Classe | prépa

1re année

Les bons réflexes pour réussir

MPSI
PCSI
PTSI

Optique géométrique

- Vérifier ses connaissances de cours
- Dégager des méthodes pour les exercices
- Savoir rédiger les solutions

Raphaële Langet

Nathan

TOP EDITION
10 Rue Al Alim Achtatani
Tél : 0522304016 / 0522828188
Fax : 0522441047 / 0522822015
E-mail:top-edition@menara.ma

MPSI
PCSI
PTSI

Optique géométrique

Raphaële Langet
Professeur en classes préparatoires
au lycée Janson-de-Sailly

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

Nathan

Cet ouvrage fait partie de la collection « Classe prépa », une collection d'ouvrages simples et accessibles couvrant l'ensemble des programmes des classes préparatoires aux Grandes Écoles scientifiques.
Élaborée pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés, cette collection est basée sur une approche pragmatique des programmes. Ainsi, chaque chapitre est constitué de cinq rubriques :

- **Retenir l'essentiel** qui reprend les notions indispensables du cours et indique des conseils pour éviter les erreurs les plus fréquentes ;
- **Avant la colle** qui regroupe des QCM et des exercices d'application immédiate pour vérifier les connaissances ;
- **Savoir résoudre les exercices** qui, sur la base d'exercices « classiques », permet aux élèves de développer les méthodes indispensables en prépa : analyse de l'énoncé, démarche à suivre, réflexes à acquérir…
- **S'entraîner** qui regroupe par ordre de difficultés croissantes une batterie d'exercices ;
- **Corrigés** où l'ensemble des exercices sont corrigés en détails et commentés.

Coordination éditoriale : Béatrice Jovial-Vernet
Relecture : Gilbert Gié
Fabrication : Lucile Germaine
Composition : Alpha-Edit
Couverture : Marie-Astrid Bailly-Maître
Maquette intérieure : Thierry Méléard

© Nathan, 2008 - ISBN 978-2-09-160749-8

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants désireux de parfaire leurs connaissances ou leur entraînement en optique géométrique.

C'est une partie assez simple du programme de première année de classe préparatoire, mais qui demande toutefois des méthodes solides et une bonne capacité de représentation.

Chaque chapitre est subdivisé en différentes rubriques bien identifiées permettant de réviser le cours, de tester son acquisition sur un QCM ou sur des exercices très simples, ou encore de s'exercer à la résolution de problèmes plus complexes.

Tous les énoncés proposés sont corrigés avec soin et méthode, pour permettre une progression en profondeur dans ce domaine de la physique.
J'espère que cet ouvrage vous aidera dans ce sens.

Je tiens à remercier mes interlocuteurs, Philippe Fleury et Béatrice Jovial-Vernet, pour leurs relectures consciencieuses, leurs contributions pertinentes et surtout leur patience.

Merci à mes élèves, qui me poussent à être toujours plus claire et plus précise dans mes explications.

Merci à mes proches, pour leur soutien tout au long de cette rédaction.

Raphaële Langet

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

Sommaire

Avant-propos 3

1 Lois de l'optique géométrique

1 - Nature de la lumière 7
2 - Rayons lumineux 9
3 - Lois de Snell-Descartes 10
savoir résoudre les exercices 15
exercices 27
corrigés 30

2 Formation des images – Miroir et dioptre plans

1 - Objets et images en optique géométrique 39
2 - Formation des images – Stigmatisme 41
3 - Miroir plan 42
4 - Dioptre plan 43
savoir résoudre les exercices 48
s'entraîner 56
corrigés 58

3 Systèmes centrés – Miroirs sphériques

1 - Systèmes centrés - Conditions de Gauss 65
2 - Miroir sphérique 68
savoir résoudre les exercices 75
exercices 85
corrigés 88

4 Lentilles sphériques minces

1 - Présentation - Stigmatisme 99
2 - Foyers 101
3 - Construction des images - Relations de conjugaison 103
4 - Associations de lentilles sphériques minces 105
savoir résoudre les exercices 108
s'entraîner 120
corrigés 125

5 Instruments d'optique

1 - Notions sur l'œil 141
2 - Loupe – Oculaire 143
3 - Observations d'objets et d'images 144
4 - Goniomètre et spectroscope à prisme 147
savoir résoudre les exercices 153
exercices 169
corrigés 176

Index 191

1 Lois de l'optique géométrique

On s'intéresse dans ce chapitre aux lois générales de l'optique géométrique, qui concerne, comme son nom l'indique, uniquement la propagation géométrique de la lumière.

1 Nature de la lumière

La nature de la lumière a fait l'objet de débats scientifiques pendant plusieurs siècles, les différentes époques privilégiant soit un caractère ondulatoire, soit un caractère corpusculaire. Aujourd'hui, pour accorder les différentes expériences, la dualité onde-corpuscule est admise.

1.1. Ondes électromagnétiques

1.1.1. Ondes

Les ondes se rencontrent dans tous les domaines de la physique, qu'il s'agisse de la propagation d'un signal mécanique le long d'une corde, d'ondes sismiques à la suite d'un tremblement de terre, d'ondes acoustiques, ou bien encore de la houle à la surface des océans.

La lumière est également de nature ondulatoire, on parle d'*onde électromagnétique.*

Remarque
L'étude de ces ondes est au programme de deuxième année.

Les ondes électromagnétiques sont des perturbations spatiales et temporelles du champ électromagnétique qui règne en tout point de l'espace. Ces ondes peuvent se propager dans toutes les directions, et ce, même sans support matériel (contrairement aux ondes sonores par exemple). La vitesse de propagation dépend du milieu. Dans le vide, on parle de *célérité de la lumière*, notée c.

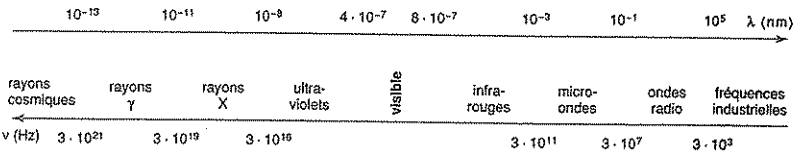
On indiquera ici que ces ondes présentent une double périodicité spatiale et temporelle. La période spatiale, nommée *longueur d'onde* et notée λ, est reliée à la période temporelle T par la relation suivante : $\boxed{\lambda = vT}$, où v est la vitesse de propagation dans le milieu.

Ainsi, dans le vide, on aura $\boxed{\lambda_0 = cT.}$

Lorsqu'une onde électromagnétique ne possède qu'une seule fréquence bien déterminée, elle est dite monochromatique. Si en revanche elle est composée d'une superposition d'ondes de fréquences différentes, on la qualifie de polychromatique.

1.1.2. Spectre des ondes électromagnétiques

Les ondes électromagnétiques s'étendent sur un large spectre, en termes de longueur d'onde ou de fréquence. D'après la relation $\lambda_0 = cT = \frac{c}{\nu}$, le domaine des hautes fréquences ν correspond aux courtes longueurs d'onde λ_0, et réciproquement, les basses fréquences correspondent aux grandes longueurs d'onde :



Le domaine accessible au récepteur biologique (l'œil), que l'on qualifie de domaine visible, est en réalité très restreint devant l'étendue du spectre électromagnétique. Il s'agit du domaine 400 nm ↔ 800 nm. Les différents domaines correspondent à des modes d'émission différents que l'on ne détaillera pas ici.

1.2. Propagation dans un milieu matériel

° Dans un milieu matériel, l'onde électromagnétique interagit avec les particules constitutives de ce milieu, ce qui provoque généralement une atténuation de l'énergie transportée, on parle de phénomène d'*absorption.*

Dans cet ouvrage, on se contentera d'étudier des **Milieux Homogènes Transparents Isotropes** (M.H.T.I).

• Le terme transparent fait référence à une absence d'absorption ;

• le terme homogène caractérise des propriétés du milieu identiques en tout point de l'espace ;

• le terme isotrope caractérise des propriétés physiques du milieu identiques dans toutes les directions.

On définit pour un tel milieu un *indice de réfraction absolu* par la relation $\boxed{n = \frac{c}{v}.}$

° La vitesse de propagation d'une onde lumineuse dans un milieu (v) étant toujours inférieure à sa vitesse de propagation dans le vide (c), il en résulte que l'indice de réfraction absolu d'un milieu est nécessairement supérieur à 1 : $\boxed{n > 1.}$

Pour une onde monochromatique, de fréquence ν, la longueur d'onde dans le vide est donnée par $\lambda_0 = cT = \frac{c}{\nu}$. Dans le milieu matériel, elle est donnée par $\lambda = vT = \frac{v}{\nu}$.

Par conséquent $\boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}.}$

Les M.H.T.I. usuels suivent une loi de Cauchy : $\boxed{n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}.}$

On voit que l'indice du milieu dépend de la longueur d'onde de l'onde qui s'y propage ; la vitesse de propagation, donnée par $v = \lambda\nu = \frac{\lambda_0}{n}\nu$ en dépend également, ce qui caractérise le phénomène de *dispersion*, et qui provoque une décomposition des lumières polychromatiques.
L'indice d'un M.H.T.I. est en général donné pour une radiation moyenne (la raie jaune du sodium, $\lambda_0 = 589$ nm) :

M.H.T.I.	Air	Eau	Verre crown	Verre flint
n	1,00029	1,33	1,52	1,67

Remarque : les verres sont des solides contenant essentiellement des anions silicates et des cations métalliques. Si ces cations proviennent d'atomes légers (Na^+, Ca^{2+}, ...) on obtient un verre crown. Si ces cations proviennent d'atomes lourds comme Pb^{2+}, on obtient un verre flint.

L'air est un très bon modèle du vide, car l'indice y est très proche de 1 dans les conditions normales de température et de pression.
Un milieu est d'autant plus **réfringent** que son indice de réfraction est élevé.

1.3. Le photon

La nature ondulatoire de la lumière permet d'interpréter grand nombre d'expériences, mais certaines la mettent en défaut, notamment l'effet photoélectrique, qui suppose une répartition discrète de l'énergie dans l'espace (ce qui est impossible dans une représentation ondulatoire). Il faut donc invoquer la **nature corpusculaire** de la lumière.
Le rayonnement électromagnétique peut être interprété comme un flux de *photons*, particules de masse nulle, se déplaçant à la vitesse de la lumière dans le vide, chacun transportant un quantum d'énergie : $W = h\nu$, où h est la constante de Planck, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s.
Le lien entre les deux descriptions, ondulatoire et corpusculaire, se fait en disant que la probabilité de présence du photon est proportionnelle au carré du champ électrique caractérisant l'onde correspondante.

2 Rayons lumineux

L'optique géométrique ne tranche pas sur la dualité onde-corpuscule, et s'intéresse uniquement au rayon lumineux. Dans la description ondulatoire, ce rayon lumineux est interprété comme la ligne de transport de l'énergie rayonnante (liée au champ électromagnétique associé à l'onde), et dans la description corpusculaire, il est interprété comme matérialisant la trajectoire des photons.

2.1. Propagation rectiligne

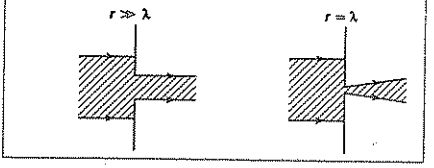
Dans un milieu homogène transparent isotrope, la lumière se propage rectilignement.

Cette propriété essentielle, mise en évidence, par exemple, par la matérialisation d'un rayon laser dans un nuage de poussière, ne se généralise pas aux milieux d'indice variable, dans lesquels la courbure du rayon lumineux a lieu vers les indices croissants.

2.2. Approximation de l'optique géométrique

Une question fondamentale se pose sur la possibilité d'isoler un rayon lumineux.
En interposant un diaphragme devant une source, on isole un pinceau lumineux, de plus en plus fin à mesure que l'on diminue la taille du diaphragme (figure 1 à gauche).

Fig. 1 *Influence de l'ouverture du diaphragme : diffraction*



Mais on constate expérimentalement que si le diaphragme devient trop petit, de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, on observe une réouverture du faisceau lumineux. À cause de ce phénomène de **diffraction**, il est impossible d'isoler un rayon lumineux unique.
Finalement, la notion de rayon lumineux est un ressort mathématique pour comprendre la propagation géométrique de la lumière, tant que les diaphragmes des systèmes optiques étudiés restent grands devant la longueur d'onde. On peut alors parler de propagation rectiligne, dans le cadre de cette approximation de l'optique géométrique.

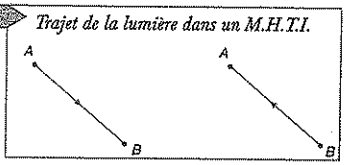
2.3. Propriétés du rayon lumineux

Deux rayons lumineux issus de deux sources différentes se propagent indépendamment l'un de l'autre.

Dans un M.H.T.I., le chemin effectivement suivi par la lumière est celui qui rend le temps de trajet le plus court. Pour aller d'un point A à un point B, il s'agit donc du segment $[AB]$ (figure 2 à gauche).

Remarque
Ce principe de moindre temps est appelé **principe de Fermat**.

Fig. 2 *Trajet de la lumière dans un M.H.T.I.*



Il en résulte une autre propriété fondamentale des rayons lumineux, qui est que pour aller de B à A, la lumière reprendra le même chemin que celui emprunté pour aller de A à B (figure 2 à droite).

Il s'agit du **principe de retour inverse de la lumière**.

3 Lois de Snell-Descartes

Les lois de Snell-Descartes donnent le comportement d'un rayon lumineux lors de l'interaction avec un dioptre, c'est-à-dire une surface séparant deux M.H.T.I.

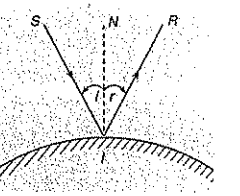
3.1. Lois de la réflexion

Les premières lois de Snell-Descartes concernent la réflexion, sur un dioptre ou sur un miroir.

On considère un rayon incident provenant d'une source S et interceptant la surface réfléchissante au point d'incidence I. On définit la normale (IN) à la surface réfléchissante en ce point.
On choisit un sens d'orientation des angles, et on définit l'angle d'incidence i comme l'angle entre la normale et le rayon incident. De la même façon, on définit l'angle de réflexion r comme l'angle entre la normale et le rayon réfléchi.

Lois de la réflexion

- Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence, défini par le rayon incident et la normale en I à la surface réfléchissante.
- $r = -i$.



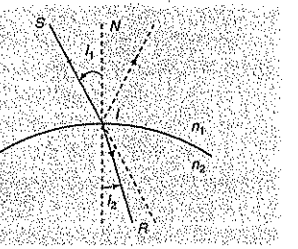
3.2. Lois de la réfraction

On s'intéresse à un dioptre, c'est-à-dire une surface séparant deux M.H.T.I. d'indices différents.
On considère un rayon incident provenant d'une source S et arrivant sur le dioptre au point d'incidence I. On définit la normale (IN) au dioptre en ce point.
On introduit l'angle d'incidence i_1, orienté, défini par l'angle entre la normale et le rayon incident.
Une partie de l'énergie lumineuse passe dans le deuxième milieu, elle est dite réfractée. Le rayon réfracté (IR) suit la loi de Snell-Descartes de la réfraction, où i_2 est l'angle de réfraction, défini par l'angle, orienté, entre la normale et le rayon réfracté.

Remarque
Même si on parle de réflexion sur un miroir généralement, il y a toujours une petite partie de lumière qui est réfléchie, même sur un dioptre, et cette réflexion suit les lois de Snell-Descartes.

Lois de la réfraction

- Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence, défini par le rayon incident et la normale au dioptre en I.
- $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.



3.3. Réfraction limite – Réflexion totale

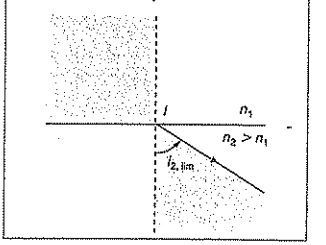
3.3.1. Réfraction limite : $n_1 < n_2$

Si la lumière passe d'un milieu moins réfringent à un milieu plus réfringent $(n_2 > n_1)$, alors le rayon réfracté se rapproche de la normale, puisque $\sin i_2 = \dfrac{n_1}{n_2} \sin i_1 < \sin i_1$.

Lorsque i_1 varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$, i_2 varie alors de 0 à $i_{2,\text{lim}}$, tel que $\boxed{\sin i_{2,\text{ lim}} = \dfrac{n_1}{n_2}}$.

Par conséquent, si l'on éclaire le point I avec toutes les incidences possibles $(0 < i_1 < \frac{\pi}{2})$, tous les rayons réfractés depuis le point I sont situés dans un cône de sommet I et de demi-angle au sommet $i_{2,\,\lim}$, comme le montre la figure 3.

Fig. 3 *Phénomène de réfraction limite*



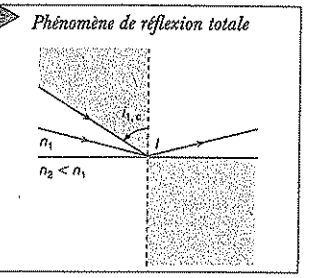
3.3.2. Réflexion totale : $n_1 > n_2$

Si la lumière passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent $(n_2 < n_1)$, alors le rayon réfracté s'écarte de la normale, puisque $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin i_1 > \sin i_1$.

D'après le principe de retour inverse de la lumière, pour que i_2 varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, il suffit de faire varier i_1 entre 0 et $i_{1,\,c}$ tel que $\boxed{\sin i_{1,\,c} = \frac{n_2}{n_1}}$.

Si l'angle d'incidence est supérieur à cet angle critique $i_{1,\,c}$, alors toute l'énergie lumineuse incidente est réfléchie, puisque l'on ne peut plus trouver de rayon réfracté qui satisfasse aux lois de Snell-Descartes. On parle de phénomène de **réflexion totale**, mis en évidence sur la figure 4.
Ce phénomène est notamment mis à profit dans la propagation de la lumière par les fibres optiques.

Fig. 4 *Phénomène de réflexion totale*

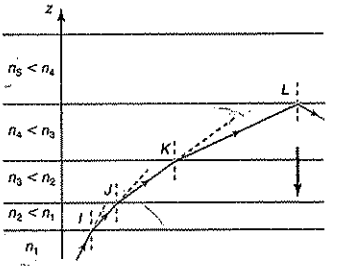


3.4. Milieux d'indice variable

On se contente de notions qualitatives dans ce chapitre. Considérons un milieu particulier modélisé par un empilement de couches horizontales (milieu stratifié), chacune étant constituée d'un M.H.T.I. d'indice n_k. Comme tous les dioptres ont une normale commune, la propagation se fait dans le plan d'incidence initiale, défini par le rayon incident sur le premier dioptre et la normale commune à tous les dioptres. L'application de la loi de la réfraction à chaque interface entre les couches donne un invariant de la propagation : $\boxed{n_k \sin i_k = \text{constante.}}$

On constate sur la figure 5 que la courbure a lieu vers les indices croissants. En effet, ici, le rayon lumineux s'écarte de la normale à chaque dioptre, jusqu'à se réfléchir totalement au niveau du point L (ce qui permet d'expliquer le phénomène de mirages, voir exercice 4 de « Savoir appliquer le cours »).

Doc. 7 *Propagation d'un rayon lumineux dans un milieu stratifié*

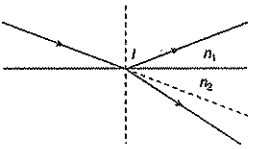


Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ *Corrigés p. 30*

1 Sur le schéma suivant, indiquer la relation entre les indices des milieux traversés :



- ☑ **a.** $n_1 < n_2$
- ☐ **b.** $n_1 > n_2$

2 Soit une onde monochromatique dont la fréquence est ν lorsqu'elle se propage dans le vide. Quelles sont les affirmations exactes ?

- ☐ **a.** Dans un milieu matériel, la fréquence est modifiée, elle est plus grande.
- ☑ **b.** Dans un milieu matériel, la fréquence est modifiée, elle est plus petite.
- ☑ **c.** Dans un milieu matériel, la fréquence n'est pas modifiée.
- ☑ **d.** Dans un milieu matériel, la longueur d'onde est modifiée, elle est plus courte.
- ☐ **e.** Dans un milieu matériel, la longueur d'onde est modifiée, elle est plus longue.
- ☐ **f.** Dans un milieu matériel, la longueur d'onde n'est pas modifiée.

3 Dans le spectre des ondes électromagnétiques, les radiations ultraviolettes correspondent :

- ☑ **a.** à des plus hautes fréquences que celles du visible.
- ☒ **b.** à des plus basses fréquences que celles du visible.
- ☐ **c.** à des plus grandes longueurs d'onde que celles du visible.
- ☐ **d.** à des plus courtes longueurs d'onde que celles du visible.

4 Vous voyez quelqu'un dans un miroir. Quelle est l'affirmation exacte ?

- ☒ **a.** Cette personne peut nécessairement vous voir.
- ☐ **b.** Cette personne ne peut jamais vous voir.
- ☐ **c.** Il se peut que cette personne puisse vous voir, mais il se peut aussi qu'elle ne le puisse pas.

Savoir appliquer le cours

➢ *Corrigés p. 30*

1 On considère un prisme à réflexion totale. Il s'agit d'un dièdre d'angle au sommet $A = 90°$ et de section isocèle, constitué d'un verre d'indice n. Il est placé dans certains systèmes optiques (jumelles par exemple) pour provoquer une déviation de $\frac{\pi}{2}$ ou de π d'un rayon lumineux.

a. Représenter sur deux schémas les configurations correspondantes pour le rayon incident et le prisme.

b. Quelle condition doit vérifier l'indice pour que de telles déviations soient effectivement possibles ?

2 On s'intéresse à une incidence particulière, appelée incidence de Brewster. On considère un dioptre air (indice $n_a = 1{,}00$) /eau (indice $n = 1{,}33$).
Pour quel angle d'incidence i_B le rayon réfléchi est-il perpendiculaire au rayon réfracté ?

3 Un biologiste est en mission d'observation dans un sous-marin. Il est placé à côté d'un hublot de petite taille. Il est donc dans l'air, d'indice $n_a = 1{,}00$, et observe la faune sous-marine, dans l'eau, d'indice $n = 1{,}33$. On supposera que le hublot peut être assimilé à un simple dioptre entre l'air et l'eau.

1. Calculer le champ angulaire 2α visible depuis le sous-marin. Un poisson peut-il s'approcher du hublot sans être vu par le biologiste ?

2. Calculer le champ angulaire $2\alpha'$ visible depuis la mer. Le biologiste peut-il se cacher du poisson ?

3. Ces résultats sont-ils cohérents ?
Le poisson s'approche du hublot en longeant la paroi du sous-marin, que voit-il dans le hublot ?

4 On s'intéresse au phénomène de mirage. L'indice de réfraction d'un milieu est une fonction décroissante de la température (à une pression donnée).

a. Expliquer le phénomène de mirage inférieur observé dans le désert, ou sur la route en été.

b. Préciser à quelle saison on peut observer en mer des mirages supérieurs.

5 Lorsque l'horizon est bien dégagé et les conditions climatiques favorables, on peut apercevoir, au coucher du Soleil, une lumière verte intense, observée juste au moment où le Soleil passe sous l'horizon (définie par la tangente à la Terre passant par les yeux de l'observateur). On parle de **rayon vert**.
Pouvez-vous expliquer ce phénomène ?

6 On s'intéresse à la construction géométrique du rayon réfracté correspondant à un rayon incident donné.

1. Construction de Descartes
On trace, dans le milieu n_2, au niveau du dioptre, deux demi-cercles centrés sur le point d'incidence I de la lumière, de rayons respectifs n_1 et n_2. Indiquer comment, à partir de ces cercles et en utilisant la loi de la réfraction, on peut construire (sans rapporteur) le rayon réfracté.
On utilisera cette construction pour illustrer le phénomène de réflexion totale.

2. Construction d'Huygens
On trace cette fois-ci des cercles centrés sur I, mais de rayons respectifs $\frac{1}{n_1}$ et $\frac{1}{n_2}$, et des droites tangentes à ces cercles. Indiquer comment on peut trouver le rayon réfracté.

1 – Arc-en-ciel (d'après CCP)

Partie A – Questions préliminaires

1 Rappeler la loi de Snell-Descartes pour la réfraction, lorsqu'un rayon passe de l'air (d'indice unité) à un milieu d'indice n, en notant i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction.

2 Exprimer la dérivée $\frac{dr}{di}$ exclusivement en fonction de l'indice n, et du sinus de l'angle d'incidence i, $(\sin i)$.

3 Exprimer, en fonction de i et de r, la valeur de la déviation du rayon lumineux, déviation définie par l'angle entre la direction incidente et la direction émergente, orientées dans le sens de propagation.

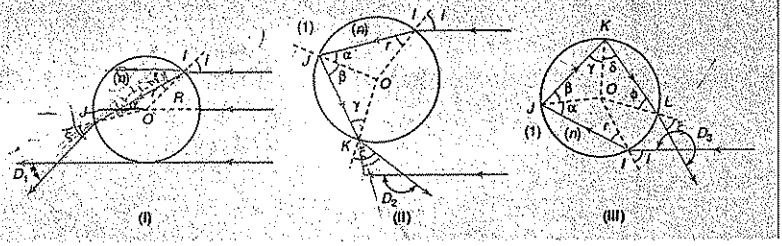
4 Exprimer aussi, à l'appui d'un schéma, la déviation d'un rayon lumineux dans le cas d'une réflexion.

Partie B – Étude de l'arc-en-ciel

Lorsque le Soleil illumine un rideau de pluie, on peut admettre que chaque goutte d'eau se comporte comme une sphère réceptionnant un faisceau de rayons parallèles entre eux. Cela revient à considérer le Soleil comme un objet ponctuel à l'infini. Une goutte d'eau quelconque, représentée par une sphère de centre O et de rayon R, est atteinte par la lumière solaire sous des incidences variables, comprises entre 0° et 90°. Son indice, pour une radiation donnée, sera noté n tandis que celui de l'air sera pris égal à l'unité.

1 On recherche, dans un premier temps, les conditions pour que la lumière émergente, issue d'une goutte d'eau, se présente sous forme d'un faisceau de lumière parallèle. Pour cela on fait intervenir l'angle de déviation D de la lumière à travers la goutte d'eau, mesuré entre le rayon émergent et le rayon incident. Cet angle de déviation D est une fonction de l'angle d'incidence i.
Exprimer la condition de parallélisme des rayons émergents en la traduisant mathématiquement au moyen de la dérivée $\frac{dD}{di}$.

2 On considère les trois cas suivants, représentés sur la figure ci-dessous.
Trois configurations : lumière directement transmise (I), transmise après une réflexion partielle à l'intérieur de la goutte (II), transmise après deux réflexions partielles à l'intérieur de la goutte (III).



a. Donner les expressions, en fonction de i ou de r, des angles α, β, γ, δ, Φ et ξ.
b. En déduire, en fonction de i et r, les angles de déviation D_1, D_2, et D_3.
c. Rechercher ensuite, si elle existe, une condition d'émergence d'un faisceau parallèle, exprimée par une relation entre le sinus ($\sin i$) de l'angle d'incidence et l'indice n de l'eau.

3 Le Soleil étant supposé très bas sur l'horizon, normal au dos d'un observateur, montrer que celui-ci ne pourra observer la lumière transmise que si la goutte d'eau se trouve sur deux cônes d'axes confondus avec la direction solaire et de demi-angles au sommet $\theta_2 = \pi - D_2$ (justification de l'arc primaire) et $\theta_3 = D_3 - \pi$ (justification de l'arc secondaire).

4 Les angles θ_2 et θ_3 dépendant de l'indice n de l'eau, on observe un phénomène d'irisation dû au fait que cet indice évolue en fonction de la longueur d'onde. Calculer ces angles pour le rouge et le violet, sachant que pour le rouge l'indice vaut 1,3317 tandis que pour le violet il est égal à 1,3448.
En admettant que l'observateur se trouve face à un rideau de pluie, dessiner la figure qui apparaît dans son plan d'observation en notant la position respective des rouges et des violets.

résolution méthodique

Partie A

Les questions préliminaires servent à poser les jalons de la résolution finale, on s'y référera dans les questions ultérieures bien entendu.

1 Lorsque l'on passe d'un milieu d'indice unité à un milieu d'indice n, si i est l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction, la loi de la réfraction donne :

$$\boxed{\sin i = n \sin r}$$

2 On différencie l'expression précédente, en supposant que n est constant, ce qui donne : $\cos i\, di = n \cos r\, dr$.

- On choisit ici de différencier l'expression, car la fonction $r(i)$ n'est pas explicite, ou plutôt, elle ferait intervenir la fonction arcsinus, qu'il n'est pas si aisé de dériver correctement. En écrivant en revanche ici une différenciation, le problème ne se pose plus. Cependant il faut être vigilant pour savoir quelles sont les grandeurs variables. Ici, on se place pour le moment en lumière monochromatique, l'indice n du milieu peut donc être considéré comme constant.
- Rappelons que la différentielle d'une fonction $x \mapsto f(x)$ est donnée par $df = f'(x)dx$.

Or $\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i}$ et $\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sin i}{n}\right)^2}$.

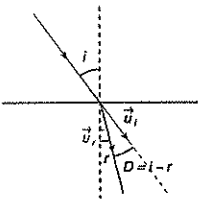
Il vient alors $\dfrac{dr}{di} = \dfrac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{n\sqrt{1 - \left(\dfrac{\sin i}{n}\right)^2}}$.

Et pour finir $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2 i}}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}}$.

3 On représente la configuration étudiée sur le schéma ci-contre. Les vecteurs unitaires $\vec{u}_i$ et $\vec{u}_r$ donnent respectivement les directions de propagation de la lumière incidente et de la lumière réfléchie.
La déviation D est donc l'angle entre ces vecteurs : $D = (\vec{u}_i, \vec{u}_r)$, et s'exprime comme suit :

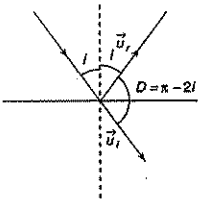
$$\boxed{D = i - r}$$

Déviation lors de la réfraction



4 Cette fois-ci, sur le schéma de la figure ci-contre, on voit que $\boxed{D = \pi - 2i.}$

Déviation lors de la réflexion



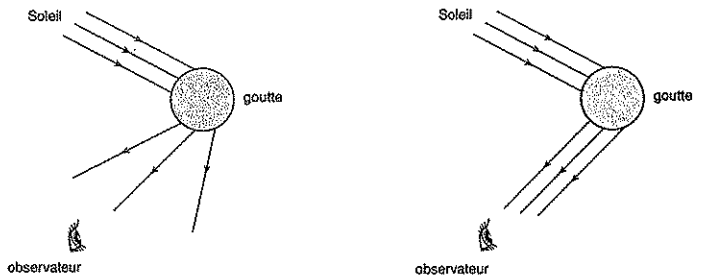
Il faut faire attention à prendre en compte la direction incidente, et bien travailler avec les vecteurs directeurs pour éviter les erreurs de π dans le calcul de la déviation.

Partie B

1 Pour que les rayons émergents soient tous parallèles, sachant que les incidences i varient, il faudrait que la déviation D soit la même pour tous les angles d'incidence. Ceci n'est vrai qu'au voisinage d'un extremum de la fonction $D(i)$. Cette condition de parallélisme se traduit donc par l'annulation de la dérivée :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0}$$

Influence d'une émergence parallèle (à droite) ou non (à gauche)



• On peut d'ores et déjà faire remarquer l'utilité de cette condition. Elle correspondra à un maximum d'énergie lumineuse déviée dans cette direction particulière. En effet, puisque pour les incidences voisines, la déviation sera la même, la lumière émergente va se retrouver particulièrement concentrée dans cette zone, ce qui va permettre l'observation d'un phénomène intense (figure ci-avant à droite). Toutes les autres émergences sont obtenues, mais elles correspondent pour l'œil à des faisceaux divergents depuis la goutte d'eau (figure ci-avant à gauche), et l'énergie est donc répartie sur une plus grande surface (celle du faisceau qui s'élargit au cours de la propagation), et n'est pas suffisamment concentrée pour permettre son observation.
• On parle également de minimum de déviation.

2 Exprimons la déviation dans les différents cas de figure.

a. • Pour la lumière directement transmise (figure p. 15, **I**), il apparaît que le triangle OIJ est isocèle, et que par conséquent, les angles à la base sont égaux : $\boxed{\alpha = r.}$

En appliquant la loi de Snell-Descartes en J, on obtient $n\sin\alpha = \sin\xi$. Or $\alpha = r$ et $\sin i = n\sin r$. Il vient par conséquent $\boxed{\xi = i.}$

• Pour la lumière réfléchie une fois à l'intérieur de la goutte (figure p. 15, **II**), on trouve de même que $\boxed{\alpha = r}$ car le triangle OIJ est isocèle. La loi de la réflexion appliquée en J donne $\boxed{\beta = \alpha = r.}$ Le triangle OJK étant isocèle également, on obtient $\boxed{\gamma = \beta = r.}$ Enfin, la loi de la réfraction appliquée en K donne $n\sin\gamma = \sin\xi$, avec $\gamma = r$ et $n\sin r = \sin i$, il vient $\boxed{\xi = i.}$

• Pour la lumière réfléchie deux fois dans la goutte (figure p. 15, **III**), on a toujours OIJ isocèle qui donne $\boxed{\alpha = r,}$ la loi de la réflexion en J donne $\boxed{\beta = \alpha = r,}$ le triangle OJK étant isocèle, on a $\boxed{\gamma = \beta = r.}$ La loi de la réflexion en K donne $\delta = \gamma = r$, et le triangle OKL étant isocèle, on en déduit que $\boxed{\Phi = \delta = r}$ Enfin, la loi de la réfraction en L donne $n\sin\Phi = \sin\xi$, et comme $\Phi = r$ et que $n\sin r = \sin i$, il vient $\boxed{\xi = i.}$

b. On en déduit, de proche en proche, la déviation totale du rayon dans les trois cas de figure.

• En I, le rayon lumineux subit une réfraction, et d'après les questions préliminaires, il subit donc une déviation $D_I = i - r$. En J il subit également une réfraction : $D_J = \xi - \alpha$.

Or $\alpha = r$ et $\xi = i$. La déviation totale est donc $D_1 = D_I + D_J = i - r + i - r$. On obtient $\boxed{D_1 = 2(i - r).}$

• Dans le cas où le rayon lumineux subit une réflexion à l'intérieur de la goutte, il subit en I une réfraction qui le dévie de $D_I = i - r$. En J il subit une réflexion, ce qui d'après les questions préliminaires provoque une déviation $D_J = \pi - 2\alpha = \pi - 2r$. Il subit enfin en K une réfraction, ce qui provoque une dernière déviation $D_K = \xi - \gamma = i - r$. La déviation totale est donnée par $D_2 = D_I + D_J + D_K$, on obtient finalement :

$$\boxed{D_2 = \pi + 2i - 4r}$$

• Enfin, dans le cas où le rayon lumineux subit deux réflexions à l'intérieur de la goutte, il subit en I une réfraction qui provoque une première déviation $D_I = i - r$, puis en J une réflexion, qui provoque une deuxième déviation $D_J = \pi - 2\alpha = \pi - 2r$, puis en K une autre réflexion, qui provoque une troisième déviation $D_K = \pi - 2\gamma = \pi - 2r$, et enfin en L une réfraction qui provoque une dernière déviation $D_L = \xi - \Phi = i - r$.
La déviation totale est obtenue en sommant toutes ces contributions :

$D_3 = D_I + D_J + D_K + D_L$. Il vient $\boxed{D_3 = 2\pi + 2i - 6r.}$

On aurait pu trouver directement la déviation totale en regardant l'angle entre la direction du rayon émergent final et celle du rayon incident, et en utilisant des triangles judicieusement choisis pour trouver les relations entre ces angles. La méthode est équivalente. Celle qui calcule les déviations de proche en proche permet de comprendre ce qui se passe au fur et à mesure du trajet du rayon lumineux.

c. On cherche la condition d'existence d'un extremum de déviation. Il faut pour cela différencier la relation obtenue qui donne la déviation en fonction de l'incidence.

• On a $D_1 = 2(i - r)$. En différenciant, on obtient $\mathrm{d}D_1 = 2(\mathrm{d}i - \mathrm{d}r)$,

soit $\dfrac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}i} = 2\left(1 - \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}\right)$.

La condition d'émergence parallèle se traduit donc par $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = 1$. Or d'après les questions préliminaires, $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$.

On obtient donc $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = 1$,

$$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 1$$
$$1 - \sin^2 i = n^2 - \sin^2 i$$
$$n^2 = 1.$$

Il vient comme condition $\boxed{n = 1}$ ce qui ne correspond pas au cas qui nous intéresse pour décrire le phénomène de l'arc-en-ciel.

• Dans le cas où le rayon subit une réflexion interne, la déviation est donnée par $D_2 = \pi + 2i - 4r$.

En différenciant, on obtient $\mathrm{d}D_2 = 2\mathrm{d}i - 4\mathrm{d}r$, soit encore $\dfrac{\mathrm{d}D_2}{\mathrm{d}i} = 2\left(1 - 2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}\right)$.

La condition d'émergence parallèle se traduit donc par $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{1}{2}$.

Il vient $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = \frac{1}{2}$$
$$4(1 - \sin^2 i) = n^2 - \sin^2 i$$
$$\sin^2 i = \frac{4 - n^2}{3}.$$

Il existe donc une incidence i_2 telle que la condition d'émergence parallèle soit remplie :

$$\boxed{\sin^2 i_2 = \frac{4-n^2}{3}}$$

On observera une concentration de rayon lumineux dans cette direction particulière.

• Dans le cas où le rayon lumineux subit deux réflexions internes, la déviation est donnée par $D_3 = 2\pi + 2i - 6r$.

La différenciation donne $\mathrm{d}D_3 = 2\mathrm{d}i - 6\mathrm{d}r$, ou encore $\dfrac{\mathrm{d}D_3}{\mathrm{d}i} = 2\left(1 - 3\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}\right)$.

La condition d'émergence parallèle se traduit alors par $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{1}{3}$.

Il vient $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{1}{3}$

$$\frac{\sqrt{1-\sin^2 i}}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}} = \frac{1}{3}$$

$$9(1-\sin^2 i) = n^2 - \sin^2 i$$

$$\sin^2 i = \frac{9-n^2}{8}.$$

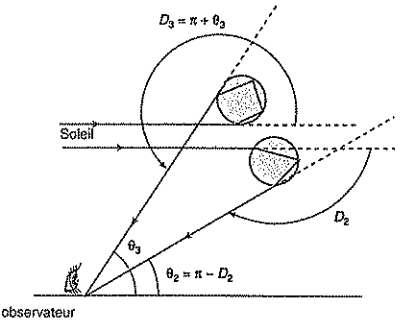
Là encore, il existe une incidence particulière i_3 pour laquelle on observe une émergence parallèle : $\boxed{\sin^2 i_3 = \dfrac{9-n^2}{8}.}$

3 L'observateur regarde vers l'horizon, dans la direction du rideau de pluie qui provoque le phénomène de déviation de la lumière incidente du Soleil. Il observe des maxima d'intensité lumineuse pour les deux configurations calculées à la question précédente. Toutes les gouttes susceptibles de donner l'angle d'observation adéquat sont situées sur un cône de sommet l'œil de l'observateur, d'axe la direction incidente du Soleil, et d'angle au sommet θ_2 pour l'observation de l'arc primaire (correspondant à une incidence i_2 sur la goutte). On a donc :

$$\boxed{\theta_2 = \pi - D_2}$$

On obtient le même phénomène pour l'arc secondaire, mais cette fois-ci, l'angle θ_3 d'observation est donné par $\boxed{\theta_3 = D_3 - \pi.}$

La configuration pour l'observation des arcs primaire et secondaire est représentée sur la figure suivante :



4 On a $\sin^2 i_2 = \dfrac{4-n^2}{3}$

$n \sin r_2 = \sin i_2$

$D_2 = \pi + 2i_2 - 4r_2$

$\theta_2 = \pi - D_2$

$\sin^2 i_3 = \dfrac{9-n^2}{8}$

$n \sin r_3 = \sin i_3$

$D_3 = 2\pi + 2i_3 - 6r_3$

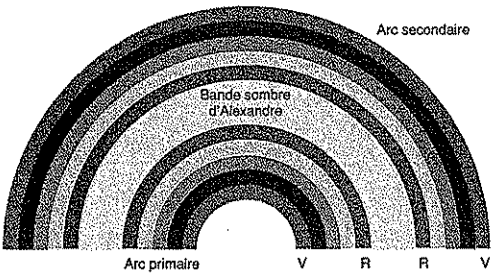
$\theta_3 = D_3 - \pi.$

Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Angles (°)	i_2	r_2	D_2	θ_2	i_3	r_3	D_3	θ_3
Violet	58,73	39,46	139,62	40,38	71,46	44,83	233,94	53,94
Rouge	59,48	40,31	137,72	42,28	71,88	45,54	230,52	50,52

Un observateur situé face au rideau de pluie verra ici deux arcs-en-ciel, l'arc primaire allant du violet au rouge en partant de l'intérieur, et l'arc secondaire, plus grand, et moins intense (puisqu'une partie de la lumière a déja été dispersée dans la formation de l'arc primaire) allant du rouge au violet (voir figure ci-dessous).

