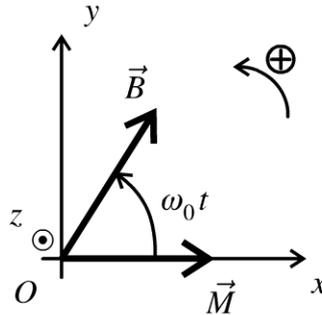


1. L'aimant est immobile. Le moment du couple s'exerçant sur l'aimant est :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = MB \sin(\omega_0 t) \vec{u}_z$$

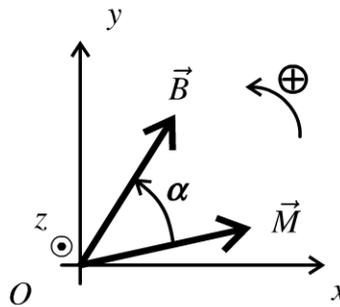
La valeur moyenne du moment du couple est :

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \vec{0}$$



La valeur moyenne du couple est nulle au démarrage. Le moteur synchrone ne peut donc pas démarrer tout seul.

2. L'aimant est maintenant lancé à la vitesse angulaire ω_0 .



Le moment du couple vaut : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = MB \sin \alpha \vec{u}_z$.

La projection du moment sur l'axe Oz est :

$$\Gamma_z = MB \sin \alpha$$

Le couple est moteur si $\Gamma > 0$, c'est-à-dire si :

$$0 < \alpha < \pi$$

Si le couple résistant augmente, l'aimant est freiné, donc α augmente.

Quel est l'effet d'une variation de α sur le couple ?

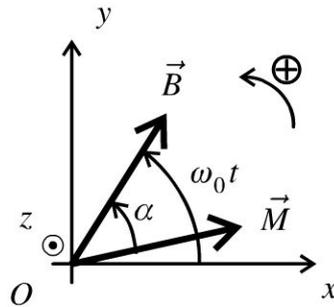
- Si $\cos \alpha > 0$, c'est-à-dire $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $d\Gamma_z > 0$. On a une augmentation du couple moteur ce qui a pour effet de diminuer l'angle α . L'équilibre est stable.
- Si $\cos \alpha < 0$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $d\Gamma_z < 0$. On a une diminution du couple moteur ce qui a tendance à augmenter encore plus l'angle α . L'équilibre est instable.

La valeur maximale du couple $\Gamma_z = MB \sin \alpha$ est obtenue pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$. On

a $\Gamma_{z \max} = MB$. La puissance maximale du couple est :

$$P_{\max} = \Gamma_{z \max} \omega_0 = MB \omega_0$$

3.



Avant la perturbation : l'angle α vaut α_0 . Le couple résistant vaut Γ_r , le couple moteur vaut Γ_0 . En régime permanent, on a :

$$\Gamma_0 + \Gamma_r = 0$$

On applique une perturbation : Le couple résistant prend sa valeur initiale Γ_r . On cherche l'équation différentielle donnant l'angle α . Comme l'équilibre est stable, il est astucieux de chercher l'écart par rapport à la position d'équilibre α_0 . On pose :

$$\alpha = \alpha_0 + d\alpha = \alpha_0 (1 + \varepsilon)$$

Remarque : $d\alpha$ est la variation de l'angle α . À quelle variation du couple $d\Gamma$ correspond $d\alpha$? Pour trouver la relation entre $d\Gamma$ et $d\alpha$, il est plus simple de trouver la relation entre Γ et α et de calculer la différentielle.



Comme $\Gamma = MB \sin \alpha$, la différentielle s'écrit :

$$d\Gamma = MB \cos \alpha d\alpha$$

Le nouveau couple moteur vaut :

$$\Gamma' = \Gamma_0 + d\Gamma = \Gamma_0 + MB \cos \alpha d\alpha$$

Il reste à écrire le théorème du moment cinétique pour le moteur :



$$L'angle (Ox, \vec{M}) = \omega_0 t - \alpha.$$



$$\begin{aligned} J \frac{d^2(\omega_0 t - \alpha)}{dt^2} &= -J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -J\alpha_0 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \Gamma_r + \Gamma' \\ &= \Gamma_r + \Gamma_0 + MB \cos \alpha d\alpha \end{aligned}$$

On a vu que $\Gamma_r + \Gamma_0 = 0$.

On fait un développement limité au premier ordre : $\cos \alpha d\alpha = \cos \alpha_0 d\alpha$ car les autres termes sont d'ordre supérieur à 1. On a donc :

$$-J\alpha_0 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = MB (\cos \alpha_0) \alpha_0 \varepsilon$$

On en déduit l'équation différentielle :

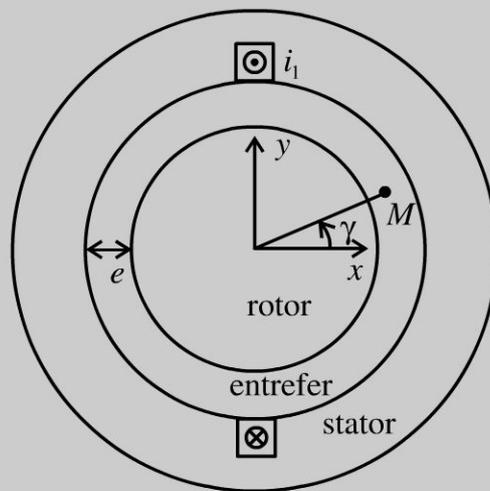
$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{MB \cos \alpha_0}{J} \varepsilon = 0$$

On pose $\omega_{\text{oscillations}} = \sqrt{\frac{MB \cos \alpha_0}{J}}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{oscillations}}}$.

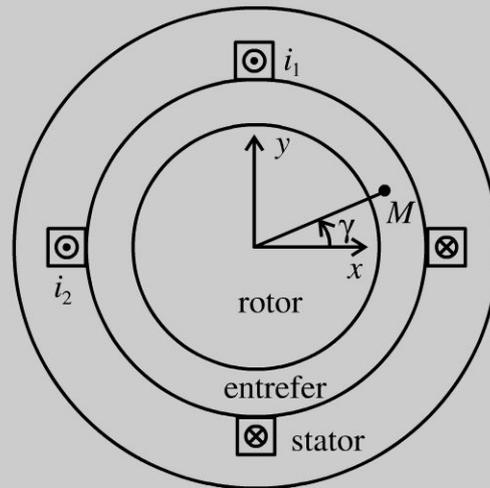
On retrouve bien le résultat établi dans la question 2. : l'équilibre est stable si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Exercice 19.2 : Moteur synchrone et couple électromagnétique

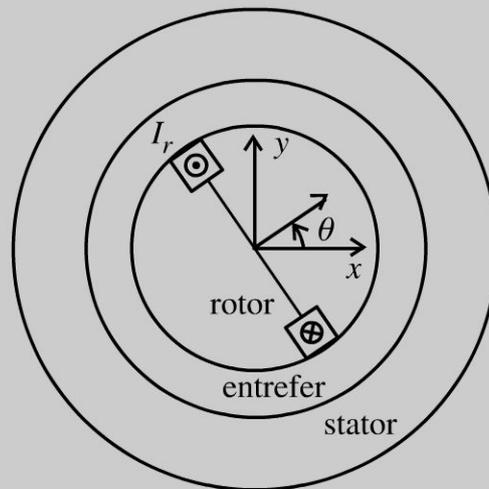
Un moteur synchrone est constitué d'un rotor cylindrique en fer doux, d'un entrefer e constant (de volume V , de rayon a) et d'un stator cylindrique en fer doux. On place dans deux encoches opposées sur le stator, une spire parcourue par un courant $i(t)$. On suppose que la perméabilité relative μ_r est infinie dans le rotor et le stator et que le vecteur excitation se met dans l'entrefer sous la forme : $\vec{H} = H(\gamma) \vec{u}_r$. On note ℓ la longueur des cylindres.



1. Déterminer le champ magnétique créé par une spire, en un point M (repéré par l'angle γ) en fonction de μ_0 , i_1 et e .
2. Expliquer qualitativement comment obtenir un champ magnétique dont la dépendance angulaire est sinusoidale dans l'entrefer en associant plusieurs spires décalées. Pour simplifier les schémas par la suite, on ne représentera pas l'ensemble des spires nécessaires pour créer un tel champ magnétique mais uniquement une spire. On le met sous la forme $B = K_s i_1 \cos \gamma$.
3. Sur le stator, on rajoute une deuxième spire. On pose : $i_1(t) = I_{sm} \cos(\omega t)$, $i_2(t) = I_{sm} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ et $B_{sm} = K_s I_{sm}$. Justifier l'existence d'un champ glissant statorique lorsque les deux phases sont alimentées en quadrature.



4. Sur le rotor, on rajoute de la même façon des spires parcourues par un courant constant I_r . Montrer que le champ magnétique créé par le rotor dans l'entrefer peut se mettre sous la forme : $B_r = B_{rm} \cos(\gamma - \theta)$. On appelle $\Omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire du rotor. On pose $B_{rm} = K_r I_r$. Justifier l'existence d'un champ glissant rotorique associé à la rotation du rotor.



5. Montrer que l'énergie magnétique totale s'écrit : $U_m = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3}$ avec $U_{m1} = \frac{V}{4\mu_0} B_{sm}^2$; $U_{m2} = \frac{V}{4\mu_0} B_{rm}^2$ et $U_{m3} = \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos(\theta - \omega t)$.

6. On admet que le moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor est $\Gamma = \left(\frac{\partial U_m}{\partial \theta} \right)_i$. Quelle est la condition de synchronisme entre le champ statorique et le champ rotorique afin d'obtenir un couple moyen non nul ? On suppose cette condition vérifiée dans toute la suite de l'exercice. On pose alors $\alpha = \omega t - \theta$ le déphasage entre les deux champs glissants. À quelle condition sur α a-t-on un couple moteur ? Discuter qualitativement la stabilité du système en fonction de α .

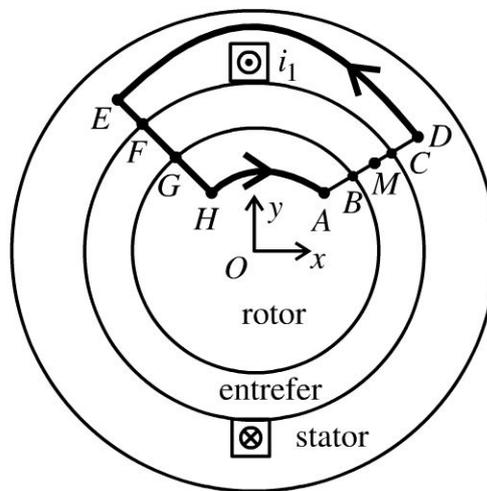
7. Quelle difficulté a-t-on au démarrage d'un moteur synchrone ? Décrire qualitativement le principe de l'autopilotage.

Analyse du problème

Le théorème d'Ampère permet de calculer le vecteur excitation magnétique et d'en déduire le champ magnétique. On calcule le moment électromagnétique à partir de l'énergie magnétique du système.



1. On considère le contour d'Ampère $ABCDEFGH$ (F symétrique de C par rapport au plan (Oyz) et G symétrique de B par rapport au plan (Oyz)).



- Dans le rotor et le stator, la perméabilité relative est infinie. L'excitation magnétique vaut :

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = 0$$

- Soit un point M défini par $\gamma \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Le vecteur excitation est de la forme $\vec{H} = H(\gamma) \vec{u}_r$.
- Le plan (Oyz) est un plan de symétrie. Le vecteur excitation au point M' symétrique de M par rapport au plan (Oyz) est :

$$\vec{H}(M') = -\text{sym}(\vec{H}(M)).$$

- Le théorème d'Ampère avec l'excitation magnétique s'écrit :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlacé}} = i_1.$$

La circulation de \vec{H} est nulle dans le rotor et le stator.

Il reste :

$$\int_{r=r_B}^{r=r_C} H(\gamma) \vec{u}_r \cdot dr \vec{u}_r + \int_{r=r_F}^{r=r_G} -H(\gamma) \vec{u}_r \cdot dr \vec{u}_r = 2eH(\gamma) = i_1,$$

$$\text{d'où } H(\gamma) = \frac{i_1}{2e} \text{ pour } \gamma \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

On en déduit le champ magnétique : Si $\gamma \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[:$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2e} \vec{u}_r$$

Si $\gamma \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[:$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 i_1}{2e} \vec{u}_r$$

2. On place plusieurs spires parcourues par un courant $i_1(t)$ dans des encoches opposées et décalées.

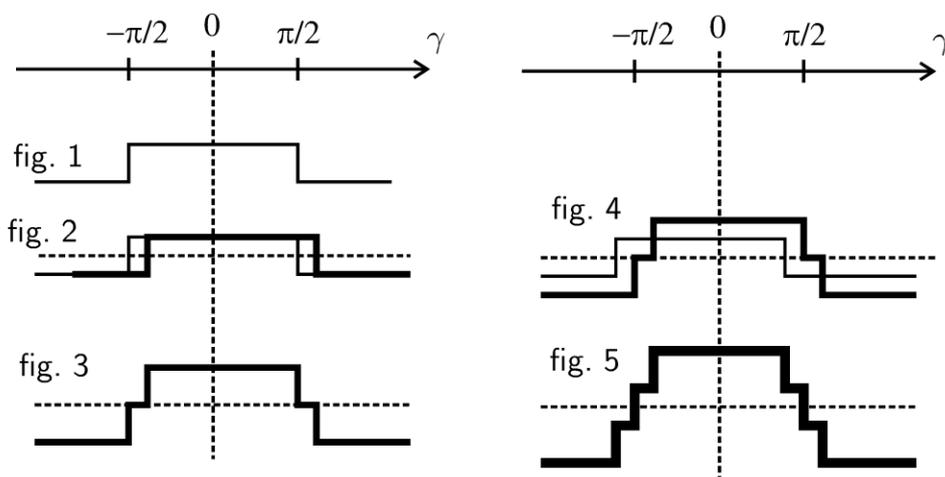


Figure 1 : champ magnétique créé par une spire en fonction de γ .

Figure 2 : champ magnétique créé par la spire étudiée précédemment et champ magnétique créé par une spire décalée.

Figure 3 : champ magnétique résultant.

Figure 4 : champ magnétique créé par une autre spire décalée.

Figure 5 : champ magnétique résultant.

Au fur et à mesure que l'on rajoute des spires disposées dans des encoches opposées et décalées, le champ résultant se rapproche de la forme $B = K_s i_1 \cos \gamma$.

3. Le champ créé par la bobine 1 génère un champ magnétique :

$$B_1 = K_s i_1 \cos(\gamma) = K_s I_{sm} \cos(\omega t) \cos(\gamma)$$

Il suffit de remplacer γ par $\gamma - \frac{\pi}{2}$ pour en déduire le champ créé par la bobine 2 :

$$B_2 = K_s i_2 \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = K_s I_{sm} \sin(\omega t) \sin \gamma$$

Le champ magnétique résultant créé par le stator est :

$$B_s = B_1 + B_2 = K_s I_{sm} (\cos(\omega t) \cos(\gamma) + \sin(\omega t) \sin(\gamma))$$

On en déduit que :

$$B_s = K_s I_{sm} \cos(\gamma - \omega t) = B_{sm} \cos(\gamma - \omega t)$$

Le champ magnétique est maximal lorsque $\gamma = \omega t$. Le maximum du champ magnétique est dans une direction \vec{n}_s tournant à la vitesse angulaire ω . On retrouve une expression similaire lors de la propagation d'une onde progressive de la forme $f(x - ct)$. Par analogie, on a une onde sinusoïdale se propageant dans l'entrefer de la forme $f(\gamma - \omega t)$.

On a donc un **champ glissant statorique lorsque les deux phases sont alimentées en quadrature** (déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre les intensités i_1 et i_2).

4. Comme pour le stator, on dispose sur le rotor un ensemble de conducteurs disposés dans des encoches opposées décalées. On a vu dans la question 2 que le champ magnétique créé par la spire 1 dans l'entrefer est :

$$B = K_s i_1 \cos \gamma.$$

En un point M repéré par l'angle γ , le champ créé par le rotor dans l'entrefer est donc de la forme : $B_r = K_r I_r \cos(\gamma - \theta)$. Il suffit de remplacer γ par $\gamma - \theta$ puisque la spire I_r est décalée d'un angle θ par rapport à la spire 1 sur les schémas. Le champ magnétique créé par le rotor peut se mettre sous la forme :

$$B_r = B_{rm} \cos(\gamma - \theta)$$

Le rotor tourne d'un angle θ autour de l'axe Oz . Le champ magnétique créé par le rotor est maximal lorsque l'angle $\gamma = \theta$. Le maximum du champ magnétique est dans une direction \vec{n}_r tournant à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \Omega$. On a donc comme dans la question précédente une onde sinusoïdale se propageant dans l'entrefer de la forme $f(\gamma - \Omega t)$ si on suppose $\Omega = cte$.

On a donc un **champ glissant rotorique associé à la rotation du rotor**.

5. L'énergie magnétique se calcule à partir de la relation :

$$U_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} d\tau$$

Dans le rotor et le stator, la perméabilité relative est infinie. Il suffit de calculer l'intégrale dans le volume de l'entrefer. Le champ dans l'entrefer est créé par le rotor et le stator. On a donc :

$$U_m = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{(B_s + B_r)^2}{2\mu_0} (l) (ad\gamma) e$$

En développant le carré, on fait apparaître trois termes : $U_m = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3}$. Le volume de l'entrefer est $V = 2\pi ael$. On a alors :

- $U_{m1} = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{B_s^2}{2\mu_0} (l) (ad\gamma) e = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{B_{sm}^2}{2\mu_0} (l) \cos^2 (\gamma - \omega t) (ad\gamma) e.$

Comme $\int_{\gamma=0}^{2\pi} \cos^2 (\gamma - \omega t) d\gamma = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{1 + \cos (2 (\gamma - \omega t))}{2} d\gamma = \pi,$

alors :

$$U_{m1} = \frac{\pi ael}{2\mu_0} B_{sm}^2 = \frac{V}{4\mu_0} B_{sm}^2$$

- $U_{m2} = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{B_r^2}{2\mu_0} (l) (ad\gamma) e = \frac{\pi ael}{2\mu_0} B_{rm}^2 = \frac{V}{4\mu_0} B_{rm}^2$

car $\int_{\gamma=0}^{2\pi} \cos^2 (\gamma - \omega t) d\gamma = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{1 + \cos (2 (\gamma - \omega t))}{2} d\gamma = \pi.$

- $U_{m3} = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{2B_s B_r}{2\mu_0} (l) (ad\gamma) e$
 $= \frac{ael}{\mu_0} B_{sm} B_{rm} \int_{\gamma=0}^{2\pi} \cos (\gamma - \omega t) \cos (\gamma - \theta) d\gamma$

Comme $\cos (a) \cos (b) = \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)],$ on a :

$$\cos (\gamma - \omega t) \cos (\gamma - \theta) = \frac{1}{2} (\cos (2\gamma - \omega t - \theta) + \cos (\theta - \omega t))$$

La première intégrale donne 0. Il reste finalement :

$$U_{m3} = \frac{ael}{\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos (\theta - \omega t) \frac{1}{2} 2\pi, \text{ soit :}$$

$$U_{m3} = \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos (\theta - \omega t)$$

6. U_{m1} et U_{m2} ne dépendent pas de θ . Le moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor est :

$$\Gamma = \left(\frac{\partial U_{em}}{\partial \theta} \right)_i = -\frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \sin (\theta - \omega t)$$

S'il n'y pas de synchronisme entre le champ statorique et le champ rotorique, alors $\theta - \omega t \neq cte$ et le moment moyen est nul. Il faut donc avoir un synchronisme entre les deux champs glissants pour avoir un couple moyen non nul.

D'après l'énoncé, on pose $\alpha = \omega t - \theta,$ on a alors :

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \sin (\alpha)$$

Dans l'exercice précédent (première approche du moteur synchrone), on a vu que $\Gamma_z = MB \sin \alpha$. \vec{M} et \vec{B} sont représentés sur la figure 6.

Sur la figure 7, on représente \vec{n}_r et \vec{n}_s les directions où les champs glissants rotorique et statorique passent par un maximum.

Les deux approches donnent le même résultat.

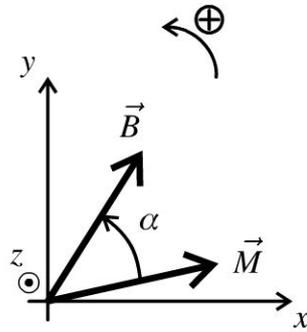


Figure 6

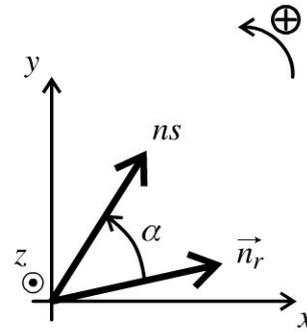


Figure 7

Si le couple résistant augmente, l'aimant est freiné, donc α augmente. Quel est l'effet d'une augmentation de α sur le couple ?

- Si $\cos \alpha > 0$, c'est-à-dire $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $d\Gamma_z > 0$. On a une augmentation du couple moteur ce qui a pour effet de diminuer l'angle α . L'équilibre est stable.
- Si $\cos \alpha < 0$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $d\Gamma_z < 0$. On a une diminution du couple moteur ce qui a tendance à augmenter encore plus l'angle α . L'équilibre est instable.

7. La machine ne peut pas se lancer au démarrage puisque $\theta = cte$, $\theta - \omega t \neq cte$ et $\langle \Gamma \rangle = 0$. Le moteur synchrone ne peut pas démarrer sans dispositif extérieur permettant de lancer le rotor à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$. Le principe du moteur synchrone autopiloté consiste à augmenter progressivement la pulsation de synchronisme ω pour toujours avoir $\dot{\theta} \approx \omega$. On cherche à se rapprocher de la condition $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 19.3 : Moteur synchrone et bilan de puissance

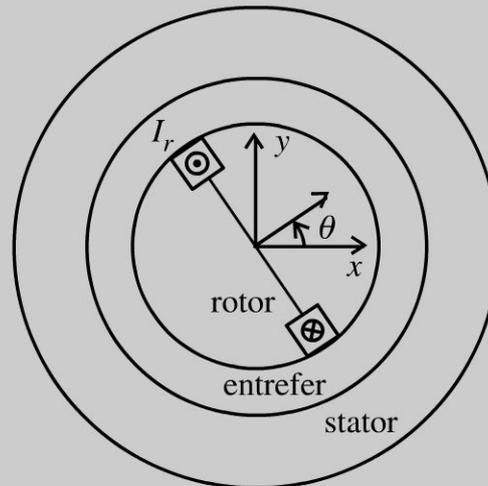
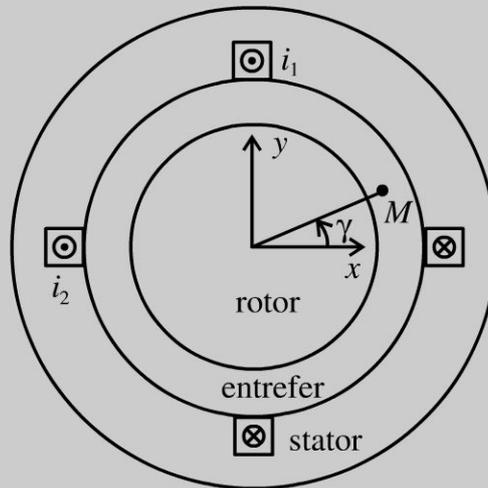
Un moteur synchrone est constitué d'un rotor cylindrique en fer doux, d'un entrefer e constant (de volume V , de rayon a) et d'un stator cylindrique en fer doux. On dispose sur le stator des spires parcourues par un courant $i_1(t) = I_{sm} \cos(\omega t)$ et $i_2(t) = I_{sm} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. Le champ magnétique créé par le stator au point M repéré par l'angle γ est :

$$B_s = K_s I_{sm} \cos(\gamma - \omega t) = B_{sm} \cos(\gamma - \omega t).$$

On dispose sur le rotor des spires parcourues par un courant constant I_r . Le champ magnétique créé par le rotor au point M est :

$$B_r = K_r I_r \cos(\gamma - \theta) = B_{rm} \cos(\gamma - \theta).$$

On appelle $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire du rotor.



La condition de synchronisme est vérifiée. On pose $\alpha = \omega t - \theta$.

L'énergie magnétique se met sous la forme : $U_m = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3}$

avec $U_{m1} = \frac{V}{4\mu_0} B_{sm}^2$; $U_{m2} = \frac{V}{4\mu_0} B_{rm}^2$ et $U_{m3} = \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos(\theta - \omega t)$.

1. Écrire l'énergie magnétique totale sous la forme :

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \frac{1}{2} L_r I_r^2 + M_1 I_r i_1 + M_2 I_r i_2 + M' i_1 i_2$$

On pose $M_0 = \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r$. En déduire les inductances propres et les inductances mutuelles en fonction de V , μ_0 , K_r , K_s , M_0 et θ .

2. On appelle u_1 , u_2 et u_r les tensions extérieures appliquées aux phases du stator et du rotor. Les résistances des enroulements du stator et du rotor sont notées R_s et R_r . On pose $\Phi_1 = L_1 i_1 + M' i_2 + M_1 I_r$ et $\Phi_2 = L_2 i_2 + M' i_1 + M_2 I_r$. Définir les forces électromotrices et contre électromotrices des phases du stator et du rotor. Écrire les équations électriques vérifiées par les phases du stator et par le rotor en faisant intervenir les fcem, les résistances des enroulements et les inductances propres. Pourquoi appelle-t-on le rotor l'inducteur et les phases du stator l'induit ?
3. Montrer que la puissance électrique absorbée par la fcem est égale à la puissance mécanique fournie. Comment s'écrit le bilan de puissance ?

Analyse du problème

On a calculé l'énergie magnétique dans l'exercice précédent. Les inductances propres et mutuelles sont déterminées par identification à partir de l'énergie magnétique. On effectue un bilan de puissance en multipliant par l'intensité chaque loi des mailles.



1. On exprime l'énergie magnétique en fonction des intensités :

- D'après la définition de i_1 et i_2 , on a $i_1^2 + i_2^2 = I_{sm}^2$.