Arc-en-ciel : arc primaire et arc secondaire



en conclusion

Cet exercice, très classique, fait appel à la notion de calcul différentiel, et l'on voit que la différentiation est un outil intéressant lorsque l'expression à dériver ne peut se mettre sous la forme d'une fonction simple.

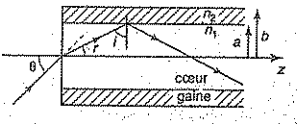
• Il faut retenir de ce problème le calcul d'une déviation au cours d'une réfraction ou d'une réflexion, en se basant sur les vecteurs directeurs des rayons considérés pour ne pas commettre d'erreur.

• Enfin, l'arc-en-ciel est l'intersection du cône d'angle au sommet θ_2 (pour l'arc primaire) avec le plan du rideau de pluie (situé suffisamment loin de l'œil pour permettre une observation « à l'infini »), c'est pourquoi il a cette forme d'arc. Il correspond à un maximum d'intensité lumineuse, parce qu'il s'agit d'un extremum de la déviation, et que l'émergence est donc quasiment parallèle.

2 – Guidage par fibre optique (d'après Mines-Ponts)

On considère une fibre optique à saut d'indice, formée d'un cœur cylindrique d'axe (Oz), de rayon a, d'indice uniforme n_1 entouré d'une gaine d'axe (Oz), de rayon extérieur b, et d'indice $n_2 < n_1$. Le milieu extérieur est l'air. Un rayon pénètre dans la fibre avec une incidence θ (voir figure ci-contre).

Fibre optique à gradient d'indice



1 Montrer que le rayon lumineux est guidé dans le cœur (c'est-à-dire qu'il n'en sort pas) si l'angle i est supérieur à une valeur critique i_c que l'on exprimera en fonction de n_1 et n_2.
Calculer i_c pour $n_1 = 1{,}456$ (silice) et $n_2 = 1{,}410$ (silicone).

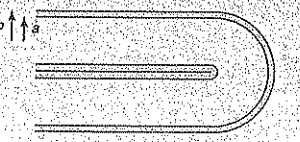
2 Exprimer, en fonction de n_1 et n_2, l'angle limite θ_0 d'incidence du rayon sur la face d'entrée de la fibre optique, correspondant à une propagation possible dans la fibre.

3 On définit l'ouverture numérique d'une fibre par la grandeur O.N. $= n_0 \sin\theta_0$, où $n_0 = 1{,}000$ ici (air).
Calculer l'ouverture numérique de la fibre en silice/silicone.
Calculer l'ouverture numérique d'une fibre à arsénure de gallium, caractérisée par $n_1 = 3{,}9$ et $n_2 = 3{,}0$. Commenter.

4 Soit L la longueur totale de la fibre optique.
a. Exprimer la différence ΔT de temps de parcours de l'entrée à la sortie entre le trajet de durée minimale ($\theta = 0$) et le trajet de durée maximale ($\theta = \theta_0$), en fonction de L, c, n_1 et n_2.
b. On injecte à l'entrée de la fibre des impulsions lumineuses de durée t_0. Quelle durée a approximativement une impulsion lumineuse en sortie de fibre ? En supposant t_0 négligeable devant ΔT, quelle condition portant sur la fréquence d'émission f exprime le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique ?

5 La fibre optique est maintenant coudée.
a. Expliquer en utilisant un schéma pourquoi une partie des rayons guidés dans la tranche rectiligne ne le sont plus dans la partie coudée.
b. On suppose que la fibre optique prend une position extrême en tournant sur elle-même de 180° (voir ci-contre).
Trouver la relation entre n_1, n_2 et les rayons a et b du cœur et de la gaine, qui assure la réflexion totale, dans la partie coudée, d'un rayon axial ($\theta = 0°$).

Fibre optique repliée sur elle-même



résolution méthodique

1 Pour que le rayon soit guidé dans le cœur de la fibre optique, il faut qu'il subisse des réflexions totales à l'interface entre le cœur et la gaine.
En effet, la gaine est un milieu moins réfringent que le cœur, par conséquent lorsqu'un rayon arrive sur l'interface en venant du cœur, il s'écarte de la normale, et si l'angle d'incidence est supérieur à une valeur critique i_c, définie par $n_1 \sin i_c = n_2 \sin \frac{\pi}{2}$, alors il y a réflexion totale, et toute l'énergie est donc guidée à l'intérieur de la fibre.

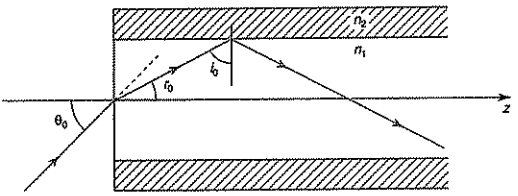
On a par conséquent $\boxed{\sin i_c = \frac{n_2}{n_1}.}$

- On peut remarquer que si cette condition est satisfaite au niveau de la première réflexion, elle se conserve tout au long de la propagation dans la gaine rectiligne, puisque le rayon arrive toujours avec la même incidence pour les réflexions successives (angles alternes-internes).
- Remarquons aussi que si de la lumière parvient à rentrer dans la fibre par le côté, c'est-à-dire en provenant de la gaine, alors les incidences sont telles que cette lumière atteint le côté opposé de la fibre avec une incidence qui lui permet de repasser dans la gaine et de ressortir de la fibre, sans perturber la propagation intérieure. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir une gaine opaque.

A.N. : pour une fibre silice/silicone $i_c = 75°34'$.

2 Ce rayon pénètre dans la fibre, non pas par le côté, mais par une face d'entrée de la fibre, de normale perpendiculaire à la normale de l'interface cœur-gaine (voir ci-dessous).

Fibre à saut d'indice



La loi de la réfraction au point d'entrée s'écrit $\sin\theta = n_1 \sin r$, avec $r = \frac{\pi}{2} - i$, d'après la remarque précédente. Il vient donc $\sin\theta = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = n_1 \cos i = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 i}$.

L'angle limite d'entrée θ_0 correspond à un angle d'incidence critique i_c à l'interface cœur-gaine, on a donc :

$$\sin\theta_0 = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 i_c}$$

$$\sin\theta_0 = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

Il vient $\boxed{\sin\theta_0 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}.}$

On peut noter que la fonction $\cos i$ étant une fonction décroissante de i, et la valeur i_c étant une valeur minimale de i assurant la propagation dans la fibre par réflexions totales successives, la valeur limite θ_0 obtenue pour l'angle d'entrée dans la fibre correspond à une valeur maximale de θ.
Le rayon incident doit donc arriver avec une incidence faible (inférieure à θ_0) dans la fibre optique pour espérer s'y propager. L'angle θ_0 définit le *cône d'acceptance* de la fibre optique.

3 On a ici O.N. $= \sin\theta_0$.

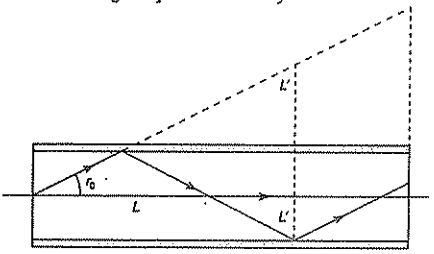
• Pour la fibre en silice/silicone, on obtient donc une ouverture numérique O.N. $= 0{,}363$. L'angle maximal d'incidence admissible est donc $\theta_0 = 21°17'$.

• Pour la fibre en arsénure de gallium, on obtient une ouverture numérique O.N. $= 2{,}49$. Cette ouverture numérique est supérieure à 1. Il est donc impossible de définir un angle limite θ_0 correspondant et la condition $\sin\theta \leqslant \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ est toujours satisfaite ; toutes les incidences conviennent : $\theta_0 = 90°$.

Attention : l'impossibilité de trouver un angle θ_0 est une bonne chose pour ce qui concerne la propagation dans les fibres optiques, et c'est pourquoi ces fibres particulières sont utilisées. Une telle fibre est en effet peu sélective et propagera toutes les incidences arrivant sur sa face d'entrée, ce qui est très intéressant d'un point de vue pratique.
Il faut se souvenir que la condition de propagation n'est pas l'existence d'un angle limite θ_0, mais le fait que l'angle d'incidence θ doive vérifier $\sin\theta \leqslant \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

4 a. Le trajet minimal et le trajet maximal sont représentés sur la figure ci-dessous.

Décalage temporel entre les rayons extrêmes



• Pour le rayon parallèle à l'axe de la fibre optique ($\theta = 0$), le trajet parcouru est L, à la vitesse $v_1 = \dfrac{c}{n_1}$, le temps de trajet est donc $\tau_1 = \dfrac{n_1 L}{c}$.

• Pour le rayon extrême du cône admissible ($\theta = \theta_0$), la longueur totale parcourue dans la fibre est L', à la même vitesse $v_1 = \dfrac{c}{n_1}$, le temps de trajet est donc $\tau_2 = \dfrac{n_1 L'}{c}$.

Il reste à exprimer L' en fonction de L. Pour cela, on « déplie » le trajet de ce deuxième rayon (voir figure). On voit que $L = L'\cos r_0$, avec $r_0 = \dfrac{\pi}{2} - i_c$ l'angle de réfraction à l'entrée de la fibre qui donne l'angle critique de réflexion totale à l'interface cœur-gaine.

Donc $\cos r_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - i_c\right) = \sin i_c = \frac{n_2}{n_1}$.

Il vient $L' = \frac{L}{\cos r_0} = \frac{n_1 L}{n_2}$, et par conséquent $\tau_2 = \frac{n_1}{c} \times \frac{n_1 L}{n_2} = \frac{n_1^2 L}{n_2 c}$.

La différence ΔT de temps de parcours est $\Delta T = \tau_2 - \tau_1 = \frac{n_1^2 L}{n_2 c} - \frac{n_1 L}{c}$.

On obtient $\boxed{\Delta T = \frac{n_1 L}{c}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right).}$

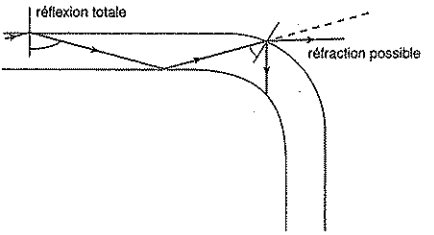
b. Si l'impulsion lumineuse a une durée t_0 à l'entrée de la fibre, elle aura une durée $t_0 + \Delta T$ en sortie de fibre.

Pour faire en sorte qu'il n'y ait pas de recouvrement à la sortie de la fibre optique, il faut que la fréquence d'émission f soit telle que la période $T = \frac{1}{f}$ des impulsions soit supérieure à l'élargissement de la durée d'une impulsion : $\Delta T < T$, soit $\boxed{f < \frac{1}{\Delta T}.}$

Ces considérations sur le transport d'information sont cruciales pour comprendre l'aspect technique d'utilisation des fibres optiques, par exemple dans le développement des réseaux Internet, qui sont câblés par fibre optique d'un continent à l'autre. La qualité des fibres optiques limite le débit d'information que l'on peut transmettre et donc la rapidité des échanges.

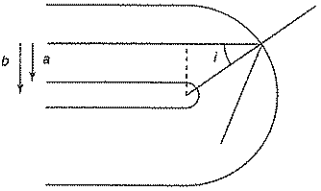
5 a. Le schéma suivant représente une fibre optique courbée. On voit qu'un rayon incident, se propageant avec une incidence critique dans la portion droite, arrive sur la partie courbée avec une incidence inférieure à l'incidence critique. On va donc avoir une partie de l'énergie lumineuse, bien canalisée lorsque la fibre était droite, qui va pouvoir sortir de la fibre, puisque la condition de réflexion totale n'est plus remplie. Certains rayons peuvent sortir par la gaine, au niveau de la partie courbée.

Fibre coudée



b. D'après le schéma ci-après, le rayon axial ($\theta = 0$) arrive sur la partie coudée avec une incidence i telle que $\sin i = \frac{b}{2a + (b - a)}$. Il subira une réflexion totale en ce point si l'angle i est supérieur à la valeur critique i_c définie par $\sin i_c = \frac{n_2}{n_1}$.

Fibre repliée sur elle-même



On a donc la relation suivante : $\boxed{\frac{n_2}{n_1} < \frac{b}{a+b}}$.

• On remarque qu'à la réflexion suivante, l'angle d'incidence est supérieur à i ce qui assure la continuité de la propagation. En revanche, le rayon n'est plus axial.

• Si l'on souhaite que le rayon axial reste axial dans la deuxième partie droite de la fibre, il faut alors que l'angle d'incidence sur la partie courbée soit de $\frac{\pi}{4}$ pour des raisons de symétrie. Cela impose que a et b vérifient la relation suivante :

$$\frac{b}{a+b} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2}(b) = a + b$$

$$a = (\sqrt{2} - 1)b$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} - 1.$$

La relation alors vérifiée par n_1 et n_2 assurant la réflexion totale de ce rayon dans la partie courbée est $n_1 > n_2\sqrt{2}$.

en conclusion

° La propagation dans une fibre optique est basée sur une réflexion totale à l'interface entre le cœur, milieu plus réfringent et la gaine, milieu moins réfringent.

° Le cône d'acceptance d'une fibre optique est caractérisé par son ouverture numérique, qui est directement reliée aux indices du cœur et de la gaine.

° Différents problèmes d'atténuation, ou de perte de rayons (cas d'une fibre courbée), viennent perturber la propagation, et le modèle simpliste utilisé dans cet exercice. Par exemple, pour améliorer la transmission d'information par une fibre optique, on est amené à utiliser des fibres dites à gradient d'indice, où l'indice du cœur varie continûment de l'axe de la fibre à la gaine.

1 10 min

➤ Corrigé p. 34

Effets chromatiques (d'après CCP)

Lors de l'impact de la lumière sur un objet quelconque, on peut considérer globalement qu'une unité de puissance du rayonnement incident se divise en quatre fractions dépendant en général de la longueur d'onde λ :
$R(\lambda)$ par réflexion spéculaire (comme sur un miroir), $D(\lambda)$ par réflexion diffuse (diffusion), $A(\lambda)$ par absorption et $T(\lambda)$ par transmission, de sorte que $R(\lambda) + D(\lambda) + A(\lambda) + T(\lambda) = 1$.
La partie absorbée est en général convertie sous une forme d'énergie non visible : thermique, électrique, chimique, biologique (chez les végétaux, elle actionne le processus de photosynthèse).

1. Une bonne réflexion spéculaire nécessite un bon poli optique. En estimant que pour réaliser un tel poli, les aspérités superficielles doivent être, pour le moins, inférieures au dixième de la longueur d'onde la plus courte, quelle doit être – dans le domaine visible – la dimension maximale de ces aspérités ?

2. Quel est l'aspect visuel d'un objet parfaitement absorbant pour toutes les longueurs d'onde ? Une plante verte utilise-t-elle l'intégralité des radiations vertes dans son développement ?

3. Un tissu bleu est examiné à la lumière d'un néon ne contenant pas de radiations bleues. Décrire son apparence visuelle. Justifier la réponse.

4. Le modèle de l'électron élastiquement lié, excité par une onde lumineuse plane, progressive, harmonique, appliqué aux particules présentes dans l'atmosphère terrestre, permet de montrer que le flux lumineux diffusé est proportionnel à la puissance 4 de la fréquence de l'onde.
Expliquer alors la couleur bleue du ciel et la couleur rouge du soleil couchant.

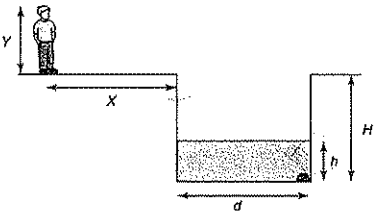
2 10 min

➤ Corrigé p. 34

Observation d'une pierre au fond d'une piscine

Un observateur mesurant $Y = 1{,}8$ m est situé à $X = 4{,}0$ m du bord d'une piscine, de profondeur $H = 2{,}5$ m, et de largeur $d = 4$ m. Un caillou est placé au fond de la piscine (voir figure ci-dessous). Calculer la hauteur d'eau minimale pour que l'observateur puisse voir le caillou. L'indice de l'eau est $n = 1{,}33$.

Une pierre au fond d'une piscine

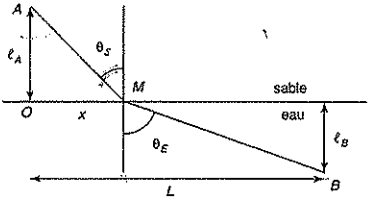


3 15 min

➤ Corrigé p. 34

Le chemin le plus court (principe de Fermat)

Intéressons-nous à un problème rencontré par les surveillants de plage. L'un d'entre eux se trouve au point A sur le sable, situé à une distance ℓ_A de la mer. Un nageur inexpérimenté se trouve quand à lui en un point B, dans l'eau, à une distance ℓ_B de la plage. Les projetés orthogonaux de A et B sur le bord de la mer sont distants de L.



Le nageur semble en difficulté et le surveillant décide d'aller le chercher.
Lorsqu'il court sur une piste d'athlétisme, le surveillant de plage a une vitesse de pointe que l'on notera v_0. Sur le sable, cette vitesse est divisée par un facteur n_S supérieur à 1. Dans l'eau, il nage à une vitesse encore moindre, sa vitesse de pointe v_0 étant désormais divisée par un facteur n_E supérieur à n_S.

1. Le chemin le plus court est-il *a priori* le plus rapide ?

2. Exprimer la durée t du trajet du surveillant en fonction de l'abscisse x de son point M d'entrée dans l'eau (on se reportera au schéma pour les notations).

3. Donner une condition sur x pour que la durée du parcours soit minimale (attention, on ne cherchera pas à exprimer directement x).

4. Exprimer la condition qui minimise la durée de parcours en fonction des angles θ_S et θ_E définis sur le schéma. Que reconnaît-on ?

X4 15 min

➤ *Corrigé p. 35*

Des clous sur une planche

On place sur une planche en bois un bloc de verre parallélépipédique de largeur e connue. On plante un clou contre une des faces du bloc de verre, et un autre, en avant du bloc, à une position quelconque. On place l'œil devant ce deuxième clou, et on plante deux autres clous derrière le bloc de verre, l'un contre la face de sortie du bloc, l'autre en retrait, de telle sorte que les quatre clous paraissent alignés à l'œil.

1. Représenter sur un schéma la position des clous sur la planche.

2. Montrer que la position des clous permet de mesurer l'indice du bloc de verre, dans presque toutes les configurations.

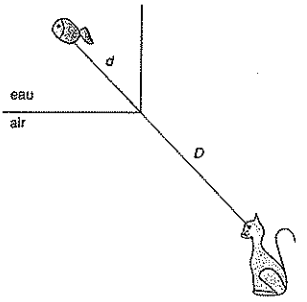
5 20 min

➤ *Corrigé p. 35*

Le poisson double

Un chat se place au coin d'un aquarium, pour y observer un poisson. On suppose que l'angle entre les deux faces de l'aquarium est un angle droit, et que le chat ainsi que le poisson se trouvent sur la bissectrice de cet angle. Le chat observe alors deux fois le même poisson !

Chat observant un poisson ... double



Le chat est à une distance $D = 50$ cm du coin de l'aquarium, et le poisson à une distance d de ce coin. L'indice de l'air est $n_{air} = 1{,}00$ et celui de l'eau $n = 1{,}33$. Le chat voit les deux images du poisson symétriquement par rapport à la bissectrice, sous un angle $\alpha = 6°$.

1. Représenter le trajet des rayons lumineux issus du poisson qui atteignent l'œil du chat.

2. Déterminer, en fonction de α, l'angle que font les rayons atteignant l'œil du chat avec les normales aux faces de l'aquarium.

3. Déterminer l'angle que font les rayons issus du poisson par rapport à la bissectrice.

4. Calculer la distance d.

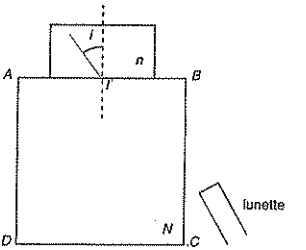
6 20 min

➤ *Corrigé p. 36*

Réfractomètre à angle limite

Soit un cube de verre d'indice N, sur lequel on place un échantillon d'indice $n < N$. En un point I de l'interface entre l'échantillon et le cube on fait arriver un faisceau incident pouvant prendre toutes les directions possibles. Les rayons lumineux pénètrent dans le cube et on considère ceux qui sortent par la face BC, on les observe à l'aide d'une lunette.

Réfractomètre à angle limite



1. À quelles conditions obtient-on un rayon émergent par la face BC ?

2. Les conditions précédentes étant réalisées, on observe avec la lunette une limite nette entre une plage sombre et une plage éclairée. Donner l'angle α que fait l'axe de la lunette avec l'horizontale lorsque la lunette pointe cette limite.

3. Montrer que la mesure de l'angle α permet de calculer l'indice n lorsque l'indice N est connu. Pour un cube d'indice N donné, quelles sont les valeurs de n que l'on peut mesurer ?

7 20 min

➤ Corrigé p. 37

Mesure de la distance Terre-Lune

Pour mesurer avec précision la distance de la Terre à la Lune, on émet une impulsion laser depuis la surface de la Terre en direction d'un réflecteur catadioptrique (miroir) posé sur la Lune, qui renvoie vers la Terre la lumière qu'il reçoit. La mesure du temps écoulé entre l'émission et la réception du signal permet de déterminer la distance Terre-Lune.

1. Le réflecteur posé sur la Lune est un coin de cube, ensemble de trois miroirs plans identiques A, B et C formant les trois faces d'un trièdre rectangle, (Ix, Iy, Iz).
Montrer qu'un rayon lumineux émis de la Terre et arrivant sur le coin de cube est renvoyé après trois réflexions respectivement sur les miroirs A, B, et C dans la direction exactement opposée, quelle que soit l'orientation du trièdre.

2. Les différents rayons lumineux issus de l'émetteur sont émis uniformément dans un cône de demi-angle au sommet $\alpha = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$ rad. D'autre part, le faisceau de retour présente une divergence due à la diffraction qui a lieu lors de la réflexion sur le coin de cube. On peut estimer que le demi-angle au sommet du cône de retour est donné par $\alpha' = \frac{\lambda}{\ell'}$, où ℓ' est une longueur caractéristique des miroirs du réflecteur.
On donne :
- surface apparente du coin de cube : $S = 1{,}0\ \text{cm}^2$;
- surface du récepteur sur la Terre : $S' = 1{,}8\ \text{m}^2$;
- longueur d'onde de la lumière laser utilisée : $\lambda = 0{,}53\ \mu\text{m}$;
- dimension caractéristique des miroirs : $\ell' = 1{,}0\ \text{cm}$;
- distance moyenne Terre-Lune : $d = 3{,}84 \cdot 10^5\ \text{km}$.

a. Si n_0 est le nombre de photons émis lors d'une impulsion du laser, quel est le nombre n de photons reçus par le catadioptre ?
Quel est le nombre n' de photons reçus en retour par le récepteur sur Terre ?
En déduire l'ordre de grandeur de la fraction de la puissance lumineuse émise depuis la Terre qui est recueillie à son retour dans le récepteur (on néglige dans ces calculs les effets liés à l'atmosphère et les pertes à la réflexion).

b. L'énergie d'un photon de longueur d'onde λ est $W = \frac{hc}{\lambda}$, où h est la constante de Planck. Le laser émet à chaque impulsion une énergie lumineuse $E = 0{,}3$ J.
Quel est le nombre moyen de photons revenant à chaque impulsion sur la Terre ? Conclure.
On donne :
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$ et $c = 3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

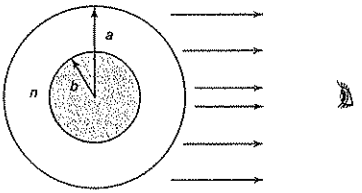
8 20 min

➤ Corrigé p. 38

Observation d'un thermomètre

On s'intéresse à un thermomètre à mercure, constitué d'un tube cylindrique en verre, d'indice n, de rayon extérieur a et de rayon intérieur b, rempli de mercure.
Un observateur (éloigné) regarde le tube de profil. On suppose donc que les rayons lumineux qui lui parviennent forment un faisceau de lumière parallèle.

Observation d'un thermomètre



Expliquer ce que voit l'observateur suivant les valeurs du rapport $\frac{b}{a}$.

Tester ses connaissances

1 Réponse **a**. Le schéma fait apparaître un rayon réfracté qui se rapproche de la normale par rapport au rayon incident, le milieu d'indice n_2 est donc plus réfringent que le milieu d'indice n_1. Le schéma montre aussi un rayon réfléchi pour rappeler qu'une portion de l'énergie est toujours réfléchie lors de l'incidence sur un dioptre.

2 Réponses **c** et **d**. La fréquence temporelle d'une onde monochromatique est sa caractéristique intrinsèque, elle n'est pas modifiée lorsque cette onde se propage dans un milieu matériel. En revanche, la longueur d'onde est liée à la vitesse de propagation, qui, elle, dépend du milieu : $v = \frac{c}{n}$, avec $v < c$ donc $n > 1$.
La longueur d'onde dans le vide est donnée par $\lambda_0 = cT = \frac{c}{\nu}$. Dans un milieu d'indice n, elle est donnée par $\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = \frac{\lambda_0}{n} < \lambda_0$. La longueur d'onde est donc extrinsèque, caractéristique du milieu traversé.

3 Réponses **a** et **d**. Les radiations ultraviolettes sont des radiations de plus haute fréquence que celles du visible, c'est-à-dire de fréquence supérieure à la limite violette du visible, d'où leur nom. Puisque $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$, les radiations ultraviolettes correspondent donc à des longueurs d'onde plus courtes que celles du visible.

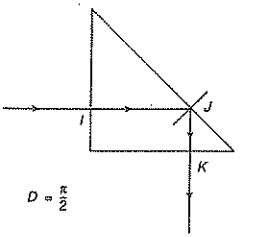
4 Réponse **c**. Il faut préciser si l'on peut voir les yeux de la personne dans le miroir ou non. Si l'on voit ses yeux, il est évident, d'après le principe de retour inverse de la lumière, que cette personne peut voir nos yeux. En revanche, si l'on ne voit qu'une portion de la personne, sans voir ses yeux, il est possible qu'elle ne puisse pas nous voir, et réciproquement, il est possible que vous ne voyiez pas la personne alors qu'elle aperçoit quand même une partie de votre corps.

Savoir appliquer le cours

1 Tout d'abord, comme son nom l'indique, l'utilisation de ce prisme fait intervenir une réflexion totale (au moins). Cette réflexion se passe nécessairement au moment de la sortie potentielle du prisme, quand la lumière se dirige vers un milieu moins réfringent.
On cherche à obtenir des angles de déviation particuliers, il va falloir placer le prisme dans des incidences particulières.

a. Pour obtenir une déviation de $\frac{\pi}{2}$, il faut faire entrer la lumière de façon normale (angle incidence nul) par un des côtés du triangle isocèle (voir figure). Le rayon lumineux ne subit alors pas de déviation en I, il arrive sur l'hypoténuse en J avec un angle d'incidence de $\frac{\pi}{4}$. Il s'y réfléchit totalement, et arrive donc sur l'autre côté du triangle isocèle rectangle avec une incidence normale en K et ne subit pas plus de déviation. La déviation totale est bien de $\frac{\pi}{2}$.

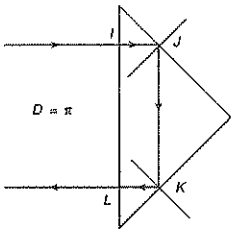
Prisme à réflexion totale : déviation de $\frac{\pi}{2}$



Pour obtenir une déviation de π, il faut faire entrer la lumière par l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle, là aussi en incidence normale (voir figure ci-après). Le rayon ne subit pas alors de déviation à son entrée dans le prisme en I. Il arrive sur le premier côté du triangle au point J avec un angle d'incidence de $\frac{\pi}{4}$, il se réfléchit totalement, et arrive en K, toujours avec une inci-

dence de $\frac{\pi}{4}$, il se réfléchit à nouveau totalement, puis émerge du prisme en L sans subir de déviation supplémentaire puisque son incidence est nulle. La déviation totale obtenue est de π.

Déviation de π



b. Pour que l'énergie lumineuse soit bien totalement réfléchie par le prisme lors des réflexions sur les faces internes, il faut que l'incidence de $\frac{\pi}{4}$ corresponde à une incidence super-critique pour la réfraction verre/air. Cette incidence critique est caractérisée par un angle d'émergence de $\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à i_c tel que $n\sin i_c = \sin\frac{\pi}{2}$, soit $\sin i_c = \frac{1}{n}$.

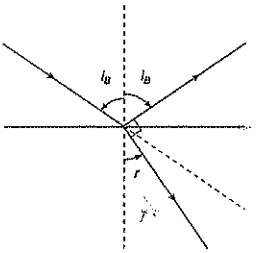
On veut ici que : $i_c < \frac{\pi}{4}$

$$\sin i_c < \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{n} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il vient $\boxed{n > \sqrt{2} = 1{,}414.}$

2 Cette incidence particulière, appelée incidence de Brewster correspond à la configuration représentée sur la figure ci-dessous :



L'application des lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction donne :

$n_a \sin i_B = n\sin r$, avec $r = \frac{\pi}{2} - i_B$.

On a donc $\sin i_B = n\sin\left(\frac{\pi}{2} - r\right) = n\cos i_B$.

Il vient $\boxed{\tan i_B = n.}$

A.N. : $i_B = 53°$.

Remarque : cette incidence de Brewster est bien connue des photographes, elle leur permet d'éliminer des réflexions parasites en utilisant des filtres bien choisis.

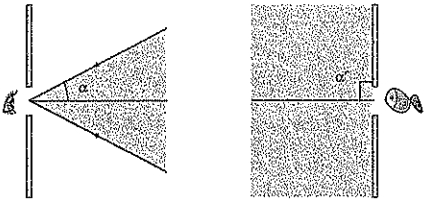
3 **1.** Lorsque la lumière passe de l'eau dans l'air, elle passe dans un milieu moins réfringent et s'écarte donc de la normale. Pour que l'angle d'émergence dans l'air varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, il suffit que l'angle d'incidence dans l'eau varie de 0 à α tel que :

$n\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2}$. Si l'incidence est supérieure à cette valeur limite, il y a réflexion totale, et le rayon ne pénètre pas dans le sous-marin.

Le champ de vision du biologiste est donc limité à un cône d'angle au sommet 2α avec $\boxed{\sin\alpha = \frac{1}{n}.}$

Un poisson peut donc aisément se placer en dehors de ce cône et se cacher du biologiste.

Champ de vision du biologiste (à gauche) et du poisson (à droite)



2. Lorsque la lumière passe du sous-marin à l'eau, elle passe cette fois dans un milieu plus réfringent et se rapproche de la normale, tous les rayons lumineux provenant du sous-marin passent dans l'eau.

Le champ angulaire visible depuis la mer est tel que :

$$\boxed{\alpha' = \frac{\pi}{2}}$$

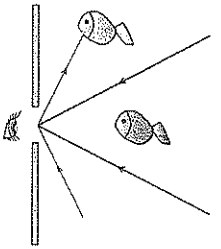
Il est représenté sur la figure du haut, à droite.

Il est donc impossible au biologiste de se cacher du poisson.

3. Ces résultats peuvent paraître inquiétants puisque le biologiste est dans l'incapacité de se cacher du poisson alors que ce dernier peut approcher le sous-

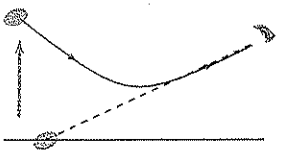
marin sans être vu. Cela semble aller contre le principe de retour inverse de la lumière. En réalité, il n'y a pas de paradoxe. Lorsque le poisson est visible par le biologiste, celui-ci est visible du poisson, mais quand le poisson n'est pas visible par le biologiste, alors le biologiste n'est pas non plus vu par le poisson.
En effet, si le poisson s'approche du hublot en longeant la paroi du sous-marin, les rayons lumineux qui proviennent de lui arrivent sur le hublot avec une incidence super-critique et ne pénètrent pas dans le sous-marin, le poisson est alors caché du biologiste, mais dans ce cas-là, les rayons lumineux qui arrivent jusqu'au poisson proviennent de la portion de mer symétrique par rapport à la normale au hublot, ils ont eux aussi subi une réflexion totale. Le poisson ne voit pas le biologiste non plus. Il voit le reflet de la mer dans le hublot, comme le montre la figure ci-dessous :

Cohérence des résultats



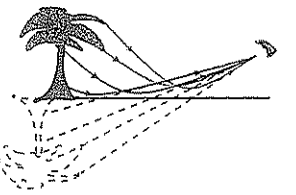
4 **a.** Dans le désert, ou sur le tarmac en été, le sol est plus chaud que l'air, il s'établit alors un gradient d'indice, les indices étant plus faibles au niveau du sol. Par conséquent, les rayons lumineux ne se propagent pas en ligne droite, mais sont courbés. La courbure étant dirigée dans le sens des indices croissants, ils se « courbent vers le haut » (figure ci-dessous).

Mirages inférieurs



L'œil aperçoit alors un rayon provenant en réalité d'un coin de ciel bleu, dans la direction du sol. Le cerveau ayant l'habitude que la lumière se propage en ligne droite, ce rayon est interprété comme venant du sol, et on voit alors une tache bleue que l'on interprète comme de l'eau.
S'il y a un objet présent dans le champ de vision, comme un palmier par exemple, celui-ci semble se refléter dans cette « flaque d'eau », on en a une image inversée, légèrement plus éloignée que l'objet réel.

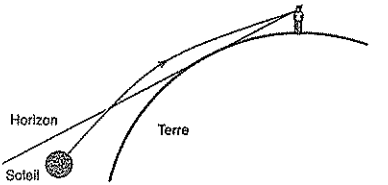
Mirages inférieurs



b. On peut observer des mirages supérieurs (image d'une île « flottant » dans le ciel par exemple) lorsque le gradient d'indice est inversé, c'est-à-dire lorsque la température de la mer est inférieure à celle de l'air ambiant. C'est donc en été que l'on est susceptible d'observer ce phénomène.

5 Pour pouvoir observer ce phénomène, il faut que l'indice de l'air décroisse avec l'altitude. Les rayons sont alors courbés vers le bas, ce qui permet d'observer le Soleil sous la ligne d'horizon, comme le montre la figure ci-dessous.

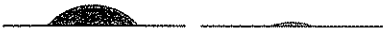
Observation du Soleil sous l'horizon



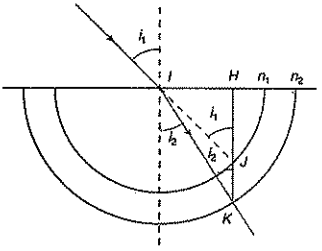
La courbure des rayons dépend de l'indice du milieu, et par conséquent de la longueur d'onde considérée. Ainsi, l'image perçue du Soleil est donc la superposition de disques solaires de toutes les couleurs composant le spectre de radiation du Soleil. Ces images monochromatiques sont très légèrement décalées, ce qui fait que les différents soleils se couchent successivement sous la ligne d'horizon réelle. C'est le « Soleil rouge » qui se couche en premier sous la ligne d'horizon réelle, il reste alors une petite portion du « Soleil vert » qui est encore visible, comme le montre la figure ci-après. On a alors le sentiment

d'observer un rayon vert, au moment du coucher du Soleil.

Rayon vert



6 **1.** *Construction de Descartes*



On prolonge le rayon incident jusqu'à son intersection J avec le demi-cercle de rayon n_1.

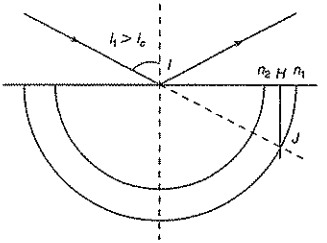
La projection H du point d'intersection sur la surface du dioptre est à une distance $IH = n_1 \sin i_1$ du point d'incidence.

D'après la loi de Snell-Descartes, on a :

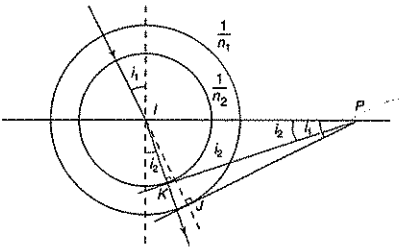
$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, donc le point d'intersection K entre le rayon réfracté et le cercle de rayon n_2 doit avoir la même projection H sur la surface du dioptre. Cela nous permet de trouver le point K, et d'en déduire le rayon réfracté (IK).

Dans le cas où $n_1 > n_2$ (voir figure ci-après), on voit que si l'angle d'incidence est trop grand, la projection H du point J d'intersection entre le prolongement du rayon incident et le cercle d'indice n_1 ne peut être la projection d'un point du cercle de rayon n_2. Il est impossible de trouver le point K et de construire le rayon réfracté. Il y a réflexion totale.

Si $n_1 > n_2$



2. *Construction d'Huygens*



La construction d'Huygens est basée sur un principe similaire. Traçons le prolongement du rayon incident dans le milieu 2. Il intercepte le cercle de rayon $\frac{1}{n_1}$ en J. Traçons la tangente en J au cercle de rayon $\frac{1}{n_1}$. Cette droite coupe la surface du dioptre en P.

Dans le triangle IJP, on retrouve l'angle i_1, et on a la relation $\sin i_1 = \frac{IJ}{IP}$, avec $IJ = \frac{1}{n_1}$.

Il vient donc $\frac{1}{IP} = n_1 \sin i_1$.

On cherche maintenant le point K du cercle de rayon $\frac{1}{n_2}$ qui nous donnerait la relation $\sin i_2 = \frac{IK}{IP}$. Il faut pour cela tracer la droite passant par P qui est tangente au cercle de rayon $\frac{1}{n_2}$. Cela nous permet de trouver le point K correspondant. Le rayon réfracté est alors la droite (IK).

S'entraîner

1 **1.** Dans le domaine visible, la longueur d'onde la plus courte est obtenue pour le violet, avec $\lambda_{min} \simeq 400$ nm. Les aspérités doivent donc avoir une dimension maximale d_{max} telle que $d_{max} \leqslant \dfrac{\lambda_{min}}{10}$, soit $\boxed{d_{max} \leqslant 40 \text{ nm}.}$

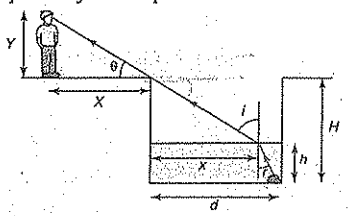
2. Un objet qui absorbe toutes les longueurs d'onde du domaine visible apparaît **noir**.
Une plante verte apparaît verte car c'est justement la seule radiation qu'elle réfléchit. Elle absorbe donc principalement dans la couleur complémentaire, c'est-à-dire le magenta (superposition de rouge et de bleu-violet).