Comme $B_{sm} = K_s I_{sm}$, alors :

$$U_{m1} = \frac{V}{4\mu_0} K_s^2 (i_1^2 + i_2^2) = \frac{V}{4\mu_0} K_s^2 I_{sm}^2$$

- Comme $B_{rm} = K_r I_r$ et $I_r = cte$, alors :

$$U_{m2} = \frac{V}{4\mu_0} K_r^2 I_r^2$$

- En développant U_{m3} , on a :

$$U_{m3} = \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r I_{sm} I_r (\cos \theta \cos \omega t + \sin \theta \sin \omega t), \text{ soit :}$$

$$U_{m3} = \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r I_r (I_{sm} \cos \theta \cos \omega t + I_{sm} \sin \theta \sin \omega t)$$

Finalement, on obtient :

$$U_{m3} = \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r I_r (i_1 \cos \theta + i_2 \sin \theta)$$

On peut exprimer l'énergie magnétique en fonction des inductances propres et des inductances mutuelles :

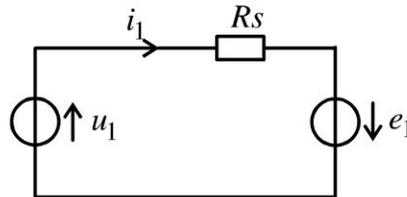
$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \frac{1}{2} L_r I_r^2 + M_1 I_r i_1 + M_2 I_r i_2$$

En identifiant, on a : $L_1 = L_2 = \frac{V}{2\mu_0} K_s^2$; $L_r = \frac{V}{2\mu_0} K_r^2$; $M_1 = M_0 \cos \theta$;

$M_2 = M_0 \sin \theta$ et $M' = 0$.

C'est normal d'avoir $M' = 0$ puisque les enroulements (1) et (2) sont orthogonaux.

2. Phase 1 du stator : On a le schéma électrique équivalent.



La force électromotrice e_1 se représente en convention générateur sur le schéma. Elle est définie par : $e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}$.

Le flux Φ_1 à travers la bobine (1) est :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M_0 I_r \cos \theta = L_1 i_1 + M_0 I_r \cos (\omega t - \alpha)$$

L'équation électrique pour l'enroulement (1) est : $u_1 + e_1 = R_s i_1$. Soit :

$$u_1 = R_s i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M_0 \omega I_r \sin (\omega t - \alpha)$$

On obtient finalement :

$$u_1 = R_s i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + e'_1$$

$$e'_1 = \frac{d\Phi_{1,ext}}{dt} = -M_0 \omega I_r \sin (\omega t - \alpha) = \text{fcm (force contre électromotrice) (eq.1)}$$



Il ne faut pas confondre la force électromotrice $e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}$ orientée en convention générateur et la force contre électromotrice $e'_1 = \frac{d\Phi_{1,ext}}{dt}$ qui ne tient compte que du flux extérieur et qui est orientée en convention récepteur.



Phase 2 du stator : On a de même : $u_2 + e_2 = R_s i_2$ avec $e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$ et

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M_0 I_r \sin \theta = L_2 i_2 + M_0 I_r \sin (\omega t - \alpha).$$

On a alors :

$$u_2 = R_s i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + e'_2$$

avec $e'_2 = \frac{d\Phi_{2,ext}}{dt} = M_0\omega I_r \cos(\omega t - \alpha) = f_{cem}$ (force contre électromotrice) (eq.2)



Il ne faut pas confondre la force électromotrice $e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$ orientée en convention générateur et la force contre électromotrice $e'_2 = \frac{d\Phi_{2,ext}}{dt}$ qui ne tient compte que du flux extérieur et qui est orientée en convention récepteur.



Rotor : $u_r + e_r = R_r I_r$. La force électromotrice est $e_r = -\frac{d\Phi_r}{dt}$. Le flux à travers le rotor est la somme du flux propre $L_r I_r$ et du flux extérieur $\Phi_{r,ext}$ (flux du champ créé par le stator à travers le rotor) :

$$\Phi_r = L_r I_r + \Phi_{r,ext}$$

- Comme I_r est constant, le flux propre est constant.
- Comme le rotor tourne à la même vitesse que le champ créé par le stator, $\Phi_{r,ext}$ est donc constant.

Le flux Φ_r est donc constant. L'équation électrique s'écrit :

$$u_r = R_r I_r \quad (\text{eq.3})$$

Il n'y a pas de phénomène d'induction dans le rotor. Le **rotor est appelé inducteur**.

Par contre, il y a un phénomène d'induction dans le **stator appelé induit**.

3.

- Bilan énergétique pour l'enroulement (1). On multiplie par i_1 l'équation (1) :

$$u_1 i_1 = R_s i_1^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + e'_1 i_1$$

- Bilan énergétique pour l'enroulement (2). On multiplie par i_2 l'équation (2) :

$$u_2 i_2 = R_s i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + e'_2 i_2$$

- Bilan énergétique pour le rotor. On multiplie par I_r l'équation (3) :

$$u_r I_r = R_r I_r^2$$

Si on somme les trois relations, on obtient la puissance électrique totale absorbée par la machine :

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_r I_r = R_s i_1^2 + R_s i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + e'_1 i_1 + e'_2 i_2 + R_r I_r^2$$

On a vu que $L_1 = L_2 = L_s$ et $i_1^2 + i_2^2 = I_{sm}^2$, donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_s I_{sm}^2 \right) = 0$$

On obtient :

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_r I_r = R_s i_1^2 + R_s i_2^2 + R_r I_r^2 + e'_1 i_1 + e'_2 i_2 \quad (\text{eq.4})$$

On développe le terme $e'_1 i_1 + e'_2 i_2$:

$$e'_1 i_1 + e'_2 i_2 = -M_0 I_r I_{sm} \omega \sin(\omega t - \alpha) \cos(\omega t) + M_0 I_r I_{sm} \omega \cos(\omega t - \alpha) \sin(\omega t)$$

Soit :

$$e'_1 i_1 + e'_2 i_2 = M_0 I_r I_{sm} \omega (-\sin(\omega t - \alpha) \cos(\omega t) + \cos(\omega t - \alpha) \sin(\omega t))$$

Comme $\sin(a - b) = \sin a \times \cos b - \sin b \times \cos a$, on en déduit que :

$$e'_1 i_1 + e'_2 i_2 = M_0 I_r I_{sm} \omega \sin(\alpha)$$

On a posé : $M_0 = \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r$, d'où :

$$e'_1 i_1 + e'_2 i_2 = \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r I_r I_{sm} \omega \sin(\alpha) = \left(\frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \sin(\alpha) \right) \omega$$

On a vu dans l'exercice précédent que $\langle \Gamma \rangle = \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \sin(\alpha)$. On a donc :

$$e'_1 i_1 + e'_2 i_2 = \langle \Gamma \rangle \omega \quad (\text{eq.5})$$

L'énergie magnétique est :

$$U_m = \frac{V}{2\mu_0} K_s^2 I_{sm}^2 + \frac{V}{2\mu_0} K_r^2 I_r^2 + \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos(\theta - \omega t).$$

On peut la mettre sous la forme :

$$U_m = \frac{V}{2\mu_0} K_s^2 I_{sm}^2 + \frac{V}{2\mu_0} K_r^2 I_r^2 + \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos(\alpha)$$

Lorsque $\dot{\theta} = \omega$, l'énergie mécanique et l'énergie magnétique du moteur synchrone sont constantes.

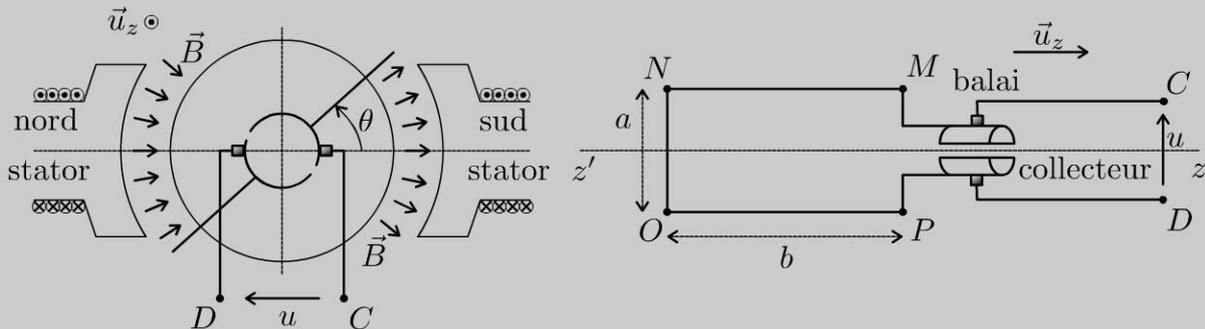
On en déduit le bilan de puissance en interprétant l'équation (4) : La puissance électrique absorbée par la machine est la somme de la puissance dissipée par effet Joule dans les résistances des enroulements (pertes cuivre) et de la puissance mécanique fournie $\langle \Gamma \rangle \omega$.

L'équation (5) montre que l'on a un couplage électromécanique parfait.

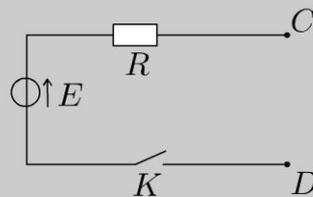
Machine à courant continu

Exercice 20.1 : Première approche de la machine à courant continu

On étudie une machine composée d'une partie fixe (stator qui crée le champ magnétique) et d'une partie tournante (spire et collecteur). On considère une spire $MNOP$ de dimensions a et b mobile par rotation autour de l'axe $z'z$. Elle se déplace dans une zone où règne un champ magnétique \vec{B} permanent orthogonal à l'axe $z'z$. Dans la zone où évolue le cadre, le champ magnétique est radial et a une norme B uniforme. On néglige la résistance et l'inductance propre de la spire. Le collecteur, associé au balai, permet de relier le circuit électrique de la partie tournante à un circuit extérieur à la machine. On appelle J le moment d'inertie de la spire $MNOP$ par rapport à l'axe $z'z$. On pose $k = abB$.



1. Déterminer le moment des forces de Laplace en fonction de k et i . On suppose que le couplage électromécanique est parfait. La machine initialement au repos est insérée dans un circuit électrique suivant. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Déterminer ω en fonction du temps sachant que E est constante.



2. Effectuer un bilan de puissance.
3. Le cadre est maintenant soumis à un couple résistant $\Gamma_R = -\alpha\omega$ où α est une constante positive. Déterminer ω en fonction du temps. Interpréter.

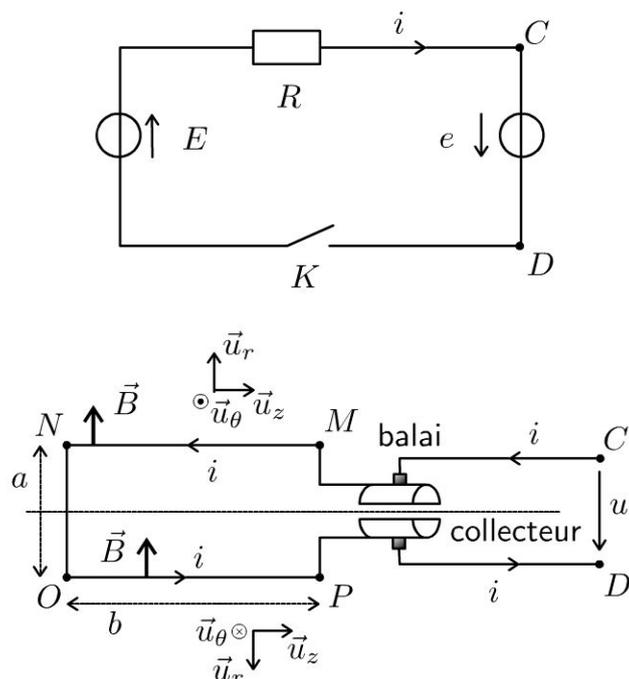
Analyse du problème

L'énoncé n'impose pas une orientation du courant. Il faut choisir une orientation arbitraire du courant. On rajoute alors sur le schéma électrique équivalent une fem en convention générateur. On en déduit le moment des forces de Laplace permettant de mettre en rotation la machine. Le couplage électromécanique est parfait, on peut en déduire la fem d'induction.

Le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe permet d'obtenir l'équation mécanique. La loi des mailles permet d'obtenir l'équation électrique. On obtient deux équations couplées.



1. On oriente le circuit électrique.



Calcul du moment résultant des forces de Laplace :

- Sur la partie MN : la force de Laplace est :

$$\vec{F}_1 = i \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = -ib\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_r = -ibB\vec{u}_\theta$$

Le moment du couple suivant $z'z$ vaut :

$$\Gamma_1 = -i\frac{a}{2}bB$$

- Sur la partie NO : il n'y a pas de contribution au couple suivant $z'z$.
- Sur la partie OP : la force de Laplace est :

$$\vec{F}_2 = i \overrightarrow{OP} \wedge \vec{B} = ib\vec{u}_z \wedge -B\vec{u}_r = -ibB\vec{u}_\theta$$

Le moment du couple suivant $z'z$ vaut :

$$\Gamma_2 = -i \frac{a}{2} b B$$

Le moment résultant du couple vaut donc :

$$\Gamma = -i a b B = -k i$$

Calcul de la force électromotrice d'induction :

Comme le couplage électromécanique est parfait, on a :

$$P_{\text{élec}} + P_{\text{méca}} = e i + \Gamma \omega = 0$$

Soit :

$$P_{\text{élec}} = e i = k \omega i$$

On en déduit que :

$$e = k \omega$$

Equation électrique :

La loi des mailles s'écrit : $E + e = R i$, soit :

$$E = R i - k \omega$$

Equation mécanique :

On écrit le théorème du moment cinétique pour la spire (solide en rotation autour d'un axe fixe) :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma = -k i$$

Des équations électrique et mécanique, on en déduit : $J \frac{d\omega}{dt} = -k \frac{E + k \omega}{R}$,
soit :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_0}{\tau}$$

On pose : $\tau = \frac{R J}{k^2}$ et $\omega_0 = -\frac{E}{k}$.

La résolution de l'équation différentielle donne : $\omega(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \omega_0$.

A $t = 0$, la vitesse angulaire est nulle. On a donc :

$$\omega(t) = \omega_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

2. Pour faire apparaître des termes de puissance, on multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par ω . On obtient alors :

$$\begin{cases} Ei = Ri^2 - k\omega i \\ J\omega \frac{d\omega}{dt} = -ki\omega \end{cases}$$

En éliminant le terme de couplage $ki\omega$, on a :

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J\omega^2 \right)$$

Interprétation physique : la puissance fournie par le générateur est égale à somme de la puissance reçue par la résistance (dissipée par effet Joule) et de la puissance mécanique de la force de Laplace.

L'énergie fournie par le générateur est en partie stockée sous forme d'énergie cinétique et en partie dissipée par effet Joule.

3. L'équation mécanique devient :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -ki - \alpha\omega$$

On a alors : $J \frac{d\omega}{dt} = -k \frac{E + k\omega}{R} - \alpha\omega$, d'où

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau'} = \frac{\omega'_0}{\tau'}$$

en posant : $\tau' = \frac{RJ}{k^2 + \alpha R}$ et $\omega'_0 = \frac{-kE}{k^2 + \alpha R}$.

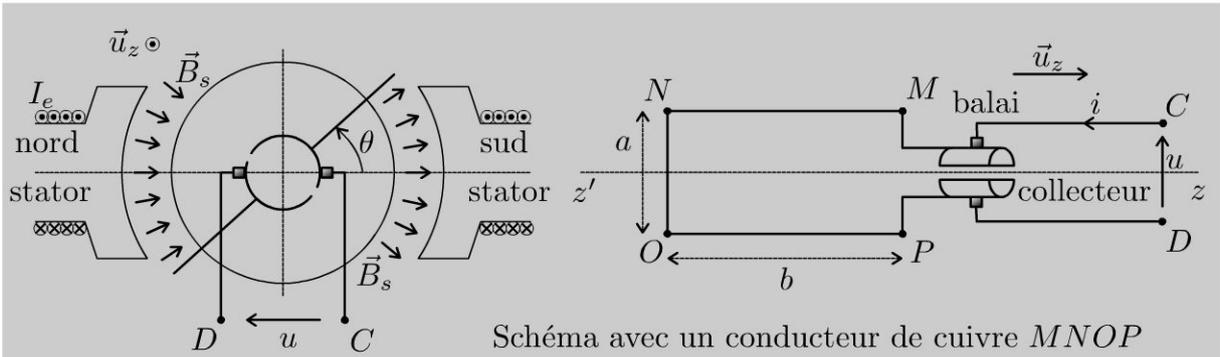
$|\omega'_0| < |\omega_0|$: la vitesse angulaire limite en régime permanent est plus faible à cause du couple résistant.

$\tau' < \tau$: le régime transitoire est plus rapide, le couple résistant permet d'atteindre le régime permanent plus vite.

Remarque : on peut être surpris d'avoir un régime permanent atteint plus vite avec des frottements ! En fait, c'est la vitesse angulaire limite qui est plus faible que précédemment.

Exercice 20.2 : Machine à courant continu

Une machine à courant continu est constituée d'un stator qui crée un champ magnétique \vec{B}_s et d'un rotor muni d'encoques dans lesquelles des conducteurs de cuivre sont parcourus par un courant i . Le champ magnétique \vec{B}_s est créé par des enroulements de cuivre parcourus par un courant constant I_e et soumis à une tension U_e en convention générateur. On appelle J le moment d'inertie du rotor par rapport à l'axe de rotation, R la résistance du rotor, L l'inductance propre du rotor et R_e la résistance de l'enroulement statorique.



1. Par analogie avec le moteur synchrone, établir que le champ magnétique doit être stationnaire pour créer un couple. Comment le collecteur établit le synchronisme entre le champ statorique stationnaire et le champ rotorique quelle que soit la position angulaire du rotor ?

Représenter qualitativement sur le schéma avec plusieurs conducteurs, le champ magnétique rotorique dans l'entrefer. Quel est l'angle entre les directions moyennes des champs statorique et rotorique dans l'entrefer ?

2. Expliquer le principe de fonctionnement du collecteur. Décrire la structure d'un moteur à courant continu bipolaire à excitation séparée : rotor, stator, induit, inducteur.

3. Lors de l'étude du moteur synchrone, on a vu que $\Gamma = \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \sin \alpha$.

Justifier rapidement que pour la machine à courant continu, le moment du couple peut se mettre sous la forme $\Gamma = \varphi_0 i$. On suppose le couplage électromécanique parfait. En déduire la force électromotrice d'induction et la force contre électromotrice.

4. Écrire les équations électrique et mécanique sachant le moteur entraîne une charge mécanique exerçant le couple résistant : $-\Gamma_r = -(a + b\omega)$.

5. Déterminer le rendement de la machine à courant continu en régime établi.

6. On étudie une commande à tension d'induit u constante. Déterminer graphiquement le point de fonctionnement de la machine en régime stationnaire. Que vaut le couple au démarrage ? Comparer au moteur synchrone. Déterminer la vitesse angulaire lorsqu'il n'y a pas de charge ($\Gamma_r = 0$). Que se passe-t-il si on coupe l'alimentation de l'inducteur ?

Analyse du problème

On utilise l'analogie avec le moteur synchrone pour expliquer le fonctionnement de la machine à courant continu.



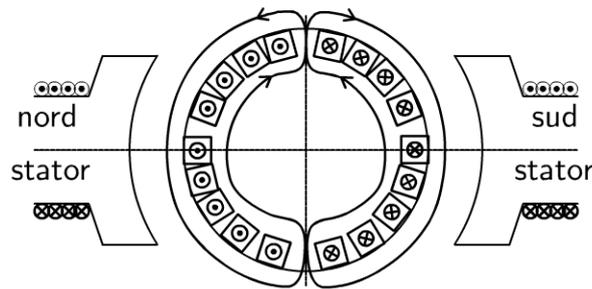
1. On rappelle quelques résultats établis dans l'exercice sur la machine synchrone : Dans l'entrefer, le champ magnétique statorique est suivant $+\vec{u}_r$, ou $-\vec{u}_r$. Le champ magnétique rotorique doit être synchrone du champ magnétique statorique pour créer un couple.

Dans la machine à courant continu, le stator crée un champ magnétique suivant $+\vec{u}_r$ pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et suivant $-\vec{u}_r$ pour $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Le plan $z = 0$ est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique. On l'appelle plan neutre.

Le champ magnétique statorique ne tourne pas : il est stationnaire.

Le champ magnétique rotorique doit être stationnaire pour créer un couple (dans ce cas, il bien synchrone du champ magnétique rotorique).

On représente qualitativement sur la figure ci-dessous le champ magnétique dans l'entrefer. On applique la règle de la main droite pour donner le sens du champ magnétique dans l'entrefer.



L'angle entre \vec{B}_r et \vec{B}_s vaut $\alpha = \frac{\pi}{2}$. On a vu lors de l'étude de la machine synchrone que le couple est maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

2. Le collecteur est constitué de deux lames de cuivre, reliées au circuit ($MNOP$) et disposées suivant un cylindre sur l'axe du rotor. Les balais conducteurs, fixés sur le stator, frottent sur les lames du collecteur et permettent de relier électriquement le circuit induit au milieu extérieur. On a une inversion du sens du courant lorsque la spire franchit le plan neutre.

Le **rotor** (qui comprend plusieurs conducteurs dont ($MNOP$)) est appelé **induit**. Le **stator est appelé inducteur**. Le flux du champ rotorique à travers le stator est nul (voir schéma ci-dessus). Il n'y a pas de phénomène d'induction dans le stator.

Remarque : Pour une machine synchrone, le rotor est appelé inducteur et le stator est appelé induit.



3. Pour la machine à courant continu, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, donc $\sin \alpha = 1$. Le champ magnétique rotorique est proportionnel au courant i . On pose :

$$\Gamma = \varphi_0 i$$

Remarque : Si I_e n'est pas trop élevé, alors φ_0 est proportionnel au courant de l'inducteur I_e .

Voir exercice « Première approche de la machine à courant continu » pour le calcul du moment du couple à partir des forces de Laplace.

Le couplage électromécanique est parfait. On a donc :

$$P_{\text{fem}} + P_{\text{mécanique}}^{\text{fournie}} = 0$$

Soit : $ei + \Gamma\omega = 0$. Comme $\Gamma = \varphi_0 i$, alors :

- La force électromotrice d'induction est : $e = -\varphi_0\omega$.
- La force contre électromotrice est : $e' = -e = \varphi_0\omega$.



4. Équation électrique pour l'inducteur :

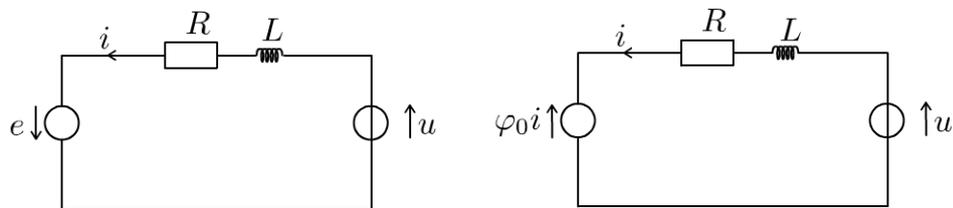
$$U_e = R_e I_e \quad (\text{eq.1})$$

On appelle R_e la résistance de l'enroulement statorique. Comme le courant est constant, la tension $L_s \frac{dI_e}{dt}$ est nulle.

Équation électrique pour l'induit :

La force électromotrice est orientée en convention générateur. La loi des mailles s'écrit : $u + e = Ri + L \frac{di}{dt}$, soit :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + e' = Ri + L \frac{di}{dt} + \varphi_0\omega \quad (\text{eq.2})$$



Équation mécanique :

Le théorème du moment cinétique pour le rotor s'écrit :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma - \Gamma_r = \varphi_0 i - \Gamma_r \quad (\text{eq.3})$$

5. Le rendement est défini par :

$$\eta = \frac{\text{utile}}{\text{coût}}$$

L'utile est la puissance mécanique fournie : utile = $P_{\text{mécanique}}^{\text{fournie}} = \Gamma\omega$.

Le coût est la puissance fournie par les tensions u et U_e : coût = $ui + U_e I_e$

On en déduit de l'équation (1) :

$$U_e I_e = R_e I_e^2 \quad (\text{eq.4})$$

On en déduit de l'équation (2) : $ui = Ri^2 + e'i$. Or $\Gamma\omega = e'i$, d'où :

$$ui = Ri^2 + \Gamma\omega \quad (\text{eq.5})$$

Si on somme les équations (4) et (5), on a :

$$U_e I_e + ui = R_e I_e^2 + Ri^2 + \Gamma\omega$$

Le rendement est :

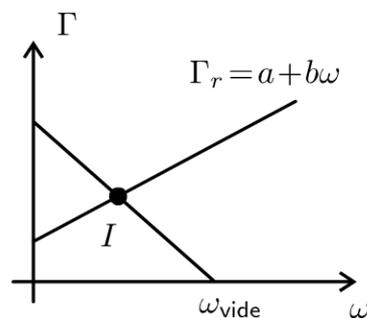
$$\eta = \frac{\Gamma\omega}{ui + U_e I_e} < 1$$

6. On a vu que $\Gamma = \varphi_0 i$.

D'après l'équation (2) en régime permanent, on a : $u = Ri + \varphi_0\omega$, soit $i = \frac{u}{R} - \frac{\varphi_0\omega}{R}$. On a donc :

$$\Gamma = \varphi_0 \left(\frac{u}{R} - \frac{\varphi_0\omega}{R} \right) = \frac{\varphi_0 u}{R} - \frac{\varphi_0^2}{R} \omega$$

D'après l'énoncé, $\Gamma_r = a + b\omega$. On représente sur le graphe Γ et Γ_r en fonction de ω . L'intersection des deux caractéristiques fournit le point de fonctionnement I du moteur.



Le couple au démarrage vaut $\frac{\varphi_0 u}{R}$. Il n'est pas nul contrairement au moteur synchrone. La machine à courant continu peut démarrer sans dispositif extérieur.

Lorsque le moteur tourne à vide, on a $\Gamma_r = 0$. On en déduit que $\Gamma = 0$, soit $\frac{\varphi_0 u}{R} - \frac{\varphi_0^2}{R} \omega = 0$. On en déduit la vitesse angulaire du moteur à vide :

$$\omega_{\text{vide}} = \frac{u}{\varphi_0}$$

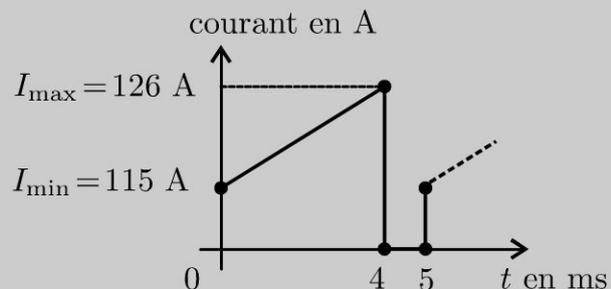
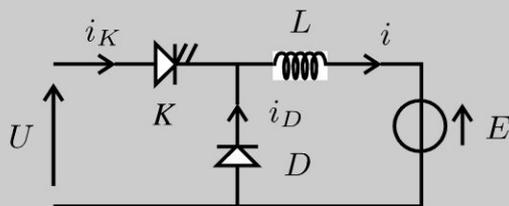
On a vu que φ_0 est proportionnel au courant de l'inducteur I_e . Il ne faut pas couper ce courant, sinon $\varphi_0 \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$. Le moteur s'emballe ! On a un risque de détérioration du moteur. La force centrifuge peut endommager le système de fixation des bobinages du rotor.

Conversion électronique statique

Exercice 21.1 : Hacheur à stockage inductif

On considère un hacheur, de rapport cyclique α et de période de hachage T . Il alimente une machine à courant continu considérée comme parfaite. On la modélise par une inductance L en série avec une force électromotrice $E > 0$ constante. La source de tension délivre une tension constante $U = 400$ V. On suppose que $U > E$. La commande du transistor K est la suivante :

- Sur l'intervalle $[0, \alpha T]$, le transistor K est passant.
- Sur l'intervalle $[\alpha T, T]$, le transistor K est bloqué.



1. Parmi les courants i_K, i_D et i , quel est celui relevé sur le chronogramme ? Quelle est la fréquence de hachage ? Que vaut le rapport cyclique α ?
2. Écrire l'équation différentielle reliant i, U et E sur l'intervalle de temps $[0, \alpha T]$. En déduire l'ondulation du courant $\Delta i = I_{\max} - I_{\min}$ en fonction de L, U, E, α et T .
3. Écrire l'équation différentielle reliant i et E sur l'intervalle de temps $[\alpha T, T]$. En déduire une autre expression de l'ondulation de courant $\Delta i = I_{\max} - I_{\min}$ en fonction de L, E, α et T .
4. En déduire la relation entre E, α et U . Exprimer Δi en fonction de L, α, T et U . Calculer la valeur de l'inductance L .
5. Représenter i en fonction du temps.
6. Effectuer un bilan de puissance moyenne.

Analyse du problème

Cet exercice étudie un hacheur à stockage inductif puisqu'on a un transfert de puissance entre deux sources de tension continue. On n'étudie pas le régime transitoire. Il ne faut donc pas être surpris d'avoir un courant non nul à $t = 0$. Comme le courant ne peut pas varier de façon discontinue dans une bobine, on utilise cette propriété pour intégrer les deux équations différentielles et en déduire une relation entre E, U et α .



1. Le courant représenté ne peut pas être i car l'intensité ne peut pas varier de façon discontinue dans une bobine.

Lorsque le transistor est bloqué, $i = i_D \geq 0$ puisque le courant i passe dans la diode D . L'intensité i est une fonction décroissante du temps d'après l'orientation de E . Le courant représenté ne peut pas être i_D

Le courant représenté est donc nécessairement le courant i_K .

- Dans l'intervalle de temps $[0, \alpha T]$, le transistor est passant. L'intensité i_K est une fonction croissante du temps puisque $U > E$. Cela correspond à l'intervalle $[0, 4 \text{ ms}]$ sur le graphe.
- Dans l'intervalle de temps $[\alpha T, T]$, le transistor est bloqué. La diode est nécessairement passante. On a donc $i_D > 0$ et $i_K = 0$. Cela correspond à l'intervalle $[4 \text{ ms}, 5 \text{ ms}]$ sur le graphe.

Le courant représenté sur le chronogramme est donc bien i_K . La période du phénomène est $T = 5 \text{ ms}$. La fréquence est :

$$f = \frac{1}{T} = 200 \text{ Hz}$$

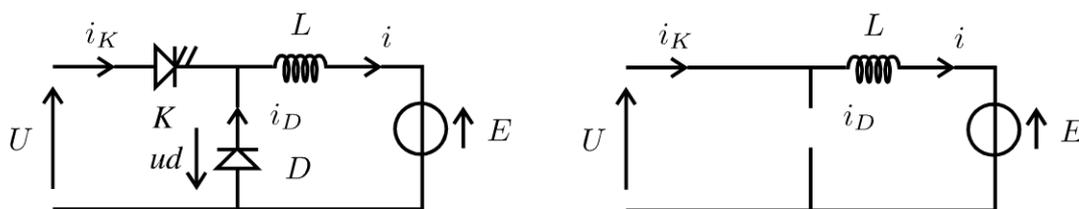
Graphiquement, on lit : $\alpha T = 4 \text{ ms}$. On a donc :

$$\alpha = \frac{4}{5} = 0,8$$

2. Intervalle de temps $[0, \alpha T]$:

Le transistor est équivalent à un interrupteur fermé. La tension aux bornes de la diode vaut $u_D = -U < 0$. La diode est donc bloquée.

On a le schéma équivalent suivant :



La loi des mailles s'écrit :

$$U = L \frac{di}{dt} + E$$

En séparant les variables, on a :

$$di = \frac{U - E}{L} dt$$

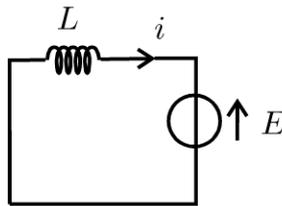
On intègre entre 0 et αT :

$$\Delta i = I_{\max} - I_{\min} = \frac{U - E}{L} \alpha T$$

3. Intervalle de temps $[\alpha T, T]$:

Le transistor est équivalent à un interrupteur ouvert. On suppose la diode passante.

On a le schéma équivalent suivant :



La loi des mailles s'écrit :

$$L \frac{di}{dt} + E = 0$$

En séparant les variables, on a :

$$di = -\frac{E}{L} dt$$

On intègre entre αT et T :

$$I_{\min} - I_{\max} = -\frac{E}{L} (T - \alpha T)$$

Soit :

$$\Delta i = I_{\max} - I_{\min} = \frac{E}{L} (T - \alpha T)$$

Vérification des hypothèses : $i_D = i > 0$. La diode est bien passante tant que $I_{\min} > 0$.

4. On a vu dans les deux questions précédentes que :

$$I_{\max} - I_{\min} = \frac{U - E}{L} \alpha T \text{ et que } I_{\max} - I_{\min} = \frac{E}{L} (T - \alpha T).$$

On obtient en simplifiant :

$$E = \alpha U$$

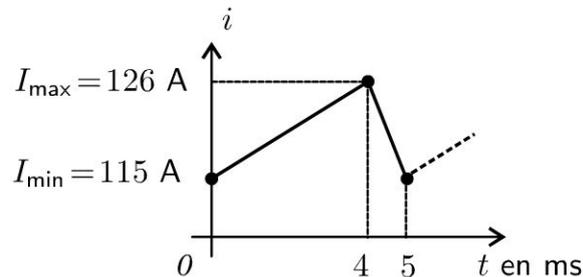
On en déduit :

$$I_{\max} - I_{\min} = \frac{U(1 - \alpha)}{L} \alpha T$$

L'inductance L vaut :

$$L = \frac{U(1 - \alpha)}{I_{\max} - I_{\min}} \alpha T = \frac{400 \times (1 - 0,8)}{126 - 115} \times \frac{0,8}{200} = 29 \text{ mH}$$

5. L'intensité ne peut pas varier de façon discontinue dans une bobine. Le graphe suivant représente i en fonction du temps.



6. Puissance moyenne P_1 fournie par le générateur U :

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_0^T U i_K dt = \frac{U}{T} \int_0^{\alpha T} i_K dt$$



Il faut se placer en convention générateur pour calculer une puissance fournie et en convention récepteur pour calculer une puissance reçue.



$\int_0^{\alpha T} i_K dt$ représente l'aire sous la courbe :

$$\frac{\text{grande base} + \text{petite base}}{2} \times \text{hauteur} = \frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} \alpha T$$

On a donc :

$$P_1 = \frac{\alpha U}{2} (I_{\min} + I_{\max})$$

Puissance moyenne P_2 reçue par la force électromotrice E :

$$P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T E i dt = \frac{E}{T} \int_0^T i dt$$

$\int_0^T i dt$ représente l'aire sous la courbe :

$$\frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} T (1 - \alpha) + \frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} \alpha T = \frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} T$$

On a donc :

$$P_1 = \frac{E}{2} (I_{\min} + I_{\max}) = \frac{\alpha U}{2} (I_{\min} + I_{\max})$$

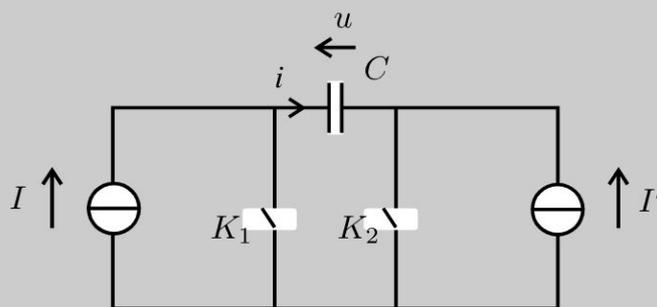
Les deux puissances moyennes P_1 et P_2 sont égales. Toute la puissance est transférée de l'entrée vers la sortie.

Interprétation physique : En régime permanent, la bobine ne consomme pas de puissance en moyenne. Le transistor et la diode sont idéaux. Ils ne consomment pas de puissance en moyenne.

Exercice 21.2 : Hacheur à stockage capacitif

On considère un hacheur, de rapport cyclique α et de période de hachage T . Il alimente un récepteur modélisé par un courant électromoteur $I' > 0$ constante. La source de courant délivre une intensité $I > 0$ constante. La commande des interrupteurs est la suivante :

- Sur l'intervalle $[0, \alpha T]$, l'interrupteur K_1 est fermé et l'interrupteur K_2 est ouvert.
- Sur l'intervalle $[\alpha T, T]$, l'interrupteur K_1 est ouvert et l'interrupteur K_2 est fermé.



1. Écrire l'équation différentielle reliant u et I' sur l'intervalle de temps $[0, \alpha T]$. En déduire l'ondulation de la tension $\Delta u = U_{\max} - U_{\min}$ en fonction de C, I', α et T .
2. Écrire l'équation différentielle reliant u et I sur l'intervalle de temps $[\alpha T, T]$. En déduire une autre expression de l'ondulation de la tension $\Delta u = U_{\max} - U_{\min}$ en fonction de C, I, α et T .

3. En déduire la relation entre I, α et I' .
4. Représenter u en fonction du temps.
5. Effectuer un bilan de puissance moyenne.

Analyse du problème

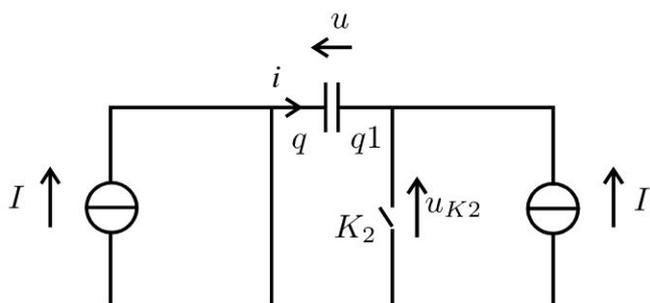
Cet exercice étudie un hacheur à stockage capacitif puisqu'on a un transfert de puissance entre deux sources de courant continu. Comme la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue, on utilise cette propriété pour intégrer les deux équations différentielles et en déduire une relation entre I, I' et α . Il faut penser à introduire les tensions U_{\max} et U_{\min} aux bornes du condensateur comme intermédiaire de calcul.

La tension à $t = 0$ n'est pas nulle puisqu'on n'étudie pas le régime transitoire. Il faut donc prendre l'initiative de définir une tension u à $t = 0$ (ici U_{\max} puisque la tension est décroissante au delà) et une autre tension u à $t = \alpha T$ (ici U_{\min} puisque la tension est croissante au delà). En régime permanent, on retrouve nécessairement la même tension u à $t = 0$ et à $t = T$.



1. Intervalle de temps $[0, \alpha T]$:

On a le schéma équivalent suivant :



L'intensité i est égale à $-I'$. On a donc :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = -I'$$

En séparant les variables, on a :

$$du = -\frac{I'}{C} dt < 0$$

La fonction $u(t)$ est donc décroissante.

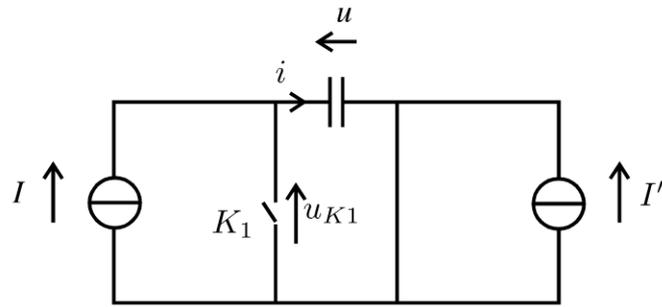
On intègre entre 0 et αT :

$$U_{\min} - U_{\max} = -\frac{I'}{C} \alpha T$$



2. Intervalle de temps $[\alpha T, T]$:

On a le schéma équivalent suivant :



L'intensité i est égale à I . On a donc :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = I$$

En séparant les variables, on a :

$$du = \frac{I}{C} dt > 0$$

La fonction $u(t)$ est donc croissante.

On intègre entre αT et T :

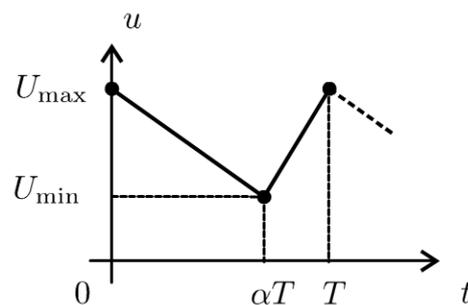
$$U_{\max} - U_{\min} = \frac{I}{C} (1 - \alpha) T$$

3. On a vu dans les deux questions précédentes que $U_{\max} - U_{\min} = \frac{I'}{C} \alpha T$

et que $U_{\max} - U_{\min} = \frac{I}{C} (1 - \alpha) T$. On obtient en simplifiant :

$$I' = \frac{1 - \alpha}{\alpha} I$$

4. La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue. Le graphe suivant représente u en fonction du temps.



5. Puissance moyenne P_1 fournie par le générateur I :

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_0^T I u_{K1} dt = \frac{I}{T} \int_{\alpha T}^T u dt$$



Il faut se placer en convention générateur pour calculer une puissance fournie et en convention récepteur pour calculer une puissance reçue.



$\int_{\alpha T}^T u dt$ représente l'aire sous la courbe :

$$\frac{\text{grande base} + \text{petite base}}{2} \times \text{hauteur} = \frac{U_{\min} + U_{\max}}{2} (1 - \alpha) T$$

On a donc :

$$P_1 = \frac{I}{2} (U_{\min} + U_{\max}) (1 - \alpha)$$

Puissance moyenne P_2 reçue par le générateur I' :

$$P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T I' (-u_{K2}) dt = \frac{I'}{T} \int_0^{\alpha T} u dt$$

$\int_0^{\alpha T} u dt$ représente l'aire sous la courbe :

$$\frac{U_{\min} + U_{\max}}{2} \alpha T$$

On a donc : $P_1 = \frac{\alpha I'}{2} (U_{\min} + U_{\max})$. On a vu que $I' = \frac{1 - \alpha}{\alpha} I$, soit :

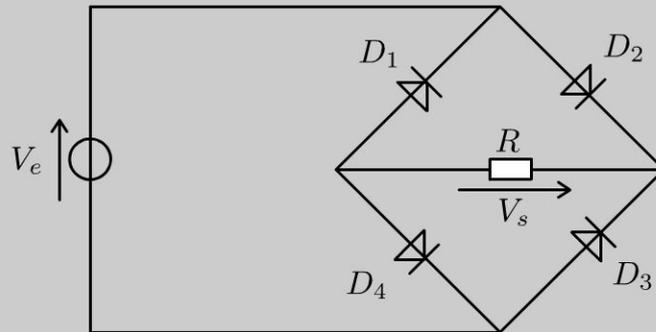
$$P_1 = \frac{\alpha \frac{1 - \alpha}{\alpha} I}{2} (U_{\min} + U_{\max}) = \frac{I}{2} (U_{\min} + U_{\max}) \alpha$$

Les deux puissances moyennes P_1 et P_2 sont égales. Toute la puissance est transférée de l'entrée vers la sortie.

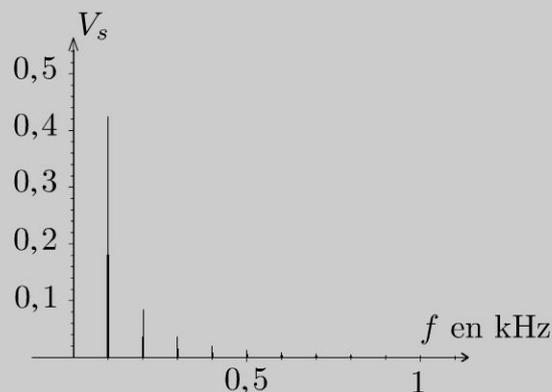
Interprétation physique : En régime permanent, la bobine ne consomme pas de puissance en moyenne. Le transistor et la diode sont idéaux. Ils ne consomment pas de puissance en moyenne.

Exercice 21.3 : Redressement avec un pont de diodes

On considère le montage suivant comportant une résistance R et 4 diodes parfaites. La tension d'entrée est sinusoïdale de pulsation ω que l'on peut écrire sous la forme : $V_e = E_m \sin(\omega t)$.



1. Déterminer la caractéristique V_s en fonction de V_e en étudiant deux cas : $V_e \geq 0$ et $V_e \leq 0$. Représenter la tension de sortie en fonction du temps. Interpréter le spectre de Fourier de la sortie.



2. Proposer un montage expérimental permettant de visualiser les tensions d'entrée et de sortie avec un oscilloscope ne disposant pas d'entrée différentielle.

Analyse du problème

Le circuit est non linéaire. Il faut utiliser la méthode de résolution des circuits non linéaires en faisant des hypothèses de fonctionnement sur les diodes.

Cours

Si on applique une tension sinusoïdale à l'entrée, la sortie ne sera pas sinusoïdale contrairement aux circuits linéaires, on aura donc un enrichissement du spectre. On peut utiliser un analyseur de spectre pour étudier les harmoniques qui constituent la distorsion du signal.

Méthode de résolution des circuits non linéaires :

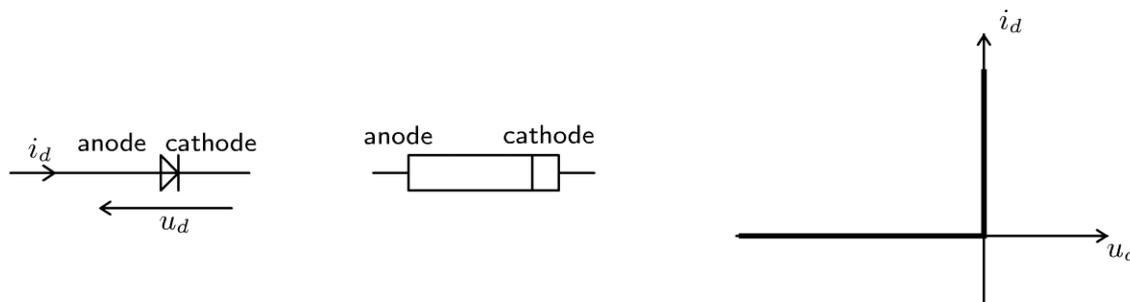
- On fait des hypothèses de fonctionnement pour se ramener à des zones de fonctionnement linéaire. L'énoncé précise quel modèle de diode doit être utilisé.
- Ces hypothèses étant faites, on calcule les différentes tensions ou intensités recherchées.

- Il faut à la fin des calculs vérifier les hypothèses pour s'assurer que c'est bien cohérent. Il ne faut jamais oublier cette dernière étape qui valide les calculs précédents.

Le mode de fonctionnement de la diode est souvent intuitif. Le choix de la bonne hypothèse ne pose en général pas de problème mais pour être rigoureux dans le raisonnement, il est préférable de suivre cette démarche. Il faut prouver avant d'affirmer.

Modèle de la diode parfaite :

Une diode à jonction PN est constituée de deux semi-conducteurs de même nature (silicium ou germanium), dopés différemment : l'un de type N (les électrons sont les charges électriques mobiles), l'autre de type P (les trous positifs sont les charges électriques mobiles). On oriente l'intensité i_d dans le sens de la flèche représentant le sens du courant dans la diode. La tension u_d est en convention récepteur.

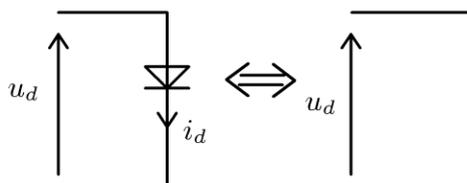


La tension de seuil V_0 vaut environ 0,2 V pour une diode au germanium et 0,6 V pour une diode au silicium. Dans de nombreux cas, les tensions dans les montages comportant des diodes sont très supérieures à la tension de seuil, on peut négliger V_0 .

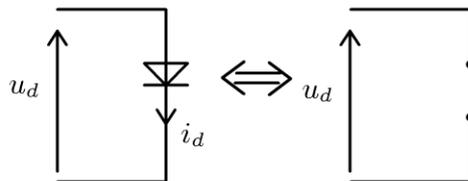
Le modèle de la diode parfaite consiste à prendre $V_0 = 0$ V.

On a deux zones de fonctionnement :

- Si $u_d = 0$: $i_d \geq 0$. La diode est passante. La diode est équivalente à interrupteur fermé. Le fait de supposer la diode passante ne donne aucun renseignement sur l'intensité.



- Si $u_d \leq 0$: $i_d = 0$. La diode est bloquée. La diode est équivalente à un interrupteur ouvert.

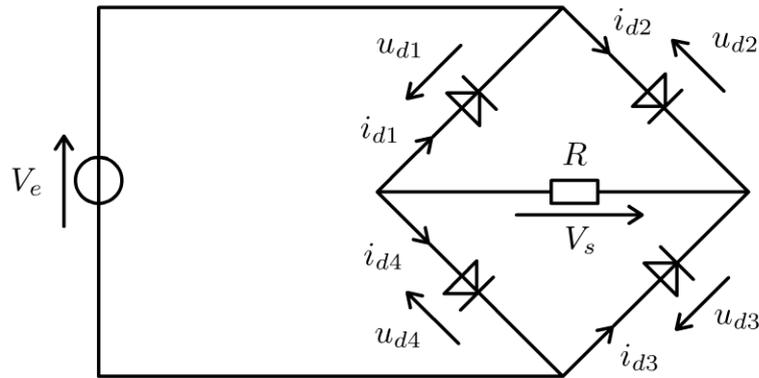


Bilan :

- Si on suppose que la diode est passante, on a $u_d = 0$. Il faut vérifier à la fin des calculs que la diode est bien passante, c'est-à-dire que $i_d \geq 0$.
- Si on suppose que la diode est bloquée, on a $i_d = 0$. Il faut vérifier à la fin des calculs que la diode est bien bloquée, c'est-à-dire que $u_d \leq 0$.



1. Pour chaque diode, on oriente i_d dans le sens de la flèche représentant le sens du courant dans la diode et u_d en convention récepteur.



1^{re} hypothèse : on suppose $V_e \geq 0$

- Supposons : D_2 et D_4 passantes, D_1 et D_3 bloquées.
- La tension de sortie vaut :

$$V_s = V_e$$

- Vérification des hypothèses : $i_{d2} = i_{d4} = \frac{V_s}{R} = \frac{V_e}{R}$. Pour que $i_{d2} \geq 0$ et $i_{d4} \geq 0$, il faut que $V_e \geq 0$. Vérifions que D_1 et D_3 sont bien bloquées : $u_{D1} = u_{D3} = -V_s \leq 0$.

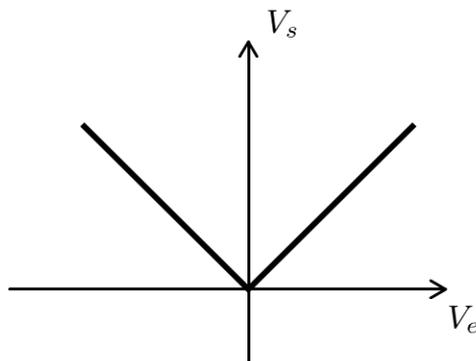
2^e hypothèse : on suppose $V_e \leq 0$

- Supposons : D_1 et D_3 passantes, D_2 et D_4 bloquées.
- La tension de sortie vaut :

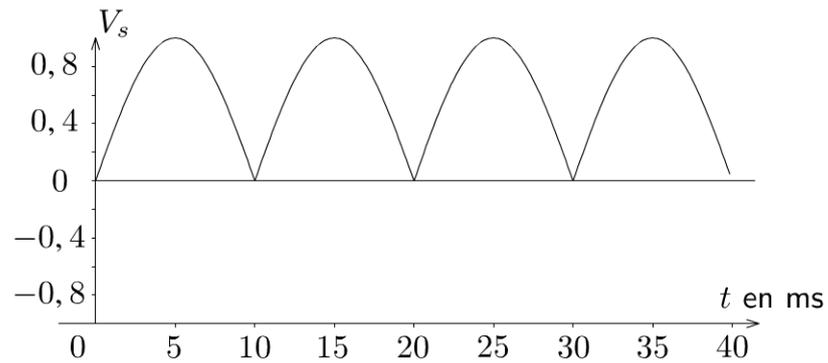
$$V_s = -V_e$$

- Vérification des hypothèses : $i_{d1} = i_{d3} = \frac{V_s}{R} = \frac{-V_e}{R}$. Pour que $i_{d1} \geq 0$ et $i_{d3} \geq 0$, il faut que $V_e \leq 0$. Vérifions que D_2 et D_4 sont bien bloquées : $u_{D2} = u_{D4} = -V_s \leq 0$.

On obtient la caractéristique suivante :



On en déduit la tension de sortie en fonction du temps :

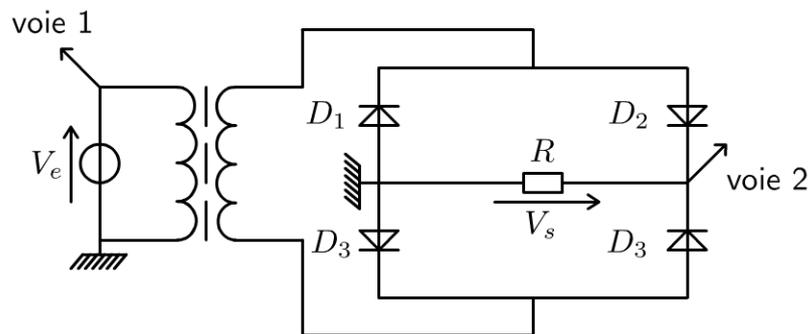


On a un redressement double alternance.

Le signal à l'entrée est sinusoïdal (une seule raie à 50 Hz). Le spectre de la sortie est plus riche, ce qui caractérise la non linéarité du montage. Le fondamental est à 100 Hz. On a un doublement de la fréquence d'entrée.

2. Pour visualiser les tensions d'entrée et de sortie simultanément à l'oscilloscope, on peut utiliser :

- un transformateur d'isolement à cause du problème de masse.



- une sonde différentielle qui mesure la différence de potentiel entre deux points quelconques d'un circuit.