3. Si le tissu est bleu lorsqu'il est éclairé par une lumière blanche, c'est parce qu'il absorbe toutes les longueurs d'onde, sauf le bleu. S'il est maintenant éclairé par une lumière exempte de radiations bleues, il absorbe toutes les radiations et apparaît **noir**.

4. Au fur et à mesure qu'il traverse l'atmosphère, un faisceau lumineux s'appauvrit en radiations bleues.
En effet, comme $\lambda_{bleu} < \lambda_{rouge}$, et que la puissance rayonnée est donnée par $\mathcal{P} = kv^4 = k\left(\dfrac{c}{\lambda}\right)^4$, on obtient $\mathcal{P}_{bleu} \gg \mathcal{P}_{rouge}$.
• Lorsque le Soleil est au zénith, l'épaisseur d'atmosphère traversée est faible, donc la couleur du Soleil ne change pas, il est blanc-jaune. La lumière qui provient d'autres directions que celle du Soleil (c'est-à-dire d'autres points du ciel) est diffusée par l'atmosphère et comporte donc un maximum de radiations bleues : **le ciel est bleu.**
• Au soleil couchant, la portion d'atmosphère traversée par la lumière du Soleil est beaucoup plus importante. Les rayons provenant directement du Soleil sont donc très appauvris en radiations bleues : **le Soleil couchant est rouge.** Autour du Soleil, on observe un dégradé de couleurs, allant du rouge au bleu quand on s'éloigne de la direction du Soleil.

2 La hauteur minimale h d'eau dans la piscine correspond à la configuration représentée sur le schéma ci-dessous pour lequel le rayon provenant de la pierre frôle le bord de la piscine.

La pierre au fond de la piscine : limite de visibilité



On a alors $\tan\theta = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{H-h}{x}$.
Or, $i = \dfrac{\pi}{2} - \theta$, et d'après la loi de Snell-Descartes : $\sin i = n\sin r$, soit $\cos\theta = n\sin r$.
D'autre part, $\tan r = \dfrac{d-x}{h} = \dfrac{\sin r}{\cos r} = \dfrac{\cos\theta}{n} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 r}}$

$$= \frac{\cos\theta}{n\sqrt{1-\left(\dfrac{\cos\theta}{n}\right)^2}}.$$

On en déduit d'une part que $x = \dfrac{1}{\tan\theta}(H-h)$
et d'autre part que $x = d - h\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\cos^2\theta}}$.
En éliminant x entre ces deux expressions, il vient :

$$\frac{1}{\tan\theta}(H-h) = d - h\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\cos^2\theta}}$$

$$H - h = d\tan\theta - h\tan\theta\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\cos^2\theta}}$$

$$H - h = d\frac{Y}{X} - h\frac{\sin\theta}{\sqrt{n^2-\cos^2\theta}}$$

$$H - \frac{Yd}{X} = h\left(1 - \frac{\sin\theta}{\sqrt{n^2-\cos^2\theta}}\right)$$

Par conséquent : $\boxed{h = \dfrac{H - \dfrac{Yd}{X}}{1 - \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{n^2-\cos^2\theta}}}}$

A. N. : $h = 1{,}2$ m.

3 **1.** Dans un milieu homogène, le chemin le plus court (la ligne droite) est aussi le plus rapide. Ici, comme il nage moins vite qu'il ne court sur le sable, le surveillant de plage a intérêt à courir plus longtemps sur le sable avant de rentrer dans l'eau.

2. Le surveillant parcourt la distance AM sur le sable, à la vitesse v_S, et la distance MB dans l'eau à la vitesse v_E, la durée du trajet est donc $t = \dfrac{AM}{v_S} + \dfrac{MB}{v_E}$.
D'après le schéma, on a $AM = \sqrt{x^2 + \ell_A^2}$
et $BM = \sqrt{(L-x)^2 + \ell_B^2}$.
Comme d'autre part, $v_S = \dfrac{v_0}{n_S}$ et $v_E = \dfrac{v_0}{n_E}$, il vient :

$$\boxed{t = n_S\frac{\sqrt{x^2+\ell_A^2}}{v_0} + n_E\frac{\sqrt{(L-x)^2+\ell_B^2}}{v_0}}$$

3. La durée du parcours s'exprime comme une fonction de l'abscisse x du point d'entrée dans l'eau ($t(x)$).

La durée du parcours sera donc extrémale si $\frac{dt}{dx} = 0$. On admettra qu'il s'agit d'un minimum.
Il reste à dériver cette fonction :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{n_S}{v_0} \times \frac{1}{2} \times 2x \times \frac{1}{\sqrt{x^2 + \ell_A^2}} + \frac{n_E}{v_0} \times \frac{1}{2} \times [-2(L-x)] \times \frac{1}{\sqrt{(L-x)^2 + \ell_B^2}}.$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{n_S}{v_0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \ell_A^2}} - \frac{n_E}{v_0} \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + \ell_B^2}}.$$

La condition sur x pour que la durée du trajet soit minimale s'écrit donc :

$$\boxed{n_S \frac{x}{\sqrt{x^2 + \ell_A^2}} - n_E \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + \ell_B^2}} = 0}$$

Remarque : on comprend pourquoi l'énoncé précise que l'on ne cherchera pas à exprimer la valeur de x correspondante !

4. Si l'on introduit les angles θ_S et θ_E tels que sur le schéma, on voit que :

$$\sin\theta_S = \frac{x}{AM} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \ell_A^2}}$$

et $\sin\theta_E = \frac{L-x}{BM} = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + \ell_B^2}}$.

Par conséquent, la condition sur x pour que la durée de parcours soit minimale s'exprime donc par :

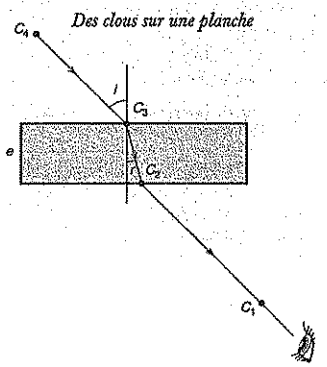
$$n_S \sin\theta_S - n_E \sin\theta_E = 0.$$

On reconnait ici la loi de Snell-Descartes de la réfraction :

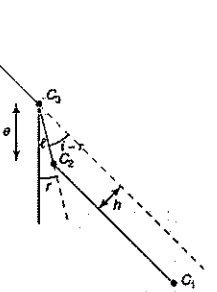
$$\boxed{n_S \sin\theta_S = n_E \sin\theta_E}$$

4 **1.** Voici une vue de dessus de la planche, du bloc de verre et des quatre clous (C_1, C_2, C_3 et C_4) :

Des clous sur une planche



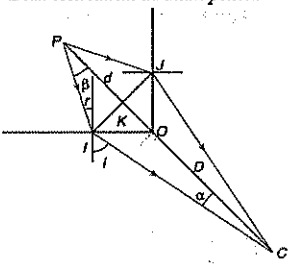
2. Si les clous paraissent alignés à l'œil, c'est qu'ils sont tous plantés sur le trajet d'un même rayon lumineux. En C_3, l'angle d'incidence de ce rayon est i, l'angle réfracté r du rayon pénétrant dans le bloc de verre lui est lié par la relation $\sin i = n \sin r$. Puisque le bloc de verre a des faces parallèles, l'angle d'incidence du rayon intérieur au bloc de verre sur la face de sortie est également r (angles alternes-internes), et par conséquent, l'application de la loi de la réfraction en C_2 donne, pour l'angle d'émergence finale i' : $\sin i' = n \sin r = \sin i$.
Le rayon émerge du bloc de verre parallèlement au rayon incident et les droites (C_1C_2) et (C_3C_4) sont parallèles.
Soit h la distance entre ces droites, et ℓ la longueur du segment $[C_2C_3]$;



On a $e = \ell \cos r$. Comme l'épaisseur e du bloc de verre est connue, la mesure de ℓ permet d'accéder à l'angle r.
D'autre part, on a $\sin(i-r) = \frac{h}{\ell}$, la mesure de h nous donne alors l'angle i.
Enfin, la loi de Snell-Descartes, $n = \frac{\sin i}{\sin r}$, nous permet de calculer l'indice n recherché.
Attention : cette mesure n'est réalisable que si les clous C_1 et C_2 ne sont pas plantés sur une même normale à la face d'entrée du bloc de verre. En effet, on aurait dans ce cas $i = i' = r = 0$, ce qui rendrait la mesure de n impossible.

5 **1.** Les rayons lumineux diffusés par le poisson le sont dans toutes les directions. Cependant, deux rayons particuliers, symétriques l'un de l'autre par rapport à la bissectrice, atteignent l'œil du chat. Il croit donc voir deux poissons. Le tracé des rayons est représenté ci-dessous.

Deux observations du même poisson



2. Dans le triangle COI, la somme des angles vaut π :

$$\pi = (\alpha) + \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i\right).$$

On en déduit donc que $\boxed{i = \alpha + \frac{\pi}{4}}$.

A. N. : $i = 51°$.

3. On réutilise la même relation sur les angles, dans le triangle POI cette fois, et on obtient :

$$\pi = (\beta) + \left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{2} + r\right).$$

Il vient donc $\boxed{\beta = -r + \frac{\pi}{4}}$, avec r donné par la loi de la réfraction en I : $\sin i = n \sin r$.

A. N. : $\beta = 9°15'$.

4. On cherche à exprimer la distance d. Pour cela, on introduit le point K. On remarque que le triangle KIO est rectangle, et comme un des angles de sa base vaut $\frac{\pi}{4}$, il en va de même pour l'autre angle, le triangle KIO est donc isocèle. La même propriété est évidemment vérifiée pour le triangle KJO. Appelons h la distance $KO = KI = KJ$.

Dans le triangle KIP, on a $\tan\beta = \frac{h}{d-h}$, on en déduit que $(d-h)\tan\beta = h$, ou encore que $d = h\left(\frac{1}{\tan\beta} + 1\right)$.

De la même façon, dans le triangle KIC, on a $\tan\alpha = \frac{h}{D+h}$, soit $(D+h)\tan\alpha = h$, ou encore $D = h\left(\frac{1}{\tan\alpha} - 1\right)$.

Il ne reste plus qu'à éliminer h entre ces deux expressions pour exprimer d en fonction de D, α et β :

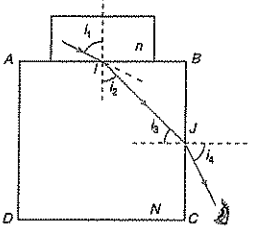
il vient $\boxed{d = D \times \dfrac{\frac{1}{\tan\beta} + 1}{\frac{1}{\tan\alpha} - 1}}$

A. N. : $d = 42$ cm.

6

1. Le trajet d'un rayon lumineux est représenté sur la figure ci-dessous.

Réfractomètre à angle limite



Un rayon incident en I sur l'interface entre l'échantillon et le cube subit une première réfraction, suivant la loi de Snell-Descartes : $n \sin i_1 = N \sin i_2$.

Il subit ensuite une deuxième réfraction pour sortir du cube en J sur la face BC : $N \sin i_3 = \sin i_4$.

Vue la configuration des normales aux deux faces du cube concernées, on a $i_3 = \frac{\pi}{2} - i_2$.

En I, on a $n < N$, et il y aura donc toujours un rayon réfracté, i_2 étant compris entre 0 et $i_{2,\lim}$ tel que $\sin i_{2,\lim} = \frac{n}{N}$.

En J en revanche, le rayon passe dans un milieu moins réfringent (l'air), il s'écarte donc de la normale, et le rayon ne pourra émerger du cube que si l'angle i_3 est inférieur à l'angle critique $i_{3,c}$ correspondant à la réflexion totale, c'est-à-dire tel que $\sin i_{3,c} = \frac{1}{N}$.

On souhaite donc que :

$$i_3 \leqslant i_{3,c}$$

$$i_2 = \frac{\pi}{2} - i_3 \geqslant \frac{\pi}{2} - i_{3,c}$$

$$\sin i_2 \geqslant \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{3,c}\right) = \cos i_{3,c}$$

$$\frac{n}{N}\sin i_1 \geqslant \sqrt{1 - \sin^2 i_{3,c}}$$

$$n \sin i_1 \geqslant N\sqrt{1 - \left(\frac{1}{N}\right)^2}.$$

Or $\sin i_1 \leqslant 1$, donc pour que toutes les incidences i_1 soient telles que le rayon réfracté puisse émerger du cube par la face BC, il faut que $\boxed{n \geqslant \sqrt{N^2 - 1}}$.

2. On observe en sortie du cube une limite entre une plage éclairée et une plage nette, à cause du phénomène de réflexion limite qui se produit en I à l'interface entre l'échantillon moins réfringent, et le cube, plus réfringent.

On s'intéresse au rayon limite, c'est-à-dire à l'incidence rasante $i_1 = \frac{\pi}{2}$ qui donne un rayon émergent en I avec l'angle $i_{2,\lim}$ caractérisé par $\sin i_{2,\lim} = \frac{n}{N}$. Ce rayon arrive sur la face BC avec un angle $i_{3,\lim} = \frac{\pi}{2} - i_{2,\lim}$, et émerge donc du cube avec l'angle de réfraction $i_{4,\lim}$.

La loi de Snell-Descartes appliquée en J à ce rayon particulier donne donc $\sin i_{4,\lim} = N \sin i_{3,\lim}$.

On obtient :

$$\begin{aligned}\sin i_{4,\lim} &= N \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{2,\lim}\right)\\ &= N \cos i_{2,\lim}\\ &= N\sqrt{1 - \sin^2 i_{2,\lim}}\\ &= N\sqrt{1 - \left(\frac{n}{N}\right)^2}\\ &= \sqrt{N^2 - n^2}.\end{aligned}$$

Cet angle $i_{4,\lim}$ correspond à l'angle α séparant la plage d'observation sombre de la plage éclairée.

On a donc $\boxed{\sin\alpha = \sqrt{N^2 - n^2}.}$

On peut vérifier qu'un tel angle existe bien. Il faut pour cela que $\sqrt{N^2 - n^2} \leqslant 1$, ce qui est réalisé d'après la condition d'émergence du cube exprimée à la question précédente :
$n \geqslant \sqrt{N^2 - 1}$, soit $n^2 \geqslant N^2 - 1$, soit $N^2 - n^2 \leqslant 1$.

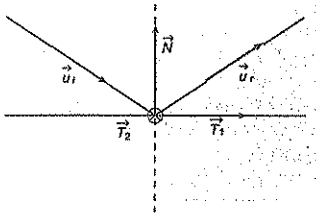
3. Il apparaît immédiatement, d'après la question précédente, que la mesure de l'angle α, N étant connu, permet de déterminer l'indice n de l'échantillon étudié. Cela étant, pour que cet angle existe, il faut d'une part que $n \leqslant N$, afin d'avoir un phénomène de réfraction limite à l'interface entre l'échantillon et le cube, et d'autre part que $n \geqslant \sqrt{N^2 - 1}$ afin que les rayons incidents puisse émerger du cube et donner lieu à l'observation.
En somme, on ne peut mesurer les indices n tels que :

$$\boxed{\sqrt{N^2 - 1} \leqslant n \leqslant N}$$

Attention : cet exercice fait intervenir le phénomène de réfraction limite, qui est en général moins bien compris que le phénomène de réflexion totale.

7 **1.** Considérons un rayon incident, de vecteur directeur $\vec{u}_i$ arrivant sur un miroir plan, de normale $\vec{N}$ et de vecteurs tangents $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$, le trièdre $(\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{N})$ étant direct :

Réflexion sur un plan



D'après la loi de Snell-Descartes de la réflexion, le vecteur directeur unitaire du rayon réfléchi est caractérisé par :

$$\begin{cases} \vec{u}_r \cdot \vec{N} = -\vec{u}_i \cdot \vec{N} \\ \vec{u}_r \cdot \vec{T}_1 = \vec{u}_i \cdot \vec{T}_1 \\ \vec{u}_r \cdot \vec{T}_2 = \vec{u}_i \cdot \vec{T}_2 \end{cases}$$

La composante normale à la surface réfléchissante est inversée tandis que les composantes tangentielles à la surface réfléchissante sont conservées.
Le coin de cube catadioptrique considéré a trois faces, ayant pour vecteurs normaux respectifs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, et $\vec{e}_z$.

Si un rayon incident a pour vecteur directeur $\vec{u}_0(u_x, u_y, u_z)$, alors après réflexion sur la face de normale $\vec{e}_x$, le rayon intermédiaire aura pour vecteur directeur $\vec{u}_1(-u_x, u_y, u_z)$, puis après réflexion sur la face de normale $\vec{e}_y$, le rayon aura pour vecteur directeur $\vec{u}_2(-u_x, -u_y, u_z)$ et enfin, après une dernière réflexion, sur la dernière face du cube, de normale $\vec{e}_z$, le rayon aura pour vecteur directeur $\vec{u}_3(-u_x, -u_y, -u_z)$.
Pour finir, le rayon réfléchi, ayant subi une réflexion sur chaque face du trièdre, voit son vecteur directeur opposé au vecteur directeur du rayon incident :

$$\boxed{\vec{u}_3 = -\vec{u}_0}$$

Remarque : il est évident que l'ordre des réflexions sur les trois miroirs n'intervient pas dans le résultat final.

2. a. La largeur angulaire du faisceau émis depuis la Terre est donné par 2α (angle faible). À une distance d de la source émettrice, le faisceau a donc une section circulaire de rayon environ égal à $d\alpha$, soit une surface $S_0 = \pi(d\alpha)^2$.

• Si l'on suppose les photons répartis uniformément dans ce cône, alors, S étant la surface du récepteur sur la Lune, le nombre n de photons reçus par le catadioptre lunaire est relié au nombre n_0 de photons émis par la relation : $\dfrac{n}{n_0} = \dfrac{S}{S_0}$.

Il vient par conséquent : $\boxed{n = n_0 \dfrac{S}{\pi d^2 \alpha^2}}$.

• Ces n photons sont réémis en direction de la Terre, dans un cône de demi-angle au sommet α'. Ce faisceau réfléchi a donc une section circulaire $S'_0 = \pi(d\alpha')^2$ à son retour sur Terre. Le nombre de photons réceptionnés sur Terre est donc tel que $\dfrac{n'}{n} = \dfrac{S'}{S'_0}$. Il vient, sachant que $\alpha' = \dfrac{\lambda}{\ell'}$:

$$\boxed{n' = n \frac{S'(\ell')^2}{\pi d^2 \lambda^2}}$$

• La fraction de puissance lumineuse ρ reçue en retour est donc $\rho = \dfrac{n'}{n_0}$, c'est-à-dire $\boxed{\rho = \dfrac{S'(\ell')^2}{\pi d^2 \lambda^2} \times \dfrac{S}{\pi d^2 \alpha^2}}$

A.N. : $\rho = 7{,}5 \cdot 10^{-22}$.

b. L'énergie émise à chaque implusion est E, le nombre n_0 de photons émis est donc $n_0 = \dfrac{E}{W} = \dfrac{E\lambda}{hc}$.

A.N. : $n_0 = 8{,}0 \cdot 10^{17}$.

Le nombre de photons revenant sur Terre est donc :

$$\boxed{n' = \rho \frac{E\lambda}{hc}}$$

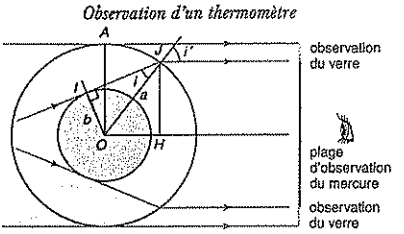
A.N. : $n' = 6{,}0 \cdot 10^{-4}$, ce qui est somme toute assez peu.

Remarque : en réalité, le panneau déployé sur la Lune, sur la mer de la Tranquillité, est constitué d'une centaine de réflecteurs, et on récupère donc un photon tous les cent tirs en moyenne.

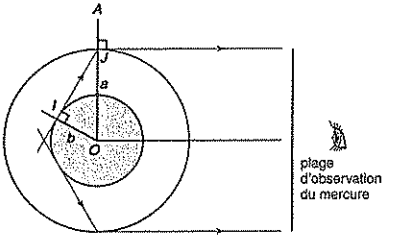
8 L'observateur observe le cylindre de profil, il y voit un cylindre intérieur rempli de mercure, mais sa perception de la taille de ce cylindre dépend du rapport $\frac{b}{a}$.

En effet, pour l'observateur, la taille du cylindre de mercure est donnée par les rayons marginaux, tangents au cylindre de rayon b, qui émergent du cylindre de verre dans la direction d'observation parallèle.

a)



b)



Comme le montre la figure en a), ce rayon émerge dans la direction d'observation en faisant un angle i' avec la normale au point J, tel que $\sin i' = n \sin i$, où n est l'indice du verre constituant le cylindre extérieur.

Dans le triangle OIJ, on a $\sin i = \frac{OI}{OJ} = \frac{b}{a}$. On en déduit donc que $\sin i' = n\frac{b}{a}$.

Remarque : comme le verre est plus réfringent que l'air, ce rayon pourrait éventuellement ne pas émerger en J, s'il est au-delà de l'incidence critique.

Trois cas se présentent, selon le rayon réel du cylindre de mercure.

• Si $b < \frac{a}{n}$

Le rayon peut émerger du cylindre de verre en J dans la direction de l'observateur. Celui-ci voit un tube cylindrique en verre de diamètre $2a$ dans lequel le mercure occupe un cylindre de diamètre apparent $2HJ$ (voir figure, a)).

On a $HJ = a \sin i' = a \times n\frac{b}{a} = nb$.

L'observateur voit le mercure occuper un volume plus important que dans la réalité, ce qui permet une meilleure visibilité, sans toutefois demander trop de quantité de mercure.

• Si $b = \frac{a}{n}$

Dans ce cas limite, l'angle d'émergence correspond à l'émergence critique $i' = \frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à une configuration où le point J est à l'extrémité A du cylindre de verre (voir figure, b)).

L'observateur voit un tube entièrement rempli de mercure, il ne voit pas le verre extérieur.

• Si $b > \frac{a}{n}$

Dans ce cas, on se retrouve dans la configuration précédente, où le rayon limite émergent de A est passé à l'intérieur du cylindre de mercure. Pour l'observateur, le tube de verre semble encore une fois entièrement rempli de mercure.

2 Formation des images Miroir et dioptre plans

On s'intéresse désormais dans cet ouvrage à des systèmes optiques, constitués d'un ensemble de surfaces réfractantes (*dioptres*) et/ou réfléchissantes (*catadioptres*), qui vont permettre une observation indirecte d'un objet en formant une image.
Lorsque plusieurs systèmes optiques interviennent « en cascade » sur le trajet de la lumière, l'image par l'un devient l'objet pour le suivant.
Méfiance, l'œil étant lui-même un système optique, les images formées par d'autres systèmes optiques (lentille, miroir, dioptre) sont, du point de vue de l'optique géométrique, des objets pour l'œil. Il faut prendre garde à cette confusion instinctive et s'attacher à la définition précise d'objet-image, du point de vue du système optique particulier étudié.

1 Objets et images en optique géométrique

1.1. Objets

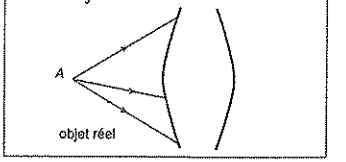
Remarque
Les objets qui nous entourent sont en majorité des objets secondaires.

• Un objet est constitué de points objet. Un *point objet* est défini comme le point d'intersection de rayons lumineux qui pénètrent dans le système optique étudié.
Un objet peut être *primaire* (s'il s'agit d'une source lumineuse qui émet spontanément de la lumière), ou bien *secondaire* s'il se borne à diffuser la lumière provenant d'une source lumineuse.

• Un objet peut être considéré comme *ponctuel* lorsque ses dimensions sont petites devant la distance d'observation, (on utilise la même notion quand on s'intéresse au point matériel en mécanique). L'objet est alors représenté par un unique point mathématique, que l'on a coutume de nommer *A. A contrario*, lorsque ses dimensions ne peuvent être considérées comme négligeables, l'objet est alors dit *étendu* et il est représenté par un ensemble de points indépendants *A, B, C,* etc.
Selon la nature du faisceau incident sur le système optique, on a deux types d'objets possibles.

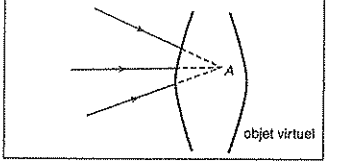
• Si le faisceau incident est divergent en direction du système optique, alors le point d'intersection des rayons lumineux incidents se trouve **avant** la face d'entrée du système optique (figure 1). L'objet ainsi représenté est alors qualifié d'objet **réel**. On peut le toucher. Le point A est le point de concours réel des rayons lumineux incidents.

Fig. 1 *Représentation schématique d'un objet réel*



• Si le faisceau incident converge vers le système optique, alors le point d'intersection des rayons lumineux incidents se trouve **après** la face d'entrée du système optique (figure 2), on dit alors que l'objet est **virtuel**. On ne peut pas le toucher. Seuls les prolongements des rayons lumineux se coupent au point A.

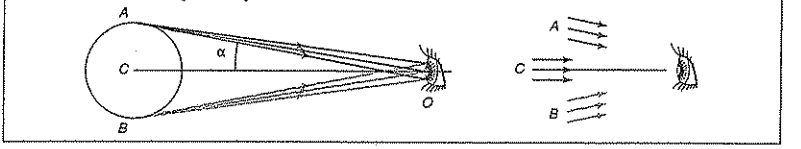
Fig. 2 *Représentation schématique d'un objet virtuel*



Remarque
Voir exercice 2, « Savoir appliquer le cours ».

Cas particulier : on rencontre fréquemment le cas d'un **objet situé à l'infini**, comme lors de l'observation d'une planète par un télescope. L'objet est alors caractérisé par son *diamètre angulaire apparent* 2α, c'est-à-dire l'angle sous lequel les rayons extrêmes provenant de l'objet à l'infini sont observés depuis le système optique (figure 3).
On remarque sur le schéma que les rayons provenant du point extrême B de la planète arrivent quasiment parallèles entre eux sur la face d'entrée du téléscope, mais en faisant un angle α avec la direction du centre de la planète.

Fig. 3 *Observation d'un objet à l'infini*



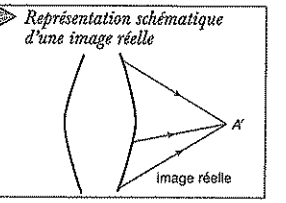
1.2. Images

Remarque
Le pouvoir de résolution pour l'œil est la taille d'une cellule de rétine. Pour un capteur photosensible d'un appareil photographique, c'est le pixel.

Un point image est défini comme l'intersection de rayons lumineux émergeant du système optique.
L'image sera qualifiée de *ponctuelle* si ses dimensions sont inférieures au pouvoir de résolution de l'observateur (œil ou cellule photo-sensible d'un appareil photographique par exemple). On la note alors traditionnellement A'. Dans le cas contraire, on dit que l'image est *étendue*, constituée d'un ensemble de points images indépendants A', B', C', ...

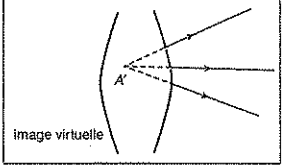
Une image ponctuelle sera dite *réelle* si les rayons lumineux qui sortent du système optique convergent vers le point A' et s'y rencontrent réellement. L'image est alors située **après** la face de sortie du système optique (figure 4), et si l'on place un écran à cette position, l'image réelle peut s'y matérialiser.

Fig. 4 *Représentation schématique d'une image réelle*



Si l'image est au contraire située **avant** la face de sortie du système optique, les rayons émergents semblent provenir du point A', mais seuls leurs prolongements s'y coupent (figure 5). L'image est alors **virtuelle** et placer un écran à sa position ne permettra pas de la matérialiser.

Fig. 5 *Représentation schématique d'une image virtuelle*



« *Photographier* », c'est former une image réelle sur une surface sensible, et « *voir* » c'est former une image réelle sur la rétine de l'œil.

Attention : l'œil est capable de voir les images réelles, matérialisées par un écran qui va diffuser la lumière reçue au point A', mais il peut aussi voir directement la lumière provenant d'une image virtuelle.

1.3. Conjugaison objet-image

Lorsque les rayons lumineux issus d'un point objet A (réel ou virtuel) émergent, après traversée du système optique, en convergeant (réellement ou virtuellement) au point A', alors les points A et A' sont dits *conjugués* par le système optique.

A' est l'image de A par le système optique, il existe entre eux une **relation de conjugaison**. On représente symboliquement l'existence d'une telle relation par le schéma suivant :

$$A \xrightarrow{\text{système optique}} A'$$

1.4. Grandissement

Remarque
Le terme transversal sera justifié au chapitre 3.

• Pour un objet étendu, il se pose la question de la comparaison entre la taille de l'image et la taille de l'objet. C'est pourquoi on définit le *grandissement linéaire*, ou transversal, noté γ, comme le rapport de la taille de l'image sur la taille de l'objet, chacun étant repéré par ses points extrêmes, A et B pour l'objet, A' et B' pour l'image :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

° Pour les objets situés à l'infini, on parle plus volontiers de diamètre angulaire α que de taille, et on définit alors un *grandissement angulaire*, également appelé grossissement, noté g, comme le rapport du diamètre angulaire de l'image sur le diamètre angulaire de l'objet :

$$g = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

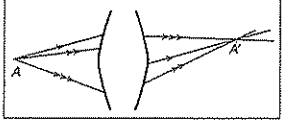
2 Formation des images – Stigmatisme

On vient de voir qu'un système optique associe à un objet une image, ce qui établit entre eux une relation de conjugaison. Pour que l'image d'un objet soit nette, il faut qu'à un point objet A, le système optique associe un unique point image A'. Le système est alors dit *stigmatique*. Il s'agit, pour l'étude d'instruments d'optique, d'une notion fondamentale puisqu'elle conditionne la qualité des images obtenues.

2.1. Stigmatisme rigoureux

Un système optique est dit *rigoureusement stigmatique* pour le couple (A, A') si tout rayon incident issu du point A émerge du système optique en passant par le point A' (figure 6).

Fig. 6 *Stigmatisme rigoureux*

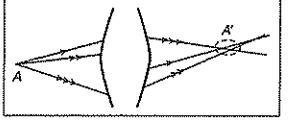


2.2. Stigmatisme approché

Dans la réalité, il n'est pas nécessaire que le système optique soit rigoureusement stigmatique pour obtenir des images nettes. En effet, les récepteurs ont une nature granulaire, qu'il s'agisse de la rétine, partie photosensible de l'œil, constituée de cellules de taille finie, ou de capteurs numériques, eux aussi de taille finie (pixel). Il suffit donc, pour que l'image d'un point objet soit interprétée comme ponctuelle, par le cerveau ou bien par le capteur numérique, que sa dimension soit inférieure à celle du récepteur.

On peut se contenter d'un **stigmatisme approché**, qui permet d'observer des images nettes, bien que la convergence des rayons émergents ne se fasse pas rigoureusement en A', mais seulement au voisinage de ce point (figure 7).

Fig. 7 *Stigmatisme approché*



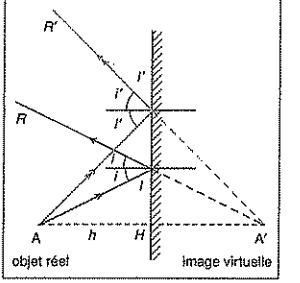
3 Miroir plan

Le miroir plan est un système optique particulier, que l'on rencontre dans la vie quotidienne, constitué d'une surface plane réfléchissante.

Remarque
Pour trouver l'image d'un point objet, il faut tracer le parcours d'au moins deux rayons lumineux.

Considérons une source lumineuse A placée à une distance h d'un miroir plan (figure 8). Considérons deux rayons issus de A et leur trajet en présence du miroir. Les deux rayons réfléchis (IR) et $(I'R')$ sont les symétriques des rayons incidents (AI) et (AI') par rapport aux normales au miroir respectivement en I et I', d'après les lois de la réflexion.
Ces deux rayons réfléchis semblent provenir du même point A', symétrique de A par rapport au plan du miroir. Par construction, tout rayon incident provenant de A émerge du système optique (après réflexion) en passant par A'.

Fig. 8 *Miroir plan*



Remarque
Le miroir plan est le seul système optique qui soit rigoureusement stigmatique pour tous les points objets.

Le miroir plan est **rigoureusement stigmatique** pour tout couple (A, A') symétriques l'un de l'autre par rapport au plan du miroir, et A' est l'image de A par le miroir plan, ils sont conjugués.

Pour un objet étendu AB transversal (parallèle au miroir plan), d'après les propriétés de symétrie plane, l'image $A'B'$ obtenue est également transverse ; elle est symétrique de AB par rapport au plan du miroir. Le miroir plan conserve la taille des objets, par symétrie.

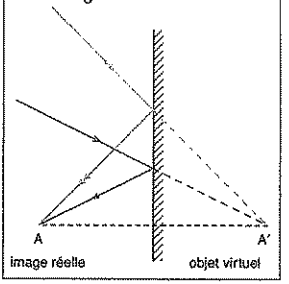
Relation de conjugaison du miroir plan

$$A \xrightarrow{\text{miroir plan}} A' : \overline{HA} + \overline{HA'} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1.$$

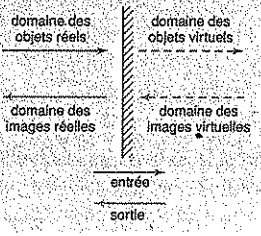
Il apparaît immédiatement que si l'objet A est réel, alors l'image A' est nécessairement virtuelle (figure 8).
En revanche, si l'on travaille avec un objet virtuel, l'image formée par le miroir est réelle (figure 9).
D'autre part, d'après le principe de retour inverse de la lumière, si A' est l'image de A par le miroir plan, alors, A est l'image de A' par le miroir :

$$A \xrightarrow{\text{miroir plan}} A' \Longleftrightarrow A' \xrightarrow{\text{miroir plan}} A$$

Fig. 8 *Miroir plan : objet virtuel et image réelle*



Nature des objets et images pour un système catadioptrique



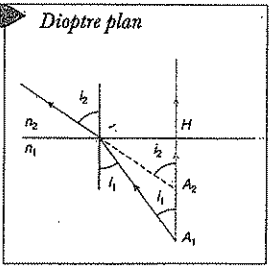
4 Dioptre plan

Lorsque l'on observe les poissons dans un étang à la surface bien lisse, on voit des images nettes. C'est la preuve expérimentale qu'il existe pour le dioptre plan un stigmatisme.
Il ne s'agit cependant pas d'un stigmatisme rigoureux.
Sur la figure 10, considérons deux rayons issus de A_1, l'un perpendiculaire au dioptre, et l'un faisant un angle i_1 avec sa normale. L'intersection des rayons émergents est virtuelle, et se situe au point A_2.
Si l'on cherche à calculer la position de A_2,

on a $\tan i_1 = \dfrac{\overline{HI}}{\overline{A_1H}}$ et $\tan i_2 = \dfrac{\overline{HI}}{\overline{A_2H}}$,

ce qui donne $\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \times \dfrac{\tan i_1}{\tan i_2}$.

Fig. 10 *Dioptre plan*

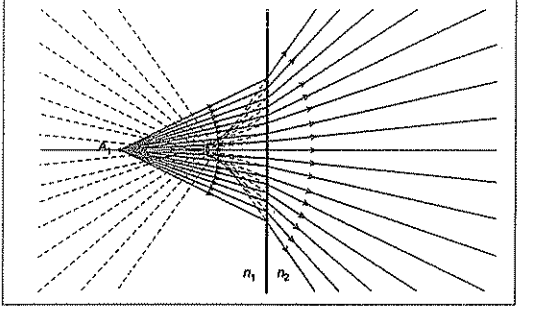


De plus, la loi de la réfraction en I donne $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, on peut alors écrire que :

$$\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \times \frac{\sin i_1}{\sin i_2} \times \frac{\cos i_2}{\cos i_1} = \overline{HA_1} \times \frac{n_2}{n_1} \times \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)^2}}{\sqrt{1 - \sin^2 i_1}}.$$

La position du point A_2 dépend de l'angle d'incidence i_1. Tous les rayons issus de A_1 ne semblent donc pas provenir de A_2 après traversée du dioptre : il n'y a pas de stigmatisme rigoureux. On parle d'**aberrations géométriques**. La figure 11 représente le trajet de rayons lumineux quand on prend en compte beaucoup d'incidences ; on voit qu'il est impossible de définir une image unique pour A_1.

Fig. 11 *Aberrations géométriques*

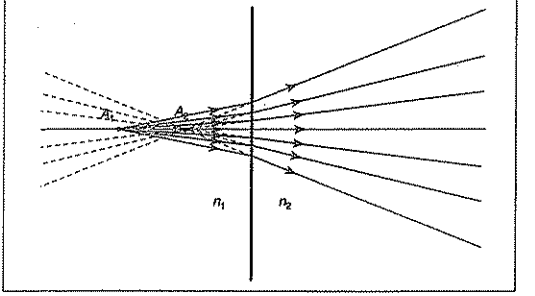


En revanche, si on se limite aux faibles incidences, avec des angles i_1 (et donc i_2) faibles, alors on obtient, au second ordre près en i_1,

$$\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \times \frac{n_2}{n_1}.$$

La position de A_2 ne dépend plus de l'angle d'incidence, pourvu que celui-ci reste faible, A_1 et A_2 sont alors conjugués par le dioptre plan. On voit sur la figure 12 que l'on peut désormais définir un point image unique A_2.

Fig. 12 *Dioptre plan : stigmatisme approché*



Pour un objet étendu transverse (parallèle au dioptre), l'invariance par translation parallèle au dioptre donne $\overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_1}$.

Relation de conjugaison du dioptre plan (pour les incidences faibles)

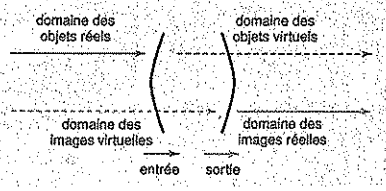
$$A \xrightarrow{\text{dioptre plan}} A' : \quad \overline{HA_2} = \overline{HA_1} \times \frac{n_2}{n_1} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = 1.$$

On observe donc un **stigmatisme approché** en lumière monochromatique, mais comme la relation de conjugaison fait intervenir les indices des milieux séparés par le dioptre, la position de l'image A_2 va dépendre de la longueur d'onde si l'on travaille en lumière polychromatique.

Remarque
L'irisation est l'obtention d'images colorées légèrement décalées les unes par rapport aux autres.

Ce phénomène est qualifié d'**aberrations chromatiques** : il provoque une irisation des images.

Nature des objets et images pour un système dioptrique



Lycée Mohammed V Casa

Avant la colle

Tester ses connaissances

➢ *Corrigés p. 58*

1 Si un système optique est rigoureusement stigmatique pour un couple de points (A, A'), alors l'image de A par le système optique est A'.

☑ **a.** Vrai. ☐ **b.** Faux.

2 Si A' est l'image de A par un système optique, alors :

☑ **a.** le système optique est rigoureusement stigmatique pour le couple (A, A').

☐ **b.** il existe une relation de conjugaison entre A et A'.

☑ **c.** un rayon issu de A émerge du système optique en passant au voisinage de A'.

3 Au cinéma, le film observé sur l'écran de projection est, au sens de l'optique géométrique :

☐ **a.** une image.

☑ **b.** un objet.

4 Un chat observe un poisson à travers la surface d'un aquarium. Il décide de passer à l'action et d'attraper le poisson en plongeant la patte dans l'aquarium. Peut-il y réussir ?

☐ **a.** Oui.

☐ **b.** Non.

☐ **c.** Cela dépend.

5 Alice observe un lapin dans un miroir. Comment peut-elle l'attraper ?

☐ **a.** En passant de l'autre côté.

☐ **b.** En se dirigeant vers le symétrique de l'image du lapin par le miroir.

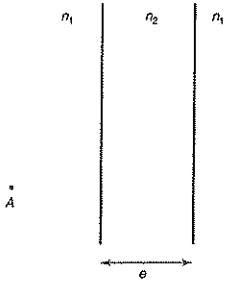
☑ **c.** En sortant une carotte de sa poche.

Savoir appliquer le cours

➢ *Corrigés p. 58*

1 On considère une lame à faces parallèles, constituée d'un milieu d'indice n_2 séparé d'un milieu d'indice n_1 par deux dioptres plans parallèles, distants de e.

Lame à faces parallèles



1. Soit un rayon incident quelconque sur le premier dioptre.
Que peut-on dire du rayon émergent ?

2. Soit un point A situé dans le milieu d'indice n_1. Où est son image A' par la lame à faces parallèles, dans les conditions de stigmatisme approché ?
On déterminera sa position en fonction de n_1, n_2 et e.

3. Conclure sur l'observation d'un objet à travers une fenêtre.
Qu'observe-t-on à travers la fenêtre lorsqu'il fait nuit et que l'on se trouve à l'intérieur d'une pièce éclairée ?

2 Un observateur, situé à la surface de la Terre, observe la Lune.
La distance Terre-Lune est $\ell = 3{,}84 \cdot 10^8$ m, son diamètre est $D = AB = 3{,}48 \cdot 10^6$ m, et on nomme C son centre.

1. Quel est l'angle α formé par deux rayons provenant respectivement des points A et B diamètralement opposés de la Lune ?

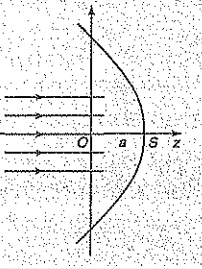
2. La pupille de l'œil de l'observateur a un diamètre d'environ $d = 3 \cdot 10^{-3}$ m.
Quel est l'angle θ formé par les deux rayons extrêmes, issus du même point C, qui pénètrent dans l'œil ?

3. Conclure sur l'observation d'un objet étendu à l'infini.

1 – Stigmatisme du miroir parabolique

Une surface réfléchissante a la forme d'un paraboloïde de révolution, d'axe (Oz), de sommet S, d'équation, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : $r^2 = 2a(a-z)$, où $a = OS$ (voir figure ci-contre).
Ce miroir reçoit un faisceau de lumière incident parallèle à l'axe (Oz).

Miroir parabolique



1 Montrer que ce faisceau converge, après réflexion, en un point F' de l'axe (Oz) que l'on déterminera.

2 En déduire la forme à donner au réflecteur d'un phare de voiture.

résolution méthodique

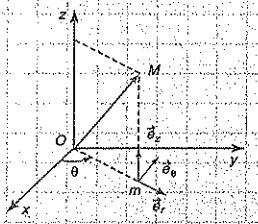
1 On considère un rayon incident et on se place dans le plan qu'il forme avec l'axe de révolution (Oz) du paraboloïde.
On étudie le système en coordonnées cylindriques.

Coordonnées cylindriques d'un point M

Un point M peut être repéré dans l'espace par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans un repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: son vecteur position est alors donné par :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}$$

Mais on peut aussi choisir de le repérer dans un système dit cylindrique ou cylindro-polaire, de repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Il est défini à partir de la projection m de M sur le plan (xOy) (figure ci-contre).



- La première coordonnée d'espace r est définie par $r = Om$, et le vecteur unitaire correspondant est $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{Om}}{\left\|\overrightarrow{Om}\right\|}$.
- La deuxième coordonnée d'espace θ est définie comme $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_r)$, et le vecteur $\vec{e}_\theta$ est obtenu par rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe (Oz) du vecteur $\vec{e}_r$.

Ces deux coordonnées sont également appelées coordonnées polaires dans le plan (xOy).

- La troisième coordonnée d'espace est toujours z et le vecteur unitaire correspondant reste $\vec{e}_z$.

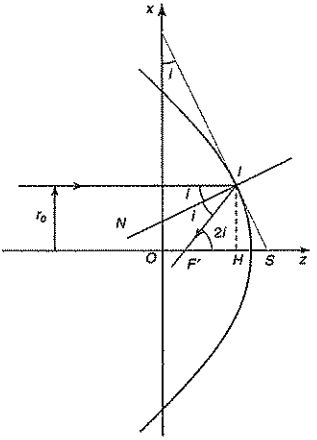
Le vecteur position est donné par la relation $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$. On a :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z}$$

La relation entre les deux systèmes de coordonnées est $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Le plan d'étude est donné par un angle θ fixe, on parle de plan méridien. Choisissons pour simplifier le plan d'équation $\theta = 0$. Il s'agit du plan (xOz).
Puisque le rayon incident est parallèle à l'axe (Oz) des coordonnées cylindriques, il a pour équation $r = r_0$ (voir figure ci-dessous).

Réflexion d'un rayon incident parallèle à l'axe du paraboloïde



Le rayon lumineux arrive donc sur la surface réfléchissante, d'équation $r^2 = 2a(a-z)$ en un point I de coordonnées (r_I, θ_I, z_I) tel que : $\begin{cases} r_I = r_0 \\ \theta_I = 0 \\ z_I = a - \dfrac{r_0^2}{2a} \end{cases}$

Il fait alors un angle i avec la normale à la parabole en ce point (voir figure ci-dessus).
Le rayon se réfléchit en I en faisant à nouveau un angle i avec la normale à la parabole en I d'après les lois de la réflexion, et il reste dans le plan d'équation $\theta = 0$ qui est le plan d'incidence.

- Cette propriété est la première partie de la loi de Snell-Descartes de la réflexion, que l'on a souvent tendance à oublier de citer, à tort. Il s'agit d'une propriété forte, qui nous permet au passage, de nous contenter de représentations en deux dimensions, puisqu'il suffit de décrire ce qui se passe dans le plan d'incidence.
- On peut aussi remarquer qu'à cause de la symétrie de révolution de la surface réfléchissante, la normale à cette surface en un point quelconque est dans le plan contenant le point d'incidence considéré I et l'axe de révolution (Oz).

Le rayon réfléchi intersecte l'axe (Oz) en F' (voir figure ci-dessus).
On cherche à déterminer la position de F' par rapport au sommet S de la parabole.

D'après la question posée par l'énoncé, on s'attend à trouver une position pour F' qui ne dépende pas de r_0, puisque l'on souhaite montrer que tous les rayons incidents parallèles à l'axe (Oz) sont réfléchis par le miroir parabolique en passant par le même point F'.

L'angle entre le rayon incident et le rayon réfléchi est $2i$ d'après le schéma (voir aussi l'exercice 1 de « Savoir résoudre les exercices » du chapitre 1). Si H est la projection

orthogonale de I sur (Oz), on a $\overline{F'S} = \overline{F'H} + \overline{HS}$. D'autre part, on voit que $\widehat{HF'I} = 2i$ (angles alternes-internes).

Dans le triangle $HF'I$, on a donc $\tan(2i) = \dfrac{\overline{HI}}{\overline{F'H}}$, avec $\overline{HI} = r_0$ par construction du rayon incident. Il vient $\overline{F'H} = \dfrac{r_0}{\tan(2i)}$.

Il reste à exprimer l'angle i. Il s'agit de l'angle entre le rayon incident, d'équation $r = r_0$, et la normale à la parabole. D'après les propriétés des angles à côtés perpendiculaires, il s'agit également de l'angle entre la perpendiculaire au rayon incident (axe (Ox)) et la perpendiculaire à la normale à la parabole, c'est-à-dire, la tangente à la parabole (voir figure).

La tangente à la parabole a pour pente $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{2r}{2a} = -\dfrac{r}{a}$.

La pente de la tangente en $x = x_0$ à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x)$ est donnée par $f'(x_0) = \left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}$.

Ici, la fonction s'écrit $r \mapsto z(r) = a - \dfrac{r^2}{2a}$, la pente de la tangente en I est donc $\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_I} = -\dfrac{r_I}{a}$.

Or d'après la figure ci-contre, on voit que $\tan i = \left|\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right|$. Par conséquent, au point I, caractérisé par $r_I = r_0$, on a donc $\tan i = \dfrac{r_0}{a}$. De plus,

$$\tan(2i) = \frac{2\tan i}{1-\tan^2 i}.$$

En effet : $\tan(2i) = \dfrac{\sin(2i)}{\cos(2i)} = \dfrac{2\sin i\cos i}{\cos^2 i - \sin^2 i} = \dfrac{2\dfrac{\sin i}{\cos i}}{1-\left(\dfrac{\sin i}{\cos i}\right)^2}$.

Il vient $\tan(2i) = \dfrac{2\tan i}{1-\tan^2 i} = \dfrac{2\times\dfrac{r_0}{a}}{1-\left(\dfrac{r_0}{a}\right)^2}$.

Enfin, $\overline{HS} = \overline{OS} - \overline{OH}$, avec $\overline{OS} = z_S = a$, puisque S correspond au point de la parabole qui intersecte l'axe (Oz), c'est-à-dire obtenu pour $r_S = 2a(a - z_S) = 0$. On a d'autre part, $\overline{OH} = z_I$ par construction du point H, et on a calculé précédemment que $z_I = a - \dfrac{r_0^2}{2a}$, il vient donc $\overline{F'S} = \overline{F'H} + \overline{HS}$

$$\overline{F'S} = \frac{r_0}{\tan(2i)} + a - \left(a - \frac{r_0^2}{2a}\right)$$

$$\overline{F'S} = r_0 \times \frac{1-\left(\dfrac{r_0}{a}\right)^2}{2\times\dfrac{r_0}{a}} + \frac{r_0^2}{2a}$$

$$\overline{F'S} = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{r_0^2}{a^2}\right) + \frac{r_0^2}{2a}.$$

On obtient finalement $\boxed{\overline{F'S} = \frac{a}{2}}$.

La position du point F' d'intersection du rayon réfléchi avec l'axe du paraboloïde ne dépend donc pas du rayon considéré, tous les rayons d'un faiceau incident parallèle à (Oz) convergent en F' après réflexion sur la parabole. F' est le foyer de la parabole.

- La propriété obtenue ici est valable que le miroir parabolique soit concave ou convexe.
- On a un stigmatisme rigoureux pour un couple de points constitué d'un objet A à l'infini sur l'axe de la parabole, et qui envoie donc un faisceau lumineux parallèle à cet axe, et du point F' qui se trouve être le foyer de la parabole.
- Remarquons que d'après le principe de retour inverse de la lumière, l'image de F' par le miroir parabolique est renvoyée à l'infini sur l'axe de la parabole.

2 Une des applications de la propriété trouvée à la question 1 est la forme des réflecteurs de phares. En effet, si on place une source lumineuse (ampoule) au foyer d'un miroir parabolique, tous les rayons lumineux issus de la source vont être réfléchis parallèlement à l'axe de la parabole. On obtient ainsi un faisceau lumineux parallèle, susceptible d'éclairer la route sur de longues distances.

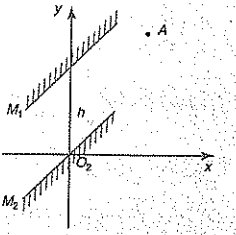
en conclusion

- On a établi ici une propriété de stigmatisme rigoureux pour un miroir parabolique, pour un couple de points particulier : (A_∞, F'), où A_∞ est un point objet à l'infini sur l'axe de la parabole, et F' le foyer de la parabole. Pour établir cette propriété, on a utilisé, entre autres, le fait que la pente de la tangente à une courbe est donnée par la dérivée de cette courbe.
- Un miroir parabolique présente un stigmatisme rigoureux pour un objet à l'infini, ce qui en fait le constituant idéal des télescopes, servant à observer des étoiles très lointaines. De plus, on préfère généralement travailler avec des systèmes catadioptriques, qui n'ont pas de problèmes d'aberrations chromatiques, contrairement aux systèmes dioptriques.

La difficulté technique réside dans la réalisation d'un système de taille suffisamment grande, ayant une forme de paraboloïde la plus parfaite possible. Certains télescopes fonctionnent en réalité grâce à une cuve de mercure liquide, mise en rotation à une vitesse angulaire constante. La surface libre du mercure liquide, réfléchissante, prend alors la forme d'un paraboloïde, la position du foyer étant directement liée à la vitesse de rotation.

2 – Périscope

On considère un périscope constitué de deux miroirs plans, parallèles entre eux, placés à 45° de l'axe (Ox).
On désire observer l'image A' d'un point $A(x, y)$ donnée par les deux miroirs M_1 et M_2.



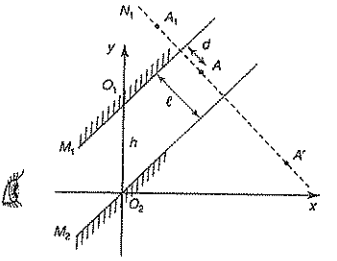
1 Où est l'image A' de A ? On en précisera les coordonnées.

2 Quelle est l'image $\overrightarrow{A'B'}$ d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$? Conclure.

résolution méthodique

1 Le miroir M_1 donne de A une image intermédiaire A_1 qui devient un objet pour le miroir M_2 qui lui-même en donne une image finale A'.

$$A \xrightarrow{M_1} A_1 \xrightarrow{M_2} A'$$



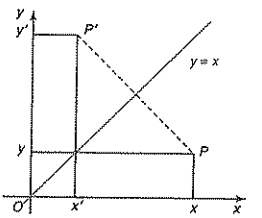
Dans un exercice d'optique géométrique étudiant un système optique composé de plusieurs sous-systèmes, il faut impérativement commencer par résumer les différentes relations de conjugaison, pour bien savoir quel point est l'image de quel objet pour quel système optique. On se réfère ensuite à ce schéma pour utiliser les relations de conjugaison.

On commence par chercher l'image A_1 de A par M_1. Il s'agit, d'après la relation de conjugaison du miroir plan, du symétrique de A par rapport au miroir M_1, porté par la droite d'équation $y_{M_1} = x + h$.

On remarque que la symétrie par rapport à une droite faisant un angle de 45° avec les axes de coordonnées est particulière, et échange les coordonnées.

Sur la figure ci-contre, $P'(x_{P'}, y_{P'})$ est le symétrique de $P(x_P, y_P)$ par rapport à la première bissectrice, et les coordonnées de P' sont donc liées à celles de P par les relations : $\begin{cases} x_{P'} = y_P \\ y_{P'} = x_P \end{cases}$

Symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$



On va choisir de travailler avec les vecteurs ici car le premier miroir ne passe pas par l'origine du repère. La propriété précédente est valable de façon plus-générale pour les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP'}$ et du vecteur $\overrightarrow{OP}$.

On a $\overrightarrow{O_1A} \doteq \begin{pmatrix} x_A \\ y_A - h \end{pmatrix}$. Le point A_1 est le symétrique de A par rapport au miroir passant par O_1, le vecteur $\overrightarrow{O_1A_1}$ est donc le symétrique du vecteur $\overrightarrow{O_1A}$. On en déduit alors que $\overrightarrow{O_1A_1} = \begin{pmatrix} y_A - h \\ x_A \end{pmatrix}$.

L'image finale A' de A est l'image de A_1 par le miroir M_2. Le vecteur $\overrightarrow{O_2A'}$ est donc le symétrique du vecteur $\overrightarrow{O_2A_1}$ par rapport au miroir M_2.

Comme $\overrightarrow{O_2A_1} = \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1A_1}$, il vient $\overrightarrow{O_2A_1} = \begin{pmatrix} y_A - h \\ x_A + h \end{pmatrix}$, et par conséquent

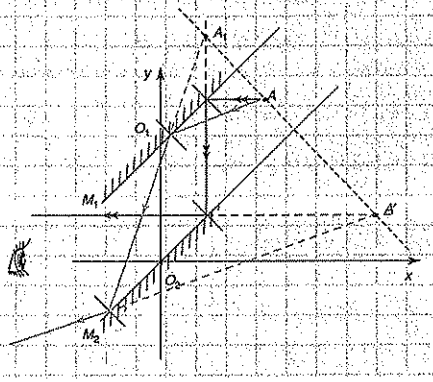
$\overrightarrow{O_2A'} = \begin{pmatrix} x_A + h \\ y_A - h \end{pmatrix}$.

Le point O_2 étant confondu avec le point O origine du repère cartésien utilisé, les coordonnées du point A' sont immédiatement données par $\boxed{A'(x_A + h,\ y_A - h).}$

On voit alors que le point A' est ramené dans le champ de vision de l'œil, même s'il y a un obstacle à la vision directe de A.

Il y avait ici plusieurs possibilités pour trouver l'image.

• On aurait pu tracer deux rayons issus de A, et déterminer de proche en proche leur marche à travers le système optique, en prenant garde à tracer correctement les rayons réfléchis par les deux miroirs. Cette méthode n'est pas toujours facile à utiliser et ne donne pas directement le lien entre les coordonnées de A' et celles de A. Cependant, si elle est bien mise en œuvre, elle permet de donner une idée qualitative de la position de l'image qui permet de répondre à la question de l'utilité du dispositif. La figure ci-dessous présente le tracé de la marche de deux rayons à travers le périscope.



• La deuxième méthode consiste à remarquer que les points A, A_1 et A' sont tous alignés sur la même droite N_1, normale commune aux deux miroirs passant par A. Si on note d la distance de A à M_1 et ℓ la distance de M_1 à M_2, et H et K les projetés orthogonaux de A respectivement sur M_1 et M_2, alors il vient $HA = d = HA_1$ et $KA' = KA_1 = \ell + d$. Comme $KA = \ell - d$, on en déduit que $AA' = 2\ell$.
La droite N_1 a pour vecteur directeur $(1, -1)$ puisqu'elle est normale aux miroirs de vecteur directeur commun $(1, 1)$. Elle a donc pour équation $y_{N_1} = -x + b$. En écrivant qu'elle passe par le point $A(x_A, y_A)$, on en déduit que $y_A = -x_A + b$ et donc que $b = y_A + x_A$. Il vient $y_{N_1} = -x + x_A + y_A$. Le point A' étant situé sur cette droite, il vérifie $y_{A'} = -x_{A'} + x_A + y_A$.
D'autre part, les miroirs étant inclinés à 45° et comme $O_1O_2 = h$, il vient $h^2 = \ell^2 + \ell^2$.
Il reste à écrire que :

$$\begin{aligned} AA' &= 2\ell \\ (AA')^2 &= 4\ell^2 \\ (x_{A'} - x_A)^2 + (y_{A'} - y_A)^2 &= 2h^2 \\ (x_{A'} - x_A)^2 + (-x_{A'} + x_A + y_A - y_A)^2 &= 2h^2 \\ 2(x_{A'} - x_A)^2 &= 2h^2 \\ x_{A'} - x_A &= h \end{aligned}$$

Il vient donc $x_{A'} = x_A + h$ et $y_{A'} = -x_{A'} + x_A + y_A = -(x_A + h) + x_A + y_A = y_A - h$.
On retrouve les mêmes résultats.
• On pourrait aussi s'en sortir en calculant les coordonnées de H et de K, ainsi que la distance d, ce qui est plus long, mais qui permet une fois encore d'aboutir au résultat.

2 On cherche l'image par le périscope d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} \xrightarrow{\text{périscope}} \overrightarrow{A'B'}$

D'après la question précédente, l'image de $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $A'\begin{pmatrix} x_A + h \\ y_A - h \end{pmatrix}$.

De la même façon, l'image de $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $B'\begin{pmatrix} x_B + h \\ y_B - h \end{pmatrix}$.

L'image du vecteur $\overrightarrow{AB}$ a donc pour coordonnées :

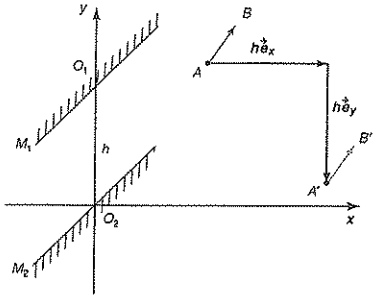
$$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} (x_B + h) - (x_A + h) \\ (y_B - h) - (y_A - h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

On obtient par conséquent :

$$\boxed{\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}}$$

L'image n'est pas déformée par le périscope. Elle n'est pas renversée, voir ci-contre.

Image d'un vecteur par le périscope



en conclusion

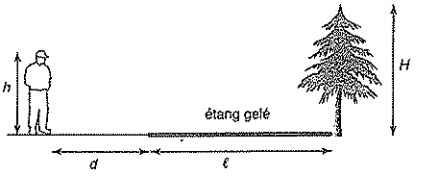
• On a utilisé pour résoudre cet exercice une propriété de la symétrie par rapport à une droite faisant un angle de 45° avec les axes de coordonnées, ce qui rend la résolution plutôt élégante, mais un calcul plus direct donne bien entendu le même résultat.
• Il est intéressant de voir qu'un miroir plan unique inverse l'image, mais que le périscope, qui comporte deux miroirs plans, permet d'obtenir une image droite, qui est identique à l'objet. Elle est simplement déplacée, ce qui lui permet d'être éventuellement dans le champ de vision de l'œil en présence d'un obstacle. Remarquons aussi qu'elle est éloignée, de la distance h, ce qu'il faut intégrer dans l'interprétation de l'image obtenue. L'objet est plus proche que l'image ne le suggère.

1 5 min

➢ Corrigé p. 60

Champ de vision d'un miroir plan

Un promeneur (h = 1,8 m) observe un étang gelé, de largeur ℓ = 20 m, situé à une distance d = 2,0 m de lui. On considérera que la surface de l'étang peut être assimilée à un miroir plan.



1. Définir le champ de vision du promeneur dans l'étang. Peut-il y voir sa propre image ?

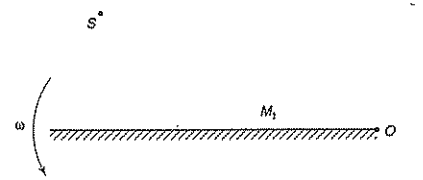
2. Quelle est la hauteur maximale H d'un arbre situé de l'autre côté de l'étang qu'il peut voir par réflexion dans l'étang ?

2 10 min ☆

➢ Corrigé p. 60

Rotation d'un miroir plan

On considère un miroir plan M_1 et une source lumineuse S ponctuelle :



1. On fait tourner le miroir plan d'un angle α autour de l'extrémité O du miroir. De quel angle α' a tourné l'image S' de la source ?
Le miroir M_1 est mis en rotation à la vitesse angulaire constante ω. Quel est le mouvement de l'image S' de la source par le miroir ?

2. Le miroir M_1 est désormais fixe, mais on lui adjoint un deuxième miroir plan M_2, faisant avec le premier miroir M_1 un angle de 60 °. La source lumineuse S est placée sur la bissectrice de l'angle entre les deux miroirs.
Où se trouvent les images de S par ces miroirs ? Quelle figure dessinent-ils ?

3 10 min

➢ Corrigé p. 61

Conjugaison par un prisme

Un prisme constitué de verre d'indice n = 1,6 a pour section un triangle rectangle isocèle ABC, tel que $AB = AC$ = 2 cm. On envoie sur la face AB un rayon lumineux, issu d'une source S placée sur la médiatrice du segment $[AB]$, à une distance SH = 50 cm.

1. Où se situe l'image S_1 de S fournie par le premier dioptre air-verre AB ? De quelle nature est-elle ? Montrer que le rayon se réfléchit ensuite sur BC.

2. Donner la position de l'image intermédiaire S_2 que le deuxième dioptre BC donne de S_1.
De quelle nature est-elle ?

3. Donner enfin la position de l'image définitive S' fournie par le prisme de l'objet initial S.
De quelle nature est-elle ?

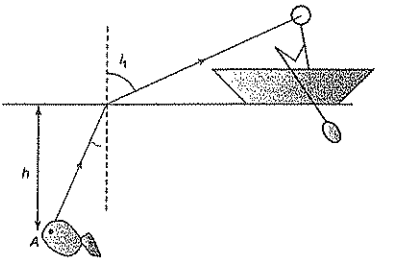
4 15 min

➢ Corrigé p. 61

L'homme et le poisson

On donne l'indice de l'eau : n = 1,33.

1. Un pêcheur est sur une barque. Il observe l'œil A d'un poisson, immobile, situé à la profondeur h = 1,0 m, sous une incidence i_1 = 30 °, puis, en se rapprochant, sous une incidence i_2 = 10 °.



Calculer la position des « images » A_1 et A_2 correspondant aux deux configurations. Que voit-il ?

2. Le pêcheur étant maintenant quasiment vertical par rapport au poisson, quelle est la position apparente du poisson ? Où placer l'épuisette pour attraper le poisson ?

3. L'homme est maintenant sous l'eau, avec un masque de plongée, que l'on assimilera à un dioptre plan air-eau.
Il observe un mérou, de taille réelle $AB = 80$ cm, situé à une distance $\ell = 3{,}0$ m. Quel est le diamètre apparent $2\alpha'$ du mérou pour le plongeur ? Le comparer avec le diamètre apparent 2α du même poisson observé dans l'air.

5 ★ 10 min

➤ *Corrigé p. 62*

Le miroir de la salle de bain

Deux colocataires, mesurant respectivement $h_f = 1{,}65$ m, et $h_g = 1{,}85$ m, souhaitent installer un miroir dans leur salle de bain. Leurs têtes ont approximativement la même hauteur ($d = 25$ cm), les yeux étant situés à environ $\ell = 10$ cm du sommet du crâne.
Tous deux souhaitent voir leur visage en entier dans le miroir.
À quelle hauteur H du sol doivent-ils l'accrocher, et quelle doit être la taille minimale L du miroir ?

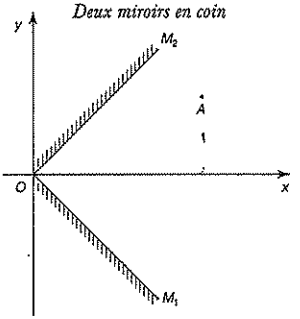
6 ★★★ 20 min

➤ *Corrigé p. 63*

Deux miroirs en coin

On considère deux miroirs plans M_1 et M_2, placés de façon perpendiculaire, symétriquement l'un de l'autre par rapport à l'axe (Ox). On considère un point objet A du plan (xOy), hors de l'axe (Ox).

Deux miroirs en coin



1. a. Déterminer les images A_1 de A par M_1 et A' de A_1 par M_2.

b. De la même façon, déterminer les images A_2 de A par M_2 et A'' de A_2 par M_1.

c. Que dire de A' et A'' ?

d. Soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Déterminer son image $\overrightarrow{A'B'}$ par le dispositif.

2. Un rayon lumineux arrive sur le système précédent, dans le plan (xOy).

a. Dans quels cas n'y a-t-il qu'une seule réflexion ?

b. Dans quels cas deux réflexions se produisent-elles ?

c. Peut-il y avoir plus de deux réflexions ?

3. Un individu se tient debout, perpendiculairement au schéma de la figure. Il se regarde dans le système de miroirs en se plaçant au voisinage du plan de symétrie, sur l'axe (Ox). Comment se voit-il ?

Tester ses connaissances

1 Réponse **a.** C'est vrai, la première proposition implique la seconde, puisque tout rayon issu de A émergera du système optique en passant par A'.

2 Réponses **b.** et **c.** Si l'on peut dire que A' est l'image de A par le système optique, c'est qu'il existe une relation de conjugaison liant A et A', et que tout rayon issu de A passe en A' (si le stigmatisme est rigoureux) ou au moins au voisinage de A' dans le cas d'un stigmatisme approché.

3 Réponses **b.** Il s'agit à la fois d'une image donnée de la pellicule par le projecteur (premier système optique), mais également d'un objet pour un deuxième système optique : l'œil.

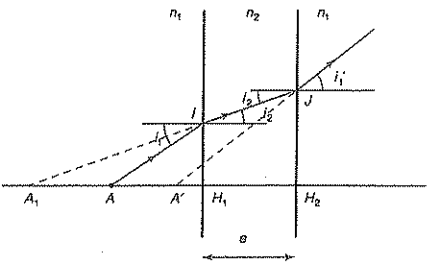
4 Réponse **c.** *A priori*, si le chat place sa patte à la position de l'image du poisson, celle-ci étant décalée par rapport à la position réelle du poisson, le chat ne peut pas attraper le poisson. S'il « ratisse » un peu plus large, il peut éventuellement l'attraper, surtout si le poisson panique et ne s'enfuit pas dans la bonne direction ! Nous dirons donc que cela dépend de la vivacité du poisson et de l'expérience du chat.

5 Réponse **b.** L'image du lapin qu'Alice voit dans le miroir plan est virtuelle, il ne sert donc à rien de passer de l'autre côté du miroir. D'après le principe de retour inverse de la lumière, l'objet dont l'image est derrière le miroir est situé devant celui-ci, symétriquement par rapport au miroir. Il faut donc se diriger vers le symétrique de l'image observée.
Bien entendu, si le lapin est affamé et confiant, une carotte peut faciliter sa capture.

Savoir appliquer le cours

1 **1.** Le rayon incident frappe le premier dioptre $n_1 \to n_2$ avec une incidence i_1 par rapport à la normale en I. Si i_2 est l'angle du rayon réfracté dans le milieu d'indice n_2, la loi de Snell-Descartes en I donne $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Lame à faces parallèles



Les deux faces de la lame étant parallèles, ce rayon réfracté arrive en J sur le deuxième dioptre $n_2 \to n_1$ avec une incidence i_2 par rapport à la normale (angles alternes-internes). Il est à nouveau réfracté et émerge dans le milieu d'indice n_1 avec un angle i_1' par rapport à la normale en J. La loi de la réfraction en J donne alors $n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1'$.

On en déduit immédiatement que $\boxed{i_1' = i_1}$.

Le rayon émergent est parallèle au rayon incident.

2. On cherche l'image finale A' de A par le système optique constitué des deux dioptres plans :

$$A \xrightarrow{\text{dioptre } n_1 \to n_2} A_1 \xrightarrow{\text{dioptre } n_2 \to n_1} A'$$

Notons H_1 le projeté orthogonal de A sur le premier dioptre, et H_2 son projeté orthogonal sur le deuxième dioptre.
Dans les conditions de stigmatisme approché, la relation de conjugaison du premier dioptre donne :

$$\overline{H_1A_1} = \overline{H_1A} \times \frac{n_2}{n_1}.$$

Pour le deuxième dioptre, on obtient :

$$\overline{H_2A'} = \overline{H_2A_1} \times \frac{n_1}{n_2}.$$

D'autre part, on a $\overline{H_1H_2} = e$.

Il vient : $\overline{AA'} = \overline{AH_1} + \overline{H_1H_2} + \overline{H_2A'}$

$$\overline{AA'} = \overline{AH_1} + e + \overline{H_2A_1} \times \frac{n_1}{n_2}$$

$$\overline{AA'} = \overline{AH_1} + e + \frac{n_1}{n_2}(\overline{H_2H_1} + \overline{H_1A_1})$$

$$\overline{AA'} = \overline{AH_1} + e + \frac{n_1}{n_2}\left(-e + \overline{H_1A} \times \frac{n_2}{n_1}\right)$$

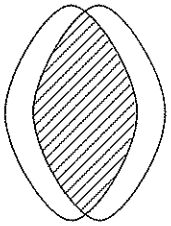
$$\overline{AA'} = \overline{AH_1} + e - \frac{n_1}{n_2}e + \overline{H_1A}.$$

Il vient $\boxed{\overline{AA'} = e\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right).}$

Si, comme sur la figure ci-avant, on a $n_1 < n_2$, alors l'image A' est plus proche de la lame que l'objet A.

3. Si l'on observe un objet à travers une fenêtre, il semble donc plus près qu'en réalité. Mais vu l'invariance par translation du système optique, dans une direction parallèle aux dioptres, le grandissement d'un objet AB transverse est de 1. Les objets ne sont pas déformés quand on les observe à travers une vitre.
Lorsqu'il fait nuit, et que l'on se trouve à l'intérieur d'une pièce éclairée, la fenêtre joue le rôle d'un miroir, puisque l'on y voit essentiellement la lumière intense provenant de l'intérieur de la pièce, qui se réfléchit partiellement sur le miroir. On distingue également la lumière provenant de l'extérieur, mais comme celle-ci est peu intense (il fait nuit), elle est masquée par la lumière observée en réflexion.
On peut également constater que l'on observe en réalité deux images par réflexion sur les deux dioptres constituant la vitre. Ces deux images sont légèrement décalées si l'observation se fait de façon oblique, et c'est dans la zone où ces deux images sont superposées que la lumière réfléchie est la plus intense, ce qui donne l'impression d'observer une image légèrement déformée (voir figure ci-dessous). Elle est « amincie ».

Déformation d'une image observée par réflexion sur une fenêtre

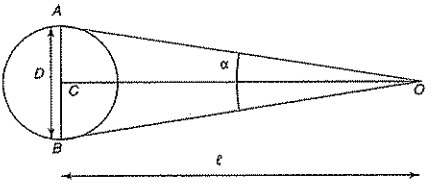


2 La Lune est suffisamment loin de la Terre pour pouvoir être considérée comme un objet à l'infini. Malgré tout, il s'agit d'un objet étendu, ce qui pourrait sembler paradoxal. Mais puisque l'on est capable, même à l'œil nu de distinguer le disque de la Lune, et qu'elle n'est pas seulement un point (contrairement aux étoiles), elle est constituée de points objets distincts et indépendants.

1. On considère le rayon provenant du point A de la Lune et arrivant à l'œil O de l'observateur, ainsi que celui provenant du point B, diamétralement opposé à A. Dans le triangle OCB, on a $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{D}{2} \times \frac{1}{\ell}$.

L'angle α étant petit, on a $\sin\frac{\alpha}{2} \simeq \frac{\alpha}{2}$.

Diamètre angulaire apparent de la Lune vue de l'œil

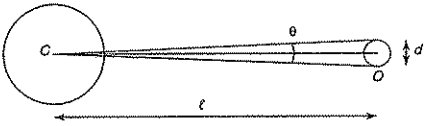


Par conséquent $\boxed{\alpha = \frac{D}{\ell}}$.

A.N. : $\alpha = 9{,}06 \cdot 10^{-3}$ **rad** $= 31'$, ce qui justifie l'approximation des petits angles effectuée.

2. Si l'on considère les deux rayons extrêmes issus de C, qui pénètrent dans l'œil, on a, d'après la figure ci-dessous, et de la même façon qu'à la question précédente, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{d}{2} \times \frac{1}{\ell}$. Encore une fois, dans l'hypothèse des petits angles, il vient $\boxed{\theta = \frac{d}{\ell}}$.

Diamètre angulaire apparent de l'œil vu de la Lune

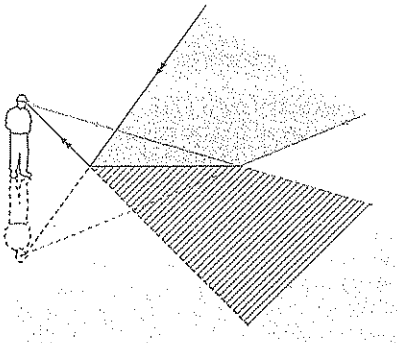


A.N. : $\theta = 8 \cdot 10^{-12}$ **rad**. Là encore, l'hypothèse des petits angles est très largement justifiée.

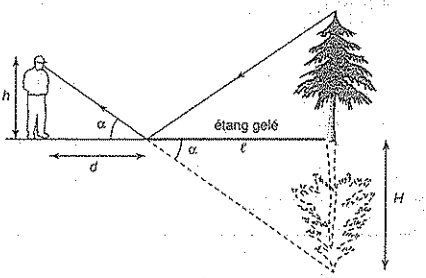
3. Finalement, tous les rayons qui proviennent à l'œil depuis un même point A de l'objet à l'infini peuvent être considérés comme parallèles entre eux, puisque l'angle θ qui les sépare est extrêmement faible. Il en va de même, bien sûr, pour tous les rayons qui proviennent du point B.
En revanche, les rayons qui proviennent du point B ne sont pas vus sous le même angle que ceux provenant du point A, car la Lune est certes suffisamment loin de la Terre pour être considérée à l'infini (et envoyer des rayons parallèles entre eux), mais elle est également suffisamment grosse pour devoir être considérée comme un objet étendu, avec un diamètre angulaire apparent α non négligeable.

S'entraîner

1 **1.** Le promeneur ne pourra pas voir son image dans l'étang puisque celle-ci ne se trouve pas dans son champ de vision. Son champ de vision est défini par les rayons marginaux, c'est-à-dire les rayons extrêmes, s'appuyant sur les bords du miroir. Il peut voir les objets situés dans la partie bleutée, dont les images se situent dans la partie hachurée de la figure ci-dessous.



2. La hauteur maximale d'un arbre qu'il pourra observer est donnée par le rayon limite se réfléchissant à l'extrémité de la mare la plus proche de lui :

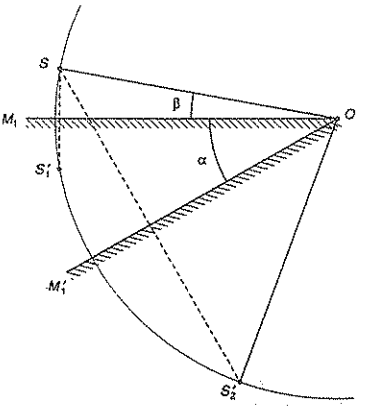


Par construction, on obtient $\tan\alpha = \dfrac{H}{\ell} = \dfrac{h}{d}$.

Il vient $\boxed{H = \dfrac{h\ell}{d}}$

A.N. : $H = 18$ m.

2 **1.** Notons S_1' l'image de S par le miroir M_1 avant que celui-ci n'ait tourné, puis S_2' l'image de S par le miroir M_1 ayant tourné d'un angle α autour de O :



S_1' est le symétrique de S par rapport au miroir M_1 dans la première position. Si on note β l'angle que fait la droite (OS) avec le miroir, alors, la droite (OS_1') fait avec le miroir le même angle β.
L'angle que fait alors (OS) avec le miroir dans la deuxième position est $\alpha + \beta$, et par conséquent, l'angle que fait la droite (OS_2') avec le miroir dans la deuxième position est également $\alpha + \beta$.
On en déduit que :

$$\alpha' = \widehat{S_1'OS_2'} = \widehat{SOS_2'} - \widehat{SOS_1'} = 2(\alpha+\beta) - 2\beta.$$

L'image S' a donc tourné d'un angle $\boxed{\alpha' = 2\alpha.}$

Remarque : les images S_1' et S_2' se trouvent sur un cercle de centre O et de rayon OS. L'angle $\widehat{S_1'SS_2'}$ est égal à l'angle α d'après les propriétés des angles à côtés perpendiculaires.
On aurait donc pu dire directement que l'angle $\widehat{S_1'OS_2'}$ est l'angle au centre correspondant, et vaut par conséquent le double de l'angle $\widehat{S_1'SS_2'}$.
Si le miroir est mis en rotation à la vitesse angulaire constante ω, à l'instant t, l'angle dont a tourné le miroir est donc $\alpha(t) = \omega t$. L'image de la source a donc tourné d'un angle $\alpha'(t) = 2\alpha(t) = 2\omega t$.
La source a donc un **mouvement circulaire uniforme**, de rayon $R = OS' = OS$, et de vitesse angulaire 2ω.

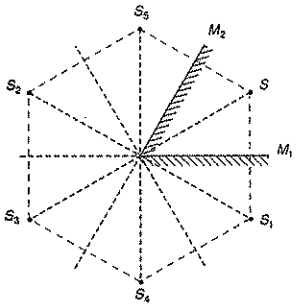
2. Les deux miroirs en regard, avec un angle aigu entre eux, donnent lieu à un grand nombre de réflexions multiples, que l'on schématisera de la façon suivante :

$$S \xrightarrow{M_1} S_1 \xrightarrow{M_2} S_2 \xrightarrow{M_1} S_3 \xrightarrow{M_2} S_4 \xrightarrow{M_1} S_5 \xrightarrow{M_2} S_6 = S$$

$$S \xrightarrow{M_2} S_5 \xrightarrow{M_1} S_4 \xrightarrow{M_2} S_3 \xrightarrow{M_1} S_2 \xrightarrow{M_2} S_1 \xrightarrow{M_1} S$$

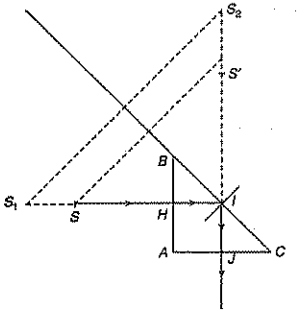
On constate qu'après trois réflexions successives sur chacun des deux miroirs, on retrouve les mêmes points, qui forment un **hexagone régulier**.