Partie 6

Ondes

Plan

22. Phénomènes de propagation non dispersifs	235
22.1 : Corde de Melde et ondes stationnaires	235
22.2 : Équation des télégraphistes	241
23. Ondes sonores dans les fluides	246
23.1 : Tuyau d'orgue	246
23.2 : Coefficients de réflexion et de transmission	251
23.3 : Transmission à travers une membrane*	256
24. Ondes électromagnétiques dans le vide	261
24.1 : OPPM dans le vide et vecteur de Poynting	261
24.2 : Propagation guidée et relation de dispersion	266
24.3 : Propagation guidée et vecteur de Poynting	270
24.4 : Cavité resonante*	273
25. Absorption et dispersion	279
25.1 : Effet de peau et ARQS magnétique	279
25.2 : Plasma	285
25.3 : Traversée de l'interface atmosphère – ionosphère	290
25.4 : Polarisation des ondes	296
26. Interface entre deux milieux	298
26.1 : Réflexion sur un conducteur parfait	298

Phénomènes de propagation non dispersifs

Exercice 22.1 : Corde de Melde et ondes stationnaires

On considère une corde vibrante de masse linéique μ , de longueur L sans élasticité et sans torsion, se déformant faiblement au voisinage d'un axe Ox . On néglige les effets de la pesanteur.

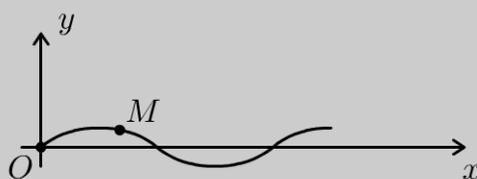
1. Établir l'équation de propagation de d'Alembert sachant que le déplacement $y(x,t)$ est un infiniment petit d'ordre un, ainsi que l'angle $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ que fait la corde au point d'abscisse x avec l'axe Ox .

2. La corde est tendue par le poids d'une masse m maintenue fixée sur la poulie en $x = 0$. Un dispositif impose le mouvement $y(L,t) = b \cos \omega t$ avec $b \ll L$.

On cherche $y(x,t)$ de la forme $f(x) \cos \omega t$. On suppose que $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \neq 0$.

Définir les noeuds et ventres de vibration.

3. Montrer que pour certaines valeurs de ω , il y a résonance et que les pulsations possibles se mettent sous la forme $\omega_n = n\omega_1$. Représenter les noeuds et les ventres de vibration pour $n = 1$ et $n = 2$.



Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde transverse sur l'axe Ox . On obtient l'équation de d'Alembert que l'on rencontre très souvent dans les exercices. Avec les conditions aux limites de l'énoncé, on a une onde stationnaire constituée de noeuds et ventres de vibration. La distance entre deux noeuds successifs est $\frac{\lambda}{2}$ alors que la dis-

tance entre un noeud et un ventre consécutifs est $\frac{\lambda}{4}$.

Cours : Force exercée par une partie de la corde sur l'autre partie

Si on coupe fictivement la corde au point M d'abscisse x , la partie droite de la corde exerce sur la partie gauche une force $\vec{T}(x, t)$ tangente à la corde.

D'après le principe des actions réciproques, la partie gauche exerce sur la partie droite la force $-\vec{T}(x, t)$.



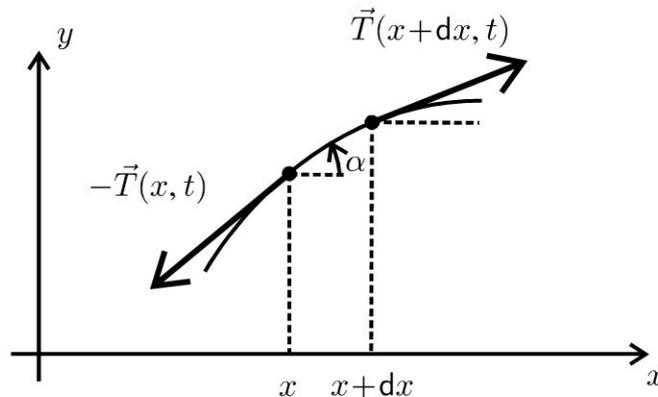
1. À l'instant t , la corde subit un déplacement transversal. On suppose que la corde se déforme faiblement au voisinage de l'axe Ox . On fera donc un développement limité au premier ordre. On écrira par exemple : $\tan \alpha = \alpha$; $\cos \alpha = 1 \dots$

Système : élément de corde compris entre x et $x + dx$. On a $dx = dl \cos \alpha$. On fait un développement limité au premier ordre : $\cos \alpha = 1$, d'où $dx = dl$.

Référentiel : $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ terrestre galiléen.

Bilan des actions extérieures :

- poids négligeable.
- la partie droite exerce une force $\vec{T}(x + dx, t)$ tangente à la corde en $x + dx$.
- la partie gauche exerce une force $-\vec{T}(x, t)$ tangente à la corde en x .

**Théorème de la quantité de mouvement :**

$$\mu dl \vec{a} = -\vec{T}(x, t) + \vec{T}(x + dx, t)$$

La corde se déforme faiblement au voisinage de l'axe Ox . L'accélération de la corde est uniquement suivant \vec{u}_y . Les angles sont fortement augmentés sur la figure pour la clarté de la représentation.

On désigne par T_x et T_y les projections de \vec{T} sur (\vec{u}_x, \vec{u}_y) . On projette le théorème de la quantité de mouvement sur (\vec{u}_x, \vec{u}_y) :

$$\begin{cases} 0 = -T_x(x, t) + T_x(x + dx, t) \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_y(x, t) + T_y(x + dx, t) \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial T_x}{\partial x} dx \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} dx \end{cases}$$

On en déduit de la première équation que T_x est une constante. Au premier ordre, on a : $T_x = T \cos \alpha = T = cte$.

Comme \vec{T} et $d\vec{l}$ sont colinéaires, on a :

$$\tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{T_y}{T_x}$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{T_y}{T}$$

D'où

$$T_y = T \frac{\partial y}{\partial x}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Il reste à remplacer dans le théorème de la quantité de mouvement :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

On obtient l'équation de propagation, appelée ici équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

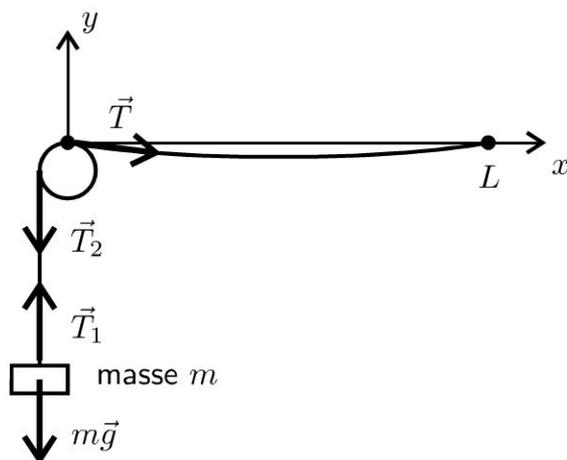
On définit la célérité de l'onde :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

L'onde se propage sur l'axe Ox et le mouvement d'un point de la corde est dans une direction orthogonale à Ox . On dit que **l'onde est transverse**.

2. La poulie et la masse m sont immobiles. La masse m est en équilibre, donc $\vec{T}_1 + m\vec{g} = \vec{0}$. La tension du fil idéal et tendu est uniforme le long de celui-ci. On a donc $\vec{T}_2 = -\vec{T}_1$. On a vu dans la question précédente que $T_x = T = constante$. Comme la poulie est immobile, on en déduit que :

$$T = \|\vec{T}_2\| = \|\vec{T}_1\| = mg$$



On cherche $y(x,t)$ de la forme $f(x) \cos \omega t$. Les variables x et t sont découplées.

On dit que l'on a une **onde stationnaire**.

Pour trouver $f(x)$, il suffit de remplacer $y(x,t)$ dans l'équation de d'Alembert :

$$f''(x) \cos(\omega t) = \frac{1}{c^2} (-\omega^2) f(x) \cos(\omega t)$$

Après simplification, on a :

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$$

On définit k le module du vecteur d'onde, appelé module d'onde :

$$k = \frac{\omega}{c}$$



Cette équation différentielle ressemble à un oscillateur harmonique. Attention : les dérivées sont par rapport à x et non par rapport au temps t . Le coefficient devant $f(x)$ est homogène à l'inverse d'une distance au carré, ce qui justifie le changement de variable avec k .



On en déduit directement la solution de cette équation différentielle :

$$f(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

On obtient donc :

$$y(x,t) = (A \cos kx + B \sin kx) \cos(\omega t)$$

On a deux fonctions périodiques :

- périodicité temporelle de période T . La pulsation ω est définie par :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

- périodicité spatiale de période λ . Le vecteur d'onde k est défini par :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma. \text{ On appelle } \sigma \text{ le nombre d'onde ou fréquence spatiale.}$$

Deux conditions aux limites :

- $y(0,t) = 0 = A \cos \omega t$. On en déduit que $A = 0$.
- $y(L,t) = b \cos \omega t = B \sin kL \cos \omega t$. D'où : $B = \frac{b}{\sin kL}$.

On a donc :

$$y(x,t) = \frac{b}{\sin kL} \sin kx \cos (\omega t)$$

On a des noeuds et des ventres de vibration :

Noeuds de vibration : L'amplitude de la vibration est nulle en un noeud de vibration. On n'a pas de mouvement de la corde. Pour déterminer les abscisses correspondantes, il suffit de résoudre : $\sin kx = 0$, soit :

$$kx = n\pi$$

avec n entier. On obtient :

$$x_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n \frac{\lambda}{2}$$

La distance entre deux noeuds successifs est $\frac{\lambda}{2}$.

Ventres de vibration : L'amplitude de la vibration est maximale. En un point d'un ventre de vibration, on a :

$$\sin kx = \pm 1$$

D'où :

$$kx = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

avec m entier. On obtient alors :

$$x_m = \frac{\pi}{2k} + m \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2 \frac{2\pi}{\lambda}} + m \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$$

La distance entre deux ventres successifs est $\frac{\lambda}{2}$.

La distance entre un noeud et un ventre de vibration consécutifs est $\frac{\lambda}{4}$.

3. Si $\sin kL = \sin \left(\frac{\omega}{c} L \right) \rightarrow 0$, l'amplitude tend vers l'infini. On dit que l'on a résonance pour certaines valeurs de k , donc certaines valeurs de la pulsation.

En pratique, l'amplitude reste finie à cause des frottements. Le développement limité effectué précédemment n'est plus valable.

On a alors :

$$kL = \frac{\omega}{c}L = n\pi$$

avec n entier. On a résonance pour les pulsations suivantes :

$$\omega_n = n \frac{\pi c}{L}$$

Pour $x = L$, on a $y = b \cos \omega t$. C'est pratiquement un noeud de vibration puisque l'amplitude b est très faible devant l'amplitude des ventres de vibration.

Étude du cas où $n = 1$ – Excitation du premier mode propre

On l'obtient pour une pulsation d'excitation $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$, soit une fréquence

$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{c}{2L}$. Cette fréquence est appelée fréquence fondamentale.

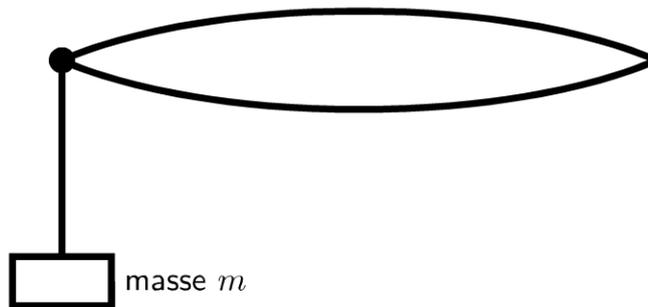
La longueur d'onde est :

$$\lambda_1 = cT_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{c}{\frac{c}{2L}} = 2L$$

On a donc la relation :

$$L = \frac{\lambda_1}{2}$$

On a la figure suivante. On a un seul ventre de vibration.



On retient que lorsque la longueur L est égale à la moitié de la longueur d'onde, on a le premier mode propre. On peut mémoriser ce résultat facilement sachant que la distance entre deux noeuds successifs est la moitié de la longueur d'onde.



Étude du cas où $n = 2$ – Excitation du deuxième mode propre

On l'obtient pour une pulsation d'excitation $\omega_2 = \frac{2\pi c}{L}$, soit une fréquence

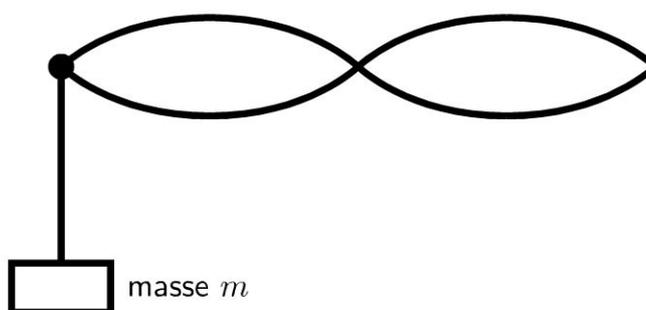
$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{c}{L}$. Cette fréquence est appelée 2^e harmonique.

La longueur d'onde est :

$$\lambda_2 = cT_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{c}{\frac{c}{L}} = L$$

On a deux ventres de vibration aux abscisses : $\frac{\lambda_2}{4}$ et $\frac{3\lambda_2}{4}$.

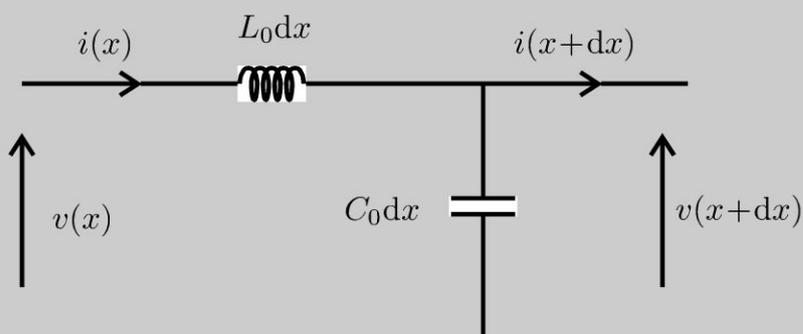
On a trois noeuds de vibration aux abscisses : $0, \frac{\lambda_2}{2}$ et λ_2 .



Si on fait l'expérience et qu'on augmente la fréquence de l'excitation, on observe sur la corde des ondes stationnaires de faible amplitude sauf pour certaines valeurs correspondant aux modes propres calculés précédemment.

Exercice 22.2 : Équation des télégraphistes

Un câble coaxial est assimilé à un circuit à constantes réparties, de sorte qu'une longueur dx de câble est représentée par le schéma électrique équivalent suivant :



où L_0, C_0 représentent respectivement l'inductance linéique et la capacité linéique du câble. Dans la section d'abscisse x du câble, le courant vaut $i(x, t)$ et la différence de potentiel $v(x, t)$. Dans la section d'abscisse $x + dx$ du câble, le courant vaut $i(x + dx, t)$ et la différence de potentiel $v(x + dx, t)$.

1. Établir le système d'équations reliant les grandeurs $i(x, t)$ et $v(x, t)$. En déduire les équations vérifiées par les fonctions $i(x, t)$ et $v(x, t)$. En déduire c la vitesse de propagation des ondes.
2. On étudie la propagation d'une onde plane progressive harmonique se propageant vers les $x > 0$. On pose $\underline{i}(x, t) = I_0 \exp(j(\omega t - kx))$ et $\underline{v}(x, t) = V_0 \exp(j(\omega t - kx))$. Montrer que \underline{v} et \underline{i} sont en phase. Établir la rela-

tion de dispersion. On pose $\underline{Z}_C = \frac{v}{i}$. Exprimer \underline{Z}_C en fonction de L_0 et C_0 . Calculer l'impédance caractéristique de la ligne \underline{Z}_C et c la vitesse de propagation des ondes sachant que $L_0 = 0,28 \mu\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$; $C_0 = 112 \text{pF}\cdot\text{m}^{-1}$.

3. Que devient la relation $\frac{v}{i}$ pour une onde plane progressive harmonique se propageant vers les $x < 0$?

4. L'extrémité de la ligne ($x = L$) est fermée sur une impédance complexe \underline{Z}_r . On pose $i(x, t) = I_0 \exp(j(\omega t - kx)) + I'_0 \exp(j(\omega t + kx))$. En déduire $v(x, t)$. Calculer à l'extrémité du câble, le coefficient de réflexion en tension puis le coefficient de réflexion en intensité. Interpréter les cas particuliers : $\underline{Z}_r = 0$, $\underline{Z}_r \rightarrow \infty$ et $\underline{Z}_r = \underline{Z}_C$.

Analyse du problème

L'approximation des régimes quasi stationnaires est valable si la dimension du circuit est négligeable devant la longueur d'onde, ce qui est le cas pour un élément de longueur dx . On peut donc appliquer la loi des noeuds et la loi des mailles pour obtenir le système d'équations différentielles.



1. Loi des noeuds :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + C_0 dx \frac{\partial v}{\partial t}$$

Remarque : on devrait écrire $C_0 dx \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) (x + dx, t)$.

La formule de Taylor permet d'écrire :

$$C_0 dx \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) (x + dx, t) \right] = C_0 dx \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) (x, t) + C_0 dx \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} dx$$

Le deuxième terme $C_0 dx \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} dx$ est un infiniment petit du deuxième ordre (produit de deux infiniment petits d'ordre 1), alors que le premier terme $C_0 dx \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) (x, t)$ est un infiniment petit du premier ordre. On néglige tous les termes d'ordre supérieur à 1, ce qui revient à négliger le deuxième terme devant le premier terme.



Comme $i(x + dx, t) = i(x, t) + \frac{\partial i}{\partial x} dx$, on en déduit que :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{éq. 1})$$

Loi des mailles :

$$v(x, t) = v(x + dx, t) + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}$$

Comme $v(x + dx, t) = v(x, t) + \frac{\partial v}{\partial x} dx$, on en déduit que :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \quad (\text{éq. 2})$$

On calcule $\left(\frac{\partial(1)}{\partial x}\right) : \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -C_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}$

On calcule $\left(\frac{\partial(1)}{\partial t}\right) : \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -C_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$

On calcule $\left(\frac{\partial(2)}{\partial x}\right) : \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$

On calcule $\left(\frac{\partial(2)}{\partial t}\right) : \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$

Les variables x et t sont indépendantes. On peut permuter l'ordre des dérivées partielles, soit :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$$



Par élimination, on obtient :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -C_0 \left[-L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right]$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -L_0 \left[-C_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right]$$

On en déduit les équations d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

La vitesse de propagation des ondes est :

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

2. On reporte $\underline{i}(x,t) = I_0 \exp(j(\omega t - kx))$
et $\underline{v}(x,t) = \underline{V}_0 \exp(j(\omega t - kx))$ dans les équations (1) et (2) :

$$\begin{cases} -jkI_0 = -C_0(j\omega\underline{V}_0) \\ -jk\underline{V}_0 = -L_0(j\omega I_0) \end{cases}$$

ce qui donne : $\frac{\underline{V}_0}{I_0} = \frac{k}{C_0\omega} = \frac{L_0\omega}{k}$.

On a donc \underline{v} et \underline{i} en phase. On en déduit la relation de dispersion :

$$\omega = kc$$

L'impédance caractéristique du câble est :

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{\underline{V}_0}{I_0} = \frac{k}{C_0\omega} = \frac{1}{C_0c} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

Application numérique : $\underline{Z}_C = 50 \Omega$ et $c = 1,79 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

3. Pour une onde se propageant dans l'autre sens :

$\underline{i}(x,t) = I_0 \exp(j(\omega t + kx))$ et $\underline{v}(x,t) = \underline{V}_0 \exp(j(\omega t + kx))$.

En reportant dans l'équation (1), on obtient :

$$jkI_0 = -C_0(j\omega\underline{V}_0)$$

On en déduit que :

$$\frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{\underline{V}_0}{I_0} = -\frac{k}{C_0\omega} = -\frac{L_0\omega}{k} = -\underline{Z}_C$$

Remarque : Il faut bien distinguer l'onde incidente (intensité notée \underline{i}_i) et l'onde réfléchie (intensité notée \underline{i}_r).

On a vu que pour l'onde incidence :

$$\underline{v}_i(x,t) = \underline{Z}_C \underline{i}_i(x,t)$$

et pour l'onde réfléchie :

$$\underline{v}_r(x,t) = -\underline{Z}_C \underline{i}_r(x,t)$$



4. La tension se déduit de l'intensité en utilisant l'impédance caractéristique :

$$\underline{v}(x,t) = \underline{Z}_C \underline{i}_i(x,t) - \underline{Z}_C \underline{i}_r(x,t)$$

On a donc :

$$\underline{v}(x,t) = \underline{Z}_C [I_0 \exp(j(\omega t - kx)) - I'_0 \exp(j(\omega t + kx))]$$

À l'extrémité de la ligne, la loi d'Ohm donne :

$$\underline{v}(L,t) = \underline{Z}_r \underline{i}(L,t)$$

Le théorème de superposition permet de calculer $\underline{i}(L,t)$ en fonction de $\underline{i}_i(L,t) = I_0 \exp(j(\omega t - kL))$ et de $\underline{i}_r(L,t) = I'_0 \exp(j(\omega t + kL))$:

$$\underline{i}(L,t) = \underline{i}_i(L,t) + \underline{i}_r(L,t)$$



Il faut bien mettre un signe + entre $\underline{i}_i(L,t)$ et $\underline{i}_r(L,t)$ puisqu'on applique le théorème de superposition.



On a donc :

$$\underline{v}(L,t) = \underline{Z}_r [I_0 \exp(j(\omega t - kL)) + I'_0 \exp(j(\omega t + kL))]$$

Soit :

$$\underline{v}(L,t) = \underline{Z}_C [I_0 \exp(j(\omega t - kL)) - I'_0 \exp(j(\omega t + kL))]$$

On en déduit que :

$$[\underline{Z}_C - \underline{Z}_r] I_0 \exp(j(\omega t - kL)) = [\underline{Z}_r + \underline{Z}_C] I'_0 \exp(j(\omega t + kL))$$

À l'extrémité du câble, le coefficient de réflexion en intensité est :

$$\underline{\rho}_I = \frac{\underline{i}_r(L,t)}{\underline{i}_i(L,t)} = \frac{\underline{Z}_C - \underline{Z}_r}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_r}$$

On en déduit le coefficient de réflexion en tension :

$$\underline{\rho}_V = \frac{\underline{v}_r(L,t)}{\underline{v}_i(L,t)} = \frac{-\underline{Z}_C \underline{i}_r}{\underline{Z}_C \underline{i}_i} = -\underline{\rho}_I$$

Cas particuliers :

- $\underline{Z}_r = 0$: le câble est court-circuité à son extrémité. Alors $\underline{\rho}_I = -\underline{\rho}_V = 1$. L'onde incidente est entièrement réfléchie.
- $\underline{Z}_r \rightarrow \infty$: le câble est en circuit ouvert à son extrémité. Alors $\underline{\rho}_I = -\underline{\rho}_V = -1$. L'onde incidente est entièrement réfléchie.
- $\underline{Z}_r = \underline{Z}_C$: $\underline{\rho}_I = \underline{\rho}_V = 0$. Il n'y a pas d'onde réfléchie. L'onde incidente est absorbée au bout de la ligne : c'est l'adaptation d'impédance.

Ondes sonores dans les fluides

Exercice 23.1 : Tuyau d'orgue

On considère un tuyau d'orgue rempli d'air de masse volumique μ_0 . On note p_1 la surpression acoustique et u_1 la vitesse particulière. La célérité du son est notée c . L'extrémité est fermée en $x = 0$ et ouverte en $x = L$. On cherche $p_1(x, t)$ sous la forme d'ondes stationnaires : $p_1(x, t) = p_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \phi)$.

1. Déterminer la vitesse particulière en fonction de p_0 , μ_0 , c , ω , k , x et ϕ .
2. Déterminer la fréquence ν_0 du fondamental et les fréquences des harmoniques ν_n avec n entier. Déterminer la position des noeuds et des ventres de surpression acoustique pour ν_0 et ν_1 .
3. L'amplitude maximale du déplacement des particules est $\xi_{\max} = 0,4$ mm. En déduire l'amplitude maximale p_0 de la surpression acoustique pour la fréquence ν_0 .

Application numérique : $\mu_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$; $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$; $L = 60 \text{ cm}$.

Analyse du problème

Cet exercice traite d'un problème d'acoustique. On ne peut pas utiliser l'impédance acoustique car l'onde est stationnaire. L'équation d'Euler permet d'en déduire la vitesse particulière. Il faut faire attention aux conditions aux limites.

Cours : Approximation acoustique

On considère une onde sonore qui se propage dans un fluide. Au repos, le fluide a une masse volumique μ_0 , une pression P_0 et une vitesse particulière nulle.

Lorsque l'onde sonore se propage, les grandeurs précédentes sont modifiées en chaque point du milieu :

- La pression P peut se mettre sous la forme $P = P_0 + p_1$. On appelle p_1 la pression acoustique ou surpression avec $|p_1| \ll P_0$.
- La masse volumique peut se mettre sous la forme : $\mu = \mu_0 + \mu_1$ avec $|\mu_1| \ll \mu_0$.
- La vitesse particulière peut se mettre sous la forme : $\vec{u} = \vec{0} + \vec{u}_1$.

p_1 , μ_1 et u_1 seront considérés comme des infiniment petits du premier ordre.

Équations utiles dans les exercices d'acoustique

On utilisera trois équations qui découlent directement du cours de mécanique des fluides et de thermodynamique en se plaçant dans le cadre de l'approximation acoustique.

Première équation : équation d'Euler. On néglige le terme d'accélération convective qui est du deuxième ordre. On a alors :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p_1$$

Deuxième équation : équation de conservation de la masse.

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{u}_1) = 0$$

Troisième équation : coefficient de compressibilité du fluide.

$$\chi_0 = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dP} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_1}{p_1}$$

En combinant la deuxième et la troisième équation, on a :

$$\frac{\partial (\mu_0 \chi_0 p_1)}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{u}_1) = 0$$

On dérive par rapport au temps et on commute les dérivées partielles :

$$\mu_0 \chi_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \mu_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \right) = 0 \text{ (eq.1)}$$

La divergence de la première équation s'écrit :

$$\text{div} \left(\mu_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \right) = -\text{div}(\vec{\text{grad}} p_1) = -\Delta p_1$$

Soit :

$$\mu_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \right) = -\Delta p_1 \text{ (eq.2)}$$

On en déduit de (1) et (2) l'équation de d'Alembert :

$$\Delta p_1 = \mu_0 \chi_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

On a la même équation de d'Alembert pour u_1 .