Deux miroirs à 60° et une source sur leur bissectrice



3 **1.** Le trajet d'un rayon lumineux est représenté sur la figure ci-dessous.

Conjugaison par un prisme



On a $S \xrightarrow{\text{dioptre } 1 \to n} S_1$. D'après la relation de conjugaison du dioptre plan (valable pour des incidences faibles), il vient $\overline{HS_1} = \overline{HS} \times \frac{n_2}{n_1}$, avec $n_1 = 1$ et $n_2 = n$.

On a donc $\boxed{\overline{HS_1} = n\overline{HS}.}$

A.N. : $\overline{HS_1} = 80$ cm.

Il s'agit d'une image virtuelle, puisqu'elle est située avant la face de sortie du système optique (ici le dioptre $1 \to n$, dont les faces d'entrée et sortie sont confondues avec la face AB du prisme).

Les rayons arrivent de façon quasi-normale au dioptre, ils ne subissent donc pas de déviation notable en H à l'entrée dans le prisme. Ils arrivent sur la face BC en I avec une incidence de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à la normale au dioptre $n \to 1$. L'incidence critique correspondant à une réflexion totale sur ce dioptre est donnée par i_c tel que $\sin i_c = \frac{1}{n}$. On a donc ici $i_c = 39°$. Les rayons considérés arrivent avec une incidence supercritique, ils sont totalement réfléchis. La face BC du prisme se comporte comme un miroir plan.

2. On a $S_1 \xrightarrow{\text{miroir } BC} S_2$. L'image intermédiaire S_2 est donc le symétrique de S_1 par rapport à la face BC. On a $IS_2 = IS_1 = IH + HS_1$. Comme H est le milieu de AB, I est le milieu de BC et $IH = \frac{AB}{2}$.

On a donc $\boxed{IS_2 = \frac{AB}{2} + nHS.}$

A.N. : $IS_2 = 81$ cm.

L'image S_1 était virtuelle pour le dioptre AB puisque située avant sa face de sortie, mais il s'agit d'un objet réel pour le miroir BC puisque située avant sa face d'entrée. L'image S_2 qu'il en donne est donc virtuelle pour le miroir BC.

3. Il reste à considérer le dernier dioptre AC, qui donne de S_2 l'image définitive S' : $S_2 \xrightarrow{\text{dioptre } n \to 1} S'$. L'incidence du rayon considéré étant normale en J, on peut utiliser la formule de conjugaison du dioptre plan (valable pour les petits angles) qui donne alors $\overline{JS'} = \overline{JS_2} \times \frac{n_2}{n_1}$, avec ici $n_2 = 1$ et $n_1 = n$.

D'autre part, $JS_2 = JI + IS_2$, avec à nouveau $JI = \frac{AB}{2}$ et $IS_2 = \frac{AB}{2} + nHS$.

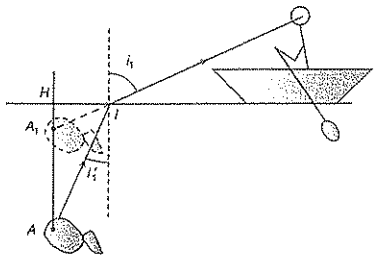
On a donc $\boxed{JS' = \frac{AB + nHS}{n}.}$

A.N. : $JS' = 51{,}3$ cm.

L'image S_2 était virtuelle pour le miroir, mais elle constitue un objet réel pour le dioptre AC, l'image S' qu'il en fournit est donc virtuelle, car située avant la face de sortie du dioptre.

Remarque : S' n'est pas l'image de S par le miroir BC, il y a un léger décalage.

4 **1.** Le dioptre eau-air $D(n \to 1)$ fournit de l'œil du poisson A une « image » A_1. Soit H le projeté orthogonal de A sur le dioptre. Le rayon réfracté par le dioptre fait avec la normale un angle i_1. D'après la loi de Snell-Descartes de la réfraction en I, le rayon incident (venant du poisson) faisait donc un angle i_1' avec la normale tel que $n \sin i_1' = \sin i_1$.



Dans le triangle IHA, on a $\tan i_1' = \dfrac{IH}{HA}$.

Dans le triangle IHA_1, on a $\tan i_1 = \dfrac{IH}{HA_1}$.

Il vient $\overline{HA_1} = \overline{HA} \times \dfrac{\tan i_1'}{\tan i_1} = \overline{HA} \times \dfrac{\sin i_1'}{\sin i_1} \times \dfrac{\cos i_1}{\cos i_1'}$.

Or $\cos i_1 = \sqrt{1 - \sin^2 i_1}$

et $\cos i_1' = \sqrt{1 - \sin^2 i_1'} = \sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 i_1}{n^2}}$.

Il vient $\boxed{\overline{HA_1} = \overline{HA} \times \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\sqrt{1 - \sin^2 i_1}}{\sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 i_1}{n^2}}}}$

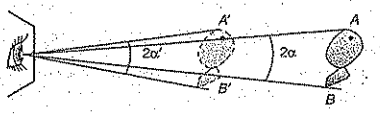
A.N. : pour $i_1 = 30°$, $\overline{HA_1} = 0{,}70$ m, et pour $i_2 = 10°$, $\overline{HA_2} = 0{,}75$ m.

Lorsque le pêcheur s'approche du poisson, même si celui-ci ne bouge pas, il lui semble qu'il s'éloigne de la surface de l'eau, ici de 5 cm. L'image donnée par le dioptre n'est pas unique (phénomène d'aberrations géométriques).

2. Si le pêcheur est vertical par rapport au poisson, alors $i_1 = 0$, $\sin i_1 = 0$ et $\overline{HA'} = \overline{HA} \times \dfrac{1}{n}$.

Le poisson semble se trouver en A' tel que $\overline{HA'} = 0{,}75$ cm. Le poisson se trouve en réalité 2,5 cm plus profond dans l'eau. Pour attraper le poisson, il faut placer l'épuisette à sa position réelle, soit un tiers plus profond que la position de son image.

3. On vient de montrer que l'image du poisson A' se trouve plus proche du dioptre que le poisson réel A. Il est donc vu sous un diamètre angulaire plus grand.



Il n'y a pas de grandissement latéral, donc $A'B' = AB$.

D'après la figure on a $\sin\alpha' = \dfrac{AB}{2} \times \dfrac{1}{HA'}$.

Soit 2α le diamètre angulaire sous lequel le poisson serait observé dans l'air, c'est-à-dire caractérisé par $\sin\alpha = \dfrac{AB}{2} \times \dfrac{1}{HA}$.

Comme $HA' = \dfrac{HA}{n}$,

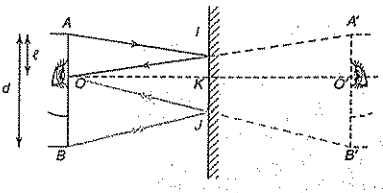
il vient $\sin\alpha' = \dfrac{AB}{2} \times \dfrac{n}{HA} = n\sin\alpha$.

On a $\boxed{\sin\alpha' = n\sin\alpha.}$

A.N. : $\alpha = 7{,}6°$ et $\alpha' = 10{,}2°$.

Le plongeur a l'impression de voir un poisson plus gros qu'il ne l'est en réalité.

5 Notons A le sommet du crâne, B le menton, et O l'œil d'un des colocataires. Notons leurs images respectives par le miroir A', B', et O'. On s'intéresse aux rayons marginaux (AIO) et (BJO) qui permettent à la personne d'observer l'intégralité de son visage.

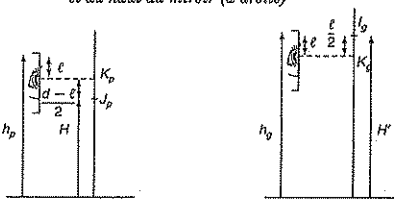


D'après la figure, puisque A et A' sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan du miroir, ils en sont situés à égale distance. Le théorème de Thalès donne donc $\dfrac{KJ}{O'A'} = \dfrac{KO}{O'O} = \dfrac{1}{2}$, d'où $KI = \dfrac{\ell}{2}$.

De la même façon, $\dfrac{KJ}{O'B'} = \dfrac{1}{2}$, et par conséquent $KJ = \dfrac{d - \ell}{2}$.

C'est le colocataire le plus petit qui va imposer la position du point J_p pour qu'il puisse voir le bas de son visage dans le miroir, et le colocataire le plus grand va imposer la position du point I_g pour qu'il puisse voir le haut de son propre visage.

Position du bas du miroir (à gauche) et du haut du miroir (à droite)



Le bas du miroir doit donc être placé comme sur la figure de gauche, à une hauteur H telle que :

$$H = h_p - \ell - K_p J_p = h_p - \ell - \frac{d-\ell}{2}.$$

Il vient $\boxed{H = h_p - \dfrac{\ell + d}{2}.}$

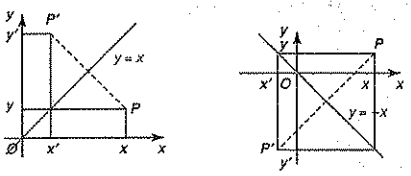
Le haut du miroir doit quant à lui être placé comme sur la figure de droite, à une hauteur H' telle que $H' = h_g - \ell + K_g J_g = h_g - \ell + \dfrac{\ell}{2}$. Il vient $H' = h_g - \dfrac{\ell}{2}$ et la taille minimale L à donner au miroir est donc $L = H' - H = h_g - \dfrac{\ell}{2} - \left(h_p - \dfrac{\ell + d}{2}\right)$.

On a $\boxed{L = h_g - h_p + \dfrac{d}{2}.}$

A.N. : $H = 147{,}5$ cm et $L = 32{,}5$ cm.

6 **1. a.** Commençons par remarquer que si $P'(x', y', z')$ est le symétrique de $P(x, y, z)$ par rapport au plan d'équation $y = x$ (voir figure ci-dessous), alors $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = z \end{cases}$

Symétrie par rapport au plan $y = x$ (à gauche) et par rapport au plan $y = -x$ (à droite)



On remarque également que si $P'(x', y', z')$ est le symétrique de $P(x, y, z)$ par rapport au plan d'équation $y = -x$ (voir figure ci-dessus à droite), alors $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \\ z' = z \end{cases}$

• $A \xrightarrow{M_1} A_1$, le point A_1 est donc le symétrique de A par rapport au plan bissecteur, d'équation $y = x$, ses coordonnées sont donc $\begin{cases} x_{A_1} = y_A \\ y_{A_1} = x_A \\ z_{A_1} = z_A \end{cases}$

• $A_1 \xrightarrow{M_2} A'$, le point A' est donc le symétrique de A_1 par rapport au plan bissecteur, d'équation $y = -x$.

Ses coordonnées sont donc $\begin{cases} x_{A'} = -y_{A_1} \\ y_{A'} = -x_{A_1} \\ z_{A'} = z_{A_1} \end{cases}$

Par conséquent, $\boxed{A'\begin{pmatrix} -x_A \\ -y_A \\ z_A \end{pmatrix}}$

b. De la même façon, $A \xrightarrow{M_2} A_2$, donc $\begin{cases} x_{A_2} = -y_A \\ y_{A_2} = -x_A \\ z_{A_2} = z_A \end{cases}$

Et comme $A_2 \xrightarrow{M_1} A''$, il vient $\begin{cases} x_{A''} = y_{A_2} \\ y_{A''} = x_{A_2} \\ z_{A''} = z_{A_2} \end{cases}$

Par conséquent, $\boxed{A''\begin{pmatrix} -x_A \\ -y_A \\ z_A \end{pmatrix}}$

c. A' et A'' sont donc identiques. Peu importe l'ordre des réflexions, l'image de A après une réflexion sur M_1 et une réflexion sur M_2 est A', obtenu par une rotation d'angle π autour de l'axe (Oz).

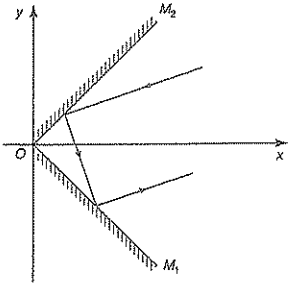
d. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ a pour image le vecteur $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x_{B'} - x_{A'} \\ y_{B'} - y_{A'} \\ z_{B'} - z_{A'} \end{pmatrix}$.

On a donc $\boxed{\overrightarrow{A'B'} = \mathrm{rot}_{(Oz),\pi}(\overrightarrow{AB}).}$

L'image du vecteur est obtenue par une rotation d'angle π autour de l'axe (Oz).

2. a. Pour qu'il n'y ait qu'une seule réflexion sur M_1, il faut que le rayon réfléchi par M_1 ne rencontre jamais le miroir M_2. Il doit donc lui être parallèle. Comme les deux miroirs sont perpendiculaires, cela veut dire que le rayon incident est arrivé sur M_1 avec une incidence normale et qu'il s'est réfléchi sur lui-même.
Évidemment, pour n'avoir qu'un seule réflexion sur M_2, le raisonnement est le même, il faut que le rayon incident arrive de façon perpendiculaire à M_2.
b. On aura deux réflexions si le rayon n'est perpendiculaire ni à M_1, ni à M_2.
c. Il ne peut y avoir plus de deux réflexions, car après deux réflexions sur des miroirs perpendiculaires, le vecteur directeur du rayon réfléchi final est l'opposé du vecteur directeur du rayon incident, ce qu'on voit sur cette figure :

Trajet d'un rayon par réflexion sur M_1 puis sur M_2



Remarque : voir l'exercice 7 de la rubrique « S'entraîner » du chapitre 1.

3. En plus des deux images usuelles par M_1 seul ou par M_2 seul, la personne voit une image obtenue par rotation d'angle π autour de (Oz). Contrairement à l'observation usuelle dans un miroir plan, elle voit donc sa droite à sa gauche et sa gauche à sa droite. Le système de deux miroirs lui renvoie la même image que les autres ont de lui par une observation directe, tandis que les deux images « usuelles », symétriques par rapport aux miroirs plans sont ses énantiomères.

3 Systèmes centrés Miroirs sphériques

1 Systèmes centrés - Conditions de Gauss

1.1. Définition

Un système optique est dit centré s'il présente un axe de symétrie de révolution, qu'on appelle l'axe optique du système. Une telle symétrie implique que l'axe optique est perpendiculaire à toutes les surfaces réfractantes ou réfléchissantes du système. Un rayon incident confondu avec l'axe optique arrive donc avec une incidence nulle sur chacune de ces surfaces, et n'est par conséquent jamais dévié.

Un rayon arrivant suivant l'axe optique d'un système optique centré n'est pas dévié par celui-ci.

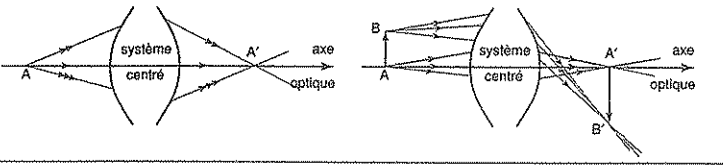
1.2. Stigmatisme et aplanétisme rigoureux

Remarque
Lors des constructions, il suffit alors de tracer la marche d'un seul rayon provenant de A. L'intersection du rayon émergent avec l'axe optique donne A'.

Un système optique centré est dit rigoureusement stigmatique pour le couple de points (A, A') si tout rayon incident passant par A émerge du système optique en passant par A'. Par conséquent, si le point objet A est sur l'axe, il en va de même pour son image A' (figure 1 à gauche).

Pour que l'observation d'objets étendus soit possible, il faut que cette propriété de stigmatisme se conserve dans un plan transverse. Si le stigmatisme rigoureux pour un couple (A, A') se conserve pour tout couple (B, B') situés dans des plans transversaux, alors le système optique est dit *rigoureusement aplanétique* (figure 1 à droite).

Fig. 1 *Stigmatisme (à gauche) et aplanétisme (à droite) pour un système centré*



1.3. Conditions de Gauss

En réalité, dans la pratique, il n'est pas nécessaire d'avoir un stigmatisme rigoureux, et si les rayons lumineux issus d'un point source émergent en passant par une région suffisamment petite pour être assimilée à un point par le récepteur (cellule de la rétine, pixel d'un capteur numérique) alors il existe un *stigmatisme approché* qui suffit à l'observation d'une image nette.
Comme dans le cas du dioptre plan rencontré dans le chapitre précédent, on peut rencontrer un stigmatisme approché dans des conditions particulières qui sont appelées les conditions de Gauss.

Conditions de Gauss
On ne considère que des rayons *paraxiaux*, c'est-à-dire :
– faiblement inclinés sur l'axe optique,
– proches de l'axe optique.

Pour se limiter à des rayons paraxiaux, il faut donc diaphragmer la lumière incidente.

Remarque : il ne faut pas non plus trop diaphragmer à cause du phénomène de *diffraction* qui ouvre les faisceaux lumineux si la taille du diaphragme est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde utilisée. La diffraction va limiter le pouvoir de résolution des instruments d'optique.
Si le stigmatisme approché se conserve dans un plan transverse, ce qui est le cas si l'objet transverse reste proche de l'axe optique, alors on dit qu'il y a aplanétisme approché.
Dans le cadre du programme de première année, on se contentera d'étudier des systèmes centrés dans les conditions de Gauss de stigmatisme et d'aplanétisme approchés.

1.4. Foyers

1.4.1. Foyer image – plan focal image

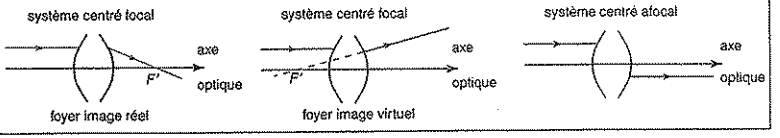
Un point objet A_∞, situé à l'infini sur l'axe optique, envoie un faisceau de rayons lumineux parallèles entre eux d'une part, et parallèle à l'axe optique d'autre part, l'axe optique lui-même est un rayon particulier de ce faisceau.
Considérons un autre rayon, parallèle à l'axe mais légèrement en dehors de celui-ci. Si ce deuxième rayon émerge du système optique centré en interceptant l'axe optique, alors le point d'intersection est appelé *foyer principal image*, et noté F'. Puisque le système présente un stigmatisme approché, tous les rayons issus du point objet à l'infini sur l'axe émergeront de même du système centré en passant par ce foyer F'. Le foyer image est donc l'image par le système centré d'un point objet situé à l'infini sur l'axe optique.

Foyer principal image

$$A_\infty \text{ sur l'axe} \xrightarrow{\text{système centré focal}} F'$$

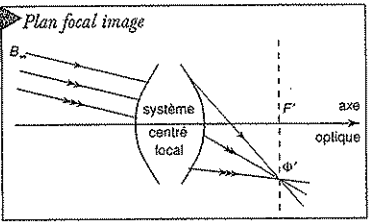
Le foyer principal image d'un système optique centré peut être réel, virtuel, ou ne pas exister, on parle alors de système afocal. Ces différents cas sont représentés sur les schémas de la figure 2.

Fig. 2 *Foyer image d'un système centré*



Intéressons-nous maintenant à un point objet B_∞, situé à l'infini, mais hors de l'axe optique. Il envoie un faisceau de rayons parallèles entre eux, mais inclinés par rapport à l'axe optique. Ce point objet B_∞ est dans le plan transverse contenant le point objet A_∞ précédent. Le système centré étant supposé aplanétique, l'image Φ' de B_∞ se situe dans le plan transverse passant par l'image F' de A_∞.

Fig. 3 *Plan focal image*



Ce point Φ' est appelé foyer secondaire image (figure 3).
Autrement dit, le plan transverse passant par F' est le plan conjugué du plan objet à l'infini, on l'appelle le *plan focal image*, il est constitué de l'ensemble des foyers secondaires images.

1.4.2. Foyer objet – plan focal objet

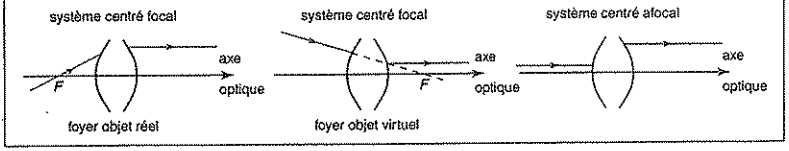
De façon symétrique, et d'après le principe du retour inverse de la lumière, on appelle *foyer principal objet* le point F de l'axe optique qui voit son image par le système centré, A'_∞, rejetée à l'infini sur l'axe. Un rayon incident passant par F émerge donc du système parallèlement à l'axe optique.

Foyer principal objet

$$F \xrightarrow{\text{système centré focal}} A'_\infty \text{ sur l'axe}$$

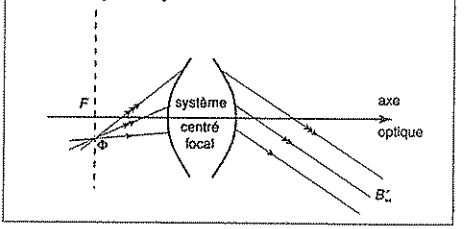
Ce foyer peut lui aussi être réel, virtuel, ou ne pas exister, dans le cas d'un système centré afocal. Ces différents cas sont représentés sur les schémas de la figure 4.

Fig. 4 *Foyer objet d'un système centré*



Par aplanétisme (approché dans les conditions de Gauss), tout point Φ du plan transverse passant par F a une image par le système centré, B'_∞, rejetée à l'infini, mais cette fois-ci hors de l'axe. Ce plan, appelé *plan focal objet*, est constitué de l'ensemble des foyers secondaires objets Φ (figure 5).

Fig. 5 *Plan focal objet*



2 Miroir sphérique

2.1. Présentation

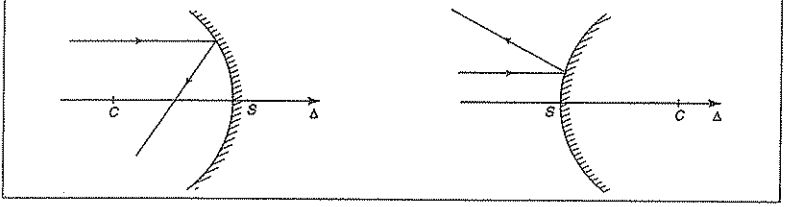
Remarque
Le miroir plan est un miroir sphérique particulier, de rayon infini.

On appelle *miroir sphérique* une portion de surface sphérique réfléchissante. On note généralement C son centre. Un tel système présente une symétrie de révolution par rapport à tout axe passant par le centre C de la sphère. On en choisit un, (Δ), pour constituer l'axe optique, et on appelle S le sommet du miroir, à savoir l'intersection de (Δ) avec le miroir.

On définit le rayon algébrique du miroir par la distance $\boxed{R = \overline{SC}.}$

Le miroir est dit *concave* si $R < 0$ et *convexe* si $R > 0$ (figure 6).

Fig. 6 *Miroir sphérique concave (à gauche) ou convexe (à droite)*



2.2. Stigmatisme

Le miroir sphérique présente un stigmatisme rigoureux pour deux couples de points particuliers de l'axe optique : (C, C) et (S, S).
En effet, tout rayon incident passant par le centre arrive sur la surface réfléchissante avec une incidence normale ; il est alors réfléchi sur lui-même et repasse par C.

$$C \xrightarrow{\text{miroir sphérique}} C$$
(*stigmatisme rigoureux*)

Remarque

Tous les points du miroir sont images d'eux-mêmes et présentent donc également un stigmatisme rigoureux.

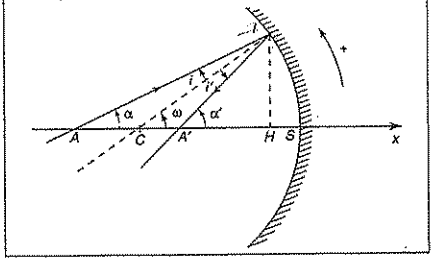
D'autre part, tout rayon incident au point S sur le miroir est réfléchi symétriquement par rapport à la normale locale, c'est-à-dire, l'axe optique. Le rayon réfléchi passe donc par S.

$$S \xrightarrow{\text{miroir sphérique}} S$$

(*stigmatisme rigoureux*)

Pour tout point A de l'axe optique, autre que C ou S, le stigmatisme ne saurait être rigoureux car la position du point A' dépend de l'angle d'incidence du rayon considéré. Il faut alors se placer dans les conditions de Gauss pour observer un stigmatisme approché.

Fig. 7 *Conjugaison pour un miroir sphérique*



Sur le schéma de la figure 7, on considère un rayon issu de A, paraxial (l'inclinaison est très largement exagérée sur la figure), se réfléchissant au point I pour recroiser l'axe optique en A'. L'angle α étant très faible, I est très proche de l'axe optique, et son projeté orthogonal H sur l'axe est quasiment confondu avec S. On travaille avec des angles orientés.
Dans le triangle AIC, la somme des angles donne $\alpha + (-i) + (\pi - \omega) = \pi$, soit $-i = \omega - \alpha$.
Dans le triangle $A'IC$, on obtient de même $(\pi - \alpha') + i' + \omega = \pi$ soit $i' = \alpha' - \omega$.
La loi de la réflexion en I donne $i' = -i$, et par conséquent $2\omega = \alpha + \alpha'$.
Or les angles étant petits, on peut les assimiler à leur tangente :

$$\tan\omega = \frac{\overline{HI}}{\overline{CH}} \simeq \omega\,; \quad \tan\alpha = \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}} \simeq \alpha\,; \quad \tan\alpha' = \frac{\overline{HI}}{\overline{A'H}} \simeq \alpha'.$$

La relation angulaire précédente s'écrit donc $2\dfrac{\overline{HI}}{\overline{CH}} = \dfrac{\overline{HI}}{\overline{AH}} + \dfrac{\overline{HI}}{\overline{A'H}}$. En simplifiant par $\overline{HI}$ et en écrivant que H et S sont confondus, il vient la relation de conjugaison suivante, qui donne la position de l'image en fonction de la position de l'objet.

Relation de conjugaison de Descartes avec origine au sommet S pour un miroir sphérique :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

Le stigmatisme approché obtenu dans les conditions de Gauss se conserve dans un plan transverse, pour les couples de points (B, B') voisins de l'axe : il y a aplanétisme approché.

2.3. Foyers

Le foyer objet du miroir sphérique est le point de l'axe optique dont l'image est renvoyée à l'infini : $F \xrightarrow{\text{miroir sphérique}} A'_\infty$

D'après la formule de conjugaison de Descartes, on a alors $\frac{1}{\overline{SF}} + 0 = \frac{2}{\overline{SC}}$. Le foyer objet est donc le milieu du segment $[SC]$. Il est réel $(\overline{SF} < 0)$ pour un miroir concave, et virtuel $(\overline{SF} > 0)$ pour un miroir convexe.

Le foyer image du miroir sphérique est le point de l'axe optique, image d'un objet situé à l'infini sur l'axe : $A_\infty \xrightarrow{\text{miroir sphérique}} F'$

D'après la formule de conjugaison, on a $0 + \frac{1}{\overline{SF'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$, et par conséquent $\overline{SF'} = \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$.

Les deux foyers étant confondus, on parle simplement de *foyer principal F*.

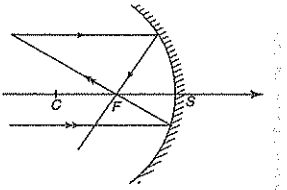
Foyer principal d'un miroir sphérique F : $\overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$

• On définit la *distance focale objet* f par $f = \overline{SF}$, et la distance focale image f' par $f' = \overline{SF'}$. Pour un miroir sphérique, on a donc $f = f' = \frac{R}{2}$.

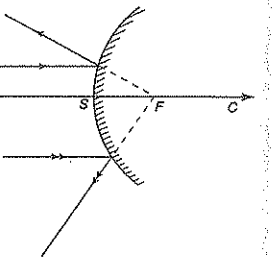
• On définit la *vergence* du miroir sphérique par $V = \frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{SF'}} = \frac{2}{R}$.

La vergence s'exprime en *dioptries* (δ), avec $1\delta = 1\,m^{-1}$.

La figure ci-contre montre qu'un miroir concave a un foyer réel, et fait converger un faisceau incident parallèle. Un miroir concave est dit *convergent* et $V < 0$.



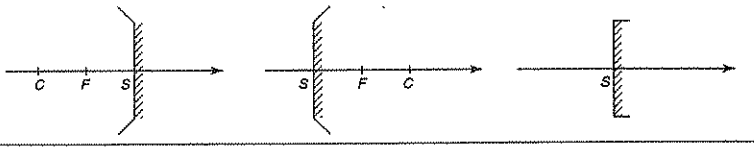
Un miroir convexe a, quant à lui, un foyer virtuel et fait donc diverger un faisceau incident parallèle (figure ci-contre). Il est dit *divergent* et $V > 0$. Le plan focal objet est confondu avec le plan focal image pour un miroir sphérique. On parle simplement de plan focal du miroir. Il est constitué de l'ensemble des foyers secondaires.



2.4. Constructions

Puisque l'on travaille dans les conditions de Gauss, un miroir sphérique est, au voisinage de S, quasiment confondu avec son plan tangent en S, c'est pourquoi on le représente de la façon suivante, les extrémités du miroir indiquant sa concavité (figure 8).

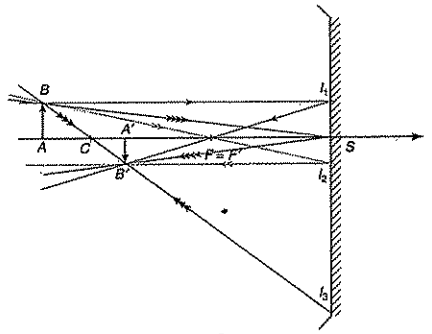
Fig. 8 *Modélisations d'un miroir sphérique concave, convexe, ou d'un miroir plan*



Pour construire l'image d'un objet AB transverse, A étant sur l'axe optique du miroir, il nous suffit de trouver l'image B' de B, puis de projeter cette image sur l'axe optique pour trouver A'. En effet, puisqu'il y a un aplanétisme approché, l'image $A'B'$ de AB transverse est également dans un plan transverse.

D'autre part, pour construire l'image B' de B, il nous suffit de tracer la marche de deux rayons. On en choisit deux parmi les quatre rayons particuliers suivants représentés sur la figure 9.

Fig. 9 *Les rayons fondamentaux pour un miroir sphérique*



Rayons fondamentaux pour le miroir sphérique

- Le rayon passant par B et parallèle à l'axe optique est réfléchi sur le miroir en passant par le foyer (image) F.
- Le rayon passant par B et par le foyer (objet) F est réfléchi parallèlement à l'axe optique.
- Le rayon passant par B et le centre C du miroir est réfléchi sur lui-même.
- Le rayon passant par B et le sommet S du miroir est réfléchi symétriquement par rapport à l'axe optique.

2.5. Relations de conjugaison et de grandissement

Dans les conditions de Gauss, on observe un stigmatisme approché avec une image unique associée à un point objet. Leurs positions sont reliées par des relations de conjugaison, et on s'intéresse aussi au grandissement du système, $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

Remarque
Ces formules sont établies dans la partie « Savoir appliquer le cours ».

• **Relation de conjugaison de Descartes avec origine au sommet S**

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SF'}}$$

On pose $p = \overline{SA}$, $p' = \overline{SA'}$, $f' = \overline{SF'}$. On a alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$.

Le grandissement est donné par $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ ou encore $\gamma = -\frac{p'}{p}$.

• **Relation de conjugaison de Descartes avec origine au centre C**

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}} = -\frac{1}{\overline{SF'}}$$

Le grandissement est donné par $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$.

• **Relation de conjugaison de Newton avec origine(s) au(x) foyer(s) $F = F'$**

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = \overline{FS} \times \overline{F'S} = ff'$$

On note $\sigma = \overline{FA}$, $\sigma' = \overline{F'A'}$ il vient $\sigma\sigma' = ff' = f^2 = \frac{R^2}{4}$.

Le grandissement est donné par $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{-f}{\sigma} = \frac{\sigma'}{-f'}$.

Le signe du grandissement indique si l'image est droite ($\gamma > 0$) ou renversée ($\gamma < 0$) et la valeur absolue du grandissement indique si l'image est plus petite que l'objet ($|\gamma| < 1$) ou plus grande que l'objet ($|\gamma| > 1$).

Avant la colle

Tester ses connaissances

➢ *Corrigés p. 88*

1 Le miroir plan :

- ☐ **a.** est un système centré focal.
- ☐ **b.** est un système centré afocal.
- ☑ **c.** n'est pas un système centré, mais c'est un système focal.
- ☐ **d.** n'est pas un système centré et il est afocal.

2 Si un système optique est rigoureusement stigmatique pour un couple de points, il est nécessairement aplanétique au voisinage de ces points.

☐ **a.** Vrai. ☑ **b.** Faux.

3 Le foyer image d'un système optique centré est l'image du foyer objet de ce même système.

☐ **a.** Vrai. ☑ **b.** Faux.

4 Le fait que l'on aperçoive une image nette dans une petite cuillère indique que ce système optique :

- ☐ **a.** est centré.
- ☐ **b.** est rigoureusement stigmatique.
- ☑ **c.** présente un stigmatisme au moins approché.

5 Quand on se regarde dans une petite cuillère, on se voit :

- ☐ **a.** inversé dans le creux de la cuillère et à l'endroit sur le dos de la cuillère.
- ☐ **b.** inversé sur le dos de la cuillère et à l'endroit dans le creux de la cuillère.
- ☐ **c.** inversé dans les deux cas.
- ☑ **d.** à l'endroit dans les deux cas.

6 Toujours en se regardant dans une petite cuillère, on se voit :

- ☑ **a.** agrandi sur le dos de la cuillère et rapetissé dans le creux de la cuillère.
- ☐ **b.** agrandi dans le creux de la cuillère et rapetissé sur le dos de la cuillère.
- ☐ **c.** agrandi dans les deux cas.
- ☐ **d.** rapetissé dans les deux cas.

7 Pour un miroir sphérique, si l'objet est réel, l'image est nécessairement virtuelle, et si l'objet est virtuel, alors l'image est nécessairement réelle.

☐ **a.** Vrai. ☑ **b.** Faux.

Savoir appliquer le cours

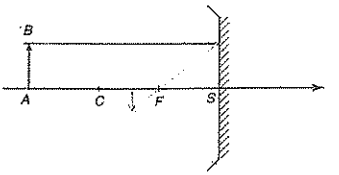
➢ *Corrigés p. 89*

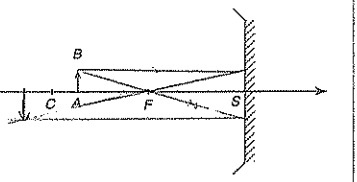
1 Démontrer directement la relation de conjugaison de Descartes avec origine au centre du miroir. On donnera également le grandissement du système.

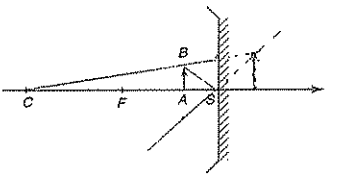
2 Démontrer la relation de conjugaison de Newton avec origines aux foyers pour un miroir sphérique. On donnera également le grandissement du système.

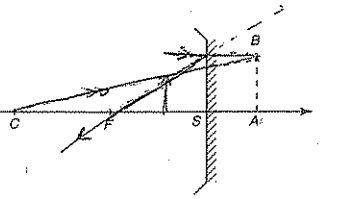
3 Compléter les constructions suivantes. En déduire un tableau regroupant les positions possibles de l'image selon les positions d'un objet ponctuel sur l'axe optique.

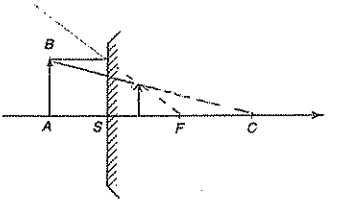
Constructions avec des miroirs sphériques

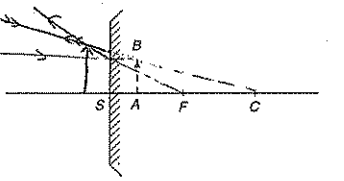


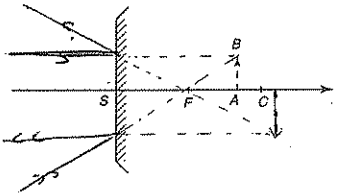


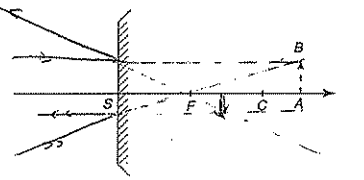












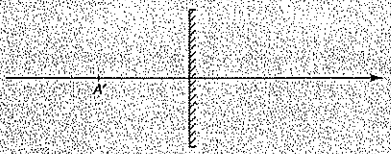
1 – Champ de vision d'un rétroviseur
(d'après ENSTIM)

Le champ d'un miroir est la portion de l'espace qu'un observateur voit dans ce miroir. Ainsi, un rétroviseur de voiture ne permet pas au conducteur de voir une autre voiture qui se situerait hors de cette portion ; c'est ce que l'on appelle l'angle mort.

Partie A – Le rétroviseur est un miroir plan

Le rétroviseur est un miroir plan, disque de diamètre L. L'observateur place son œil, supposé ponctuel, en un point A' de l'axe du miroir, à une distance D de celui-ci.

Rétroviseur : miroir plan



1 Positionner le point A dont l'image est A' par le miroir.

2 Où se situent les points que l'observateur peut espérer voir par réflexion dans le miroir ? Faire apparaître cette portion d'espace sur la construction.

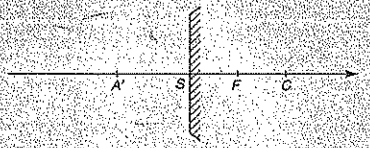
3 Donner l'expression de l'angle α qui caractérise la portion d'espace accessible à la vision ; c'est le champ du miroir.

4 Application numérique : calculer α avec $L = 20$ cm et $D = 50$ cm.

Partie B – Le rétroviseur est un miroir sphérique convexe

Le miroir plan est remplacé par un miroir sphérique convexe, de rayon de courbure R et de même diamètre L. L'œil de l'observateur est toujours placé en A' sur l'axe du miroir, à une distance D du sommet S de celui-ci (figure ci-dessous).

Rétroviseur : miroir sphérique



1 Effectuer la construction géométrique du point A dont l'image par le miroir est A'.

2 Faire apparaître le champ du miroir sur la construction.

3 Préciser l'expression de l'angle α' qui caractérise le champ de vision.

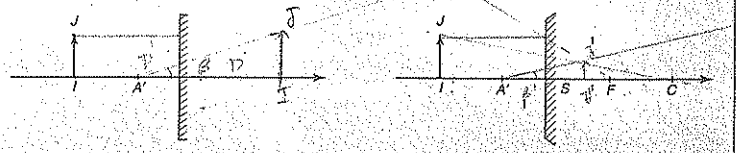
4 Application numérique : calculer α' avec $L = 20$ cm, $D = 50$ cm et $R = 50$ cm.

Partie C – Comparaison des deux dispositifs

1 Comparer les champs angulaires des deux types de rétroviseur.

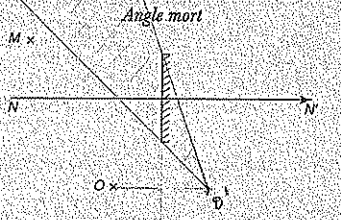
2 Un objet, de taille $h = 1{,}0$ m, est situé à une distance $D' = 10$ m du rétroviseur. Faire une construction graphique de l'image dans les deux cas représentés sur la figure ci-dessous :

Comparaison des images d'un même objet



Déterminer puis calculer les angles apparents sous lesquels l'automobiliste voit l'objet avec les deux types de rétroviseur.
Commenter.

Partie D – Angle mort



Sur la figure ci-dessus, le motard M est-il vu dans le rétroviseur de l'automobiliste ? Vous justifierez votre réponse à l'aide d'un tracé.
Le rétroviseur est considéré comme un miroir plan, son axe étant symbolisé par (NN') sur la figure. Les yeux du conducteur sont représentés par le point O.

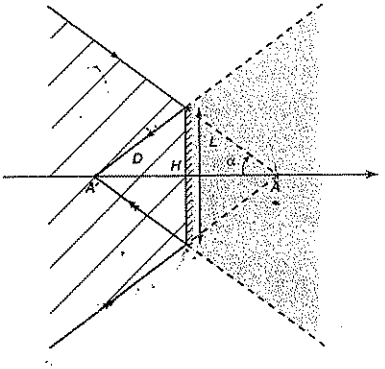
résolution méthodique

Partie A

1 Le point A dont A' est l'image est tout simplement le symétrique de A par rapport au miroir plan. On a la relation de conjugaison suivante : $\overline{HA} + \overline{HA'} = 0$.

 © Nathan, Classe prépa

Champ du rétroviseur : miroir plan



2 L'observateur, placé en A', voit tous les points situés dans un cône de sommet A s'appuyant sur les bords du rétroviseur, représenté par la portion d'espace hachurée sur la figure ci-dessus.

Pour déterminer le champ de vision, on s'intéresse aux rayons marginaux, c'est-à-dire aux rayons s'appuyant sur les extrémités du miroir. Il y a toujours deux façons de concevoir un champ de vision, soit en termes d'objet, en raisonnant sur la position des objets dont proviennent les rayons qui peuvent parvenir en A', soit en termes d'image, en raisonnant sur la position des images qui peuvent être vues depuis le point A'. Les objets doivent se situer dans la partie hachurée sur la figure ; les images doivent se situer dans la partie grisée.

3 L'angle au sommet du cône du champ de vision est α tel que $\tan\alpha = \dfrac{\frac{L}{2}}{D}$.

On a $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{L}{2D}}$.

4 L'application numérique donne $\alpha = 11°$.

Partie B

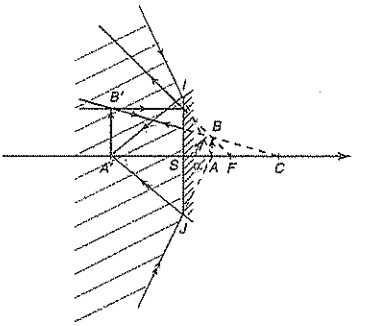
On a désormais à étudier un miroir convexe. La relation de conjugaison est donc changée, et la position de A dont A' est l'image est modifiée, de même que les rayons marginaux à considérer.

1 D'après le principe de retour inverse de la lumière, si A' est l'image de A par le miroir alors A est l'image de A' par ce même miroir.

Symboliquement, si $A \xrightarrow{M} A'$, alors $A' \xrightarrow{M} A$.

Le point A est positionné sur la figure ci-dessous :

Champ du rétroviseur : miroir sphérique



• Pour construire l'image d'un point, dans l'hypothèse d'un stigmatisme approché, il suffit de tracer la marche de deux rayons issus de ce point. Si le point en question est sur l'axe optique, les quatre rayons fondamentaux permettant la construction des images pour un miroir sphérique sont confondus avec l'axe lui-même. Il faut donc supposer que A est le pied d'un objet transverse AB, construire l'image B' de B par le miroir, puis projeter cette image B' sur l'axe optique pour trouver A', puisque dans les conditions de Gauss, le miroir sphérique présente un aplanétisme approché.
• Pour trouver l'image B' de B, il suffit de tracer deux rayons parmi ces quatre rayons fondamentaux :
– le rayon passant par B et le centre C du miroir est réfléchi sur lui-même ;
– le rayon passant par B et le sommet S du miroir est réfléchi symétriquement par rapport à l'axe optique ;
– le rayon passant par B et parallèle à l'axe optique est réfléchi en passant par le foyer du miroir ;
– le rayon passant par B et passant par le foyer du miroir est réfléchi parallèlement à l'axe optique ;

2 Là encore, le champ de vision est le cône de sommet A s'appuyant sur les extrémités du miroir, il est représenté par la portion d'espace hachurée sur la figure ci-dessus (question 1).

3 Notons α' l'angle au sommet de ce cône. Il est donné par $\tan\alpha' = \dfrac{SI}{SA} = \dfrac{L}{2SA}$.

Il reste à déterminer SA grâce à la relation de conjugaison. On choisit d'utiliser la relation de conjugaison de Descartes avec origine au sommet : $\dfrac{1}{\overline{SA}} + \dfrac{1}{\overline{SA'}} = \dfrac{2}{\overline{SC}}$.

On a ici $\overline{SA'} = -D$ et $\overline{SC} = R$. Il vient par conséquent $\dfrac{1}{\overline{SA}} = \dfrac{2}{R} + \dfrac{1}{D}$.

Le champ angulaire du miroir convexe est donc caractérisé par $\boxed{\tan\alpha' = \dfrac{L}{R} + \dfrac{L}{2D}}$.

4 L'application numérique donne $\alpha' = 31°$.

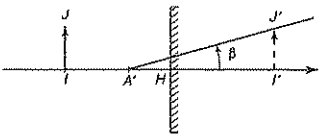
Partie C

1 L'image A de A' est plus proche du rétroviseur dans le cas du miroir sphérique que dans le cas du miroir plan. Le champ de vision est donc plus ouvert dans le deuxième cas, cela limite le problème des angles morts, et améliore la sécurité.

2 On observe maintenant un objet IJ dans le rétroviseur.

Dans le cas du miroir plan, l'image $I'J'$ est le symétrique de l'objet IJ par rapport au plan du miroir. La construction est réalisée sur la figure ci-contre.

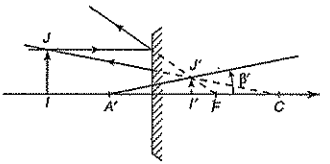
Construction des images d'un même objet, par le miroir plan ...,



Dans le cas du miroir sphérique, on construit l'image J' de J en utilisant deux des quatre rayons fondamentaux, puis, par aplanétisme, on trouve I' par projection de J' sur l'axe optique. La construction est réalisée sur la figure ci-contre.

L'angle apparent est l'angle sous lequel on voit $I'J'$ depuis le point A'.

... et par le miroir sphérique.



• Pour le miroir plan, il s'agit de l'angle β tel que $\tan\beta = \dfrac{\overline{I'J'}}{\overline{A'I'}}$ (voir figure miroir plan ci-dessus).

On a $\tan\beta = \dfrac{\overline{I'J'}}{\overline{A'I'}}$ avec $\overline{I'J'} = \overline{IJ} = h$ et $\overline{A'I'} = \overline{A'H} + \overline{HI'} = D - \overline{HI} = D + D'$.

Il vient $\boxed{\tan\beta = \dfrac{h}{D+D'}}$ et l'application numérique donne $\beta = 5°24'$.

• Pour le miroir sphérique, il s'agit de l'angle β' tel que $\tan\beta' = \dfrac{\overline{I'J'}}{\overline{A'I'}}$ (voir figure miroir sphérique ci-dessus).

On a cette fois-ci $\tan\beta = \dfrac{\overline{I'J'}}{\overline{A'I'}}$.

La position de l'image est donnée par la relation de conjugaison avec origine au sommet :

$$\frac{1}{\overline{SI}} + \frac{1}{\overline{SI'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

$$\frac{1}{\overline{SI'}} = \frac{2}{R} + \frac{1}{D}$$

On a donc $\overline{SI'} = \dfrac{RD'}{2D'+R}$.

La taille de l'image est donnée par la formule du grandissement :

•
$$\gamma = \frac{\overline{I'J'}}{\overline{IJ}} = -\frac{\overline{SI'}}{\overline{SI}}$$

$$\gamma = \frac{RD'}{D'(2D'+R)} = \frac{\overline{I'J'}}{h}.$$

On en déduit que $\overline{I'J'} = \dfrac{RD'h}{D'(2D'+R)}$.

Comme en outre $\overline{A'I'} = \overline{A'S} + \overline{SI'} = D + \dfrac{RD'}{2D'+R} = \dfrac{RD' + D(2D'+R)}{2D'+R}$, il vient pour l'angle apparent sous lequel l'automobiliste voit l'objet IJ dans le rétroviseur sphérique :

$\tan\beta' = \dfrac{RD'h}{D'(2D'+R)} \times \dfrac{R+2D'}{RD' + D(2D'+R)}$.

On a donc $\boxed{\tan\beta' = \dfrac{Rh}{RD' + D(2D'+R)}}$

L'application numérique donne $\beta' = 1°48'$.

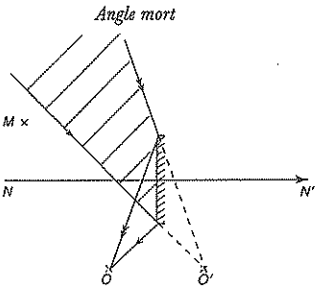
Le même objet est donc vu sous un angle bien plus petit dans le rétroviseur sphérique, ce qui peut donner à l'automobiliste l'impression que cet objet est placé plus loin. Il faut donc rester vigilant, et c'est pourquoi lorsque les rétroviseurs sont incurvés, une mention précise que les objets peuvent être plus près qu'ils n'apparaissent.

Finalement, pour un rétroviseur convexe, on va avoir un champ de vision plus grand, ce qui limite les angles morts, mais une image plus petite, ce qui peut poser des problèmes dans l'évaluation des distances. On obtient la même impression, amplifiée d'ailleurs, quand on observe son image par réflexion sur le dos d'une cuillère.

Partie D

On trace le champ de vision de l'observateur en traçant le cône de sommet O', image de O par le miroir, s'appuyant sur les bords du rétroviseur (figure ci-contre).

Le motard est situé hors de champ de vision, il ne peut donc être vu par l'automobiliste, il est « dans l'angle mort ».



En conclusion

Cet exercice s'intéresse à la comparaison de deux dispositifs utilisés en pratique et met en lumière certains avantages et inconvénients de chacun. On voit que le miroir plan permet une formation d'image avec un grandissement unité, auquel le cerveau est habitué pour appréhender les distances, mais ce miroir présente l'inconvénient d'avoir un champ angulaire de vision restreint.

En effet, puisque l'image de l'œil est plus proche du rétroviseur si celui-ci est un miroir sphérique, le champ angulaire est meilleur dans ce cas, et le phénomène d'angle mort est limité. Toutefois, comme le miroir sphérique donne dans la configuration usuelle d'utilisation du rétroviseur un grandissement inférieur à 1, l'image est plus petite et peut être interprétée comme plus éloignée par le cerveau.

2 – Télescope par réflexion

Un télescope est constitué de deux miroirs sphériques M_1 et M_2 de même centre O et de rayons respectifs $|\overline{OS_1}| = R_1$ et $|\overline{OS_2}| = R_2 = kR_1$, avec $0 < k < 1$.
Pour un objet A infiniment éloigné sur l'axe optique, le faisceau lumineux frappe la face concave de M_1 puis, après réflexion, la face convexe de M_2 et retrouve l'axe optique grâce à une ouverture de M_1.

1 Schématiser le système et la marche du faisceau.

2 On considère maintenant un objet A quelconque sur l'axe optique. On pose $x = \overline{OA}$ et $x' = \overline{OA'}$, trouver l'équation de conjugaison de ce télescope.

3 Quel est le foyer image de ce système ?

4 On veut que F' soit au delà de S_1. Quelle est la valeur limite de k ?

5 Quel est le foyer objet de ce système ? Commenter.

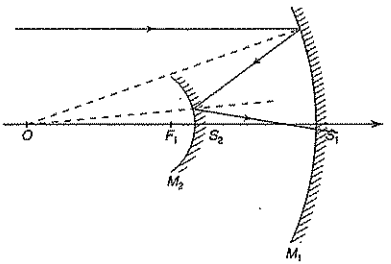
résolution méthodique

1

Pour schématiser ce système, il faut prendre le temps d'analyser l'énoncé. Prenons un rayon lumineux venant de la gauche. Ce rayon doit d'abord frapper la face convexe du premier miroir. Puis, il se réfléchit et repart donc vers la gauche. Il frappe alors la face convexe du deuxième miroir. Il faut donc que ce deuxième miroir soit situé à gauche du premier. Le rayon repart ensuite vers la droite, vers le premier miroir, et celui-ci doit présenter une ouverture pour laisser passer la lumière.

Le dispositif est représenté ci-dessous. On voit que le miroir M_2 ne doit pas être trop grand si l'on veut que la lumière incidente puisse atteindre le miroir M_1.

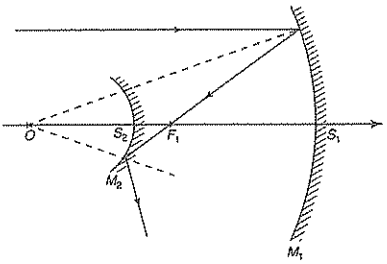
Télescope par réflexion



Le faisceau incident provenant d'un point A_∞ à l'infini sur l'axe est parallèle à l'axe. Le miroir M_1, concave, le fait converger vers son foyer principal F_1. Pour que le faisceau soit toujours globalement convergent après réflexion sur le miroir M_2, il faut que celui-ci intercepte le faisceau avant qu'il n'atteigne F_1.

En effet, si le miroir M_2 est placé entre O et F_1, on obtient le schéma ci-dessous, qui ne convient pas à l'observation de ces rayons lumineux.

Télescope par réflexion : mauvaise configuration



2 On cherche la relation de conjugaison du télescope. Considérons donc un objet ponctuel A quelconque sur l'axe optique, et cherchons son image A' par le télescope :

$$A \xrightarrow{M_1+M_2} A'$$

On a un groupement de deux miroirs. Pour déterminer la relation de conjugaison de l'ensemble des deux miroirs, il faut chercher la relation qui lie la position de l'objet initial A à la position de l'image finale A' donnée par l'ensemble du système optique. On décompose le système en ses sous-ensembles, en introduisant une image intermédiaire A_1, image par M_1 et objet pour M_2.

Le premier miroir M_1 donne d'un point objet quelconque A une image intermédiaire A_1, dont le miroir M_2 donne une image définitive A' :

$$A \xrightarrow{M_1} A_1 \xrightarrow{M_2} A'$$

Il se pose ensuite la question du choix de la relation de conjugaison à utiliser. Il y a trois relations de conjugaison équivalentes pour un miroir sphérique. Elles sont équivalentes sur le plan théorique, mais en pratique, bien souvent, l'une d'entre elles conduit à des expressions particulièrement simples tandis que les autres conduisent à des calculs parfois complexes.
On a ici un groupement de deux miroirs concentriques, ils ont donc un point particulier commun, leur centre O. Il est par conséquent naturel d'utiliser la relation de conjugaison de Descartes avec origine au centre.
On peut aussi remarquer que l'énoncé nous guide ici puisqu'il nous pose $x = \overline{OA}$ et $x' = \overline{OA'}$, ce qui montre qu'on repère les positions de l'objet et de l'image à partir d'une origine O, centre commun des miroirs.

Pour le miroir M_1, on a $A \xrightarrow{M_1} A_1$ et $\dfrac{1}{\overline{OA}} + \dfrac{1}{\overline{OA_1}} = \dfrac{2}{\overline{OS_1}} = \dfrac{2}{R_1}$. En effet, O est placé avant S_1 sur l'axe optique (miroir concave) et $\overline{OS_1} = R_1 > 0$.

On a donc $\dfrac{1}{\overline{OA_1}} = \dfrac{2}{R_1} - \dfrac{1}{x}$.

De la même façon, pour le miroir M_2, on a $A_1 \xrightarrow{M_2} A'$ et l'application de la relation de conjugaison de Descartes avec origine au centre donne $\frac{1}{\overline{OA_1}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{2}{\overline{OS_2}} = \frac{2}{R_2}$. Là encore, O est placé avant S_2 sur l'axe optique, puisque M_2 est un miroir convexe utilisé avec une lumière incidente provenant de la droite et $\overline{OS_2} = R_2 = kR_1 > 0$.

On a donc $\frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{2}{kR_1} - \frac{1}{x'}$.

La combinaison de ces deux expressions de $\frac{1}{\overline{OA_1}}$ donne :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{2}{R_1} - \frac{1}{x} = \frac{2}{kR_1} - \frac{1}{x'}$$

La relation de conjugaison du télescope est donc $\boxed{\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{2}{R_1}\left(\frac{1}{k} - 1\right)}$

3 Le foyer image d'un système optique est l'image d'un point objet situé à l'infini sur l'axe optique : $A_\infty \xrightarrow{\text{système optique}} F'$.

On vient d'établir la relation de conjugaison du télescope. Il suffit de reprendre cette relation de conjugaison avec x tendant vers l'infini, il vient alors immédiatement :

$$\frac{1}{\overline{OF'}} - 0 = \frac{2}{R_1}\left(\frac{1}{k} - 1\right) = \frac{2(1-k)}{kR_1}.$$

Le foyer image du télescope est donc situé à une distance $\boxed{\overline{OF'} = \frac{kR_1}{2(1-k)}}$

Si l'énoncé n'invite pas à rechercher la relation de conjugaison du télescope, on peut se contenter de décomposer la conjugaison de la façon suivante : $A_\infty \xrightarrow{M_1} F_1 \xrightarrow{M_2} F'$.
Le miroir M_1 donne de A_∞ une image en son foyer principal F_1, par définition.
Par conséquent, le foyer image du télescope est l'image par le miroir M_2 du foyer du premier miroir M_1.
On applique alors la relation de conjugaison du miroir M_2 au couple (F_1, F') pour déterminer la position de F'.

4 On souhaite que le foyer image global F' soit renvoyé après le sommet S_1 du premier miroir. Cela se traduit par :

$$\overline{OF'} \geqslant \overline{OS_1}$$
$$\frac{kR_1}{2(1-k)} \geqslant R_1$$
$$k \geqslant 2(1-k)$$
$$3k \geqslant 2$$

Pour que cette condition soit réalisée, il faut donc que k soit supérieur à une valeur limite :

$\boxed{k \geqslant k_{\text{lim}} \text{ avec } k_{\text{lim}} = \frac{2}{3}}$.

On avait déjà une première minoration de k puisqu'on avait vu que le sommet S_2 du miroir M_2 doit se trouver entre le centre O et le foyer F_1 du miroir M_1, ce qui impose que $OS_2 < OF_1$, avec $OS_2 = R_2 = kR_1$ et $OF_1 = \frac{R_1}{2}$, soit $kR_1 < \frac{R_1}{2}$, et finalement $k > \frac{1}{2}$.

5 Pour trouver le foyer objet F de l'association de miroirs, c'est-à-dire le point de l'axe optique dont l'image est renvoyée à l'infini par le télescope, on utilise à nouveau la relation de conjugaison trouvée précédemment, avec cette fois-ci $x' \to \infty$.

On a $F \xrightarrow{\text{télescope}} A'_\infty$.

Il vient $0 - \frac{1}{\overline{OF}} = \frac{2}{R_1}\left(\frac{1}{k} - 1\right) = \frac{2(1-k)}{kR_1}$.

Finalement, $\boxed{\overline{OF} = -\overline{OF'} = -\frac{kR_1}{2(1-k)}}$

Le foyer objet et le foyer image sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre O des miroirs M_1 et M_2. L'association de ces deux miroirs n'est donc pas équivalente à un miroir sphérique unique, puisque les foyers objet et image ne sont pas confondus. Ce télescope est en fait équivalent à une lentille mince (l'étude des lentilles minces se fera au chapitre suivant).

On peut remarquer que la relation de conjugaison du télescope, établie dans les questions précédentes, nous indique déjà que le système global ne peut être équivalent à un miroir unique, puisqu'elle donne des rôles différents à l'objet et à l'image, à cause du signe – dans l'équation. Pour un miroir sphérique, l'équivalence objet/image, caractéristique d'un système en réflexion, est assurée par le fait que les relations de conjugaison sont inchangées lorsque l'on intervertit l'image et l'objet.

en conclusion

• On s'intéresse ici à un groupement de systèmes optiques, rencontrés successivement par un rayon lumineux lors de son cheminement. Il faut prendre garde de décomposer correctement les différentes étapes, et écrire à chaque fois les petits « schémas » synthétisant la conjugaison entre un objet et son image, pour bien savoir quel point est objet (ou image) pour quel système optique.

$$\text{objet} \xrightarrow{\text{système optique}} \text{image}$$

• On voit aussi que l'association de deux miroirs sphériques ici n'est pas équivalente à un miroir unique, mais à une lentille sphérique. En effet, le but d'un télescope est de grandir une image, à la façon d'une loupe, qui est une simple lentille convergente. En astronomie, on préfère cependant utiliser des télescopes par réflexion, c'est-à-dire composés essentiellement de miroirs, car ceux-ci ne font pas intervenir de phénomène de dispersion dans la propagation de la lumière. En effet, les lois de la réflexion, contrairement à celles de la réfraction, ne sont pas sensibles à la longueur d'onde de la lumière utilisée puisque l'indice du milieu n'intervient pas.
En revanche, avec les lentilles, la distance focale (entre autres) dépend de la longueur d'onde, ce qui peut poser des problèmes d'aberrations chromatiques perturbant les observations fines des astronomes.

1 10 min

➤ Corrigé p. 91

Autocollimation

On considère un miroir sphérique concave, de centre C et de rayon $R = \overline{SC} < 0$. Un objet transverse AB est placé avant le miroir, et celui-ci en fait une image $A'B'$.

1. Exprimer le grandissement $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ du miroir en fonction de la position de l'objet et de l'image sur l'axe optique.

2. On souhaite que l'image se forme dans le plan de l'objet. Quel est alors le grandissement du miroir ?

3. Quelle position particulière occupe alors l'objet ? En déduire une méthode de détermination expérimentale de la distance focale d'un miroir concave.

4. Cette méthode est-elle transposable au cas d'un miroir convexe ?

2 30 min

➤ Corrigé p. 92

Focométrie d'un miroir sphérique : méthode des points conjugués

On considère un miroir sphérique M de centre C, de sommet S et de rayon $R = \overline{SC}$.

On dispose d'un objet réel transverse AB placé sur l'axe optique du miroir. Celui-ci en donne une image réelle que l'on recueille sur un écran. Puis, avec un dispositif adapté, on réalise la même expérience avec un objet virtuel, donnant toujours une image réelle recueillie sur un écran.

On mesure la taille et la position de l'image pour plusieurs positions de l'objet.

On note :

$p = \overline{SA}$, $p' = \overline{SA'}$, $L = \overline{AB}$ et $L' = \overline{A'B'}$.

Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant.

Mesure	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
p (cm)	−80,0	−60,0	−50,0	−35,0	10,0	50,0	70,0
p' (cm)	−26,3	−15,0	−33,5	−46,0	−6,6	−14,5	−15,9
L (cm)	4,0	4,0	4,0	4,0	5,3	5,3	5,3
L' (cm)	−1,4	−2,5	−2,6	−5,2	3,5	1,6	1,3

1. Détermination numérique

a. Déterminer pour chaque couple objet/image la distance focale obtenue en appliquant la relation de conjugaison de Descartes avec origine au sommet.

b. Comparer pour chaque mesure les rapports $\dfrac{A'B'}{AB}$ et $-\dfrac{SA'}{SA}$. Que dire de la mesure m_2 ?

2. Détermination graphique : on définit dans un repère $(O, \vec{e}_X, \vec{e}_Y)$ la droite D_i comme la droite passant par le point $M_i(p_i, 0)$ et par le point $M_i'(0, p_i')$.

a. Quelle est l'équation de la droite D_i ?

b. Tracer sur du papier millimétré les différentes droites D_i correspondant à chacune des mesures m_i effectuées. Qu'observe-t-on ?

c. En déduire la distance focale de ce miroir, ainsi que sa nature.

d. Montrer que la pente de la droite D_i correspond au grandissement γ_i observé dans la mesure m_i.

3. Pour un miroir concave, en se basant sur un schéma similaire, indiquer la nature de l'image, ainsi que le grandissement pour un objet placé :

a. avant C. **b.** entre C et F.

c. entre F et S. **d.** après S.

4. Reprendre cette dernière question pour un miroir convexe.

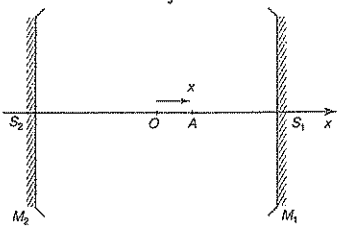
3 20 min

➤ Corrigé p. 93

Cavité confocale

Soient deux miroirs sphériques de même nature, dont les faces réfléchissantes sont en regard, distantes de D, ayant le même axe optique (Ox) et le même rayon algébrique R. O est le milieu de S_1S_2. On posera $\overline{F_1S_1} = \dfrac{R}{2} = \overline{S_2F_2}$. Le dispositif est représenté ci-après, avec des miroirs concaves, mais cela ne préjuge pas de la nature réelle des miroirs.

Cavité confocale



L'étude se fait dans le cadre de l'approximation de Gauss.

1. Un point objet A sur l'axe optique est repéré par son abscisse $x = \overline{OA}$.

a. On souhaite que l'image A' de A après une réflexion sur chaque miroir soit confondue avec l'objet A lui-même. Donner alors la relation liant x, R et D.

b. Quelle doit-être la nature des miroirs pour que cela soit possible, et quelle est la distance D_{min} devant les séparer ? Quelle particularité distingue le cas d'une cavité confocale ?

2. On suppose désormais les miroirs sphériques confocaux $F_1 = F_2$, noté F.

a. Tracer sur un schéma le trajet d'un rayon arrivant sur M_1 parallèlement à l'axe optique, puis celui d'un rayon arrivant sur M_1 en passant par F.

b. Pour un objet A_0B_0 situé dans un plan de front, A_0 étant sur l'axe, préciser son image après $2N$ réflexions dans la cavité, ainsi que le grandissement correspondant.

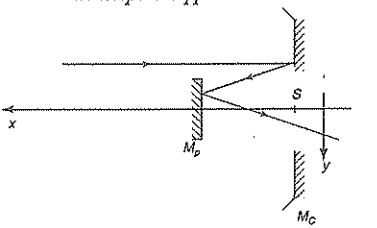
4 ★★☆ 20 min

▸ *Corrigé p. 95*

Télescope d'Hipparcos (d'après ENSTIM)

On propose de modéliser le télescope d'Hipparcos par un miroir concave M_c de rayon $R_1 = 2\,800$ mm avec un miroir plan M_p de renvoi (voir ci-après). On note S le sommet du miroir concave. La lumière subit deux réflexions et passe par un orifice dans le miroir concave pour atteindre le détecteur, constitué d'une grille et de cellules CCD permettant de repérer la position de l'image. La grille comporte $N = 2\,688$ fentes équidistantes de $\ell = 8{,}2$ µm.

Télescope d'Hipparcos



1. On considère une étoile E visée dans la direction (Sx). L'axe (Sx) est orienté vers l'étoile.

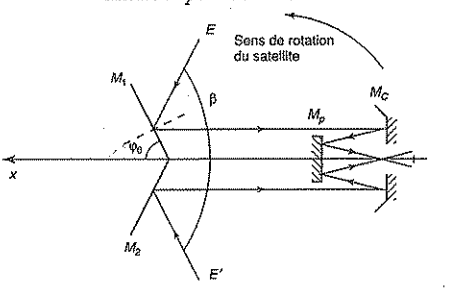
a. Déterminer l'abscisse x_1 de l'image E_1 de l'étoile E par le miroir M_C.

b. On note a la distance séparant le miroir plan et le sommet du miroir concave. Déterminer une condition sur a pour que l'image finale E_2 se forme sur le détecteur placé à l'arrière du miroir concave.

c. Déterminer la largeur angulaire α_c du champ observé. Calculer α_c en degrés.

2. En réalité, Hipparcos réalise une mesure de position relative des étoiles. Le télescope vise deux directions symétriques par rapport à (Sx) présentant un angle $\beta = 58°$. Ainsi on obtient avec une grande précision l'angle entre deux étoiles. C'est un système de deux miroirs plans M_1, M_2 qui permet d'obtenir les images des deux étoiles sur le détecteur. Embarqué sur un satellite, le télescope tourne autour d'un axe de direction (Sz) (figure ci-dessous). On supposera que la direction (Sz) est bien fixe et que l'axe (Sx) se déplace lentement afin de viser toute la sphère céleste.

Mesure de position relative



a. Déterminer l'angle φ_0 des miroirs M_1 et M_2 avec l'axe (Sx) du télescope.

b. Déterminer le déplacement angulaire θ_1 d'un rayon lumineux réfléchi par le miroir lorsque le satellite tourne d'un angle θ. Préciser le sens de déplacement des rayons réfléchis par M_1 et M_2.

5 20 min

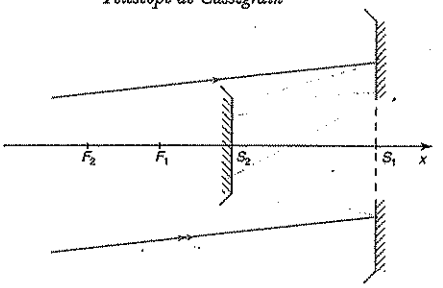
➤ Corrigé p. 96

Télescope de Cassegrain (d'après ENSTIM)

On considère le télescope de Cassegrain constitué de deux miroirs sphériques M_1 et M_2. Le miroir M_1 est concave avec une ouverture à son sommet S_1 ; M_2 est convexe, sa face réfléchissante tournée vers celle de M_1.

On observe à travers ce télescope un objet $\overline{AB}$ dont l'extrémité A est située sur l'axe optique. L'objet étant très éloigné, les rayons issus de B qui atteignent M_1 sont quasiment parallèles et forment avec l'axe optique un angle α (figure ci-dessous). Après réflexion sur M_1, ces rayons se réfléchissent sur M_2 et forment une image finale $\overline{A'B'}$ située au voisinage de S_1.

Télescope de Cassegrain



1. Effectuer les constructions géométriques des images intermédiaires $\overline{A_1B_1}$ de $\overline{AB}$ par M_1 et finale $\overline{A'B'}$.

2. On désigne par f_1 et f_2 les distances focales, comptées positivement, des deux miroirs M_1 et M_2 ($f_1 = \overline{F_1S_1}$, $f_2 = \overline{F_2S_2}$) et par $D = \overline{S_2S_1}$ la distance séparant les deux miroirs.

Exprimer D en fonction de f_1 et f_2 pour que l'image finale $\overline{A'B'}$ soit située dans le plan de S_1. Simplifier cette expression lorsque $f_1 \gg f_2$.

3. Application numérique : calculer $\overline{A_1B_1}$ et $\overline{A'B'}$ pour $\alpha = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ rad, $f_1 = 40$ cm et $\dfrac{f_1}{f_2} = 20$.

6 20 min

➤ Corrigé p. 97

Miroir de Foucault

On considère un système optique constitué d'une lentille convergente de centre O, et de deux miroirs M_1 (plan) et M_2 (sphérique).

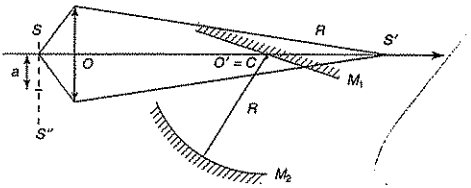
La lentille fournit d'une source lumineuse ponctuelle S une image S'.

Soit O' un point de l'axe optique de la lentille situé à une distance R de S', avant S'. On place en O' un miroir plan M_1 pouvant tourner à vitesse angulaire constante ω très grande autour d'un axe passant par O' et perpendiculaire au plan de la figure.

On place, hors de l'axe de la lentille, un miroir sphérique M_2 de rayon R de telle sorte que son centre C soit confondu avec O'.

Le dispositif est représenté sur la figure ci-dessous.

Miroir de Foucault



1. Montrer que lorsque M_1 est fixe, on peut observer une image S'' qui coïncide avec S.

2. Quand on fait tourner très rapidement le miroir M_1, on constate que l'image S'' se décale, dans le plan de front passant par S, d'une distance a de S.

Calculer a en fonction de R, ω, et de la vitesse de la lumière dans le vide c (on assimilera l'air au vide), ainsi que des distances $d = OS$ et $d' = OS'$.

On donne la relation de grandissement d'une lentille sphérique mince de centre O qui donne d'un objet transverse AB une image transverse $A'B'$

$(AB \xrightarrow{L} A'B') : \gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

3. Application numérique : la lentille a une distance focale $f' = 1{,}0$ m. On donne $d = 2{,}0$ m, $R = 1{,}0$ m et $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m · s^{-1}.

On donne la relation de conjugaison d'une lentille sphérique mince de centre O qui donne d'un objet A une image A' : $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$.

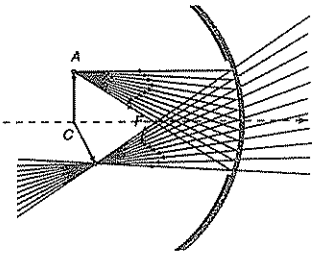
Calculer la distance a pour une vitesse de rotation de $6{,}0 \cdot 10^3$ tours/min. Conclure.

Tester ses connaissances

1 Réponse **b.** Le miroir plan est un système centré, il possède même une infinité d'axes de symétrie de révolution, puisque toute normale au plan peut jouer ce rôle. En revanche il est afocal : d'après la relation de conjugaison $\overline{HA}+\overline{HA'} = 0$, si A est à l'infini sur l'axe, alors A' est rejeté à l'infini. Les foyers objet et image d'un miroir plan sont rejetés à l'infini.
Les réponses **c.** et **d.** ne sont pas cohérentes puisque l'on ne peut définir le caractère focal ou non d'un système optique que si celui-ci est centré.

2 Réponse **b.** Prenons l'exemple du miroir sphérique, rigoureusement stigmatique pour le couple (C, C). Prenons un point A au voisinage de ce point, dans le plan transverse passant par C.
La figure montre le trajet d'un faisceau lumineux issu de A, tracé avec un logiciel de simulation. On voit que les rayons réfléchis convergent de façon satisfaisante (stigmatisme approché), mais qu'en revanche, l'image A' de A n'est pas dans le plan de front passant par l'image C de C. Il n'y a donc pas aplanétisme, même approché.

Stigmatisme approché sans aplanétisme



3 Réponse **b.** Attention, bien qu'ils soient respectivement notés F et F', les foyers objet et image ne sont pas conjugués par le miroir sphérique. Le foyer image est l'image d'un point objet à l'infini sur l'axe, et le foyer objet voit son image rejetée à l'infini sur l'axe. Le foyer image n'est certainement pas l'image du foyer objet.

4 Réponse **c.** Puisque l'on voit une image nette, c'est qu'il existe un stigmatisme approché. En fait, on a un très bon stigmatisme au voisinage de C, même pour des rayons fortement inclinés sur l'axe optique.
Pour les questions suivantes, il est nécessaire de s'appuyer sur un schéma. On pourra se reporter aux schémas de l'exercice 3 de la rubrique « Savoir résoudre les exercices ».

5 Réponse **a.** Quand on se regarde dans le dos de la cuillère, on a donc un miroir convexe, et si l'objet est réel, l'image est toujours droite. Pour la face concave de la cuillère (le creux), on aura une image inversée si l'objet est placé avant le foyer. C'est toujours le cas pour une petite cuillère, tenue à une vingtaine de centimètre de l'œil. Pour avoir une image droite, il faudrait se placer entre le foyer et la cuillère, mais l'œil est alors trop près pour permettre une observation.

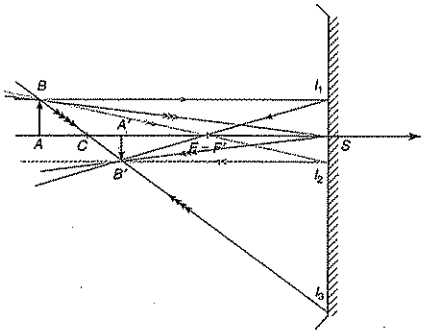
6 Réponse **d.** On se voit rapetissé dans les deux cas. Pour la face convexe, l'image d'un objet réel est toujours droite et plus petite. Pour la face concave, si l'objet est placé avant le centre du miroir, l'image est inversée et plus petite. On a une image plus grande si l'objet est entre le centre et le foyer, mais l'image se forme alors derrière l'objet et on ne peut l'observer (sans compter qu'encore une fois, l'œil est trop proche pour permettre une observation).

7 Réponse **b.** Ce qui était vrai pour le miroir plan ne l'est plus pour un miroir sphérique. Il faut maintenant nuancer.
Pour un miroir convexe, si l'objet est réel, l'image est nécessairement virtuelle, mais pour un objet virtuel, on peut avoir des images réelles ou virtuelles.
Pour un miroir concave, pour un objet réel, on peut avoir des images réelles ou virtuelles, tandis qu'un objet virtuel aura toujours une image réelle.

Savoir appliquer le cours

1 On s'appuie sur la construction de la figure ci-dessous.

Relations de conjugaison dans les conditions de Gauss



Par construction, les triangles CAB et $CA'B'$ sont semblables. L'application du théorème de Thalès donne donc $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$.

De même, les triangles SAB et $SA'B'$ sont également semblables et $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \dfrac{\overline{SC}+\overline{CA'}}{\overline{SC}+\overline{CA}}$.

Il vient par conséquent :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SC}+\overline{CA'}}{\overline{SC}+\overline{CA}}$$

$$(\overline{SC}+\overline{CA})\times\overline{CA'} = -\overline{CA}\times(\overline{SC}+\overline{CA'})$$

$$\overline{SC}\times(\overline{CA}+\overline{CA'}) = -2\overline{CA}\times\overline{CA'}.$$

En divisant les deux membres par le produit $\overline{SC}\times\overline{CA}\times\overline{CA'}$, il vient :

$$\frac{1}{\overline{CA}}+\frac{1}{\overline{CA'}} = -\frac{2}{\overline{SC}} = \frac{2}{\overline{CS}}.$$

On obtient bien la relation de conjugaison de Descartes avec origine au centre :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{CA}}+\frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}} = -\frac{1}{f'}} \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}}$$

Remarque : cette formule est notamment utile lorsque l'on étudie un groupement de miroirs sphériques concentriques. On a alors une origine unique pour les différents miroirs constituant le système optique.

2 On reprend la construction de l'application de cours précédente.

Les triangles ABF et FSI_2 étant semblables, on peut y appliquer le théorème de Thalès : $\dfrac{\overline{SI_2}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{FS}}{\overline{FA}}$.

De même, les triangles $A'B'F'$ et $F'SI_1$ sont également semblables, le théorème de Thalès donne par conséquent : $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{SI_1}} = \dfrac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}}$.

D'autre part, par construction, on a $\overline{SI_1} = \overline{AB}$ et $\overline{SI_2} = \overline{A'B'}$.

Il vient donc $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \dfrac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}}$.

On obtient alors la relation de conjugaison de Newton avec origine(s) au(x) foyer(s) (les foyers objet F et image F' sont confondus pour un miroir sphérique) :

$$\boxed{\overline{FA}\times\overline{F'A'} = \overline{FS}\times\overline{F'S} = ff' = f^2} \quad \text{et}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}}}$$

Si l'on introduit les notations usuelles $\sigma = \overline{FA}$ et $\sigma' = \overline{F'A'}$, il vient $\sigma\sigma' = ff' = f^2 = \dfrac{R^2}{4}$.

Le grandissement est donné par :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{-f}{\sigma} = \frac{\sigma'}{-f'}}$$

Remarque : on peut retrouver les relations de conjugaison de Descartes à partir de la relation de conjugaison de Newton.

En effet, on écrit simplement que $\overline{FA} = \overline{FS}+\overline{SA}$ d'une part, que $\overline{F'A'} = \overline{F'S}+\overline{SA'}$ d'autre part, et enfin que $\overline{FS} = \overline{F'S} = -\dfrac{\overline{SC}}{2}$.