La célérité du son dans le milieu est :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_0}}$$

Méthode pour obtenir la relation de dispersion :

On injecte $p_1(x, t)$ dans l'équation de d'Alembert :

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

On a : $-k^2 p_1 = -\frac{1}{c^2} \omega^2 p_1$, d'où

$$\omega = kc$$



1. La surpression est $p_1(x, t) = p_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \phi)$.
L'équation d'Euler en projection sur l'axe Ox s'écrit :

$$\mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} = p_0 k \cos(\omega t) \sin(kx + \phi)$$

On obtient :

$$u_1 = \frac{p_0 k}{\mu_0 \omega} \sin(\omega t) \sin(kx + \phi) = \frac{p_0}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx + \phi)$$

La constante d'intégration est nulle dans tout le cours sur la propagation des ondes.

2. Conditions aux limites.

L'extrémité $x = 0$ est fermée : la vitesse particulière est nulle. On doit donc avoir $u_1 = 0$ pour $x = 0$, soit $\sin \phi = 0$. On choisit alors : $\phi = 0$.

L'extrémité $x = L$ est ouverte : la surpression est nulle. On doit donc avoir $p_1 = 0$ pour $x = L$, soit $\cos(kL) = 0$. Ce qui implique :

$$kL = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

avec n entier positif ou nul.

On a vu que $\omega = kc$. On a alors :

$$kL = \frac{2\pi\nu}{c}L = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Pour chaque valeur de n , on a une fréquence ν , d'où :

$$\nu_n = \frac{c}{4L} + \frac{c}{2L}n$$

La fréquence ν_0 (obtenue avec $n = 0$) est appelée le fondamental :

$$\nu_0 = \frac{c}{4L}$$

Les autres fréquences sont les harmoniques impairs :

$$\nu_n = \nu_0(1 + 2n)$$

On peut définir une longueur d'onde λ_n définie par :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

Comme $kL = \frac{\pi}{2} + n\pi$, alors

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{1}{L} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)$$

On en déduit la longueur d'onde :

$$\lambda_n = \frac{4L}{1 + 2n}$$

a) Étude du fondamental de fréquence ν_0
Noeuds de vibration de surpression acoustique :

On cherche à déterminer la position des noeuds de vibration de surpression acoustique, c'est-à-dire les points pour lesquels :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}x\right) = 0$$

On doit donc avoir :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}x_m = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

avec m entier relatif.

Pour chaque valeur de m , on a une abscisse :

$$x_m = \frac{\lambda_0}{4} + m\frac{\lambda_0}{2}$$

Ventres de vibration de surpression acoustique :

La position des ventres de vibration de surpression acoustique s'obtient lorsque :

$$\left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}x\right)\right| = 1$$

On doit donc avoir :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}x_q = q\pi$$

avec q entier relatif.

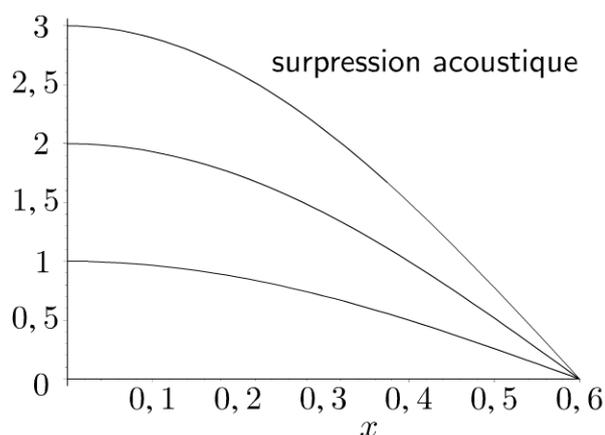
Pour chaque valeur de q , on a une abscisse :

$$x_q = q\frac{\lambda_0}{2}$$

Remarque : On retrouve le résultat connu : la distance entre deux noeuds successifs est $\frac{\lambda_0}{2}$. La distance entre deux ventres successifs est $\frac{\lambda_0}{2}$. La distance entre un noeud et un ventre est $\frac{\lambda_0}{4}$.



On représente sur la figure ci-contre les ondes de pression pour différentes valeurs de p_0 à un instant t . On vérifie que l'on a bien un ventre de surpression en $x = 0$ et un noeud de surpression en $x = L$.



b) Étude de l'harmonique de fréquence $\nu_1 = 3\nu_0$

La longueur d'onde λ_1 est :

$$\lambda_1 = \frac{4L}{3}$$

Noeuds de vibration de surpression acoustique :

Les noeuds de vibration sont pour :

$$x_m = \frac{\lambda_1}{4} + m \frac{\lambda_1}{2}$$

avec m entier relatif. On a alors :

$$x_m = \frac{L}{3} + m \frac{2L}{3}$$

On a deux points : $x = \frac{L}{3}$ et $x = L$.

Ventres de vibration de surpression acoustique :

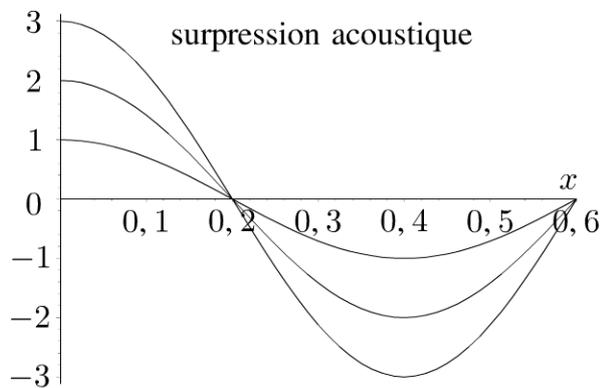
Les ventres de vibration sont pour :

$$x_q = q \frac{\lambda_1}{2}$$

avec q entier relatif. On a alors :

$$x_q = q \frac{2L}{3}$$

On a deux points : $x = 0$ et $x = \frac{2L}{3}$



Remarque : On vérifie que la distance entre deux noeuds successifs est $\frac{\lambda_1}{2}$ et que la distance entre un noeud et un ventre est $\frac{\lambda_1}{4}$.



3. La vitesse particulaire est la dérivée du déplacement ξ par rapport au temps. On a donc :

$$u_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{p_0}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx)$$

On intègre :

$$\xi = -\frac{p_0}{\mu_0 c \omega} \cos(\omega t) \sin(kx)$$

On a toujours la constante d'intégration nulle dans le cours sur la propagation des ondes.

L'amplitude maximale du déplacement des particules est :

$$\xi_{\max} = \frac{p_0}{\mu_0 c \omega} = \frac{p_0}{\mu_0 k c^2}$$

Comme $\lambda_0 = 4L$, on en déduit :

$$\xi_{\max} = \frac{p_0}{2\pi\mu_0 c^2} \lambda_0 = \frac{p_0}{2\pi\mu_0 c^2} 4L = p_0 \frac{2L}{\pi\mu_0 c^2}$$

Finalement la surpression maximale est :

$$p_0 = \frac{\xi_{\max} \pi \mu_0 c^2}{2L} = 157 \text{ Pa}$$

Exercice 23.2 : Coefficients de réflexion et de transmission

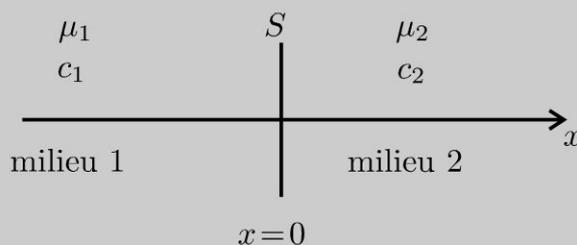
On considère une onde plane progressive monochromatique acoustique se propageant dans le sens des $x > 0$ dans le milieu 1. La vitesse particulière est notée $\underline{u}_i = u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x))$. Elle arrive à l'interface entre deux milieux de surface S à l'abscisse $x = 0$.

On note $\mu_1, c_1, \mu_2, c_2, Z_{a1}$ et Z_{a2} les masses volumiques, célérités du son et impédances acoustiques dans les milieux 1 et 2.

On pose $Z_{a1} = \mu_1 c_1, Z_{a2} = \mu_2 c_2$ et $\alpha = \frac{Z_{a2}}{Z_{a1}}$.

1. Montrer qu'il existe une onde réfléchie et exprimer \underline{u}_r et \underline{u}_t en fonction de r et t les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour la vitesse. En déduire $\underline{p}_i, \underline{p}_r$ et \underline{p}_t puis r et t en fonction de α .

2. Définir le vecteur de Poynting sonore et l'expression de la puissance sonore à travers la surface S . Calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance moyenne en fonction de α . Calculer $R + T$ et interpréter physiquement. Que se passe-t-il si $Z_{a2} \gg Z_{a1}$?



Analyse du problème

Cet exercice traite d'un problème d'acoustique avec deux milieux de propagation. On peut utiliser l'impédance acoustique car on a une onde plane progressive. Attention au signe de l'impédance acoustique pour l'onde réfléchie.

Il faut savoir écrire les conditions aux limites en $x = 0$.

Cours : Impédance acoustique**Onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens $x > 0$:**

On considère une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens des $x > 0$ dans le milieu 1, notée OPPM \oplus . La vitesse particulière est :

$$\underline{u}_i = u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x)).$$

L'équation d'Euler s'écrit dans le cadre de l'approximation acoustique en notation complexe :

$$\mu_1 \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial \underline{p}_i}{\partial x}$$

On a donc :

$$\mu_1 i \omega u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x)) = -\frac{\partial \underline{p}_i}{\partial x}$$

L'intégration donne avec la constante d'intégration nulle :

$$\underline{p}_i = \frac{\mu_1 \omega u_{i0}}{k_1} \exp(i(\omega t - k_1 x))$$

On a la relation $\omega = k_1 c_1$.

On définit l'impédance acoustique dans le milieu 1 de l'onde OPPM \oplus :

$$Z_{a1} = \frac{p_{i0}}{u_{i0}} = \mu_1 c_1$$

Onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens $x < 0$:

Pour l'onde réfléchie dans le milieu 1, notée OPPM \ominus , la vitesse particulière est :

$$\underline{u}_r = u_{r0} \exp(i(\omega t + k_1 x)).$$

L'équation d'Euler s'écrit dans le cadre de l'approximation acoustique en notation complexe :

$$\mu_1 \frac{\partial \underline{u}_r}{\partial t} = -\frac{\partial \underline{p}_r}{\partial x}$$

On a donc :

$$\mu_1 i \omega u_{r0} \exp(i(\omega t + k_1 x)) = -\frac{\partial \underline{p}_r}{\partial x}$$

L'intégration donne avec la constante d'intégration nulle :

$$\underline{p}_r = -\frac{\mu_1 \omega u_{r0}}{k_1} \exp(i(\omega t + k_1 x))$$

On a la relation $\omega = k_1 c_1$.

L'impédance acoustique dans le milieu 1 de l'onde OPPM⊙ est :

$$\frac{p_{r0}}{u_{r0}} = -Z_{a1} = -\mu_1 c_1$$

Remarque : On définit l'impédance acoustique pour une onde plane progressive même si elle n'est pas monochromatique (ou harmonique). On a les mêmes résultats que ceux établis précédemment.

Conditions aux limites

À l'interface entre les deux milieux 1 et 2, on a deux conditions aux limites :

- **Continuité de la vitesse particulière :** on n'a pas de « décollement » à l'interface entre les deux milieux, donc $\underline{u}_1(0,t) = \underline{u}_2(0,t)$.
- **Continuité de la pression :** Si on applique le théorème de la quantité de mouvement à un élément de fluide de volume infiniment petit, on peut montrer que la somme des forces de pression vaut 0. On a alors continuité de la pression : $\underline{p}_1(0,t) = \underline{p}_2(0,t)$.

Comment calculer $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{p}_1, \underline{p}_2$?

On note avec un indice i l'onde incidente, r l'onde réfléchie et t l'onde transmise. Les équations étant linéaires, on peut appliquer le **théorème de superposition** :

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_i + \underline{u}_r ; \underline{u}_2 = \underline{u}_t ; \underline{p}_1 = \underline{p}_i + \underline{p}_r ; \underline{p}_2 = \underline{p}_t$$



Il ne faut pas écrire $\underline{u}_i - \underline{u}_r$ pour calculer \underline{u}_1 !!!



1.

Onde incidente :

La vitesse particulière est : $\underline{u}_i = u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x))$.

L'impédance acoustique est : $Z_{a1} = \frac{p_{i0}}{u_{i0}} = \mu_1 c_1$. On en déduit la surpression :

$$\underline{p}_i = \mu_1 c_1 u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x))$$

avec $\omega = k_1 c_1$.

Onde transmise :

La vitesse particulière est : $\underline{u}_t = u_{t0} \exp(i(\omega t - k_2 x))$.

L'impédance acoustique est : $Z_{a2} = \frac{p_{t0}}{u_{t0}} = \mu_2 c_2$. On en déduit la surpression :

$$\underline{p}_t = \mu_2 c_2 u_{t0} \exp(i(\omega t - k_2 x))$$

avec $\omega = k_2 c_2$.

On suppose qu'il n'existe pas d'onde réfléchie. Les relations de continuité de la vitesse particulière et de la pression s'écrivent en $x = 0$:

$$\begin{cases} \underline{u}_i(0,t) = \underline{u}_t(0,t) \\ \mu_1 c_1 \underline{u}_i(0,t) = \mu_2 c_2 \underline{u}_t(0,t) \end{cases}$$

On devrait donc avoir : $Z_{a1} = Z_{a2}$ ce qui est impossible puisque les deux milieux sont différents. Il existe donc une onde réfléchie.

Onde réfléchie :

La vitesse particulière est : $\underline{u}_r = u_{r0} \exp(i(\omega t + k_1 x))$.

L'impédance acoustique est : $\frac{p_{r0}}{u_{r0}} = -Z_{a1} = -\mu_1 c_1$. On en déduit la surpression :

$$\underline{p}_r = -\mu_1 c_1 u_{r0} \exp(i(\omega t + k_1 x))$$

On définit r et t les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour la vitesse : $r = \frac{u_{r0}}{u_{i0}}$ et $t = \frac{u_{t0}}{u_{i0}}$.

Finalement, on a :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{u}_i = u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x)) \\ \underline{p}_i = \mu_1 c_1 u_{i0} \exp(i(\omega t - k_1 x)) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \underline{u}_r = r u_{i0} \exp(i(\omega t + k_1 x)) \\ \underline{p}_r = -\mu_1 c_1 r u_{i0} \exp(i(\omega t + k_1 x)) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \underline{u}_t = t u_{i0} \exp(i(\omega t - k_2 x)) \\ \underline{p}_t = \mu_2 c_2 t u_{i0} \exp(i(\omega t - k_2 x)) \end{array} \right.$$

On écrit les conditions aux limites en $x = 0$: continuité de la vitesse particulière et de la surpression :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{u}_1(0, t) = \underline{u}_2(0, t) \\ \underline{p}_1(0, t) = \underline{p}_2(0, t) \end{array} \right.$$

On doit donc avoir :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{u}_i(0, t) + \underline{u}_r(0, t) = \underline{u}_t(0, t) \\ \underline{p}_i(0, t) + \underline{p}_r(0, t) = \underline{p}_t(0, t) \end{array} \right.$$

Finalement, on obtient un système à deux équations et deux inconnues permettant de calculer r et t :

$$\left| \begin{array}{l} 1 + r = t \\ \mu_1 c_1 - \mu_1 c_1 r = \mu_2 c_2 t \end{array} \right.$$

D'où :

$$\left| \begin{array}{l} 1 + r = t \\ 1 - r = \alpha t \end{array} \right.$$

On fait la somme des deux équations : $2 = t(1 + \alpha)$. D'où :

$$t = \frac{2}{1 + \alpha}$$

Comme $r = t - 1$, on en déduit : $r = \frac{2}{1 + \alpha} - 1$. Finalement, on a :

$$r = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

2. Onde incidente :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde incidente est :

$$\vec{\Pi}_i = p_i u_i \vec{u}_x$$



Il faut travailler en grandeurs réelles car on a le produit de deux grandeurs sinusoïdales.



On a alors : $\vec{\Pi}_i = \mu_1 c_1 u_{i0}^2 \cos^2(\omega t - k_1 x) \vec{u}_x$.

Le signe + traduit la propagation de l'onde dans le sens des $x > 0$.

Comme la moyenne de la fonction \cos^2 sur une période vaut $\frac{1}{2}$, on en déduit la moyenne du vecteur de Poynting sonore :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2} \mu_1 c_1 u_{i0}^2 \vec{u}_x$$

La puissance moyenne de l'onde incidente est :

$$\langle P_i \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot dS \vec{u}_x = \frac{1}{2} \mu_1 c_1 u_{i0}^2 S$$

Onde réfléchie :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde réfléchie est :

$$\vec{\Pi}_r = -p_r u_r \vec{u}_x$$

On a alors : $\vec{\Pi}_r = -\mu_1 c_1 r^2 u_{i0}^2 \cos^2(\omega t + k_1 x) \vec{u}_x$.

Le signe - traduit la propagation de l'onde dans le sens des $x < 0$.

La moyenne du vecteur de Poynting sonore est :

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{1}{2} \mu_1 c_1 r^2 u_{i0}^2 \vec{u}_x$$

La puissance moyenne de l'onde réfléchie est :

$$\langle P_r \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot (-dS \vec{u}_x) = \frac{1}{2} \mu_1 c_1 r^2 u_{i0}^2 S$$

Onde transmise :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde transmise est :

$$\vec{\Pi}_t = p_t u_t \vec{u}_x$$

On a alors : $\vec{\Pi}_t = \mu_2 c_2 t^2 u_{i0}^2 \cos^2(\omega t - k_2 x) \vec{u}_x$.

Le signe + traduit la propagation de l'onde dans le sens des $x > 0$.

La moyenne du vecteur de Poynting sonore est :

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{1}{2} \mu_2 c_2 t^2 u_{i0}^2 \vec{u}_x$$

La puissance moyenne de l'onde transmise est :

$$\langle P_t \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot (dS \vec{u}_x) = \frac{1}{2} (\alpha \mu_1 c_1) t^2 u_{i0}^2 S$$

On en déduit le coefficient de réflexion R en puissance moyenne :

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = r^2$$

Le coefficient de transmission T en puissance moyenne est :

$$T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \alpha t^2$$

On calcule la somme $R + T$:

$$R + T = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2} = \frac{1 + \alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha}{(1 + \alpha)^2}$$

En simplifiant, on a :

$$R + T = \frac{(1 + \alpha)^2}{(1 + \alpha)^2} = 1$$

Cette relation traduit la conservation de la puissance à la surface S d'abscisse $x = 0$: la puissance de l'onde incidente se répartit entre l'onde réfléchie et l'onde transmise.

Cas particulier si $Z_{a2} \gg Z_{a1}$: on a $\alpha \gg 1$. On en déduit les expressions approchées de r et t : $r = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \approx -1$ et $t = \frac{2}{1 + \alpha} \approx 0$. Ce cas correspond à la réflexion sur un mur. Toute la puissance de l'onde incidente est réfléchie. On vérifie que l'on a $R = 1$ et $T = 0$.

Exercice 23.3 : Transmission à travers une membrane*

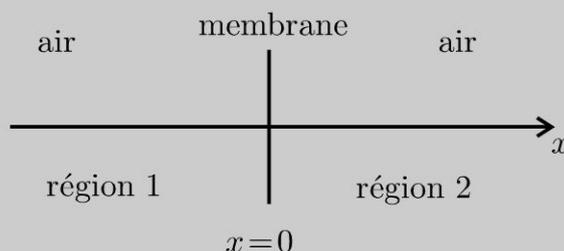
On considère une membrane infiniment fine de masse surfacique σ . On note $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$ la célérité du son dans l'air et $\mu_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ la masse volumique de l'air. L'impédance acoustique de l'air est $Z_a = \mu_0 c$.

Une onde acoustique se propage dans le sens des $x > 0$ dans la région 1. La surpression de l'onde incidente est $\underline{p}_i = p_{i0} \exp(i(\omega t - kx))$. Elle arrive à l'interface $x = 0$. On suppose que l'on a continuité de la vitesse particulière pour $x = 0$ et que la vitesse de la membrane est égale à la vitesse de l'onde transmise. On définit r et t les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour la surpression. On définit T le coefficient de transmission en puissance et $T_{\text{dB}} = 10 \log T$.

1. À cause de la membrane, on n'a pas continuité de la pression. Appliquer le théorème de la quantité de mouvement à la membrane en supposant qu'elle vibre en bloc. Déterminer \underline{r} et \underline{t} en fonction de ω, μ_0, c et σ .

2. Déterminer T le coefficient de transmission en puissance en fonction de ω et ω_0 . Exprimer ω_0 en fonction de μ_0 , c et σ .

3. Calculer σ pour atténuer de 70 dB un signal sinusoïdal de fréquence 2000 Hz.



Analyse du problème

Cet exercice traite d'un problème d'acoustique avec la transmission à travers une membrane. On pourra utiliser l'impédance acoustique en faisant attention au signe pour l'onde réfléchie.

La difficulté est d'écrire correctement les conditions aux limites en $x = 0$. L'énoncé donne les deux équations à écrire.



1.

Onde incidente :

La surpression est :

$$\underline{p}_i = p_{i0} \exp(i(\omega t - kx))$$

L'impédance acoustique est : $Z_a = \frac{p_{i0}}{u_{i0}} = \mu_0 c$. On en déduit la vitesse particulière :

$$\underline{u}_i = \frac{p_{i0}}{\mu_0 c} \exp(i(\omega t - kx))$$

avec $\omega = kc$.

Onde réfléchie :

La surpression est :

$$\underline{p}_r = r p_{i0} \exp(i(\omega t + kx))$$

L'impédance acoustique est : $\frac{p_{r0}}{u_{r0}} = -Z_a = -\mu_0 c$. On en déduit la vitesse particulière :

$$\underline{u}_r = -\frac{r p_{i0}}{\mu_0 c} \exp(i(\omega t + kx))$$

avec $\omega = kc$.

Onde transmise :

La surpression est :

$$\underline{p}_t = t p_{i0} \exp(i(\omega t - kx))$$

L'impédance acoustique est : $Z_a = \frac{p_{i0}}{u_{i0}} = \mu_0 c$. On en déduit la vitesse particulière :

$$\underline{u}_t = \frac{t p_{i0}}{\mu_0 c} \exp(i(\omega t - kx))$$

avec $\omega = kc$.

Expressions de la surpression et de la vitesse particulière dans chaque milieu :

Dans le milieu 1, on a : $\underline{p}_1 = \underline{p}_i + \underline{p}_r$.

Dans le milieu 2, on a : $\underline{u}_2 = \underline{u}_t$.

Continuité de la vitesse particulière pour $x = 0$:

$$\underline{u}_1(0, t) = \underline{u}_2(0, t)$$

On a donc :

$$\underline{u}_i(0, t) + \underline{u}_r(0, t) = \underline{u}_t(0, t)$$

On obtient finalement :

$$1 - \underline{r} = \underline{t}$$



On peut être surpris de ne pas retrouver la relation rencontrée dans de nombreux exercices : $1 + \underline{r} = \underline{t}$. Ici, \underline{r} est le coefficient de réflexion en amplitude pour la surpression et non pour la vitesse particulière.



Théorème de la quantité de mouvement à la membrane :

Bilan des actions :

- Forces de pression exercées par la région 1 :

$$\underline{p}_1 S \vec{u}_x = (\underline{p}_i(0, t) + \underline{p}_r(0, t)) S \vec{u}_x$$

- Forces de pression exercées par la région 2 : $-\underline{p}_2 S \vec{u}_x = -(\underline{p}_t(0, t)) S \vec{u}_x$.

La masse de la membrane est $m = \sigma S$.

La membrane vibre en bloc d'après l'énoncé, on a :

$$\vec{v}_{\text{membrane}} = \underline{u}_1(0, t) = \underline{u}_2(0, t) = \underline{u}_t(0, t)$$

On applique le théorème de la quantité de mouvement à la membrane :

$$m \frac{d\vec{v}_{\text{membrane}}}{dt} = (p_1 - p_2) S \vec{u}_x$$

On a donc :

$$\sigma S \frac{d\underline{u}_t(0, t)}{dt} = (\underline{p}_i(0, t) + \underline{p}_r(0, t) - \underline{p}_t(0, t)) S$$

On en déduit :

$$\sigma \frac{t}{\mu_0 c} i\omega = (1 + \underline{r} - \underline{t})$$

Équations pour déterminer \underline{r} et \underline{t} :

$$\begin{cases} 1 - \underline{r} = \underline{t} \\ 1 + \underline{r} = \underline{t} \left(1 + i \frac{\sigma \omega}{\mu_0 c} \right) \end{cases}$$

On fait la somme des deux équations :

$$2 = \underline{t} \left(2 + i \frac{\sigma \omega}{\mu_0 c} \right)$$

On en déduit le coefficient de transmission en amplitude pour la surpression :

$$\underline{t} = \frac{1}{1 + i \frac{\sigma \omega}{2\mu_0 c}} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec $\omega_0 = \frac{2\mu_0 c}{\sigma}$.

Le coefficient de transmission est donc un filtre passe-bas du premier ordre.

On pose :

$$\underline{t} = t \exp(i\phi)$$

avec

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Si la pulsation de l'onde incidente est trop grande, l'onde sonore ne traverse plus la membrane et toute la puissance de l'onde est réfléchi.

2.

Onde incidente :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde incidente est :

$$\vec{\Pi}_i = p_i u_i \vec{u}_x = \frac{p_{i0}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$



Il faut travailler en grandeurs réelles car on a le produit de deux grandeurs sinusoïdales.



La moyenne du vecteur de Poynting sonore pour l'onde incidente est :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{p_{i0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

La puissance moyenne de l'onde incidente est :

$$\langle P_i \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot dS \vec{u}_x = \frac{1}{2} \frac{p_{i0}^2}{\mu_0 c} S$$

Onde transmise :

Le vecteur de Poynting sonore pour l'onde transmise est :

$$\vec{\Pi}_t = p_t u_t \vec{u}_x = \frac{t^2 p_{i0}^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx + \phi) \vec{u}_x$$

La moyenne du vecteur de Poynting sonore pour l'onde transmise est :

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{t^2 p_{i0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

La puissance moyenne de l'onde transmise est :

$$\langle P_t \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot dS \vec{u}_x = \frac{1}{2} \frac{t^2 p_{i0}^2}{\mu_0 c} S$$

Le coefficient de transmission en puissance est :

$$T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Le coefficient de transmission en puissance peut s'exprimer en décibels :

$$T_{\text{dB}} = 10 \log T = -10 \log \left(1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \right)$$

On cherche à avoir $T_{\text{dB}} = -70$, soit :

$$70 = 10 \log \left(1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \right)$$

On doit donc avoir :

$$1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 = 10^7$$

Soit :

$$f_0 = \frac{f}{\sqrt{10^7 - 1}}$$

D'après l'énoncé, $f = 2000$ Hz. On en déduit : $f_0 = 0,63$ Hz.