Il vient alors :

$$(\overline{FS}+\overline{SA})\times(\overline{F'S}+\overline{SA'}) = (\overline{FS})^2$$

$$\left(-\frac{\overline{SC}}{2}+\overline{SA}\right)\times\left(-\frac{\overline{SC}}{2}+\overline{SA'}\right) = \left(-\frac{\overline{SC}}{2}\right)^2$$

$$\left(-\frac{\overline{SC}}{2}\right)^2-\frac{\overline{SC}}{2}(\overline{SA}+\overline{SA'})+\overline{SA}\times\overline{SA'} = \left(-\frac{\overline{SC}}{2}\right)^2$$

$$-\frac{\overline{SC}}{2}(\overline{SA}+\overline{SA'})+\overline{SA}\times\overline{SA'} = 0.$$

En divisant les deux membres de cette équation par le produit $-\dfrac{\overline{SC}}{2}\times\overline{SA}\times\overline{SA'}$, il vient :

$$\frac{1}{\overline{SA'}}+\frac{1}{\overline{SA}}-\frac{2}{\overline{SC}} = 0.$$

On retrouve alors la relation de conjugaison de Descartes avec origine au sommet : $\boxed{\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}}$

En introduisant C à la place de S dans la relation de Newton, on obtiendrait la relation de conjugaison de Descartes avec origine au centre.

3 • On s'intéresse dans un premier temps à un **miroir concave**. Le domaine des objets réels est séparé en plusieurs zones, par les points particuliers C et F. Il n'y a en revanche qu'une seule zone pour les objets virtuels (au-delà de S).

On voit que quand on déplace l'objet de gauche à droite, l'image se déplace de droite à gauche, en passant « instantanément » de l'infini à gauche à l'infini à droite.

Les différentes constructions sont rassemblées dans le tableau qui vient, avec l'analyse du grandissement pour chaque configuration.

Rappel : le signe de γ indique si l'image est droite ($\gamma > 0$) ou inversée ($\gamma < 0$), et la valeur absolue du grandissement indique si l'image est plus petite que l'objet ($|\gamma| < 1$) ou plus grande que l'objet ($|\gamma| > 1$).

Objet réel
A avant C

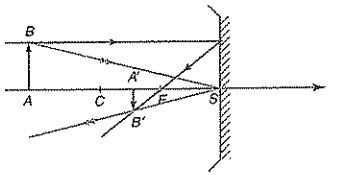


Image réelle, renversée, plus petite $-1 < \gamma < 0$

Objet réel
A entre C et F

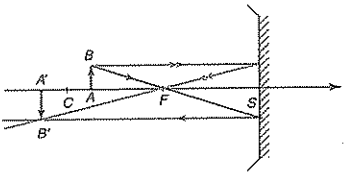


Image réelle, renversée, plus grande $\gamma < -1$

Objet réel
A entre F et S

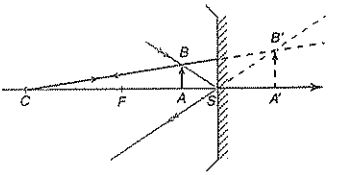


Image virtuelle, droite, plus grande $\gamma > 1$

Objet virtuel
A après S

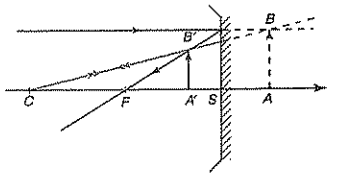


Image réelle, droite, plus petite $0 < \gamma < 1$

• On s'intéresse ensuite à un **miroir convexe**. Cette fois-ci, il n'y a qu'une seule zone possible pour les objets réels, mais le domaine des objets virtuels est séparé en plusieurs zones par les points particuliers S, F et C.

Les différentes constructions sont rassemblées dans le tableau suivant, de même que l'analyse du grandissement pour chaque configuration.

Objet réel
A avant S

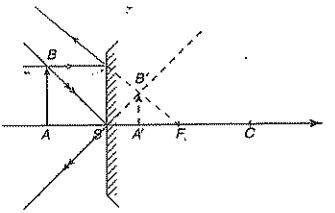


Image virtuelle, droite, plus petite $0 < \gamma < 1$

Objet virtuel
A* entre *S* et *F

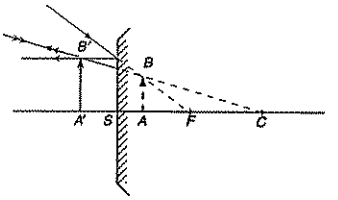


Image réelle, droite, plus grande $\gamma > 1$

Objet virtuel
A* entre *F* et *C

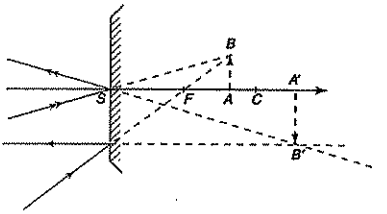


Image virtuelle, renversée, plus grande $\gamma < -1$

Objet virtuel
A* après *C

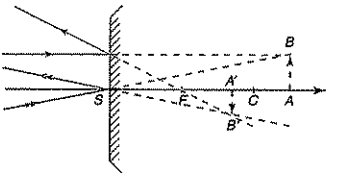


Image virtuelle, renversée, plus petite $-1 < \gamma < 0$

S'entraîner

1 **1.** Le grandissement est donné par :

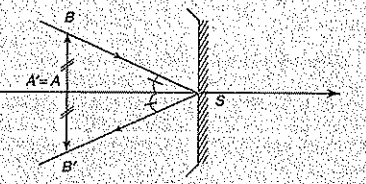
$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}}$$

2. Si l'image se forme dans le plan de l'objet, cela veut dire que A et A' sont confondus. On a alors $\overline{SA'} = \overline{SA}$, et par conséquent $\boxed{\gamma = -1.}$

Si l'image se forme dans le plan de l'objet (autocollimation), l'image est de même taille que l'objet, mais renversée.

Cela peut aussi se voir sans calcul sur la figure ci-après sur lequel on a simplement tracé le rayon provenant de B se réfléchissant en S, symétriquement par rapport à l'axe optique. Puisque B' doit être dans le plan de B, et que les deux rayons incident et réfléchi sont symétriques, il vient nécessairement que $\overline{A'B'} = -\overline{AB}$ et $\gamma = -1$.

Autocollimation : l'image se forme dans le plan de l'objet



3. La relation de conjugaison de Descartes avec origine au sommet donne :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SF'}}.$$

Si $\overline{SA'} = \overline{SA}$, il vient immédiatement $\frac{2}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$.

L'objet est donc confondu avec le centre du miroir sphérique : $\boxed{A = C}$

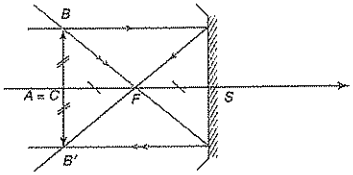
La distance entre l'objet et le miroir est donc :

$$\overline{SA} = \overline{SC} = 2\overline{SF} = 2f.$$

Il suffit donc de mesurer la distance $D = \overline{SA}$ entre l'objet et le miroir dans cette configuration particulière, et on en déduit aisément la distance focale f donnée par $\boxed{f = \frac{D}{2}}$.

Le trajet de deux rayons lumineux correspondant à cette configuration particulière de l'autocollimation est représenté ci-dessous :

Autocollimation



4. Pour un miroir convexe, on a *a priori* la même relation, si l'on forme l'image dans le plan de l'objet, on est alors au centre du miroir. En pratique toutefois, comme le centre C du miroir convexe est placé derrière celui-ci, dans le domaine des objets et des images virtuels la méthode est difficile à mettre en œuvre, il faudrait créer un objet virtuel par une lentille intermédiaire, et par un autre dispositif, projeter sur un écran l'image virtuelle obtenue, tout en s'assurant que c'est bien dans le plan de l'objet que se forme l'image.

2

1. *Détermination numérique* : les résultats sont regroupés dans ce tableau.

Mesure	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
p (cm)	–80,0	–60,0	–50,0	–35,0	10,0	50,0	70,0
p' (cm)	–26,3	–15,0	–33,5	–46,0	–6,6	–14,5	–15,9
L (cm)	4,0	4,0	4,0	4,0	5,3	5,3	5,3
L' (cm)	–1,4	–2,5	–2,6	–5,2	3,5	1,6	1,3
$-\frac{p'}{p}$	–0,33	–0,25	–0,67	–1,31	0,66	0,29	0,23
$\frac{L'}{L}$	–0,35	–0,63	–0,65	–1,30	0,66	0,29	0,25
f'(cm)	–19,8	–12,0	–20,1	–19,9	–19,4	–20,4	–20,6

Pour la majorité des résultats expérimentaux, les estimations de f' sont similaires. Il existe cependant une valeur aberrante correspondant à la mesure m_2.

On voit, en comparant les rapports $-\frac{p'}{p}$ et $\frac{L'}{L}$, qui devraient être identiques, que la mesure m_2 n'est probablement pas fiable. Il faudrait la reprendre en situation de TP, ou ici, simplement la signaler comme aberrante et la mettre de côté.

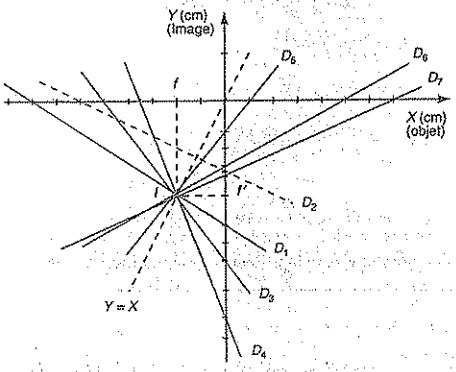
Remarque : on constate que les valeurs données par les mesures utilisant un objet virtuel sont plus dispersées que celles mettant en œuvre un objet réel. En effet, la méthode avec objet virtuel est souvent plus délicate à mettre en œuvre et conduit à des résultats très sensibles à la précision de l'expérimentateur.

2. a. La droite D_i passe par les deux points $M_i(p_i, 0)$ et $M_i'(0, p_i')$. Elle a pour équation générique $aX + bY + c = 0$, où seuls deux des trois coefficients (a, b, c) sont libres.

En écrivant que D_i passe par M_i, il vient $ap_i + c = 0$, d'où $a = -\frac{c}{p_i}$. De la même façon, en écrivant que D_i passe par M_i', il vient $bp_i' + c = 0$, soit $b = -\frac{c}{p_i'}$. On choisit par exemple $c = -1$; on a alors $a = \frac{1}{p_i}$ et $b = \frac{1}{p_i'}$. Une équation de la droite D_i est $\boxed{\frac{X}{p_i} + \frac{Y}{p_i'} = 1}$

b. On observe, ci-dessous, que, à l'exception de la droite D_2 correspondant à la mesure m_2 aberrante (et représentée en pointillés), les droites D_i sont à peu près concourantes en un point I. On constate également que ce point I appartient à la première bissectrice, d'équation $Y = X$.

Détermination graphique de la distance focale



c. On trouve ainsi la distance focale du miroir.

En effet, puisque $X_I = Y_I$, on a $\frac{X_I}{p_i} + \frac{Y_I}{p_i'} = 1$, ce qui, en divisant par $X_I = Y_I$ donne $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i'} = \frac{1}{X_I}$. On a donc :

$$\boxed{X_I = Y_I = f'}$$

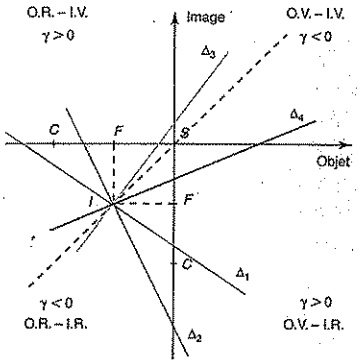
Graphiquement, on établit $f' = -20{,}0$ **cm**. C'est un miroir concave.

d. L'équation de la droite D_i est $\frac{X}{\overline{p_i}} + \frac{Y}{\overline{p_i'}} = 1$. En multipliant par $\overline{p_i'}$, il vient $Y + \frac{\overline{p_i'}}{\overline{p_i}}X = \overline{p_i'}$, soit $Y = -\frac{\overline{p_i'}}{\overline{p_i}} + \overline{p_i'}$.

La pente de cette droite est donc $-\frac{\overline{p_i'}}{\overline{p_i}}$. On reconnaît le grandissement γ_i obtenu pour la mesure m_i.

3. On utilise la construction précédente en plaçant le foyer et le centre du miroir sur l'axe des abscisses, correspondant aux objets, et sur l'axe des ordonnées, correspondant aux images. Toute droite représentant une conjugaison objet-image passe par le point I sur la première bissectrice. La position de l'objet et la connaissance du point I donne alors immédiatement la position et la nature de l'image. Les quatre configurations étudiées sont représentées ci-dessous.

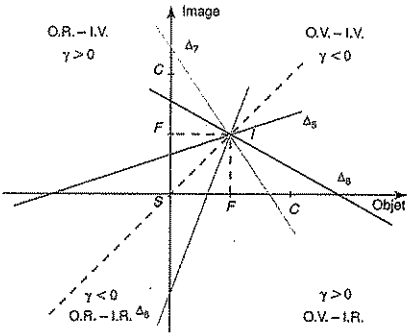
Les quatre configurations possibles pour la conjugaison objet-image par un miroir concave



a. Pour un objet placé avant C (objet réel), ce qui correspond à la droite Δ_1 sur le schéma, on obtient une image réelle, renversée, plus petite que l'objet.
b. Pour un objet placé entre C et F (objet réel), ce qui correspond à la droite Δ_2 sur le schéma, on obtient une image réelle et renversée, mais cette fois plus grande que l'objet.
c. Pour un objet situé entre F et S (objet réel), correspondant à la droite Δ_3, on a une image virtuelle, droite, plus grande que l'objet.
d. Enfin, pour un objet situé après S (objet virtuel), droite Δ_4, sur le schéma on a une image réelle, droite, plus petite que l'objet.

4. Pour un miroir convexe, on a exactement le même genre de raisonnement, à ceci près que le point I se situe désormais dans le domaine des objets et des images virtuelles, de même que les points C et F, ce qui donne cette figure.

Les quatre configurations possibles pour la conjugaison objet-image par un miroir convexe



On a alors :
– pour un objet (réel) placé avant S (droite Δ_5), une image virtuelle, droite, plus petite que l'objet ;
– pour un objet (virtuel) placé entre S et F (droite Δ_6), une image réelle, droite, plus grande que l'objet ;
– pour un objet (virtuel) placé entre F et C (droite Δ_7), une image virtuelle, renversée, plus grande que l'objet ;
– et enfin, pour un objet (virtuel) situé après C (droite Δ_8), une image virtuelle, renversée, plus petite que l'objet.

3 1. a. Soit A_1 l'image intermédiaire de A donnée par le premier miroir M_1 : $A \xrightarrow{M_1} A_1 \xrightarrow{M_2} A'$
On pose $x_1 = \overline{OA_1}$.
Pour le premier miroir, $A \xrightarrow{M_1} A_1$ et la relation de conjugaison de Newton avec origine au foyer donne :

$$\overline{F_1A} \times \overline{F_1A_1} = \overline{S_1F_1}^2 = \frac{R^2}{4}$$

Pour le deuxième miroir, qui donne de A_1 l'image définitive A', la relation de Newton donne :

$$\overline{F_2A_1} \times \overline{F_2A'} = \overline{S_2F_2}^2 = \frac{R^2}{4}.$$

Or :

$$\overline{F_1A} = \overline{F_1S_1} + \overline{S_1O} + \overline{OA} = \frac{R}{2} - \frac{D}{2} + x$$

$$\overline{F_1A_1} = \overline{F_1S_1} + \overline{S_1O} + \overline{OA_1} = \frac{R}{2} - \frac{D}{2} + x_1$$

$$\overline{F_2A_1} = \overline{F_2S_2} + \overline{S_2O} + \overline{OA_1} = -\frac{R}{2} + \frac{D}{2} + x_1$$

$$\overline{F_2A'} = \overline{F_2S_2} + \overline{S_2O} + \overline{OA'} = -\frac{R}{2} + \frac{D}{2} + x'.$$

On obtient par conséquent :

$$\left(\frac{R-D}{2} + x\right) \times \left(\frac{R-D}{2} + x_1\right) = \frac{R^2}{4}$$

$$\left(\frac{D-R}{2} + x_1\right) \times \left(\frac{D-R}{2} + x'\right) = \frac{R^2}{4}$$

On exprime x_1 grâce à la deuxième équation (par exemple) :

$$x_1 = \frac{R-D}{2} + \frac{R^2}{4\left(\frac{D-R}{2}+x'\right)}$$

En réinjectant dans la première équation, on en déduit que :

$$\left(\frac{R-D}{2}+x\right)\times\left[\frac{R-D}{2}+\left(\frac{R-D}{2}+\frac{R^2}{4\left(\frac{D-R}{2}+x'\right)}\right)\right] = \frac{R^2}{4}$$

On souhaite par ailleurs que l'image A' de A après une réflexion sur chacun des miroirs soit confondue avec A lui-même, ce qui implique que $x' = x$.
L'expression précédente se simplifie alors, pour donner :

$$\left(\frac{R-D}{2}+x\right)\times\left[R-D+\frac{R^2}{4\left(\frac{D-R}{2}+x\right)}\right] = \frac{R^2}{4}$$

$$\left(\frac{R-D}{2}+x\right)\times\left(\frac{(R-D)\times\left(4\left(\frac{D-R}{2}+x\right)\right)+R^2}{4\left(\frac{D-R}{2}+x\right)}\right) = \frac{R^2}{4}$$

$$\frac{R^2-2(R-D)^2+4x(R-D)}{4\left(\frac{D-R}{2}+x\right)} = \frac{R^2}{4\left(\frac{R-D}{2}+x\right)}$$

$$(R^2-2(R-D)^2+4x(R-D))\times\left(\frac{R-D}{2}+x\right) = R^2\times\left(\frac{D-R}{2}+x\right)$$

$$R^2\times\frac{R-D}{2}-(R-D)^3+2x(R-D)^2 + R^2x-2(R-D)^2x+4(R-D)x^2 = -R^2\times\frac{R-D}{2}+R^2x$$

$$R^2(R-D)-(R-D)^3+2x(R-D)^2 - 2(R-D)^2x+4(R-D)x^2 = 0$$

$$(R-D)\times(R^2-(R^2-2RD+D^2)+4x^2) = 0.$$

On obtient alors la condition suivante sur R, D et x :

$$\boxed{(R-D)\times(4x^2-D^2+2RD)=0}$$

b. L'analyse de cette relation montre que si $R \neq D$ alors, seules deux positions de l'objet A, symétriques par rapport à O conviennent :

$$\boxed{x_\pm = \pm\sqrt{\frac{D^2-2RD}{4}}}$$

Ces deux solutions ne sont acceptables que si $D > 2R$. Les miroirs doivent être distants de plus de deux fois leur rayon : $\boxed{D_{min} = 2R}$

De plus, il faut que les positions acceptables concernent des objets réels, c'est-à-dire un objet A placé avant le sommet S_1 du premier miroir, ce qui impose que x_+ reste inférieur à $\frac{D}{2}$. Cette condition se traduit par :

$$\sqrt{\frac{D^2-2RD}{4}} \leqslant \frac{D}{2}$$

$$\frac{D^2-2RD}{4} \leqslant \frac{D^2}{4}$$

$$-2RD \leqslant 0.$$

La distance D étant positive, il faut donc que $\boxed{R > 0,}$ c'est-à-dire que les miroirs soient concaves tous deux.

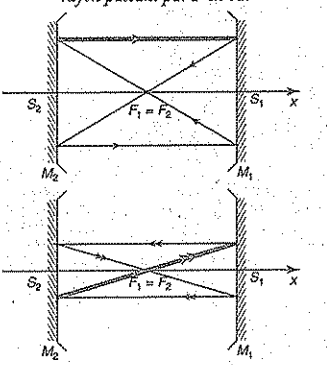
Remarque : $R = 2\overline{F_1S_1} > 0$ donne bien M_1 concave ; et $R = 2\overline{S_2F_2} > 0$ donne aussi M_2 concave, car il est placé avec sa face réfléchissante vers la droite.

La condition initiale $(R-D)\times(4x^2-D^2+2RD) = 0$ sera également vérifiée si $R = D$, et alors, toutes les positions x de l'objet A conviennent. Si cette relation est vérifiée, alors $\overline{OS_1} = \frac{D}{2} = \frac{R}{2} = \overline{F_1S_1} = \overline{S_2F_2}$, et les foyers F_1 et F_2 sont confondus avec le milieu O du segment $[S_1S_2]$.
On dit alors que la cavité réalisée est **confocale**.

2. On se place dans le cas d'une cavité confocale constituée de deux miroirs concaves en regard, et de foyer commun F.

a. On est dans le cas où $D = R$.

Cavité confocale : rayon parallèle à l'axe en haut; rayon passant par F en bas



Un rayon arrivant sur M_1 parallèlement à l'axe optique (comme sur la figure ci-dessus en haut) se réfléchit sur M_1 en passant par le foyer $F_1 = F$. Il arrive donc sur le miroir M_2 en passant par son foyer $F_2 = F$. Il est alors réfléchi sur M_2 parallèlement à l'axe optique, et se confond avec lui-même.
De la même façon, un rayon arrivant sur M_1 en passant par $F = F_1$ (comme sur la figure ci-dessus en bas) se

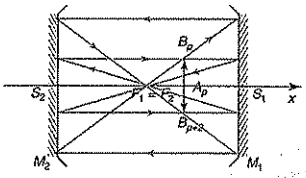
réfléchit sur M_1 parallèlement à l'axe optique, puis arrive sur M_2 parallèlement, et se réfléchit donc sur M_2 en passant par $F = F_2$, et il se confond à nouveau avec lui-même.

b. Notons A_pB_p l'image de A_0B_0 après p réflexions sur les miroirs.

D'après la propriété des cavités confocales établie à la question précédente, après un nombre pair de réflexions, l'image A_p est confondue avec l'objet A_0.

$$A_p \xrightarrow{M_1+M_2} A_{p+2} = A_p$$

Position de l'image $A_{p+2}B_{p+2}$ de A_pB_p après une réflexion sur chaque miroir



Cela étant, on voit sur le schéma que l'on obtient alors un grandissement égal à -1 : $\overline{A_{p+2}B_{p+2}} = -\overline{A_pB_p}$.

Après une réflexion sur chaque miroir, l'image est revenue dans le plan de front de l'objet, mais elle est inversée : $\gamma(2) = -1$, il faudra deux réflexions supplémentaires pour la redresser : $\overline{A_{p+4}B_{p+4}} = +\overline{A_pB_p}$ et $\gamma(4) = +1$.

Pour conclure, après $2N$ réflexions, l'image est dans le plan de l'objet initial. Elle est droite si N est pair, et inversée si N est impair.

4 **1. a.** On observe une étoile située à l'infini, le miroir concave M_c en donne une image intermédiaire E_1, puis le miroir plan en donne une image finale E_2 qu'on recueille sur le capteur CCD :

$$E_\infty \xrightarrow{M_c} E_1 \xrightarrow{M_p} E_2$$

L'étoile étant à l'infini, son image par le premier miroir se forme dans le plan focal image de celui-ci. E_1 est donc confondu avec le foyer F du miroir concave M_c.

Il vient $x_1 = \overline{SF'} = \dfrac{\overline{SC}}{2} = \dfrac{R_1}{2}$.

On a donc $\boxed{x_1 = \dfrac{R_1}{2}}$

A.N. : $x_1 = 1\,400$ mm.

b. Le miroir plan est distant du miroir sphérique de la distance a, on a $\overline{SH} = +a$, car l'axe optique est orienté vers l'étoile, contrairement à l'ordinaire.

Le miroir plan donne de l'image intermédiaire E_1 une image définitive E_2 symétrique de E_1 par rapport au plan du miroir.

La relation de conjugaison s'écrit $\overline{HE_1} + \overline{HE_2} = 0$.

Pour que cette image se forme derrière le miroir concave, il faut donc que $|\overline{HE_2}| > a$.

Or $\overline{HE_2} = -\overline{HE_1} = -\overline{HS} - \overline{SE_1} = \overline{SH} - \overline{SE_1} = a - \dfrac{R_1}{2}$.

La condition $\overline{HE_2} < -a$ se traduit donc par

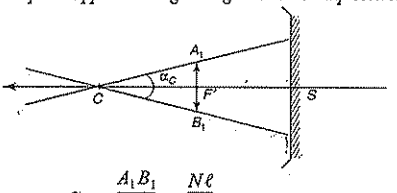
$a - \dfrac{R_1}{2} < -a$, soit $2a < \dfrac{R_1}{2}$ et finalement $\boxed{a < \dfrac{R_1}{4}}$.

c. La taille maximale d'une image qu'on puisse observer sur le capteur est donnée par $N \times \ell$.

Le miroir plan a un grandissement de 1, donc la taille maximale que doit avoir l'image intermédiaire est également $N \times \ell$.

Cette image est située dans le plan focal du miroir concave M_c. Sur la figure ci-dessous, on voit que les rayons extrêmes passant par C (et par conséquent, non déviés par le miroir sphérique) donnent la largeur angulaire du champ que l'on peut observer.

Télescope d'Hipparcos : largeur angulaire du champ observé



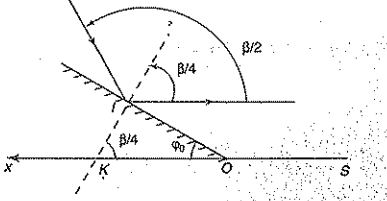
Il vient $\tan\dfrac{\alpha_c}{2} = \dfrac{\dfrac{A_1B_1}{2}}{\overline{CF'}} = \dfrac{\dfrac{N\ell}{2}}{\dfrac{R}{2}}$. Comme l'angle α_c est supposé petit, on peut assimiler l'angle à sa tangente. Il vient par conséquent :

$$\boxed{\alpha_c = \frac{2N\ell}{R}}$$

A.N. : $\alpha_c = 1{,}57 \cdot 10^{-2}$ rad $= 54'$.

2. a. Sur la figure ci-dessous, on considère un rayon incident provenant d'une des deux étoiles. Il fait avec l'axe (Sx) un angle $\dfrac{\beta}{2}$, puisque l'on vise deux directions symétriques par rapport à (Sx). Ce rayon incident se réfléchit sur le miroir M_1, parallèlement à l'axe (Sx). L'angle que le rayon incident fait avec la normale au miroir M_1 est donc $\dfrac{\beta}{4}$.

Télescope d'Hipparcos : mesure de position relative



Si φ_0 est l'angle que fait le miroir M_1 avec l'axe (Sx) du télescope, on voit dans le triangle OIK que

$$\frac{\pi}{2} + \varphi_0 + \frac{\beta}{4} = \pi.$$

Par conséquent, on obtient $\boxed{\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{4}}$

A.N. : $\varphi_0 = 1{,}32\text{rad} = 75°30'$.

b. On s'intéresse au premier miroir. Notons M_1 le miroir à un instant donné et N_1 sa normale. À un instant ultérieur, ce miroir a tourné, notons M_1' sa nouvelle position et N_1' sa normale.

Sur la figure ci-dessous, le rayon provenant de l'étoile E est réfléchi par M_1 en direction de E_1, et par M_1' en direction de E_1'. On cherche à exprimer l'angle $\theta_1 = (IE_1, I'E_1')$ que font les rayons réfléchis en fonction de l'angle $\theta = (OM_1, OM_1')$ dont a tourné le miroir.

Notons i l'angle d'incidence sur M_1 du rayon provenant de E et i' l'angle d'incidence de ce même rayon, sur le miroir M_1'.

Notons J le point d'intersection des deux rayons réfléchis, et K le point d'intersection des deux normales N_1 et N_1' aux miroirs M_1 et M_1'.

On remarque que les deux normales (IN_1) et $(I'N_1')$ forment le même angle θ que les deux miroirs M_1 et M_1'.

Dans le triangle IJI', on a $\theta_1 + (\pi - 2i) + 2i' = \pi$, ce qui donne $\theta_1 = 2(i - i')$.

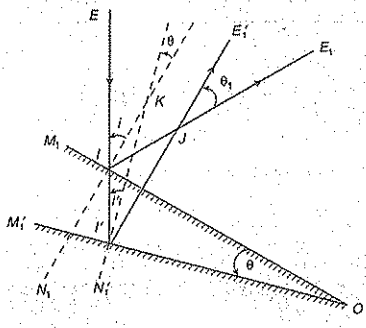
De même, dans le triangle IKI', on a $\theta + (\pi - i) + i' = \pi$, ce qui donne $\theta = i - i'$.

Il vient donc $\boxed{\theta_1 = 2\theta}$

Remarque : on retrouve la propriété déjà établie à l'exercice 2 de la rubrique « S'entrainer » du chapitre précédent : lorsque le miroir tourne d'un angle α, l'image tourne d'un angle double 2α.

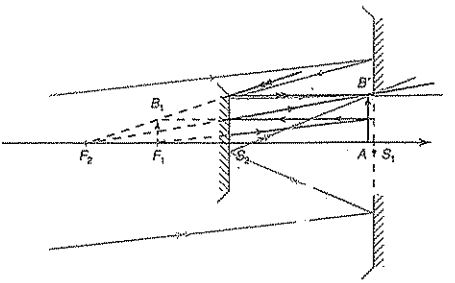
Les rayons réfléchis par M_1 et M_2 se déplacent dans le sens de rotation du satellite.

Télescope d'Hipparcos : rotation lente du miroir



5 **1.** On construit l'image B_1 de B par le premier miroir : $B \xrightarrow{M_1} B_1$ La construction est portée sur la figure ci-dessous :

Télescope de Cassegrain : construction de l'image B' de B



Comme B est à l'infini, hors de l'axe, son image par M_1 est située dans le plan focal de M_1. Il nous suffit de trouver la marche d'un rayon issu de B, son intersection avec le plan focal passant par F_1 nous donnera B_1. On choisit, par exemple, le rayon parallèle au rayon incident (et donc issu de B), passant par le foyer F_1, il se réfléchit sur M_1 parallèlement à l'axe optique. On trouve ainsi B_1.

On travaille dans les conditions de Gauss pour lesquels un miroir sphérique présente un aplanétisme approché, on trouve donc la position de A_1 par projection sur l'axe optique. Il s'agit bien évidemment de F_1 puisque A est situé à l'infini sur l'axe optique.

On cherche ensuite l'image B' que M_2 donne de B_1 : $B_1 \xrightarrow{M_2} B'$. On s'appuie sur le rayon incident passant par B_1 et parallèle à l'axe optique, qui est réfléchi en passant par F_2. On utilise également le rayon incident passant par B_1 et F_2, qui est réfléchi par M_2 parallèlement à l'axe optique. Leur intersection donne B'.

On trouve alors A' par projection sur l'axe optique, puisque le miroir sphérique est ici aplanétique.

Une fois la position de B_1 et B' déterminée, on peut poursuivre la marche des deux rayons quelconques incidents sur le premier miroir.

2. On note $f_1 = \overline{F_1S_1}$, $f_2 = \overline{F_2S_2}$ et $D = \overline{S_2S_1}$. On souhaite que l'image finale A' de A_∞ soit située dans le plan de S_1. On veut donc la conjugaison suivante :

$$A_\infty \xrightarrow{M_1} F_1 \xrightarrow{M_2} S_1$$

La relation de conjugaison de Newton du deuxième miroir donne donc : $\overline{F_2F_1} \times \overline{F_2S_1} = \overline{F_2S_2}^2 = f_2^2$.

Or, on a :

$$\overline{F_2F_1} = \overline{F_2S_2} + \overline{S_2S_1} + \overline{S_1F_1} = f_2 + D - f_1$$
$$\overline{F_2S_1} = \overline{F_2S_2} + \overline{S_2S_1} = f_2 + D$$

La relation de conjugaison de Newton devient donc :

$$(f_2 + D - f_1) \times (f_2 + D) = f_2^2$$

$$f_2^2 + f_2 D + D f_2 + D^2 - f_1 f_2 - f_1 D = f_2^2$$

$$D^2 + (2f_2 - f_1) D - f_1 f_2 = 0.$$

D doit donc vérifier une équation du second degré, de discriminant $\Delta = (2f_2 - f_1)^2 + 4f_1 f_2 = 4f_2^2 + f_1^2$.

Des deux solutions de cette équation, une seule est positive et peut donc convenir. La distance entre les deux miroirs du télescope doit être telle que :

$$\boxed{D = \frac{f_1 - 2f_2 + \sqrt{f_1^2 + 4f_2^2}}{2}}$$

Lorsque $f_1 \gg f_2$, l'expression précédente se simplifie, car $f_1^2 \gg 4f_2^2$ et $D \approx \dfrac{f_1 + \sqrt{f_1^2}}{2}$.

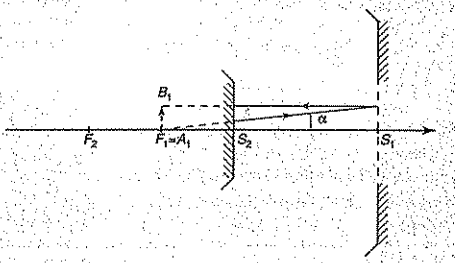
On a alors $\boxed{D \approx f_1}$

En pratique, S_2 doit être voisin de F_1, entre F_1 et S_1.

3. L'angle α est l'angle sous lequel est vu le point B. C'est donc l'angle que font les rayons qui en sont issus avec l'axe optique du télescope.

Par construction, on a donc $\tan\alpha = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{F_1S_1}}$. Il vient donc $\overline{A_1B_1} = f_1 \tan\alpha$.

Télescope de Cassegrain : angle sous lequel est vue l'étoile



Puisque l'on travaille dans les conditions de Gauss, on assimile l'angle à sa tangente : $\boxed{\overline{A_1B_1} = f_1\alpha}$

A.N. : $\overline{A_1B_1} = 4{,}0 \cdot 10^{-4}$ m.

Pour le second miroir, le grandissement est donné par $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = -\dfrac{\overline{S_2A'}}{\overline{S_2A_1}}$.

Or $\overline{S_2A_1} = \overline{S_2F_1} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1F_1} = D - f_1$.

Par conséquent, on a $\gamma = -\dfrac{D}{D - f_1}$.

A.N. : $D = 3{,}8 \cdot 10^{-1}$ m, ce qui donne un grandissement $\gamma = 20$. On en déduit alors la taille de l'image définitive $\boxed{\overline{A'B'} = \gamma\overline{A_1B_1}.}$

A.N. : $\overline{A'B'} = 8{,}0.10^{-3}$ m.

Remarque : on peut montrer directement que $\gamma \approx \dfrac{f_1}{f_2}$ par un développement limité.

En effet, l'expression du grandissement est $\gamma = -\dfrac{D}{D - f_1}$.

Or on a déja établi que $D \approx f_1$, ce qui est satisfaisant pour le développement du numérateur. Pour le dénominateur en revanche, il faut aller un peu plus loin dans le développement.

On obtient :

$$\sqrt{f_1^2 + 4f_2^2} = f_1\left(1 + 4\frac{f_2^2}{f_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx f_1\left(1 + 2\frac{f_2^2}{f_1^2}\right) \approx f_1 + 2\frac{f_2^2}{f_1}.$$

Cela donne $D = \dfrac{f_1 - 2f_2 + f_1 + 2\dfrac{f_2^2}{f_1}}{2} = f_1 - f_2 + \dfrac{f_2^2}{f_1}$.

Finalement, $D - f_1 \approx -f_2$, et le grandissement donne $\gamma = -\dfrac{D}{D - f_1} \approx \dfrac{f_1}{f_2}$.

6 **1.** Avant de revenir dans la direction de la lentille, la lumière se réfléchit successivement sur M_1, M_2, puis à nouveau sur M_1. Notons S_1', S_2' et S_3' les images intermédiaires correspondantes :

$$S \xrightarrow{L} S' \xrightarrow{M_1} S_1' \xrightarrow{M_2} S_2' \xrightarrow{M_1} S_3' \xrightarrow{L} S''$$

D'après la relation de conjugaison du miroir plan M_1, on a $O'S' = O'S_1'$. Or, on a positionné le miroir M_1 de telle sorte que $O'S' = R$. Par conséquent, $O'S_1' = R$ également. L'image S_1' de S' est donc située sur le miroir sphérique M_2, puisque ce dernier est placé de telle façon que $O' = C$.

Un miroir sphérique conjugue les points de sa surface avec eux-mêmes. Il en résulte que S_1' est confondu avec S_2'.

Par principe de retour inverse de la lumière, si S' a pour image par M_1 le point S_1', alors $S_2' = S_1'$ a pour image S' par le miroir M_1. Et de la même façon, l'image finale de S' par la lentille L est donc S.

On a bien $\boxed{S'' = S.}$

2. Le résultat établi à la question précédente ne dépend pas de l'angle que fait le miroir plan avec l'axe optique de la lentille, tant qu'il est fixe et présente sa face réfléchissante à la lumière issue de la lentille.

Mais désormais le miroir M_1 tourne très rapidement, il va donc avoir légèrement changé de position pendant le trajet de la lumière de M_1 à M_2 puis à M_1.

Les deux miroirs sont distants de $O'S_2 = CS_2 = R$. L'aller-retour de la lumière entre les deux miroirs dure donc $\tau = \dfrac{2R}{c}$, et pendant ce temps, le miroir M_1 a tourné d'un angle $\alpha = \omega\tau = \dfrac{2R\omega}{c}$.

Pour un objet fixe, si le miroir tourne d'un angle α, l'image de l'objet fixe par le miroir tournant tourne d'un angle 2α (voir exercice 2 de « S'entraîner », chapitre 2). L'image S_3' de S_2' par le miroir M_1 n'est donc plus confondue avec S'', mais elle a tourné autour de O' d'un angle $\alpha' = 2\alpha = \dfrac{4R\omega}{c}$. Comme cet angle reste, malgré tout, petit, la nouvelle image S_3' se situe dans le plan de front de S', à une distance $a' = R\alpha' = \dfrac{4R^2\omega}{c}$.

La lentille étant aplanétique dans les conditions de Gauss (voir chapitre suivant), l'image définitive S'' de S_3' par la lentille se forme dans le plan de front contenant S. Soit γ le grandissement transverse de la lentille, $\gamma = \dfrac{\overline{SS''}}{\overline{S'S_3'}} = \dfrac{\overline{OS}}{\overline{OS'}}$.

Il vient donc $a = \gamma a' = \dfrac{d}{d'} \times \dfrac{4R^2\omega}{c}$.

Par conséquent $\boxed{a = \dfrac{4R^2\omega d}{d'c}}$

3. Grâce à la relation de conjugaison de la lentille mince, on calcule d' : on a en effet $\dfrac{1}{d'} = \dfrac{1}{f'} - \dfrac{1}{d}$ avec $f' = \dfrac{d}{2}$, d'où $d' = d = 2f'$.
On convertit ω en rad · s^{-1} et l'application numérique donne alors a = **8,4 µm.**
Cette distance est très faible.

Un peu d'histoire

L'expérience décrite ici est celle mise en œuvre par Foucault en 1850 pour réaliser une mesure de la célérité de la lumière, à une époque où celle-ci n'avait pas encore été posée comme constante par la Conférence internationale des Poids et Mesures.
Suite à l'expérience nocturne de Fizeau entre Suresnes et Montmartre avec sa roue dentée, Foucault propose une mesure avec son miroir tournant. Il la reprendra en laboratoire en 1862. Il démultiplie le trajet incident de la lumière, grâce à des miroirs concaves, pour obtenir une distance de d = 40 m entre la source (lumière du soleil réfléchie par un héliostat) et le miroir tournant.
La vitesse de rotation du miroir était de 400 tours · s^{-1}, mesurée avec précision par une méthode stroboscopique, en synchronisant la rotation du miroir avec celle d'une roue dentée entraînée par un mécanisme d'horlogerie.
L'observation du décalage de l'image S'' se fait par un microscope équipé d'une graduation micrométrique.
Ce dispositif lui permet de mesurer la vitesse de la lumière. Il obtient la valeur de c = 298 000 km · s^{-1}.
C'est aussi avec ce même dispositif que Foucault montra que la vitesse de la lumière était plus faible dans l'eau que dans l'air, ce qui mit fin à une longue controverse entre la théorie corpusculaire de l'émission (défendue par Newton) et la théorie des ondulations (soutenue par Huygens et Fresnel). Le fait que la vitesse de la lumière dépende de la nature du milieu matériel fait pencher pour la théorie des ondulations. Il fallut attendre le début du vingtième siècle pour que les deux théories soient réconciliées grâce à la mécanique quantique.