On a vu que :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\mu_0 c}{\sigma}$$

On a donc :

$$\sigma = \frac{2\mu_0 c}{2\pi f_0} = 222 \text{ kg.m}^{-2}$$

Ondes électromagnétiques dans le vide

Exercice 24.1 : OPPM dans le vide et vecteur de Poynting

On considère une onde plane progressive monochromatique (OPPM) qui se propage suivant l'axe Ox . Le champ électrique est polarisé suivant \vec{u}_y .

1. Établir l'équation de propagation et en déduire la relation de dispersion.
2. Déterminer le vecteur de Poynting. En déduire la puissance moyenne transportée par l'onde à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.
3. Déterminer le flux du champ magnétique à travers un cadre carré de côté $a = 1$ m, formé de N spires et situé dans un plan perpendiculaire à \vec{u}_z pour une fréquence $f = 100$ MHz.
4. Que se passe-t-il si la fréquence vaut $f = 160$ kHz ?

Analyse du problème

On étudie la propagation d'une OPPM polarisée suivant \vec{u}_y . On verra une méthode systématique pour établir l'équation de propagation. On pourra en déduire la relation de dispersion.

Le calcul du champ magnétique peut se faire avec les opérateurs $\text{rot } \vec{E} = i\vec{k} \wedge \vec{E}$ ou $\text{rot } \vec{E} = -i\vec{k} \wedge \vec{E}$ puisqu'on a une OPPM. Dans le cas contraire, il faut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.

Attention à bien revenir en grandeurs réelles pour calculer le vecteur de Poynting.

On va comparer la longueur d'onde à la dimension a du cadre et remarquer que l'on peut faire un calcul simplifié si la longueur d'onde est très grande devant a .

Cours : Définition d'une onde plane progressive monochromatique

On étudie la propagation du champ électrique suivant l'axe Ox .

L'onde est **plane** si le champ électrique prend des valeurs uniformes pour tout plan perpendiculaire à la direction de propagation (ici direction \vec{u}_x). Le plan perpendiculaire à la direction de propagation est appelé **plan d'onde**.

L'onde est **progressive** si le champ électrique peut se mettre sous la forme

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x(x - ct) \\ E_y(x - ct) \\ E_z(x - ct) \end{cases}$$

On appelle c la célérité de l'onde.

L'onde est progressive, polarisée suivant \vec{u}_y , donc

$$\vec{E} = E(x - ct) \vec{u}_y$$

L'onde est plane, progressive, harmonique et polarisée suivant \vec{u}_y donc le champ électrique peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

Pour une OPPM dans le vide, on va démontrer que

$$\omega = kc$$

En notation complexe, on a : $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$.



1. Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

$$\text{Equation de Maxwell-Gauss : } \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\text{Equation de Maxwell-Flux : } \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{Equation de Maxwell-Faraday : } \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Equation de Maxwell-Ampère : } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On n'a pas de charges et de courants volumiques.

Cours : Méthode systématique pour écrire l'équation de propagation en électromagnétisme

On calcule le rotationnel du rotationnel du champ électrique ou du champ magnétique. Il faut connaître par coeur la formule :

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$



On déduit des équations de Maxwell que :

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

puisque $\text{div} \vec{E} = \vec{0}$ dans le vide.

On peut inverser les opérateurs rotationnel et dérivation partielle par rapport au temps puisqu'on a des variables indépendantes. On a donc :

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On en déduit l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

en posant

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

Cours : Méthode pour obtenir la relation de dispersion

Dans l'exercice, le champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$$

Il suffit de reporter le champ électrique dans l'équation de propagation pour en déduire la relation de dispersion.



On a alors :

$$\Delta \underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \underline{\vec{E}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \underline{\vec{E}}$$

On obtient la relation de dispersion d'une OPPM dans le vide :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Cours : Expression du champ magnétique en fonction du champ électrique

Le champ électrique est de la forme : $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$.

Dans le cas d'une OPPM avec les coordonnées cartésiennes, on peut utiliser les opérateurs :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega \underline{\vec{E}} ; \vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} \text{ et } \vec{\text{div}} \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$$

Remarque : On peut utiliser une autre convention dans les autres exercices.

Le champ électrique complexe peut se mettre sous une autre forme :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(-i(\omega t - kx)) \vec{u}_y.$$

Dans le cas d'une OPPM avec les coordonnées cartésiennes, on peut utiliser les opérateurs mais avec des signes différents :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{E}} ; \vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} \text{ et } \vec{\text{div}} \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$$



Les opérateurs $\vec{\nabla} = i\vec{k}$ ou $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$ ne sont utilisables que pour une OPPM avec les coordonnées cartésiennes.

Si on ne peut pas utiliser les opérateurs simplifiés précédents, il faut écrire l'équation de Maxwell-Faraday et en déduire par le calcul du rotationnel le champ magnétique.



On a une OPPM. Le champ magnétique se déduit directement de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -\left(i\omega \underline{\vec{B}}\right)$$

Finalement, on a :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

On a vu que $\omega = kc$. On a également :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_z$$

En notation réelle, on a :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y ; \quad \vec{B} = \text{Re}(\underline{\vec{B}}) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$$

On vérifie que le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est bien direct.



Le vecteur de Poynting fait intervenir le produit de grandeurs sinusoïdales. Comme dans le cours sur la puissance moyenne en régime sinusoïdal, il faut revenir en grandeurs réelles dès qu'on a le produit de deux sinusoïdes.



Le vecteur de Poynting est défini par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

On a vu que $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$. On a donc :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting sur une période est :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \vec{u}_x$$

car la moyenne temporelle de $\cos^2(\omega t - kx)$ vaut $\frac{1}{2}$.

On considère une surface S orthogonale à la direction de propagation. On choisit $\vec{S} = S \vec{u}_x$.

La puissance moyenne qui traverse la surface S est le flux du vecteur de Poynting :

$$P_{\text{moy}} = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \vec{u}_x \cdot dS \vec{u}_x = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} S$$

3. La fréquence de l'onde est $f = 100$ MHz. C'est une onde radio utilisée dans la bande FM (modulation de fréquence). La longueur d'onde est :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 3 \text{ m.}$$

La longueur d'onde est du même ordre de grandeur que a . On ne peut pas supposer que la champ magnétique est uniforme dans le cadre.

On oriente le cadre suivant \vec{u}_z .

Le flux du champ magnétique en notation complexe à travers une spire :

$$\underline{\varphi} = \iint_S \underline{\vec{B}} \cdot d\vec{S}$$

On a alors :

$$\underline{\varphi} = \iint_S \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kx)) dx dy$$

Il faut intégrer x entre $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$ et y entre $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$. Comme les variables sont indépendantes, on a le produit de deux intégrales :

$$\underline{\varphi} = \frac{E_0}{c} \exp(i\omega t) \left(\int_{-a/2}^{a/2} \exp(-ikx) dx \right) \left(\int_{-a/2}^{a/2} dy \right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \underline{\varphi} &= \frac{E_0 a}{c} \exp(i\omega t) \int_{-a/2}^{a/2} \exp(-ikx) dx \\ &= \frac{E_0 a}{c} \exp(i\omega t) \left[\frac{\exp(-ikx)}{-ik} \right]_{-a/2}^{a/2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\underline{\varphi} = \frac{E_0 a}{-ikc} \exp(i\omega t) \left(\exp\left(-ik\frac{a}{2}\right) - \exp\left(ik\frac{a}{2}\right) \right)$$

En simplifiant, on obtient :

$$\underline{\varphi} = \frac{E_0 a}{-ikc} \exp(2i\omega t) \left(2i \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right) = \frac{2E_0 a}{kc} \exp(i\omega t) \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Il reste à prendre la partie réelle pour obtenir le flux réel :

$$\varphi = \frac{2E_0 a}{kc} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos(\omega t)$$

Le flux du champ magnétique à travers les N spires est :

$$\Phi = \frac{2NE_0 a}{kc} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos(\omega t)$$

4. La fréquence de l'onde électromagnétique est $f = 160$ kHz. C'est une onde radio utilisée dans la bande AM (modulation d'amplitude). La longueur d'onde est :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{160 \times 10^3} = 1875 \text{ m.}$$

La longueur d'onde est très grande devant la dimension du cadre. Sur une distance de 1 m, le champ magnétique est quasi uniforme et quasiment la même valeur qu'en $x = 0$. On peut alors calculer le flux plus simplement que dans la question précédente.

$$\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = NBS = N \left(\frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \right) (a^2)$$

On peut effectuer un développement limité de la relation trouvée dans la question précédente puisque

$$\frac{ka}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} a = \frac{\pi a}{\lambda} \ll 1$$

On retrouve bien le même résultat :

$$\Phi = \frac{2NE_0a}{kc} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos(\omega t) \approx \frac{2NE_0a}{kc} \frac{ka}{2} \cos(\omega t) = N \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) a^2$$

Remarque : Il est important de bien raisonner sur la longueur d'onde. Si la longueur d'onde est très grande devant la dimension du cadre, on peut supposer que le champ est magnétique est quasi uniforme au niveau du cadre et le calcul du flux du champ magnétique est beaucoup plus simple.

Exercice 24.2 : Propagation guidée et relation de dispersion

On considère deux plans parfaitement conducteurs, parallèles au plan Oyz , d'abscisses $x = 0$ et $x = d$. Une onde électromagnétique se propage dans le vide suivant \vec{u}_z entre ces deux plans. On appelle c la célérité de la lumière dans le vide.

1. Établir l'équation de propagation.

2. On cherche le champ électrique sous la forme $\vec{E} = E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y$. Établir la relation de dispersion. Montrer que l'on doit avoir une fréquence supérieure à une fréquence minimale f_{\min} pour avoir propagation de cette onde. Déterminer f_{\min} en fonction de c et d . Quelle est la nature de l'onde ?

Analyse du problème

La méthode systématique pour établir l'équation de propagation est de calculer le rotationnel du rotationnel du champ électrique. On en déduit une équation différentielle sur $E(x)$. On a des conditions aux limites qui imposent des contraintes sur le champ électrique et qui permettent d'en déduire la relation de dispersion.



1. On calcule le rotationnel du rotationnel en utilisant les équations de Maxwell :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

puisque dans le vide $\text{div} \vec{E} = \vec{0}$.

On peut inverser les opérateurs rotationnel et dérivation partielle par rapport au temps puisqu'on a des variables indépendantes. On a donc :

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On en déduit l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

en posant

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

2. On cherche le champ électrique en notation complexe de la forme :

$$\vec{E} = E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y.$$

On remplace le champ électrique dans l'équation de propagation et on calcule les différents termes.



Attention au calcul du Laplacien en coordonnées cartésiennes.

Le Laplacien scalaire est :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) U$$

Le Laplacien vectoriel est :

$$\Delta \vec{a} = \begin{cases} \Delta a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \\ \Delta a_y = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \\ \Delta a_z = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

Cette formule sera souvent utilisée pour la propagation des ondes.

On ne peut pas généraliser cette formule en coordonnées cylindriques et sphériques.



Le Laplacien vectoriel du champ électrique est :

$$\begin{aligned} \Delta \underline{E}_y &= \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial z^2} \\ &= \frac{d^2 E(x)}{dx^2} \exp(i(\omega t - kz)) - k^2 E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \end{aligned}$$

On a également :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{E}$$

On remplace dans l'équation de propagation :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E(x)}{dx^2} \exp(i(\omega t - kz)) - k^2 E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \\ = -\frac{\omega^2}{c^2} E(x) \exp(i(\omega t - kz)) \end{aligned}$$

On en déduit l'équation différentielle sur $E(x)$:

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(x) = 0$$

Conditions aux limites

On applique la continuité de la composante électrique pour $x = 0$ et $x = d$.

Première condition pour $x = 0$:

Dans le conducteur, le champ électrique est nul. Pour $x = 0$, le champ est suivant \vec{u}_y donc tangent au conducteur. On doit donc avoir :

$$E(0) = 0$$

Deuxième condition pour $x = d$:

Dans le conducteur, le champ électrique est nul. Pour $x = d$, le champ est suivant \vec{u}_y donc tangent au conducteur. On doit donc avoir :

$$E(d) = 0$$

Plusieurs cas pour la résolution de l'équation différentielle :

Premier cas : $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$

On pose $\Omega^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2$.

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - \Omega^2 = 0$$



Attention à l'écriture de l'équation caractéristique. Il ne faut pas écrire $r^2 - \Omega^2 r = 0$!



On a deux racines réelles : $r_1 = \Omega$ et $r_2 = -\Omega$.

On a des solutions de la forme :

$$E(x) = A \operatorname{ch} \Omega x + B \operatorname{sh} \Omega x$$



Ne pas utiliser cette forme si la distance entre les deux plaques est considérée comme infinie. On utilisera des solutions de la forme :

$$E(x) = A' \exp(\Omega x) + B' \exp(-\Omega x)$$



On doit avoir $E(0) = 0 = A$ et $E(d) = B \operatorname{sh}(\Omega d) = 0$, soit $A = B = 0$.
Le champ est toujours nul. On n'a pas de propagation d'onde.

Deuxième cas : $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$

La seule solution est d'avoir un champ nul.

Troisième cas : $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$

On pose $\Omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$.

$E(x)$ se met alors sous la forme :

$$E(x) = A \cos \Omega x + B \sin \Omega x$$

On a deux conditions aux limites :

- $E(0) = 0$, donc $A = 0$.
- $E(d) = 0$. On doit donc avoir $\Omega d = n\pi$ avec n entier positif.

On a une condition de quantification :

$$\Omega = n \frac{\pi}{d}$$

On en déduit la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{d^2}$$

Pour avoir $k^2 > 0$, il faut que :

$$\frac{\omega^2}{c^2} > \frac{n^2 \pi^2}{d^2}$$

Soit : $\frac{4\pi^2 f^2}{c^2} > \frac{n^2 \pi^2}{d^2}$. La condition est donc :

$$f > n \frac{c}{2d}$$

avec n entier positif.

Le champ électrique est donc :

$$\vec{E} = E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

Le champ électrique est une **onde progressive monochromatique polarisée** suivant \vec{u}_y .

L'onde se propage dans la direction \vec{u}_z . Si on considère un plan $z = cte$, le champ électrique n'est pas uniforme car il dépend de x .

Le champ électrique n'est donc pas une onde plane.

La fréquence minimale pour avoir propagation de l'onde est :

$$f_{\min} = \frac{c}{2d}$$

Exercice 24.3 : Propagation guidée et vecteur de Poynting

On considère deux plans parfaitement conducteurs, parallèles au plan Oyz , d'abscisses $x = 0$ et $x = d$. Une onde électromagnétique se propage dans le vide entre ces deux plans. On appelle c la célérité de la lumière dans le vide. Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$.

1. Calculer le vecteur de Poynting. En déduire la puissance moyenne transportée par l'onde à travers une surface dS perpendiculaire à la direction de propagation.
2. Représenter graphiquement la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de la pulsation. Interprétation physique.

Analyse du problème

Pour calculer le champ magnétique, on ne peut pas utiliser les opérateurs $\vec{\nabla} = i\vec{k}$ ou $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$ car on n'a pas une OPPM avec les coordonnées cartésiennes. Il faut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.

La relation de dispersion s'obtient en reportant le champ électrique dans l'équation de propagation.



1. On remarque que le champ électrique est nul pour $x = 0$ et $x = d$. La composante tangentielle du champ électrique doit être nulle pour $x = 0$ et $x = d$ puisqu'on a un conducteur parfait.

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit en notation complexe :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & E_y \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Calcul de B_x :

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = -ikE_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \exp(i(\omega t - kz))$$

On a donc :

$$B_x = -\frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \exp(i(\omega t - kz))$$

En grandeurs réelles, on a :

$$B_x = -\frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz)$$

Calcul de B_z :

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -E_0 \frac{\pi}{d} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \exp(i(\omega t - kz))$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \underline{B}_z &= -\frac{E_0 \pi}{i\omega d} \cos\left(\pi \frac{x}{d}\right) \exp(i(\omega t - kz)) \\ &= \frac{E_0 \pi}{\omega d} \cos\left(\pi \frac{x}{d}\right) \exp\left(i\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

En grandeurs réelles, on a :

$$B_z = -\frac{E_0 \pi}{\omega d} \cos\left(\pi \frac{x}{d}\right) \sin(\omega t - kz)$$



Le vecteur de Poynting fait intervenir le produit de grandeurs sinusoïdales. Comme dans le cours sur la puissance moyenne en régime sinusoïdal, il faut revenir en grandeurs réelles dès qu'on a le produit de deux sinusoides. Par contre, le calcul du champ magnétique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday peut se faire en notation complexe ou en notation réelle car les équations de Maxwell sont linéaires.



$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -\frac{k}{\omega} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ -\frac{\pi}{d\omega} E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \sin(\omega t - kz) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{2\mu_0\omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \end{vmatrix}$$

puisque $\langle \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) \rangle = 0$ et $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2}$.

La seule composante non nulle du vecteur de Poynting correspond à la direction de propagation de l'onde.

On considère une surface $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$ orientée dans le sens de propagation de l'onde.

La puissance moyenne transportée par cette onde est :

$$dP_{moy} = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{k dS}{2\mu_0\omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)$$

2. La vitesse de phase est : $v_\phi = \frac{\omega}{k}$.

Il faut déterminer la relation de dispersion pour exprimer la vitesse de phase en fonction de ω . Pour cela on reporte le champ électrique

$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$ dans l'équation de propagation.

Dans le vide, l'équation de propagation est :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On projette sur \vec{u}_y :

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^2}{d^2} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) - k^2 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \\ = -\frac{\omega^2}{c^2} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \end{aligned}$$

On a donc :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{d^2}$$

Il faut avoir $k^2 > 0$. La pulsation ω doit être supérieure ω_{\min} définie par :

$$\omega_{\min} = \frac{\pi c}{d}$$

La vitesse de phase peut se mettre sous la forme :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega}\right)^2}}$$

La vitesse de groupe est :

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)$$

Remarque : On peut calculer plus simplement la vitesse de groupe avec la différentielle de la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{d^2}$$



On obtient :

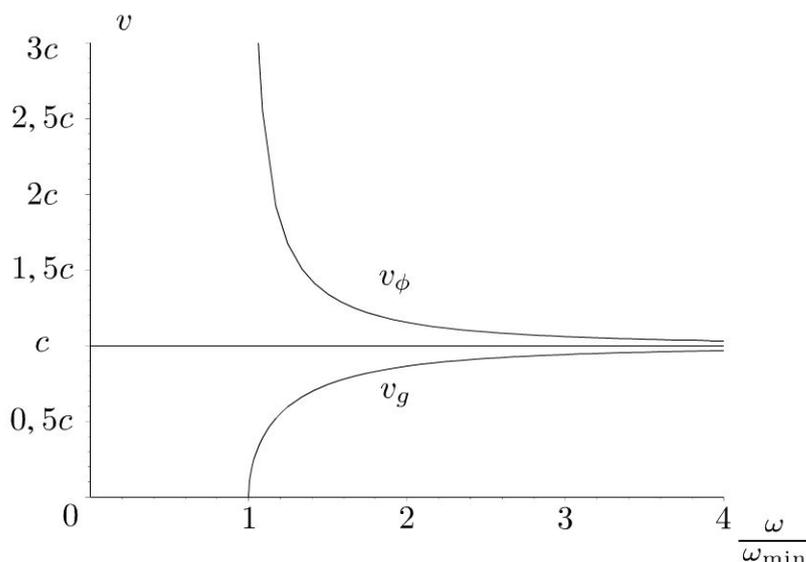
$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$$

On en déduit que :

$$v_g v_\phi = c^2$$

On représente sur le graphe ci-dessous la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de $\frac{\omega}{\omega_{\min}}$.

La vitesse de phase correspond à la vitesse de propagation d'une onde qui n'a **pas de réalité physique**. Le champ électrique $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$ est une onde « éternelle » définie entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$. Il ne faut donc pas être surpris de trouver une vitesse de phase plus grande que la vitesse de la lumière.

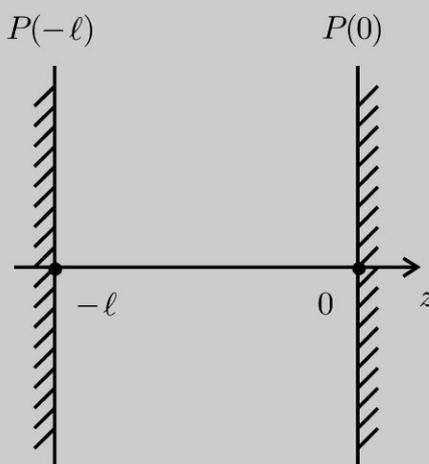


La vitesse de phase dépend de la pulsation. On dit que le **milieu est dispersif**. Des ondes à des pulsations différentes ne vont pas se propager à la même vitesse.

La vitesse de groupe est inférieure à c . C'est tout à fait normal puisqu'elle correspond à un transport d'information. C'est la vitesse de la crête du paquet d'ondes en l'absence de grande déformation du paquet d'ondes.

Exercice 24.4 : Cavité résonante*

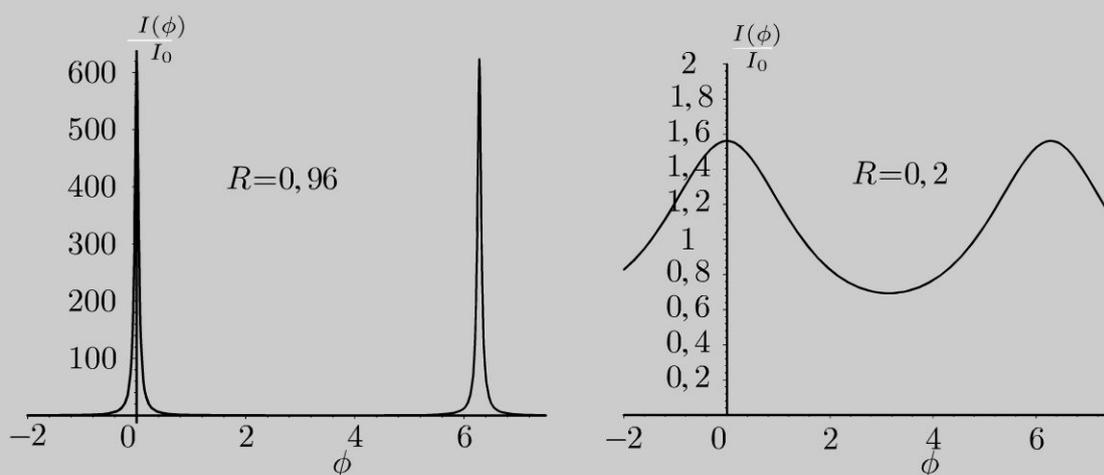
On considère deux plans disposés en $z = 0$ et $z = -\ell$. Un champ électromagnétique peut se propager entre ces deux plans. On appelle r le coefficient de réflexion pour le champ électrique avec $-1 < r < 0$. Un dispositif non représenté crée en $z = -\ell$ à $t = 0$ une onde incidente $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$. On note \vec{E}_1 le champ électrique se propageant dans le sens positif, après avoir subi une réflexion sur $P(0)$ puis une sur $P(-\ell)$. On pose $\phi = 2k\ell$, $R = r^2$ et $I_0 = E_0^2$.



1. Écrire l'expression de \vec{E}_1 à l'aide de E_0 , R , ϕ et $\exp(i(\omega t - kz))$.

2. Écrire de même l'expression des champs $\vec{E}_2, \vec{E}_3, \dots, \vec{E}_n$ se propageant dans le sens positif après avoir subi respectivement : 2 réflexions en $P(0)$, 2 réflexions en $P(-\ell)$ pour \vec{E}_2 , 3 réflexions en $P(0)$, 3 réflexions en $P(-\ell)$ pour \vec{E}_3 , n réflexions en $P(0)$ et n réflexions en $P(-\ell)$ pour \vec{E}_n .

3. On pose $\vec{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{E}_n$. Exprimer à l'aide de E_0 , R , ϕ et $\exp(i(\omega t - kz))$ l'amplitude \underline{A} de \vec{E} . On pose $I = \underline{A} \cdot \underline{A}^*$ et $I_0 = E_0^2$. Exprimer l'intensité I à l'aide de I_0 , R et ϕ . On représente les courbes $\frac{I(\phi)}{I_0}$ pour $R = 0,2$ et pour $R = 0,96$. Calculer le contraste pour les deux courbes ?



4. Déterminer pour $R = 0,96$ les fréquences pouvant se propager avec une intensité non négligeable. Quel est l'intérêt du dispositif ?

Application numérique : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$; $\ell = 0,30 \text{ m}$; $R = 0,96$.

Analyse du problème

Dans ce problème, on étudie l'influence du coefficient de réflexion sur le champ résultant dans une cavité et montrer que l'on peut avoir des champs électriques avec des amplitudes importantes et retrouver des ondes stationnaires étudiées dans l'exercice précédent.

On a une OPPM qui se propage dans le vide. On a établi dans l'exercice précédent l'équation de propagation et la relation de dispersion : $\omega = kc$.



1. On considère une onde incidente de la forme : $E_0 \exp(i(\omega t - kz))$. Elle arrive en $z = 0$ à l'instant $t = t_1 = \frac{\ell}{c}$.

Pour $t > t_1$:

On a une onde réfléchie qui peut se mettre sous la forme :

$$r E_0 \exp\left(i\left(\omega\left(t - \frac{\ell}{c}\right) + kz\right)\right)$$



Cette onde n'existe que pour $t > \frac{\ell}{c}$. On a un décalage temporel de $\frac{\ell}{c}$ par rapport à l'onde incidente. On a bien $+kz$ car l'onde se propage suivant $-\vec{u}_z$.



En développant, on a :

$$r E_0 \exp \left(i \left(\omega t + kz - \frac{\omega \ell}{c} \right) \right)$$

D'après l'énoncé, on a :

$$\frac{\omega \ell}{c} = \frac{kc}{c} \ell = k\ell = \frac{\phi}{2}$$

L'onde réfléchie peut se mettre sous la forme :

$$r E_0 \exp \left(i \left(\omega t + kz - \frac{\phi}{2} \right) \right)$$

Cette onde arrive en $z = -\ell$ pour $t = t_2 = 2\frac{\ell}{c}$.

Pour $t > t_2$:

On a une onde réfléchie qui peut se mettre sous la forme :

$$r^2 E_0 \exp \left(i \left(\omega \left(t - \frac{2k\ell}{c} \right) - kz \right) \right)$$



Cette onde n'existe que pour $t > 2\frac{\ell}{c}$. On a un décalage temporel de $2\frac{\ell}{c}$ par rapport à l'onde incidente. On a bien $-kz$ car l'onde se propage suivant $+\vec{u}_z$.



L'onde peut s'écrire :

$$r^2 E_0 \exp (i (\omega t - kz - \phi))$$

D'après l'énoncé, on pose $R = r^2$.

Le champ électrique \vec{E}_1 peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}_1 = R E_0 \exp (i (\omega t - kz - \phi)) \vec{u}_x$$

2. Cette onde arrive en $z = 0$ pour $t = t_3 = 3\frac{\ell}{c}$.

Pour $t > t_3$:

On a une troisième réflexion en $z = 0$. Le champ électrique est de l'onde réfléchie est :

$$r^3 E_0 \exp \left(i \left(\omega \left(t - \frac{3k\ell}{c} \right) + kz \right) \right)$$

On a donc :

$$r^3 E_0 \exp\left(i\left(\omega t + kz - \frac{3\phi}{2}\right)\right)$$

Cette onde arrive en $z = -\ell$ pour $t = t_4 = 4\frac{\ell}{c}$. Le champ électrique est de l'onde réfléchie est :

Pour $t > t_4$:

On a une quatrième réflexion en $z = -\ell$. Le champ électrique est de l'onde réfléchie est :

$$r^4 E_0 \exp\left(i\left(\omega\left(t - \frac{4k\ell}{c}\right) - kz\right)\right)$$

On a donc :

$$r^4 E_0 \exp(i(\omega t - kz - 2\phi))$$

Le champ électrique \vec{E}_2 peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}_2 = R^2 E_0 \exp(i(\omega t - kz - 2\phi)) \vec{u}_x$$

On peut généraliser facilement et en déduire le champ électrique \vec{E}_n qui peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}_n = R^n E_0 \exp(i(\omega t - kz - n\phi)) \vec{u}_x$$

3. Le champ résultant est :

$$\underline{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \left[1 + R \exp(-i\phi) + R^2 \exp(-i2\phi) + \dots + R^n \exp(-in\phi) + \dots\right]$$

On peut mettre le champ électrique sous la forme $\underline{E} = \underline{A} \exp(i(\omega t - kz))$ avec \underline{A} qui correspond à la suite géométrique.

L'amplitude du champ résultant est :

$$\underline{A} = \frac{E_0}{1 - R \exp(-i\phi)}$$

puisque $R < 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} R^n \rightarrow 0$.

L'intensité est :

$$\begin{aligned} I &= \underline{A} \underline{A}^* = \left(\frac{E_0}{1 - R \exp(-i\phi)}\right) \left(\frac{E_0}{1 - R \exp(i\phi)}\right) \\ &= \frac{E_0^2}{1 - R e^{i\phi} - R e^{-i\phi} + R^2} \end{aligned}$$

On obtient :

$$I = \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R \cos \phi}$$

en posant : $I_0 = E_0^2$.

Le contraste est défini par :



$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$



I_{\max} est obtenu pour $\phi = 0$, soit $I_{\max} = \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R}$

I_{\min} est obtenu pour $\phi = \pi$, soit $I_{\min} = \frac{I_0}{1 + R^2 + 2R}$

Calcul de $I_{\max} + I_{\min}$:

$$\begin{aligned} I_{\max} + I_{\min} &= \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R} + \frac{I_0}{1 + R^2 + 2R} \\ &= \frac{I_0 [1 + R^2 + 2R + 1 + R^2 - 2R]}{(1 - R)^2 (1 + R)^2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$I_{\max} + I_{\min} = \frac{2I_0 (1 + R^2)}{(1 - R)^2 (1 + R)^2}$$

Calcul de $I_{\max} - I_{\min}$:

$$\begin{aligned} I_{\max} - I_{\min} &= \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R} - \frac{I_0}{1 + R^2 + 2R} \\ &= \frac{I_0 [1 + R^2 + 2R - 1 - R^2 + 2R]}{(1 - R)^2 (1 + R)^2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$I_{\max} - I_{\min} = \frac{4RI_0}{(1 - R)^2 (1 + R)^2}$$

Le contraste vaut :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2R}{1 + R^2}$$

Pour $R = 0,96$: $C = 0,999$ et $\frac{I_{\max}}{I_0} = 625$.

Pour $R = 0,2$: $C = 0,38$ et $\frac{I_{\max}}{I_0} = 1,56$.

On a un contraste bien meilleur pour $R = 0,96$. On a une résonance très précise.

4. On cherche les fréquences qui peuvent se propager.

Pour avoir une intensité qui ne soit pas négligeable, il faut avoir

$$\phi = 2\pi N = 2k\ell = 2\frac{2\pi}{\lambda}\ell = \frac{4\pi}{cT}\ell = \frac{4\pi\ell}{c}\nu$$

La condition sur la fréquence est :

$$\nu = \frac{c}{2\ell}N$$

Application numérique pour $N = 1$: $\nu = 500$ MHz.

Les fréquences multiples de 500 MHz donnent donc très rapidement des ondes stationnaires d'amplitude non négligeable (voir exercice précédent où on cherche directement la solution sous la forme d'ondes stationnaires).

On a donc une cavité résonante avec amplification du signal d'entrée.

Interprétation qualitative :

- Soit $2\ell = ct'$ avec t' le temps mis à parcourir la zone d'interaction. Si le signal a une période égale à $\frac{2\ell}{c}$, l'onde qui subit deux réflexions est en phase avec l'onde incidente. Le champ résultant sera donc plus grand que le champ de l'onde incidente. Comme le coefficient de réflexion est proche de 1, peu d'énergie est perdue à chaque réflexion. Il faut donc un très grand nombre de réflexions avant d'avoir une amplitude négligeable. On a vu que l'intensité est 625 fois plus importante que l'intensité de l'onde incidente.
- Si la période du signal est N fois plus petite que $\frac{2\ell}{c}$, ou une fréquence N fois plus grande que $\frac{c}{2\ell}$, on a encore une amplification du signal.
- Par contre, si la fréquence de l'onde incidente est différente de $N\frac{c}{2\ell}$, l'intensité résultante est quasi nulle. On a une amplification très sélective.

Remarque : On peut calculer la largeur à mi-hauteur définie par $I\left(\phi \pm \frac{\Delta\phi}{2}\right) \geq \frac{I_{\max}}{2}$. On peut en déduire la largeur $\Delta\nu$ en fréquence avec la relation

$\Delta\nu = \frac{\Delta\phi c}{4\pi\ell}$. Pour avoir une résonance très précise, il faut donc allonger la cavité.



Pour réaliser un laser, on utilise une cavité résonante constituée de deux miroirs.

Absorption et dispersion

Exercice 25.1 : Effet de peau et ARQS magnétique

Une onde électromagnétique se propage dans l'air dans le demi-espace $x < 0$ vers un conducteur métallique de conductivité γ , de perméabilité $\mu = \mu_0 \mu_r$ et de permittivité ε_0 , occupant le demi-espace $x > 0$. L'onde incidente $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_z$ donne naissance à une onde réfléchie $\vec{E}_R = E_{0R} \exp(i(\omega t + k_R x)) \vec{u}_z$ et à une onde transmise $\vec{E}_T = E_{0T} \exp(i(\omega t - k_T x)) \vec{u}_z$ (k_R est réel alors que E_{0R} , E_{0T} et k_T sont a priori complexes). On pose $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_r \mu_0 \gamma \omega}}$ et $\alpha = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \omega}{\gamma \mu_r}}$.

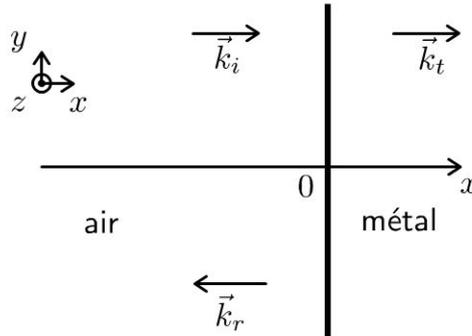
$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$; $\mu_r = 102$; $\gamma = 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
 $f = 10 \text{ kHz}$ et $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. Montrer que la densité chimique de charges $\rho(M, t)$ tend très rapidement vers 0. On considère que $\rho(M, t) = 0$ par la suite.
2. Pour quelle gamme de fréquences les courants de déplacement dans le métal valent moins de un pour cent des courants de conduction ? On travaillera dans l'ARQS magnétique par la suite. Établir la relation de dispersion. Interpréter physiquement la partie réelle et la partie imaginaire de k_T . Calculer δ .
3. Les champs magnétiques complexes incident, réfléchi et transmis s'écrivent : $\vec{B}_i = a_i E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$, $\vec{B}_r = a_R E_{0R} \exp(i(\omega t + k_R x)) \vec{u}_y$ et $\vec{B}_T = a_T \exp(i\phi_T) E_{0T} \exp(i(\omega t - k_T x)) \vec{u}_y$. Exprimer les coefficients a_i , a_R , a_T et le déphasage ϕ_T en fonction de c , ω et δ .
4. Écrire les relations de passage pour les champs électrique et magnétique dans le plan $x = 0$ et trouver deux relations entre E_{0R} , E_{0T} , E_0 et α . Montrer que $\alpha \ll 1$. Exprimer $\vec{E}_T(M, t)$ dans le métal.

Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde dans un métal de conductivité finie. En écrivant les équations de Maxwell, on trouve l'équation de propagation et la relation de

dispersion. Dans une certaine gamme de fréquences, on simplifie la relation de dispersion. On a une onde qui s'atténue très rapidement dans le métal. On met en évidence une profondeur de pénétration dans le métal qui correspond à la partie imaginaire du vecteur d'onde.



1. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$



Attention : la perméabilité vaut μ et non μ_0 .



La loi d'Ohm locale s'écrit : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

L'équation de conservation de la charge est : $\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

On a donc : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\gamma \vec{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0$.

L'équation différentielle vérifiée par ρ est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$$

avec $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$.

La résolution donne : $\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ avec $\tau = 8,8 \times 10^{-19}$ s. Au bout de quelques τ on peut considérer que $\rho = 0$. On pourra donc supposer par la suite que le conducteur métallique est globalement neutre.

2. Condition pour être dans l'ARQS magnétique

On cherche la condition pour négliger les courants de déplacement, c'est-à-dire à se placer dans le cadre de l'ARQS magnétique (approximation des régimes quasi stationnaires). On doit avoir :

$$\left\| \frac{\vec{j}_D}{\vec{j}_C} \right\| = \frac{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\left\| \varepsilon_0 i \omega \vec{E} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} = \frac{\varepsilon_0 2\pi f}{\gamma} \leq \frac{1}{100}$$

La condition pour être dans l'ARQS magnétique est donc : $f \leq \frac{\gamma}{200\pi\varepsilon_0}$, soit :

$$f \leq 1,8 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

Équation de propagation

La méthode est de calculer le rotationnel du rotationnel du champ électrique.

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = \vec{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{E} \right) - \Delta \vec{E}$$

On a donc :

$$-\Delta \vec{E} = \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \gamma \vec{E} \right)$$

On obtient l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On obtient une **équation de diffusion**. Elle est irréversible parce qu'on a une dérivée première par rapport au temps. C'est prévisible puisqu'on a une dissipation d'énergie par effet Joule dans le métal à cause de la conductivité finie.

Remarque : On rencontre plusieurs phénomènes diffusifs en physique : diffusion thermique, diffusion de particules, diffusion de quantité de mouvement au sein des fluides visqueux, effet de peau en électromagnétisme...



Relation de dispersion

La méthode générale pour obtenir la relation de dispersion est de remplacer $\underline{\vec{E}}_T = \underline{E}_{0T} \exp(i(\omega t - \underline{k}_T x)) \vec{u}_z$ dans l'équation différentielle précédente en utilisant la notation complexe.

$$\Delta \underline{\vec{E}} = \mu \gamma \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = (-\underline{k}_T^2) \underline{\vec{E}} = \mu \gamma i \omega \underline{\vec{E}}$$

On a : $\underline{k}_T^2 = -(\mu \gamma i \omega) = i^2 (\mu \gamma i \omega)$.



Il faut penser à écrire : que $-1 = i^2$ pour pouvoir écrire par la suite la racine carrée.



On a donc :

$$\underline{k}_T = \pm \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) \sqrt{\mu\gamma\omega} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \pm \exp\left(\frac{i3\pi}{4}\right) \sqrt{\mu\gamma\omega}$$

Comme $\exp\left(\frac{i3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a :

$$\underline{k}_T = \pm \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{\mu\gamma\omega}$$

On a deux solutions : $\underline{k}_{T1} = \frac{-1}{\delta} + \frac{i}{\delta}$ et $\underline{k}_{T2} = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}$.

Solution n°1 :

Le champ électrique peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{T1} &= \underline{E}_{0T1} \exp\left(i\left(\omega t - \left(\frac{-1}{\delta} + \frac{i}{\delta}\right)x\right)\right) \vec{u}_z \\ &= \underline{E}_{0T} \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t + \frac{x}{\delta}\right)\right) \end{aligned}$$

On a une onde amortie qui se propage dans le sens des $x < 0$.

Remarque : On a bien un amortissement car x diminue quand l'onde se propage.



Solution n°2 :

Le champ électrique peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{T2} &= \underline{E}_{0T2} \exp\left(i\left(\omega t - \left(\frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}\right)x\right)\right) \vec{u}_z \\ &= \underline{E}_{0T} \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right) \end{aligned}$$

On a une onde amortie qui se propage dans le sens des $x > 0$.

La seule solution physiquement acceptable est la solution n°2 puisque le métal est illimité et qu'il ne peut donc pas y avoir d'onde réfléchie dans le métal. On a donc :

$$\underline{k}_T = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}$$

La partie réelle correspond au terme de propagation.

La partie imaginaire correspond au terme d'amortissement.

La vitesse de phase est la vitesse de propagation de cette onde dans le milieu :

$$v_\phi = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k}_T)} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}$$

La vitesse de phase dépend de la pulsation. Les différentes ondes ne se propagent pas à la même vitesse. On dit que le milieu est dispersif.

δ est appelé la profondeur de pénétration dans le métal.

Au bout de quelques δ , le champ électrique a une amplitude négligeable dans le métal.

Application numérique :

$$\delta = 50 \mu\text{m}$$

3. Dans l'air, l'indice vaut 1. La relation de dispersion s'écrit pour une onde plane progressive monochromatique (OPPM) : $\omega = kc$. On a : $\vec{k}_i = k\vec{u}_x$ et $\vec{k}_r = -k\vec{u}_x$. Soit :

$$\|\vec{k}_R\| = \|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}\| = k_R = k_i = k$$

On a des OPPM avec les coordonnées cartésiennes, on peut donc utiliser les opérateurs : $\vec{\text{rot}}\vec{E} = -i\vec{k} \wedge \vec{E}$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega\vec{E}$.



Il faut bien lire l'énoncé, car il existe deux conventions pour l'écriture en complexes !!!



Pour une OPPM, on a : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$. On en déduit les champs magnétiques :

$$\vec{B}_i = \frac{k\vec{u}_x \wedge E_0 \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_z}{\omega} = -\frac{kE_0}{\omega} \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_y$$

$$\vec{B}_R = \frac{-k\vec{u}_x \wedge E_{0R} \exp(i(\omega t + kx))\vec{u}_z}{\omega} = \frac{kE_{0R}}{\omega} \exp(i(\omega t + kx))\vec{u}_y$$

$$\vec{B}_T = \frac{k_T\vec{u}_x \wedge E_T \exp(i(\omega t - k_T x))\vec{u}_z}{\omega} = -\frac{k_T E_T}{\omega} \exp(i(\omega t - k_T x))\vec{u}_y$$

Dans le conducteur, on a : $k_T = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta} = \frac{1}{\delta}\sqrt{2} \exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right)$, d'où

$$-\frac{k_T}{\omega} = \frac{-\sqrt{2}}{\omega\delta} \exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\omega\delta} \exp\left(\frac{i3\pi}{4}\right)$$

On obtient finalement :

$$a_i = \frac{-1}{c} ; a_R = \frac{1}{c} ; a_T = \frac{\sqrt{2}}{\omega\delta} ; \phi_T = \frac{3\pi}{4}$$

$$a_T \exp(i\phi_T) = \frac{\sqrt{2}}{\omega\delta} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) (-1 + i) = \frac{1}{\omega\delta} (-1 + i)$$



Dans les exercices, il faut bien lire l'énoncé et regarder si on utilise le modèle du conducteur réel, pour lequel la distribution de courant est représentée par un vecteur densité de courant volumique \vec{j} non nul (même s'il ne prend de valeurs significatives que dans une petite épaisseur au voisinage de la surface) ou le modèle du conducteur parfait pour lequel la distribution de courant est représentée par un vecteur densité de courant surfacique \vec{j}_S .

Ici, la conductivité est finie. On utilisera les relations de passage en $x = 0$ avec $\vec{j}_S = \vec{0}$ et $\sigma = 0$.



4. On écrit les relations de passage pour le champ électrique et le champ magnétique en $x = 0$.

Côté 1 :

$x = 0^+$. Le champ électrique est : $\underline{E}_1 = \underline{E}_T$

Côté 2 :

$x = 0^-$. Le champ électrique est : $\underline{E}_2 = \underline{E}_i + \underline{E}_R$

On a donc :

$$\begin{cases} \underline{E}_2 - \underline{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \\ \underline{B}_2 - \underline{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} E_0 + \underline{E}_{0R} = \underline{E}_{0T} \\ -E_0 + \frac{\underline{E}_{0R}}{c} = \frac{1}{\omega\delta} (-1 + i) \underline{E}_{0T} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} E_0 + \underline{E}_{0R} = \underline{E}_{0T} \\ -E_0 + \frac{\underline{E}_{0R}}{c} = \frac{1}{\omega\delta} (-1 + i) \underline{E}_{0T} \end{cases}$$

$$\text{avec } \frac{c}{\omega\delta} = \frac{c}{\omega \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0 \gamma \omega}{2}}} \text{ et } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

$$\text{On a donc : } \frac{c}{\omega\delta} = \sqrt{\frac{\mu_r \gamma}{2\varepsilon_0 \omega}} = \frac{1}{\alpha}.$$

$$\text{On a } \alpha = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \omega}{\mu_r \gamma}}.$$

$$\text{D'après la question 2) : } \left\| \frac{\vec{j}_D}{\vec{j}_C} \right\| = \frac{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\left\| \varepsilon_0 i \omega \vec{E} \right\|}{\left\| \gamma \vec{E} \right\|} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} \leq \frac{1}{100},$$

$$\text{c'est-à-dire } \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma}} \leq \frac{1}{10}.$$

On en déduit que $\alpha = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\mu_r\gamma}} \leq \frac{1}{10} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}}$, soit $\alpha \leq 1,4 \times 10^{-2}$.

Le système à deux équations et deux inconnues s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{E}_{0R} + E_0 = \underline{E}_{0T} \\ \underline{E}_{0R} - E_0 = \frac{(-1+i)}{\alpha} \underline{E}_{0T} \end{cases}$$

En faisant la différence des deux équations, on a :

$$2E_0 = \underline{E}_{0T} \frac{(\alpha + 1 - i)}{\alpha}$$

$$\text{et } \frac{\underline{E}_{0T}}{E_0} = \frac{2\alpha}{\alpha + 1 - i} \approx \frac{2\alpha}{1 - i} = \frac{2\alpha(1+i)}{2} = \alpha(1+i)$$

$$\text{D'où } \frac{\underline{E}_{0T}}{E_0} = \alpha\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$$

$$\text{On a vu que } \underline{k}_T = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}.$$

- Si $\gamma \rightarrow \infty$, on a le modèle du conducteur parfait, l'épaisseur de peau $\delta \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow 0$. L'onde ne pénètre pas dans le métal. On a vu dans le cours que l'on a alors des courants en surface. Puisque $\underline{E}_{0T} \rightarrow 0$, alors $\underline{E}_{0R} = -E_0$. Toute l'onde incidente est réfléchiée.
- Si γ est finie, on a une onde qui peut pénétrer dans le métal mais elle est atténuée.

$$\underline{E}_{0T} = E_0\alpha\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \exp(i(\omega t - \underline{k}_T x)) \vec{u}_z$$

$$\text{avec } \underline{k}_T = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}$$

On a donc :

$$\underline{E}_{0T} = E_0\alpha\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{ix}{\delta}\right)\right) \vec{u}_z$$

Finalement, on a :

$$\underline{E}_{0T} = E_0\alpha\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right) \vec{u}_z$$

Exercice 25.2 : Plasma

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma globalement neutre constitué de N électrons libres par unité de volume de masse m et de N ions positifs par unité de volume de masse M . Une onde électromagnétique

$\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ se propage dans ce milieu. On pose $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$. On suppose que $M \gg m$.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ F.m}^{-1}; e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}; N = 1,22 \times 10^{12} \text{ électrons/m}^3$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}; m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

1. Montrer que l'action du champ magnétique sur un électron est négligeable devant celle du champ électrique. Exprimer les vecteurs courant de conduction \vec{j}_c et courant de déplacement \vec{j}_d en fonction de \vec{E} , ω , ω_p et ε_0 . Établir l'équation de propagation et la relation de dispersion.

2. Montrer que la fréquence de l'onde doit être supérieure à une fréquence de coupure f_c pour avoir propagation. Calculer f_c . Dans le cas où il y a propagation, représenter graphiquement la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de la fréquence. Exprimer l'indice dans le plasma en fonction de ω et ω_p .

Analyse du problème

On étudie la propagation d'une onde dans un plasma. On ne cherche pas comme dans l'exercice précédent sur l'effet de peau à négliger les courants de déplacement. Pour obtenir la relation de dispersion, il faut établir l'équation de propagation avec les équations de Maxwell et ensuite remplacer le champ électrique dans l'équation de propagation.

Pour que l'onde puisse se propager, on verra que la pulsation doit être supérieure à une pulsation de coupure. On verra l'application dans l'exercice sur la traversée de l'interface atmosphère - ionosphère.



1. On écrit le PFD à un électron de masse m dans le référentiel $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

- Le poids est négligeable devant les autres forces.
- On néglige les interactions entre l'électron et les autres particules qui sont parfois modélisées par une force de frottement fluide.

• L'ordre de grandeur du champ magnétique est $\|\vec{B}\| \approx \frac{\|\vec{E}\|}{c}$. On a donc

$$\frac{\|q\vec{v}_e \wedge \vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \approx \frac{qv_e E}{qcE} \approx \frac{v_e}{c} \ll 1. \text{ On peut donc négliger la force magnétique devant la force électrique.}$$

On utilise le régime sinusoïdal forcé. Il faut faire attention à bien lire l'énoncé : $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ et non $\vec{E} = E_0 \exp(-i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$.

Le vecteur vitesse est de la même forme : $\frac{d\vec{v}_e}{dt} = i\omega\vec{v}_e$. On note le complexe i et non j pour ne pas confondre avec le vecteur densité de courant volumique.

Remarque : Il n'y a pas de constante d'intégration quand on travaille en régime sinusoïdal forcé.



On a donc $m\frac{d\vec{v}_e}{dt} = im\omega\vec{v}_e = q\vec{E} = -e\vec{E}$, d'où $\vec{v}_e = \frac{-e\vec{E}}{im\omega}$.

Le vecteur densité de courant de conduction volumique s'écrit :

$$\vec{j}_c = \sum_k \rho_k \vec{v}_k = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k$$

On a deux types de porteurs de charges mobiles : les ions positifs (notés i) de charge $+e$ et les électrons de charge $-e$.

On a donc : $\vec{j}_c = N(-e\vec{v}_e + e\vec{v}_i)$.

On peut démontrer comme pour les électrons que : $\vec{v}_i = \frac{e\vec{E}}{iM\omega}$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } \vec{j}_c &= N \left(\frac{e^2}{im\omega_e} + \frac{e^2}{iM\omega} \right) \vec{E} = \frac{Ne^2}{i\omega} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{E} \\ &\approx \frac{Ne^2}{i\omega} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{E} \end{aligned}$$

car d'après l'énoncé $M \gg m$.

On néglige donc l'effet des cations pratiquement immobiles.

On a donc : $\vec{j}_c = \frac{Ne^2}{im\omega} \vec{E} = -i \frac{Ne^2 \varepsilon_0}{m\varepsilon_0 \omega} \vec{E} = \frac{-i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega} \vec{E}$ puisque $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$.

- Le vecteur densité de courant de conduction volumique vaut donc :

$$\vec{j}_c = \underline{\gamma} \vec{E} \text{ avec } \underline{\gamma} = \frac{-i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega}.$$

- Le vecteur densité de courant de déplacement vaut :

$$\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega\varepsilon_0 \vec{E}.$$

Le rapport des deux densités de courant vaut :

$$\frac{j_c}{j_d} = \frac{-i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega} = \frac{-\omega_p^2}{\omega^2}$$

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{j}_c + \vec{j}_d).$$

- \vec{j} dans l'équation de Maxwell-Ampère désigne le courant de conduction, noté \vec{j}_c dans l'exercice.
- \vec{j}_d désigne le courant de déplacement. Il est égal à $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

On en déduit d'après la question précédente :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_c + \vec{j}_d) = \mu_0 \left(\frac{-\omega_p^2}{\omega^2} + 1 \right) \vec{j}_d = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) i \omega \varepsilon_0 \vec{E}$$

Soit :

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \partial \vec{E}}{c^2}$$

Pour trouver la relation de dispersion, il suffit de remplacer l'expression du champ électrique dans l'équation de propagation.

$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}} (\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ car $\text{div } \vec{E} = 0$ avec un plasma globalement neutre.

On a alors :

$$\vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On en déduit l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On remplace $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ dans l'équation de propagation écrite en notation complexe pour en déduire la relation de dispersion :

$$-k^2 \vec{E} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2} (-\omega^2 \vec{E}), \text{ d'où :}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

2.

- Si $\omega < \omega_p$ alors $k^2 < 0$. k est imaginaire pur. On a une onde évanescente. Il n'y a pas de propagation.
- Si $\omega = \omega_p$ alors $k = 0$. Il n'y a pas de propagation.
- Si $\omega > \omega_p$ alors $k^2 > 0$ et $k > 0$. On a une propagation.

Si $\omega \gg \omega_p$, alors $k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}$ et $k \simeq \frac{\omega}{c}$. Tout se passe comme si on était dans le vide. Le courant de conduction étant nul : $\underline{\gamma} \rightarrow 0$. La pulsation est trop

grande. « Les électrons ne peuvent plus suivre » et ne se déplacent quasiment plus.

La pulsation de coupure est donc $\omega_c = \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$. On en déduit la fréquence de coupure :

$$f_c = f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$$

On étudie les pulsations $\omega > \omega_p$ pour lesquelles il y a propagation d'une onde électromagnétique. On a un filtre passe-haut.

Application numérique :

$$f_c = 9,9 \text{ MHz}$$

La vitesse de phase vaut :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}} = \frac{c}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}}$$

L'indice est défini $v_\phi = \frac{c}{n}$. On en déduit donc :

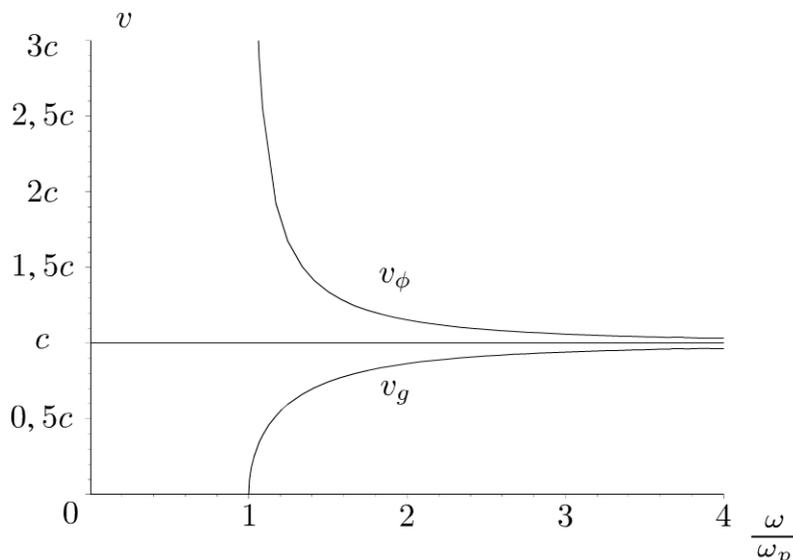
$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

La vitesse de groupe vaut : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Or $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$.

On écrit la différentielle : $2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$.

On a donc : $v_g v_\phi = c^2$

On représente sur le graphe ci-dessous la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de $\frac{\omega}{\omega_p}$.



La vitesse de phase correspond à la vitesse de propagation d'une onde qui n'a **pas de réalité physique**. Le champ électrique $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$ est une onde « éternelle » définie entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$. Il ne faut donc pas être surpris de trouver une vitesse de phase plus grande que la vitesse de la lumière.

La vitesse de phase dépend de la pulsation. On dit que le **milieu est dispersif**. Des ondes à des pulsations différentes ne vont pas se propager à la même vitesse.

La vitesse de groupe est inférieure à c . C'est tout à fait normal puisqu'elle correspond à un transport d'information. C'est la vitesse de la crête du paquet d'ondes en l'absence de grande déformation du paquet d'ondes.

Exercice 25.3 : Traversée de l'interface atmosphère – ionosphère

L'ionosphère peut être assimilée à un plasma neutre. On étudie la propagation des ondes radio à l'interface atmosphère - ionosphère supposée plane. L'ionosphère est dans la région $z > 0$ et l'atmosphère dans la région $z < 0$. Le champ incident est : $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$. Lorsque l'onde arrive sur l'interface, une partie est réfléchiée et l'autre partie est transmise. L'indice de réfraction de l'ionosphère est $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. La fréquence plasma vaut $f_p = 6,9$ MHz. On rappelle

les relations de passage : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$.

1. Déterminer les coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude pour le champ électrique. En déduire les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance. Quelle est la relation entre R et T ?

2. Quelle est la valeur de R lorsque $\omega < \omega_p$? Dans ce cas, à quoi peut-on assimiler l'interface atmosphère-ionosphère ?

3. On se place maintenant dans le cas d'une incidence oblique, et on désigne par i l'angle d'incidence. À quelles conditions une onde peut-elle être transmise dans l'ionosphère ?

4. Un poste émetteur, au niveau de la mer, émet une onde radio de fréquence 12 MHz vers l'ionosphère, dans une direction faisant l'angle i avec la normale à l'interface. En supposant que l'onde arrive sur l'interface précédente sous forme d'onde plane, calculer l'angle i , à partir duquel l'onde incidente ne traversera plus l'interface.

Analyse du problème

On a étudié dans l'exercice précédent la propagation d'une onde dans un plasma. On s'intéresse à l'interface atmosphère-ionosphère et montrer quelles sont les conditions pour avoir réflexion totale.

1.

Onde incidente :

 Le champ électrique incident s'écrit : $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$.

On en déduit le champ magnétique incident :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_i \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{\vec{u}_z \wedge E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x}{c} = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y$$

Onde réfléchi :

 Le champ électrique réfléchi s'écrit : $\vec{E}_r = r E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$.

On en déduit le champ magnétique réfléchi :

$$\begin{aligned} \vec{B}_r &= \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{-\vec{u}_z \wedge r E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x}{c} \\ &= \frac{-r E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_y \end{aligned}$$

Onde transmise :

 Il ne faut pas oublier l'indice n puisqu'on est dans le plasma.

$$\begin{aligned} \text{L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit : } \operatorname{rot} \vec{E} &= -i \vec{k}_t \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= -i \omega \vec{B}, \text{ d'où } \vec{B} = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}}{\omega} \text{ avec } \omega = k_t v = k_t \frac{c}{n}. \end{aligned}$$

 On a vu dans l'exercice sur le plasma que $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$, soit

$$\omega = k \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

 Le champ électrique transmis s'écrit : $\vec{E}_t = t E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$.

On en déduit le champ magnétique transmis :

$$\begin{aligned} \vec{B}_t &= n \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_t}{c} = n \frac{\vec{u}_z \wedge t E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x}{c} \\ &= \frac{nt E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y \end{aligned}$$

Relations de passage pour le champ électrique et le champ magnétique

On n'a pas de densité surfacique de charges et de courants :

 $\sigma = 0$ et $\vec{j}_S = \vec{0}$.

 On écrit les relations de passage en $z = 0$:

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{cases}$$

Côté 1 : $z = 0^-$

Le champ électrique est : $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$

Le champ magnétique est : $\vec{B}_1 = \vec{B}_i + \vec{B}_r$.

Côté 2 : $z = 0^+$

Le champ électrique est : $\vec{E}_2 = \vec{E}_t$.

Le champ magnétique est : $\vec{B}_2 = \vec{B}_t$.

On a donc pour $z = 0$:

$$\begin{cases} \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t \\ \vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} E_0 + rE_0 = tE_0 \\ \frac{E_0}{c} - \frac{rE_0}{c} = \frac{ntE_0}{c} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ 1 - r = nt \end{cases}$$

On en déduit que $1 - r = n(1 - r)$, soit $r = \frac{1 - n}{1 + n}$ et $t = 1 + r$
 $= 1 + \frac{1 - n}{1 + n} = \frac{2}{1 + n}$.

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} r &= \frac{1 - n}{1 + n} \\ t &= \frac{2}{1 + n} \end{aligned}$$

Le coefficient de réflexion en puissance vaut :

$$R = \frac{\text{puissance moyenne réfléchie}}{\text{puissance moyenne incidente}}$$



Il faut revenir aux notations réelles pour calculer le vecteur de Poynting.

Onde incidente :

Le vecteur de Poynting de l'onde incidente est :

$$\begin{aligned}\vec{\Pi}_i &= \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x}{\mu_0} \wedge \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z\end{aligned}$$

La moyenne du vecteur de Poynting de l'onde incidente est :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

On considère une surface $\vec{dS} = dS \vec{u}_z$.

La puissance moyenne transportée par l'onde incidente est :

$$P_{moy,i} = \langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot dS \vec{u}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} dS$$

Onde réfléchie :

On pose $\underline{r} = r \exp(i\phi)$ avec r réel positif.

Le vecteur de Poynting de l'onde réfléchie est :

$$\begin{aligned}\vec{\Pi}_r &= \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} \\ &= \frac{r E_0 \cos(\omega t + kz + \phi) \vec{u}_x}{\mu_0} \wedge \frac{-r E_0}{c} \cos(\omega t + kz + \phi) \vec{u}_y\end{aligned}$$

On a donc :

$$\vec{\Pi}_r = \frac{-r^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + kz + \phi) \vec{u}_z$$

La moyenne du vecteur de Poynting de l'onde réfléchie est :

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{r^2 E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

On considère une surface $\vec{dS} = -dS \vec{u}_z$ car l'onde se propage dans le sens $(-\vec{u}_z)$.

La puissance moyenne transportée par l'onde réfléchie est :

$$P_{moy,r} = \langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot (-dS \vec{u}_z) = r^2 \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} dS$$

Onde transmise :

Dans la suite de l'exercice, \underline{t} est réel et sera noté t .

Le vecteur de Poynting de l'onde transmise est :

$$\vec{\Pi}_t = \frac{\vec{E}_t \wedge \vec{B}_t}{\mu_0} = \frac{t E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x}{\mu_0} \wedge \frac{nt E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y$$

On a donc :

$$\vec{\Pi}_t = \frac{nt^2 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

La moyenne du vecteur de Poynting de l'onde transmise est :

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = n \frac{t^2 E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

On considère une surface $\vec{dS} = dS \vec{u}_z$.

La puissance moyenne transportée par l'onde transmise est :

$$P_{moy,t} = \langle \vec{\Pi}_t \rangle \cdot dS \vec{u}_z = n \frac{t^2 E_0^2}{2\mu_0 c} dS$$

Le coefficient de réflexion en puissance est :

$$R = \frac{P_{moy,r}}{P_{moy,i}} = r^2 = |\underline{r}|^2 = \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2$$

Le coefficient de réflexion en amplitude peut être complexe (voir question 2). Il faut calculer le module de \underline{r} pour calculer R .

Le coefficient de transmission en puissance est :

$$T = \frac{P_{moy,t}}{P_{moy,i}} = nt^2 = n \left(\frac{2}{1+n} \right)^2$$

On calcule la somme $R + T$:

$$R + T = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 + \frac{4n}{(1+n)^2} = \frac{1+n^2-2n+4n}{(1+n)^2} = \frac{(1+n)^2}{(1+n)^2} = 1$$

On a bien $R + T = 1$. Cette relation traduit la conservation de la puissance : toute la puissance de l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie et l'onde transmise.

2. On a vu que $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. L'indice est donc complexe.

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = i^2 \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right). \text{ On a donc } n = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = \pm iX \text{ en}$$

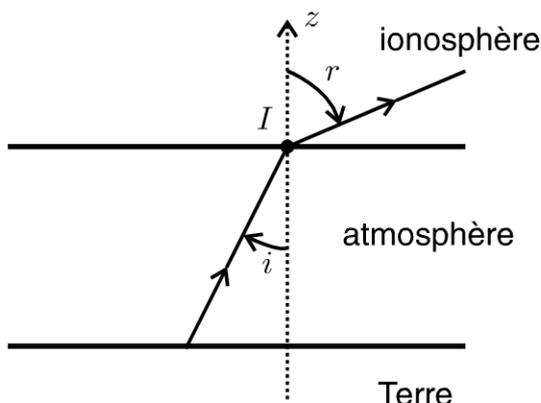
posant $X = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$.

Le coefficient R vaut : $R = \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2 = \frac{1+X^2}{1+X^2} = 1$. On a donc :

$$R = 1$$

L'interface ionosphère-atmosphère peut être assimilée à une surface parfaitement réfléchissante (miroir plan).

3.



Premier cas : $f < f_c$

On a vu qu'il y a toujours réflexion totale.

Deuxième cas : $f > f_c$

On applique les lois de Descartes au point d'incidence I : $\sin i = n \sin r$,

d'où $\sin r = \frac{\sin i}{n}$. On a réflexion totale si $\frac{\sin i}{n} > 1$.

On pose $\lambda = \text{Arcsin}(n)$.

Si $i > \lambda$, on a une réflexion totale.

Si $i < \lambda$, une onde de fréquence f peut traverser l'interface.

Remarque : l'indice n dépend de la fréquence de l'onde. On a dispersion de la lumière.

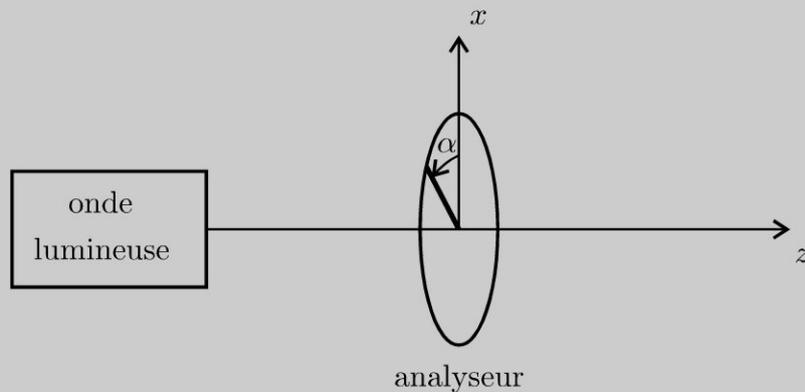


4. Application numérique : $\lambda = \text{Arcsin}(n) = \text{Arcsin} \left(\sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}} \right) = 55^\circ$

Si l'angle d'incidence est supérieur à 55° , l'onde incidente ne traversera plus l'interface et on aura réflexion totale.

Exercice 25.4 : Polarisation des ondes

On étudie le montage de la figure suivante. Un analyseur est placé dans le plan $z = 0$. On appelle \vec{u} le vecteur unitaire donnant la direction de transmission privilégiée de l'analyseur. On pose $\alpha = (\vec{u}_x, \vec{u})$.



1. On considère une onde polarisée rectilignement dont le champ électrique se met sous la forme : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x$. Déterminer l'éclairement de l'onde lumineuse en sortie de l'analyseur en fonction de α et E_0 . Comment est appelée cette loi ?

2. On considère une onde polarisée elliptiquement dont le champ électrique se met sous la forme : $\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x + E_{0y} \sin(\omega t - k_0 z) \vec{u}_y$. Déterminer l'éclairement de l'onde lumineuse en sortie de l'analyseur en fonction de α , E_{0x} et E_{0y} .

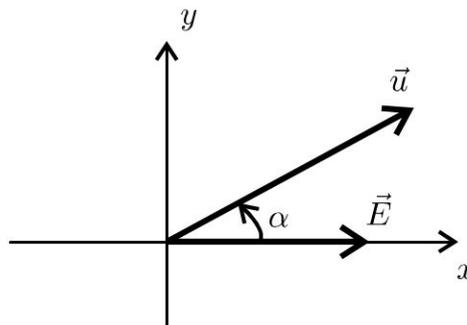
Analyse du problème

Dans ce problème, on étudie l'influence d'un analyseur et d'une lame quart d'onde sur une onde lumineuse incidente.



1. Le champ électrique à l'entrée de l'analyseur en $z = 0$ est :

$$\vec{E}_{\text{entrée}} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$$



Le champ électrique à la sortie de l'analyseur en $z = 0$ est :

$$\vec{E}_{\text{sortie}} = (\vec{E}_{\text{entrée}} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} = E_0 \cos(\omega t) \cos \alpha \vec{u}$$

On obtient une onde polarisée rectilignement suivant \vec{u} . L'éclairement de l'onde en sortie est :

$$\varepsilon = K \left\langle \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right\rangle$$

On a alors :

$$\left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 = (E_0 \cos(\omega t) \cos \alpha)^2$$

On en déduit la moyenne temporelle : $\left\langle \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right\rangle = \frac{1}{2} (E_0 \cos \alpha)^2$.

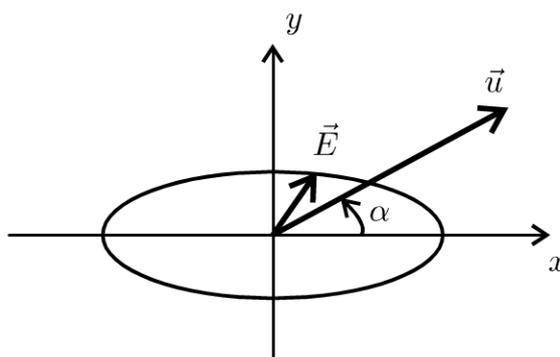
L'éclairement de l'onde en sortie est donc :

$$\varepsilon = \frac{K}{2} E_0^2 \cos^2 \alpha = \varepsilon_0 \cos^2 \alpha$$

Cette loi est appelée loi de Malus.

2. Le champ électrique à l'entrée de l'analyseur en $z = 0$ est :

$$\vec{E}_{\text{entrée}} = E_{0x} \cos(\omega t) \vec{u}_x + E_{0y} \sin(\omega t) \vec{u}_y$$



Le champ électrique à la sortie de l'analyseur en $z = 0$ est :

$$\vec{E}_{\text{sortie}} = (\vec{E}_{\text{entrée}} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} = (E_{0x} \cos(\omega t) \cos \alpha + E_{0y} \sin(\omega t) \sin \alpha) \vec{u}$$

On obtient une onde polarisée rectilignement suivant \vec{u} .

L'éclairement de l'onde en sortie est :

$$\varepsilon = K \left\langle \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right\rangle$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 &= (E_{0x} \cos(\omega t) \cos \alpha)^2 + (E_{0y} \sin(\omega t) \sin \alpha)^2 \\ &\quad + 2 E_{0x} \cos(\omega t) \cos \alpha E_{0y} \sin(\omega t) \sin \alpha \end{aligned}$$

On en déduit la moyenne temporelle :

$$\left\langle \left\| \vec{E}_{\text{sortie}} \right\|^2 \right\rangle = \frac{1}{2} (E_{0x} \cos \alpha)^2 + \frac{1}{2} (E_{0y} \sin \alpha)^2$$

L'éclairement de l'onde en sortie est donc :

$$\varepsilon = \frac{K}{2} (E_{0x}^2 \cos^2 \alpha + E_{0y}^2 \sin^2 \alpha)$$

Interface entre deux milieux

Exercice 26.1 : Réflexion sur un conducteur parfait

Une onde plane monochromatique se propage dans le vide. Le champ électrique de l'onde incidente est de la forme : $\vec{E}_i = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$. On note c la vitesse de la lumière dans le vide. On rappelle les relations de passage : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$; $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ et $\mu_0 \vec{j}_S = \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)$.

1. L'onde rencontre en $z = 0$ un plan métallique parfait et l'espace $z > 0$ est occupé par un métal parfait. Montrer qu'il y a une onde réfléchi. On note $\vec{E}_r = E_{r0} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$ le champ réfléchi. Établir l'expression de E_{r0} .
2. Déterminer le champ magnétique dans la région $z < 0$. De quel type d'ondes s'agit-il ?
3. On place en $z = -\ell$ un second plan métallique identique au premier. En introduisant un entier N préciser les fréquences des ondes stationnaires qui peuvent s'établir entre les deux plans. Qu'impliquent les relations de passage en $z = 0$ et $z = -\ell$ concernant le champ magnétique ?
4. Quelle est la densité moyenne d'énergie volumique ? Quelle est l'expression de l'énergie électromagnétique moyenne localisée dans un cylindre de section S de longueur ℓ de génératrices parallèles à Oz ?

Analyse du problème

Il s'agit d'un exercice avec la réflexion d'une onde sur un conducteur parfait. On écrit la relation de passage du champ électrique pour montrer qu'il existe nécessairement une onde réfléchi et en déduire ses caractéristiques. On obtient des ondes stationnaires.



1. On remarque que le champ électrique est nul pour $z = 0$. La composante tangentielle du champ électrique doit être nulle pour $z = 0$.
On doit donc avoir pour tout instant t :

$$E_0 \exp(i(\omega t)) = 0$$

Cette condition n'est pas réalisée si $E_0 \neq 0$. On a donc nécessairement une onde réfléchie. Elle se met sous la forme la plus générale : $\vec{E}_r = \underline{E}_{r0} \exp(i(\omega't + k'z)) \vec{u}_x$.

La composante tangentielle du champ électrique doit être nulle pour $z = 0$. On doit donc avoir pour tout instant t :

$$E_0 \exp(i(\omega t)) + \underline{E}_{r0} \exp(i\omega't) = 0$$

Pour que cette relation soit vérifiée pour tout instant t , on a nécessairement $\omega = \omega'$ et comme la relation de dispersion est $\omega = kc$, alors $k' = k$. L'amplitude de l'onde réfléchie doit vérifier la relation :

$$\underline{E}_{r0} = -E_0$$

Le champ électrique de l'onde réfléchie est :

$$\vec{E}_r = -E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$$

2.

Onde incidente :

On a une onde plane progressive monochromatique (OPPM) qui se propage dans le vide. La champ magnétique est donné par la relation :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{k\vec{u}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{\vec{u}_z \wedge E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x}{c}$$

Soit :

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y$$

Onde réfléchie :

On peut utiliser le même formalisme pour l'onde réfléchie.

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{(-\vec{u}_z) \wedge (-E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x)}{c}$$

Soit :

$$\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_y$$

Calcul du champ électrique résultant :

$$\begin{aligned} \underline{E} &= E_0 \exp(i(\omega t - kz)) - E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \\ &= E_0 \exp(i\omega t) [\exp(-ikz) - \exp(ikz)] \end{aligned}$$

D'où

$$\underline{E} = -2i E_0 \exp(i\omega t) \sin(kz) = 2E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \sin(kz)$$

On peut mettre le champ électrique complexe sous la forme :

$$\underline{E} = -2i E_0 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \sin(kz)$$

En notation réelle, on a :

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{u}_x$$

Calcul du champ magnétique résultant :

$$\begin{aligned} \underline{B} &= \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kz)) + \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kz)) \\ &= \frac{E_0}{c} \exp(i\omega t) [\exp(-ikz) + \exp(ikz)] \end{aligned}$$

D'où :

$$\underline{B} = \frac{2E_0}{c} \exp(i\omega t) \cos(kz)$$

En notation réelle, on a :

$$\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{u}_y$$

On obtient une **onde stationnaire**. Elle ne se propage pas car elle est de la forme $f(z)g(t)$.

3. On doit avoir en $z = -\ell$ un champ électrique nul pour vérifier les conditions de passage pour le champ électrique :

$$\vec{E}(-\ell) = \vec{0} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(-k\ell) \vec{u}_x$$

soit $k\ell = N\pi$ avec N entier.

k est le module du vecteur d'onde, appelé module d'onde. On a :

$$k\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \ell = N\pi$$

D'où :

$$\lambda = \frac{2\ell}{N}$$

La fréquence est notée f ou ν . Elle est reliée à la longueur d'onde λ par la relation :

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\ell}{N}$$

La fréquence de l'onde doit vérifier la relation :

$$\nu = N \frac{c}{2\ell}$$

avec N entier positif.

Relation de passage pour $z = 0$:

On appelle côté 1 la région $z = 0^+$ et côté 2 la région $z = 0^-$.

Le champ magnétique dans la région 1 est nul : $\vec{B}_1 = \vec{0}$.

Le champ magnétique dans la région 2 a été calculé précédemment.

Pour $z = 0$, on a : $\vec{B}_2 = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_y$.

La relation de passage s'écrit :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge (-\vec{u}_z)$$

On peut également l'écrire sous la forme :

$$\mu_0 \vec{j}_S = (-\vec{u}_z) \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)$$

On obtient finalement :

$$\vec{j}_S = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

Relation de passage pour $z = -\ell$:

$z = -\ell$: On appelle côté 1 la région $z = -\ell^-$ et côté 2 la région $z = -\ell^+$.

Le champ magnétique dans la région 1 est nul : $\vec{B}_1 = \vec{0}$.

Le champ magnétique dans la région 2 a été calculé précédemment.

Pour $z = -\ell$, on a : $\vec{B}_2 = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(-k\ell) \vec{u}_y$.

La relation de passage s'écrit :

$$\mu_0 \vec{j}_S = (\vec{u}_z) \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1).$$

D'où :

$$\mu_0 \vec{j}_S = \vec{u}_z \wedge \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(-k\ell) \vec{u}_y = \frac{-2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(N\pi) \vec{u}_x$$

On obtient finalement :

$$\vec{j}_S = \frac{-2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \cos(N\pi) \vec{u}_x$$

Interprétation physique

On obtient des courants surfaciques pour $z = 0$ et $z = -\ell$.

L'onde incidente qui arrive sur le métal met en mouvement les électrons qui sont à l'origine d'un champ réfléchi de même pulsation puisque les équations de Maxwell sont linéaires.

Comme le conducteur est parfait, les courants sont surfaciques.



Il faut utiliser les notations réelles car on a le produit de grandeurs sinusoïdales.

4. La densité volumique d'énergie électromagnétique est :

$$\begin{aligned} u_{em} &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= \frac{4\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz)}{2} + \frac{4E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz)}{2\mu_0 c^2} \end{aligned}$$

soit :

$$u_{em} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz) + 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz)$$

La moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique est :

$$\langle u_{em} \rangle = 2\varepsilon_0 E_0^2 \frac{1}{2} \sin^2(kz) + 2\varepsilon_0 E_0^2 \frac{1}{2} \cos^2(kz)$$

Finalement, on obtient :

$$\langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$$

L'énergie électromagnétique moyenne localisée dans le cylindre de section S et de longueur ℓ est :

$$\langle U_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 S \ell$$

Index

A

adaptation d'impédance 245
amplificateur
 linéaire intégré 4, 8, 11, 15
amplification 15
ARQS magnétique 153, 165, 281

B

bornes homologues 190

C

champ glissant
 rotorique 204
 statorique 204
cycle
 à hystérésis 8
 d'hystérésis 174
 de Carnot 83

D

débit volumique 88
densité
 particulaire 61
 volumique d'énergie magnétique 171
deuxième loi de Joule 82
diagramme
 de Clapeyron 70, 74
 de Fresnel 183
 des frigoristes 80
diode 222, 230

E

effet
 de peau 166
 Joule 162, 211

Venturi 88
efficacité 75
 de Carnot 73
équation
 de d'Alembert 235, 247, 262, 267
 de diffusion 281
 de la chaleur 56
 de Maxwell-Gauss 122, 129
 de Poisson 129, 131

F

flux
 propre 158, 169
 thermique 38, 41, 42, 46, 48, 51
force
 de Laplace 146, 213
 de pression 64
fréquence d'échantillonnage 20

H

hacheur 221, 225

I

impédance acoustique 252
inductance propre 167, 195

L

linéaire intégré 15
loi
 d'Ohm 42
 d'Ohm locale 34, 280
 de Descartes 295
 de Faraday 144, 148, 154
 de Fick 60, 62
 de Fourier 38, 46, 56

de Laplace 77
de Lenz 143
de Malus 297
de Newton 39

M

moment des forces de Laplace 150
moteur asynchrone 152

N

noeud
de surpression 249
de vibration 239

O

onde stationnaire 238, 300

P

pertes cuivre 211
premier principe de la thermodynamique
pour un système ouvert 105
principe de la thermodynamique à un
système ouvert 77
puissance
moyenne 182, 183, 186, 223, 227
thermique 38, 46, 48, 54

R

régime permanent d'écoulement 89
relation
de dispersion 263, 281, 288
de passage 291, 301
résistance thermique 43, 44, 49, 52, 55
résonance 239
rotor 217

S

spectre de Fourier 25
stator 217
surface de Gauss 114, 126
surmodulation 27

T

théorème
d'Ampère 137-139, 141, 158, 162,
166, 168, 170, 174, 189, 194, 202
de Bernoulli 85, 87, 94, 97, 102
de Gauss 113, 116, 119, 120, 123,
126, 134
de la quantité de mouvement 95, 98,
103, 108, 146
de Millman 4, 11, 15
de Shannon 19, 22
de superposition 118, 133, 253
des moments 70, 74, 82
du moment cinétique 214, 218

V

vecteur de Poynting 255, 259, 264, 271,
293
ventre
de surpression 249
de vibration 239
vitesse
de groupe 272
de phase 272