4 Lentilles sphériques minces

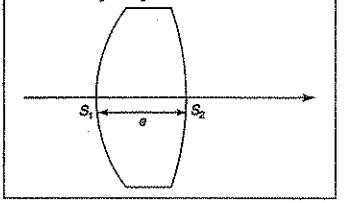
1 Présentation - Stigmatisme

1.1. Définition

Remarque
L'un des dioptres peut être plan (rayon de courbure infini).

• Une *lentille sphérique* est une portion de MHTI (Milieu Homogène Transparent Isotrope) comprise entre deux surfaces réfractantes sphériques (dioptres sphériques) présentant un axe de révolution commun (figure 1).
• Une *lentille sphérique mince* est une lentille sphérique dont l'épaisseur e est négligeable devant les rayons de courbure de ses faces. Dans ces conditions, les sommets S_1 et S_2 des deux dioptres sphériques sont quasiment confondus. On note ce point O, appelé *centre optique* de la lentille.

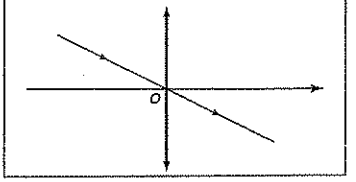
Fig. 1 *Lentille sphérique*



1.2. Modélisation

On modélise la lentille de la façon suivante (figure 2), on se contente de représenter le plan tangent à la lentille en O (commun aux deux faces), et on précise la courbure des dioptres aux extrémités.

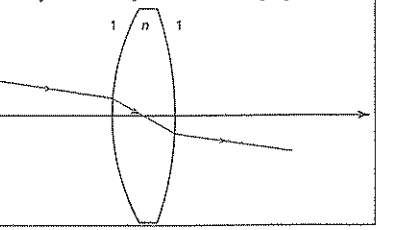
Fig. 2 *Modélisation d'une lentille mince*



Attention
Tout rayon incident passant par le centre optique O de la lentille en émerge sans déviation.

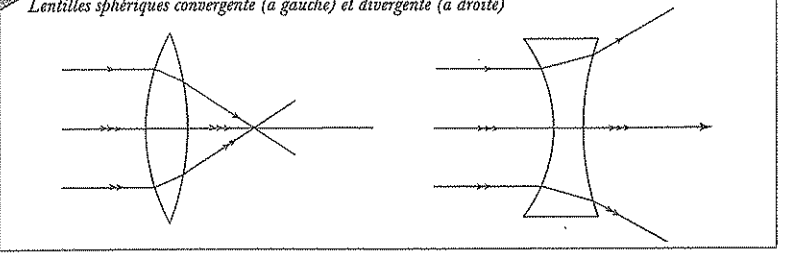
Au voisinage de l'axe optique, les dioptres sont quasiment confondus avec leurs plans tangents et la lentille est donc assimilable à une lame à faces parallèles. Un rayon incident au voisinage du centre optique ressort donc de la lentille parallèlement à lui-même, et provient approximativement du centre optique (figure 3).

Fig. 3 *Rayon incident proche du centre optique*



Il y a plusieurs types de lentilles. On distingue des lentilles convergentes, qui « referment » les faisceaux lumineux, et des lentilles divergentes qui les « ouvrent », comme le montre la figure 4.

Fig. 4 *Lentilles sphériques convergente (à gauche) et divergente (à droite)*



Le tableau suivant regroupe les différents types de lentilles sphériques minces rencontrées.

Lentilles convergentes (à bords minces)	bi-convexe	plan convexe	ménisque convergent	modélisation
Lentilles divergentes (à bords épais)	bi-concave	plan concave	ménisque divergent	modélisation

1.3. Stigmatisme

On se place dans les conditions de Gauss, en diaphragmant le faisceau incident. On ne considère alors que des rayons paraxiaux :
– proches de l'axe optique,
– peu inclinés sur l'axe optique.
Dans de telles conditions, une lentille sphérique mince présente un *stigmatisme* et un *aplanétisme approchés*, ce que confirme l'expérience lorsque l'on regarde à travers une loupe, ou un verre de lunettes par exemple.

2 Foyers

2.1. Foyer principal image - Plan focal image

Le foyer principal image F' est le point de convergence, après traversée de la lentille, d'un faisceau incident parallèle à l'axe optique. Autrement dit, il s'agit de l'image par la lentille d'un objet situé à l'infini sur l'axe optique (figure 5 à gauche pour une lentille convergente et 6 à gauche pour une lentille divergente) :

$$A_\infty \xrightarrow{\text{Lentille sphérique}} F'$$

Par aplanétisme, tout point objet à l'infini hors de l'axe optique aura son image dans le plan de front passant par F'. Ce plan est appelé *plan focal image* et est constitué de l'ensemble des *foyers secondaires image* Φ' (figure 5 à droite pour une lentille convergente et 6 à droite pour une lentille divergente).

FIG. 5 *Foyer image (à gauche) et plan focal image (à droite) pour une lentille convergente*

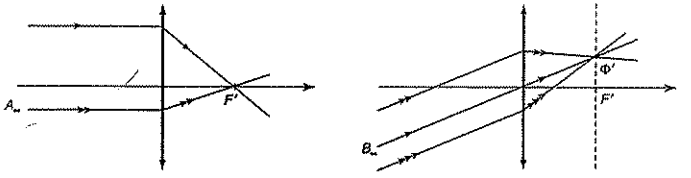
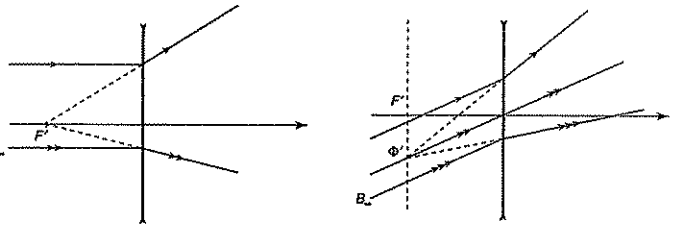


FIG. 6 *Foyer image (à gauche) et plan focal image (à droite) pour une lentille divergente*



2.2. Foyer principal objet - Plan focal objet

Le foyer principal objet F est le point de convergence d'un faisceau incident qui émerge de la lentille parallèlement à l'axe optique. Autrement dit, il s'agit du point de l'axe optique dont l'image par la lentille est rejetée à l'infini sur l'axe optique (figure 7 à gauche pour une lentille convergente et 8 à gauche pour une lentille divergente) :

$$F \xrightarrow{\text{Lentille sphérique}} A'_\infty$$

Par aplanétisme, tout point objet du plan de front passant par F verra son image par la lentille rejetée à l'infini hors de l'axe optique. Ce plan est appelé *plan focal objet* et est constitué de l'ensemble des *foyers secondaires objet* Φ (figure 7 à droite pour une lentille convergente et 8 à droite pour une lentille divergente).

Fig. 7 *Foyer objet (à gauche) et plan focal objet (à droite) pour une lentille convergente*

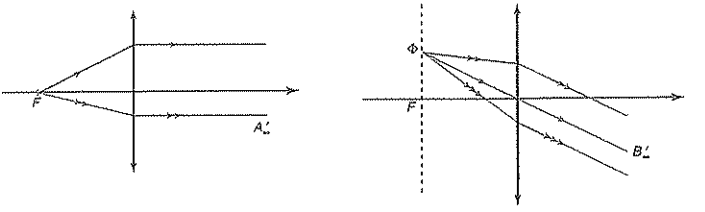
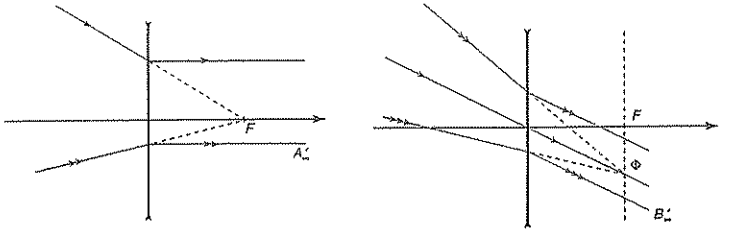


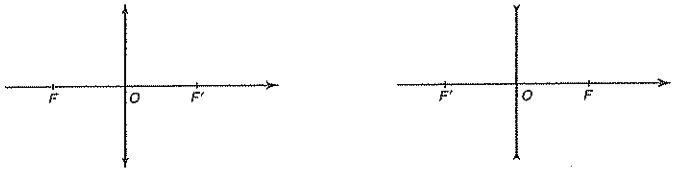
Fig. 8 *Foyer objet (à gauche) et plan focal objet (à droite) pour une lentille divergente*



2.3. Distance focale

Les foyers principaux objet F et image F' sont tous deux *réels* pour une lentille *convergente*, et tous deux *virtuels* pour une lentille *divergente*. Ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre optique O de la lentille (figure 9).

Fig. 9 *Foyers réels pour une lentille convergente (gauche) et virtuels pour une lentille divergente (droite)*



• On définit la *distance focale objet* par $f = \overline{OF}$ et la *distance focale image* $f' = \overline{OF'}$. Ces grandeurs sont bien entendu algébriques, et on a $\boxed{f = -f'}$ par symétrie.

• On définit également la *vergence* V d'une lentille mince par $\boxed{V = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}}$.

L'unité de vergence est la *dioptrie* (δ) : $1\delta = 1\text{m}^{-1}$.

La vergence d'une lentille mince convergente est positive, et négative pour une lentille mince divergente.

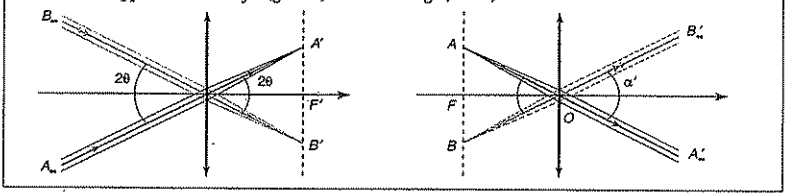
2.4. Diamètre angulaire apparent d'un objet ou d'une image à l'infini

Soit une lentille convergente. Considérons un objet $A_\infty B_\infty$ à l'infini, représenté sur la figure 10 à gauche. Son image $A'B'$ par la lentille est dans le plan focal image par définition de ce dernier. L'objet $A_\infty B_\infty$ est vu depuis le centre optique O de la lentille sous un diamètre apparent $\alpha = 2\theta$. Puisque l'on travaille dans les conditions de Gauss, l'angle θ est faible et peut être assimilé à sa tangente. On a alors $\theta \approx \tan\theta = \dfrac{\frac{A'B'}{2}}{OF'}$.

Le diamètre angulaire apparent de l'objet $A_\infty B_\infty$ est donc lié à la taille de son image $A'B'$ par la relation $\boxed{\alpha = \dfrac{A'B'}{|f'|}}$

De la même façon, pour un objet AB situé dans le plan focal objet (figure 10 à droite), l'image $A'_\infty B'_\infty$, rejetée à l'infini, est vue depuis le point O sous le diamètre angulaire apparent $\boxed{\alpha' = \dfrac{AB}{|f|}}$

Fig. 10 *Diamètres apparents d'un objet (gauche) et d'une image (droite)*



3 Construction des images - Relations de conjugaison

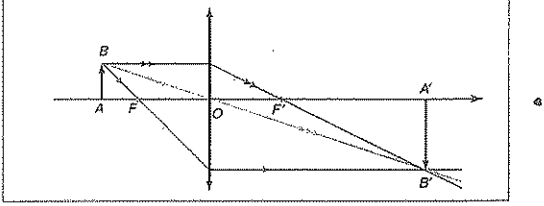
3.1. Les rayons fondamentaux

Il est souvent demandé de trouver la position et la taille de l'image $A'B'$ d'un objet AB transverse par une lentille donnée. Puisque la lentille est utilisée dans les conditions de Gauss qui assurent notamment un aplanétisme approché, il suffit de trouver l'image B' de B par la lentille, puis, par projection sur l'axe optique, de déterminer A'.
Pour trouver l'image B' de B, comme pour les miroirs sphériques, il suffit de tracer deux des trois rayons fondamentaux, dont l'intersection donne B' (puisqu'il y a stigmatisme approché).

Les trois rayons fondamentaux
- Le rayon incident passant par B et le foyer principal objet F émerge de la lentille parallèlement à l'axe optique.
- Le rayon incident passant par B et parallèle à l'axe optique émerge de la lentille en passant par le foyer principal F'.
- Le rayon incident passant par B et le centre optique O de la lentille n'est pas dévié.

Voici un exemple de construction (figure 11) :

Fig. 11 *Les trois rayons fondamentaux*



3.2. Relations de conjugaison et de grandissement

Si d'un point objet A, la lentille donne un point image A', $\boxed{A \xrightarrow{\text{Lentille sphérique}} A'}$ alors A et A' sont dits conjugués par la lentille.

Remarque
On dit également qu'il existe une relation de conjugaison entre la position de l'objet A et de son image A' par la lentille.

Relations de conjugaison et de grandissement pour une lentille sphérique mince

• Relation de conjugaison de Descartes avec origine au centre

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}}$$

On pose $p = \overline{OA}$, $p' = \overline{OA'}$ et $f' = \overline{OF'}$, la relation s'écrit donc $\boxed{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}}$

La relation de grandissement donne $\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{p'}{p}}$

Remarque
Ces relations sont démontrées dans la rubrique « Savoir appliquer le cours ».

• Relation de conjugaison de Newton avec origines aux foyers

$$\boxed{\overline{FA} \times \overline{F'A'} = \overline{OF} \times \overline{OF'}}$$

On pose $\sigma = \overline{FA}$, $\sigma' = \overline{F'A'}$, la relation s'écrit alors $\boxed{\sigma\sigma' = ff'}$

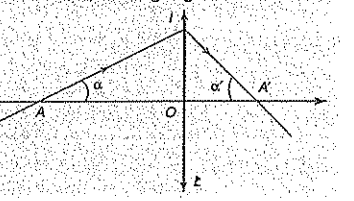
La relation de grandissement donne $\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\sigma'}{f'} = -\frac{f}{\sigma}}$

• Formule de Lagrange-Helmholtz

On définit le grossissement ou grandissement angulaire G par le rapport des angles d'ouverture des points objet et image : $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ (voir ci-contre).

La relation de Lagrange-Helmholtz donne $\boxed{G\gamma = 1}$

Relation de Lagrange Helmholtz



4 Associations de lentilles sphériques minces

4.1. Lentilles accolées

• Deux lentilles sphériques minces L_1 et L_2 sont dites accolées lorsque la distance entre leurs centres optiques respectifs O_1 et O_2 est négligeable devant leurs distances focales respectives f'_1 et f'_2.
Les points O_1 et O_2 sont alors considérés comme confondus, et on appelle O ce centre optique commun.
• On considère un point objet A. La lentille L_1 en donne une image intermédiaire A_1 qui devient un objet pour la lentille L_2, qui en donne alors une image finale A' :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A' \quad \text{ou} \quad A \xrightarrow{L_1+L_2} A'$$

Les relations de conjugaison pour L_1 et L_2 donnent :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

Attention
Cette propriété n'est valable que parce que les centres O_1 et O_2 sont confondus.

En les ajoutant, on en déduit la relation de conjugaison de l'association de ces deux lentilles accolées :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

La vergence V de l'ensemble est donc la somme des vergences : $\boxed{V = V_1 + V_2}$

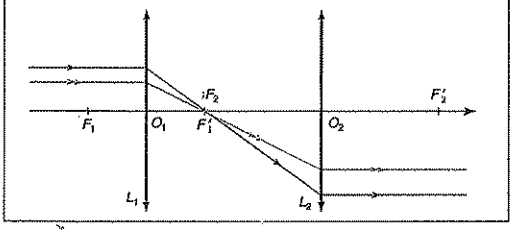
4.2. Lentilles non accolées

• Dans le cas général où les différentes lentilles ne sont pas accolées, on n'a pas de relation simple sur la vergence de l'ensemble. L'association donne souvent un système focal, avec des foyers objet et image équivalents, comme pour un microscope ou un appareil photographique.
• Il arrive cependant que ces foyers objet et image équivalents soient rejetés à l'infini. On a alors un système afocal, comme dans le cas d'une lunette astronomique. Il faut pour cela que le foyer image de la première lentille (conjugué d'un point à l'infini sur l'axe par L_1) soit confondu avec le foyer objet de la seconde lentille (dont l'image est alors renvoyée à l'infini sur l'axe).

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$

Le système est afocal et renvoie à l'infini sur l'axe l'image d'un objet à l'infini sur l'axe lorsque $\boxed{F'_1 = F_2}$ (figure 12).

Fig. 12 *Système afocal* $F'_1 = F_2$



Avant la colle

Tester ses connaissances

➢ *Corrigés p. 125*

1 Pour une lentille sphérique, le foyer objet et le foyer image :

- ☐ **a.** sont confondus.
- ☒ **b.** sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre optique de la lentille.
- ☐ **c.** sont conjugués par la lentille.

2 Pour une lentille sphérique :

- ☐ **a.** un objet est virtuel s'il est situé après la lentille, et il en va de même pour une image.
- ☐ **b.** un objet est virtuel s'il est situé avant la lentille, et il en va de même pour une image.
- ☒ **c.** un objet est virtuel s'il est après la lentille, et une image est virtuelle si elle est avant la lentille.
- ☐ **d.** un objet est virtuel s'il est avant la lentille, et une image est virtuelle si elle est après la lentille.

3 Une lentille sphérique mince convergente a :

- ☐ **a.** un foyer objet réel et un foyer image virtuel.
- ☐ **b.** un foyer objet virtuel et un foyer image réel.
- ☒ **c.** ses deux foyers réels.
- ☐ **d.** ses deux foyers virtuels.

4 Une lentille sphérique mince divergente a :

- ☐ **a.** un foyer objet réel et un foyer image virtuel.
- ☐ **b.** un foyer objet virtuel et un foyer image réel.
- ☐ **c.** ses deux foyers réels.
- ☒ **d.** ses deux foyers virtuels.

5 Si l'on renverse le sens de propagation de la lumière :

- ☒ **a.** une lentille convergente devient divergente.
- ☐ **b.** rien n'est changé.
- ☒ **c.** on échange la position des foyers objet et image.

Savoir appliquer le cours

➢ *Corrigés p. 125*

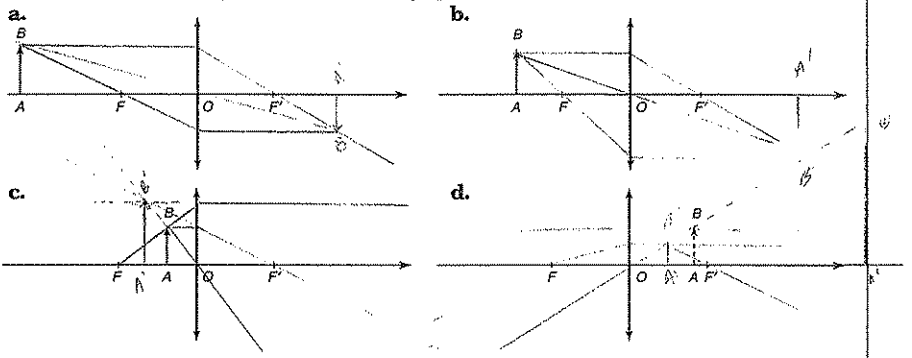
1 Démontrer la relation de conjugaison de Descartes avec origine au centre, ainsi que la formule du grandissement.

2 Démontrer la relation de conjugaison de Newton avec origines aux foyers, ainsi que la formule du grandissement.

3 Démontrer la relation de Lagrange-Helmholtz.

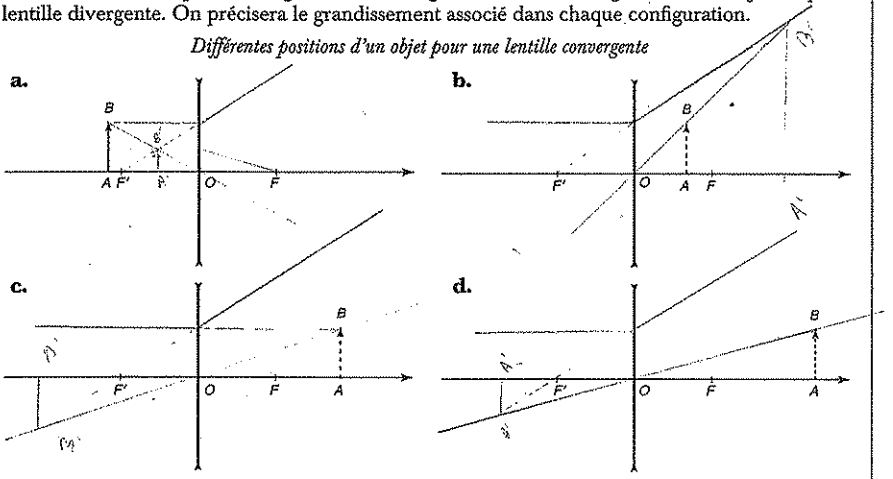
4 Construire dans les quatre configurations de la figure ci-après l'image $A'B'$ de l'objet AB par la lentille convergente. On précisera le grandissement associé dans chaque configuration.

Différentes positions d'un objet pour une lentille convergente



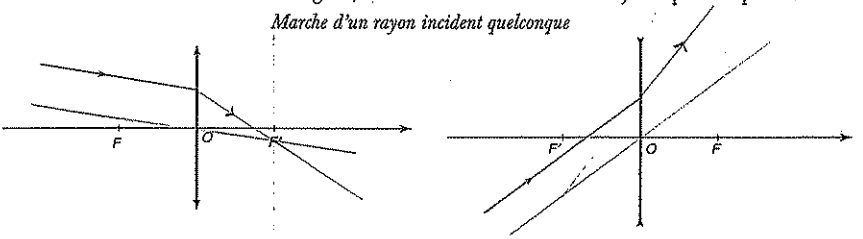
5 Construire dans les quatre configurations de la figure ci-dessous l'image $A'B'$ de l'objet AB par la lentille divergente. On précisera le grandissement associé dans chaque configuration.

Différentes positions d'un objet pour une lentille convergente



6 Sur les deux schémas de cette figure, construire la marche du rayon quelconque incident.

Marche d'un rayon incident quelconque

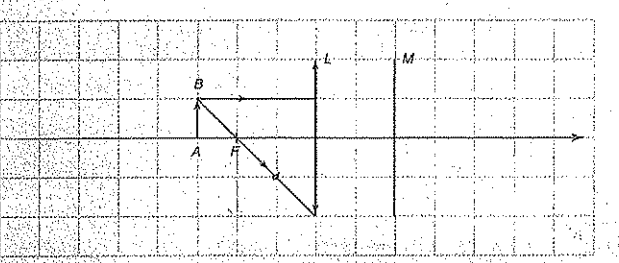


7 Un astre est vu sous un diamètre angulaire apparent d'une minute d'angle. Déterminer la taille de son image, donnée par une lentille convergente de vergence $V = 1\delta$.

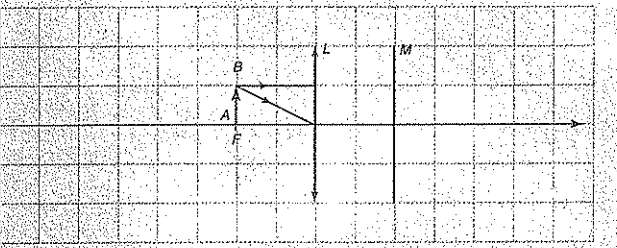
1 – Autocollimation d'une lentille convergente (d'après CCP)

AB est un objet, *L* une lentille mince convergente et *M* un miroir plan dont la normale est parallèle à l'axe optique de *L*. La distance focale de *L* est égale à deux unités de longueur du quadrillage. Soit B_1 l'image donnée par la lentille *L* du point *B*, puis B_2 l'image donnée par le miroir du point B_1 et enfin B' l'image finale que donne *L* de B_2.

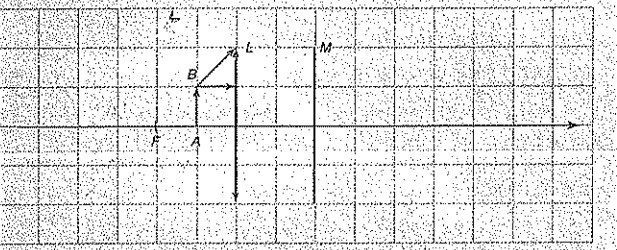
a.



b.



c.



Partie A – Cas de l'autocollimation

1 Pour chaque cas de la figure ci-dessus, tracer le trajet des deux rayons partant du point *B*, pour construire ses images successives.

2 Retrouver dans le cas de la figure (a), par le calcul, les positions de ces images ; on prendra le centre optique de la lentille comme origine : le point *B* est donc en (−3, +1).

3 Donner un argument simple permettant de déterminer le grandissement transversal du système **sans faire de calculs** dans les trois cas de figure. On donnera la valeur algébrique de ce grandissement.

4 Dans la configuration de la figure (**b**), l'image et l'objet sont dans le même plan. Que se passerait-il si l'on déplaçait le miroir, en conservant son plan perpendiculaire à l'axe optique de la lentille ?

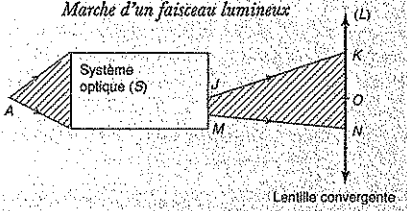
5 Toujours dans la configuration de la figure (**b**), que se passerait-il si l'on inclinait le miroir (c'est-à-dire si l'on écartait sa normale de l'axe optique de la lentille) ?

6 *Conclusion :* pourquoi dit-on que l'ensemble des deux éléments (objet AB et lentille L dans la configuration de la figure **b**) constitue un collimateur ?

7 Comment procéder pratiquement pour déterminer la distance focale d'une lentille mince convergente avec cette méthode ?

Partie B – Marche d'un faisceau lumineux dans un système optique

Marche d'un faisceau lumineux



1 Indiquez, sur la figure la position de l'image A' que donne le système optique (S) du point A.

2 Le faisceau (JK, MN) est :

☐ convergent. ☐ divergent.

3 Juste après avoir traversé la lentille L, le nouveau faisceau :

☐ sera nécessairement convergent.

☐ sera nécessairement divergent.

☐ peut être convergent ou divergent.

4 Soit O le centre optique de la lentille L, elle donne de l'image intermédiaire A' une image définitive A'' qui se trouve toujours sur la droite $(x'x)$ passant par O et A'. Cette image A'' sera nécessairement :

☐ sur le segment OA'. ☐ en dehors du segment OA'.

Si vous avez coché cette deuxième case, précisez sur quelle(s) demi-droite(s) ou segment(s) on peut trouver l'image A'' (x' étant à gauche et x à droite sur la figure) et préciser sa nature (réelle ou virtuelle) :

☐ $(x'O]$ image ..... ☐ $(x'A']$ image .....

☐ $[Ox)$ image ..... ☐ $[A'x)$ image .....

5 Selon votre réponse à la question précédente, placez, sur la figure ci-dessus, un point A'' dans une région possible et prolongez le faisceau lumineux (JK, MN) après la traversée de la lentille.

résolution méthodique

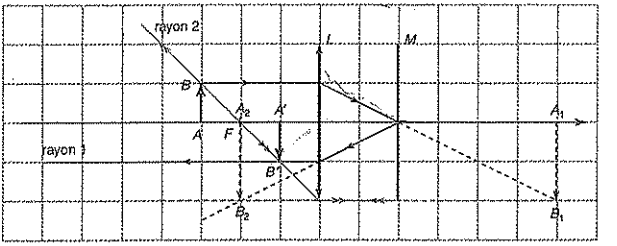
Partie A

1 On cherche l'image B' du point B. Il suffit pour cela de tracer la marche de deux rayons issus de B à travers le système.

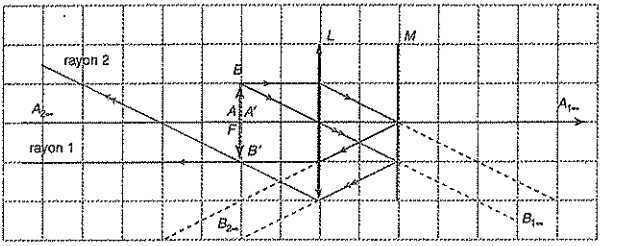
> On rappelle que les trois rayons fondamentaux pour une lentille sphérique sont :
> • le rayon issu de B et parallèle à l'axe optique de la lentille, qui en émerge en passant par le foyer principal image F',
> • le rayon issu de B et passant par le foyer principal objet F de la lentille, qui en émerge parallèlement à l'axe optique,
> • le rayon issu de B et passant par le centre optique O de la lentille, qui n'est pas dévié.

Par projection de B' sur l'axe optique, on trouve alors A', puisque la lentille sphérique présente un aplanétisme approché dans les conditions de Gauss.
La réflexion sur le miroir se fait symétriquement par rapport à la normale au miroir. Enfin, après réflexion sur le miroir, la lumière repasse par la lentille. D'après le principe du retour inverse de la lumière, au retour, le foyer objet de la lentille devient foyer image et réciproquement. Les constructions sont représentées sur la figure ci-dessous :

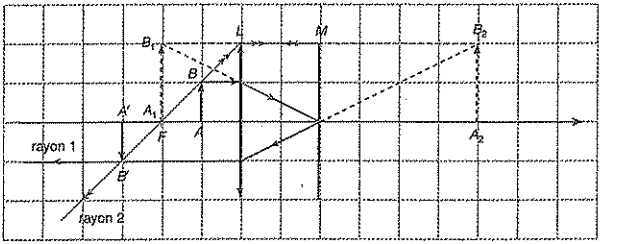
a.



b.



c.



2 Dans le cas de la première figure, le point objet B a pour coordonnées $B(-3, +1)$.

On va appliquer successivement les relations de conjugaison et de grandissement pour chacun des trois systèmes rencontrés successivement par la lumière, L_{inv} étant la lentille L, pour laquelle on a inversé le sens de la lumière incidente :

$$A \xrightarrow{L} A_1 \xrightarrow{M} A_2 \xrightarrow{L_{inv}} A'$$

• Pour la première lentille $A \xrightarrow{L} A_1$, la relation de conjugaison de Descartes donne : $\dfrac{1}{\overline{OA_1}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$.

L'application numérique donne $\overline{OA_1} = 6$ cm.

La relation de grandissement donne alors $\gamma = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} = -2$.

Le point A_1 a donc pour coordonnées $\boxed{A_1(+6, 0)}$ et le point B_1 a pour coordonnées $\boxed{B_1(+6, -2).}$

• Le miroir donne de A_1B_1 une image A_2B_2 symétrique par rapport au plan du miroir, d'équation $x_M = 2$.

Si H est l'intersection du miroir avec l'axe optique de la lentille, alors H a pour coordonnées $H(+2, 0)$.

On rappelle la relation de conjugaison du miroir plan $\overline{HA} + \overline{HA'} = 0$, où A' est l'image de A par le miroir et H la projection orthogonale de A sur le plan du miroir.

Il vient $\overline{HA_2} = -\overline{HA_1} = -(x_{A_1} - x_H) = -(6-2) = -4$.

Par conséquent $\overline{HA_2} = x_{A_2} - x_H = -4$ et $x_{A_2} = -4 + x_H = -4 + 2 = -2$.

Bien évidemment, puisque A_1 est sur l'axe optique, A_2 l'est également, et le point $A_1(+6, 0)$ a donc pour image $\boxed{A_2(-2, 0).}$

Puisque B_2 est le symétrique de B_1 par rapport au miroir plan, il est évident que $y_{B_2} = y_{B_1}$. Comme le miroir plan est rigoureusement aplanétique, $x_{B_2} = x_{A_2} = -2$, et le point B_1 a pour image le point $\boxed{B_2(-2, -2).}$

• On s'intéresse enfin à l'image finale $A'B'$ que la lentille L_{inv}, utilisée de droite à gauche, donne de A_2B_2.

On utilise la même lentille, mais la lumière incidente provient maintenant de la droite, contrairement aux schémas usuels. Malgré tout, cela ne change pas la nature de la lentille, qui reste convergente. En revanche, puisque les foyers objet et image d'une lentille convergente sont réels, le foyer objet F_{inv} de la lentille L_{inv} est situé avant la lentille, dans le sens de propagation de la lumière, c'est-à-dire à sa droite. Il s'agit du point $F_{inv} = F'$.

De la même façon, le foyer principal image de la lentille L_{inv} est alors le point $F'_{inv} = F(-2,0)$ et la distance focale $f'_{inv} = \overline{OF'_{inv}} = \overline{OF} = f = -f'$. Il faut donc faire attention à l'application de la relation de conjugaison de Descartes.

La relation de conjugaison de Descartes donne alors $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_2}} = \frac{1}{\overline{OF'_{inv}}} = -\frac{1}{f'}$.

L'application numérique donne $\overline{OA'} = -1$ cm.

La relation de grandissement donne $\gamma_{inv} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA_2}} = \frac{1}{2}$. Le point A' a donc pour coordonnées $\boxed{A'(-1, 0)}$ et le point B' a pour coordonnées $\boxed{B'(-1, -1).}$

3 Dans les trois cas décrits, l'objet AB et l'image $A'B'$ voient leur extrémité définie par le rayon issu de B et parallèle à l'axe optique, qui émerge de la lentille en passant par F'. Le miroir étant placé au foyer image de la lentille, ce rayon particulier est réfléchi symétriquement par rapport à l'axe optique, toujours en passant par ce point F', qui devient le foyer objet de la lentille L_{inv} au retour de la lumière. Ce rayon particulier va donc réémerger de la lentille parallèlement à l'axe.

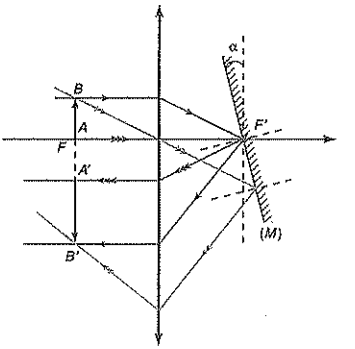
Le grandissement global, dans tous les cas de figure, est donc nécessairement égal à $\boxed{\gamma = -1.}$

4 Dans cette configuration, puisque l'objet est dans le plan focal objet de la lentille L, son image intermédiaire A_1B_1 est rejetée à l'infini, l'image suivante A_2B_2 par le miroir plan est donc également à l'infini, et la lentille inversée L_{inv} en forme donc une image définitive $A'B'$ dans son plan focal image passant par $F'_{inv} = F$. L'image finale est donc dans le plan de l'objet initial. On voit bien que ce raisonnement ne dépend pas de la position du miroir. On peut donc le placer où l'on veut, du moment qu'il reste bien perpendiculaire à l'axe optique de la lentille.

On peut toutefois faire remarquer qu'il vaut mieux placer le miroir près de la lentille, pour s'assurer que l'ensemble du faisceau émergent de la lentille est bien intercepté par le miroir, ce qui permet d'avoir une bonne luminosité de l'image finale.

5 En revanche, si l'on incline le miroir par rapport à l'axe optique, le faisceau incident parallèle à l'axe issu de la lentille donnerait après réflexion sur le miroir un faisceau réfléchi, toujours parallèle, mais d'inclinaison différente par rapport à l'axe optique (voir ci-dessous), et l'image finale de A ne serait plus sur l'axe optique de la lentille, mais simplement dans le plan focal image de la lentille L_{inv}. Cela a pour conséquence de modifier le grandissement.

Miroir d'autocollimation incliné



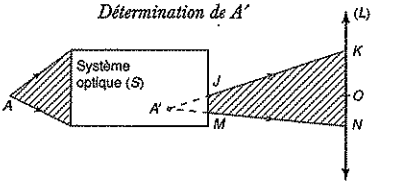
6 Un collimateur est un dispositif optique qui permet de simuler un objet à l'infini. Autrement dit, il s'agit d'un dispositif donnant un faisceau lumineux parallèle. Si l'on place l'objet AB dans le plan focal objet de la lentille L, alors le faisceau émergent est parallèle et on peut dire que l'ensemble objet + lentille constitue un collimateur.

7 On voit que si l'objet AB est dans le plan focal objet de la lentille alors l'image finale $A'B'$ s'y forme également. Il s'agit de la méthode d'autocollimation pour déterminer la distance focale. Il suffit de faire en sorte, en plaçant un miroir plan derrière la lentille (en pratique, on l'accole), que l'image $A'B'$ se forme dans le plan de l'objet AB. On sait alors que l'objet et l'image sont dans le plan focal, et la distance entre la lentille et l'objet donne la distance focale.

Partie B

1 On trouve le point A', image de A par le système optique S, en prolongeant les rayons (JK) et (MN). Leur intersection donne A' :

Détermination de A'



2 Le faisceau (JK, MN) est :

☐ convergent ☒ divergent

3 Juste après avoir traversé la lentille L, le nouveau faisceau :

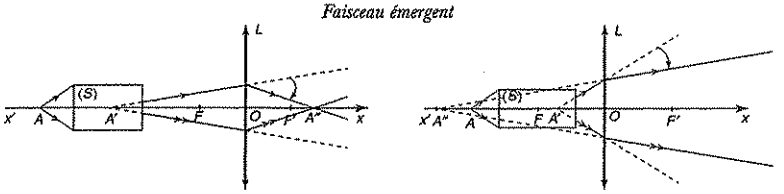
☐ sera nécessairement convergent.

☐ sera nécessairement divergent.

☒ peut être convergent ou divergent.

En effet, après traversée de la lentille convergente, le faisceau émergent est nécessairement plus convergent que le faisceau incident, mais selon la position de A' par rapport au foyer de L, le faisceau émergent pourra être convergent (et on aura alors une image réelle, comme sur la figure ci-dessous à gauche), ou bien divergent (et on aura alors une image virtuelle, comme sur la figure ci-dessous à droite).

Faisceau émergent



4 A' est un objet réel pour la lentille L. Si A' est avant le foyer F de la lentille L, alors l'image A'' est réelle, et donc située après O. En revanche, si A' est entre le foyer F et le centre O de la lentille, alors l'image A'' est virtuelle, donc avant O, mais surtout avant l'objet A'. Par conséquent, l'image A'' sera nécessairement :

☐ sur le segment OA'.

☒ en dehors du segment OA'.

On pourra donc trouver l'image A'' sur les deux demi-droites suivantes :

☐ $(x'O]$ image .....

☒ $(x'A']$ image virtuelle

☒ $[Ox)$ image réelle

☐ $[A'x)$ image .....

5 On a les deux cas de figure possibles, selon que l'objet A' se situe avant F (figure ci-avant à gauche), ou bien entre F et O (figure ci-avant à droite). Dans le premier cas, le faisceau émergent de la lentille est convergent, l'image finale A'' est réelle, et est située sur la demi-droite $[Ox)$. Dans le second cas, le faisceau émergent est divergent, mais toutefois plus convergent que le faisceau incident sur la lentille. L'image A'' est virtuelle et située sur la demi-droite $(x'A']$.

en conclusion

Cet exercice met en lumière la méthode d'autocollimation de mesure de la distance focale d'une lentille convergente. On voit que la position du miroir, tant qu'il reste perpendiculaire à l'axe optique, n'a pas de conséquences, sauf éventuellement en terme de luminosité (si le miroir est trop loin, il se peut qu'une partie du faisceau émergent de la lentille ne parvienne pas sur le miroir, et qu'on perde alors de l'énergie lumineuse). Méfiance sur la question de la nature du faisceau à la sortie d'une lentille convergente. Il est nécessairement plus convergent que le faisceau incident, mais cela ne signifie pas qu'il soit globalement convergent.

2 – Appareil photo jetable (d'après Centrale option TSI)

Les appareils photos jetables sont conçus pour ne servir qu'une seule fois. Ils sont donc de conception très simple afin que le prix de revient soit le plus bas possible. Nous en étudierons ici l'optique.

L'objectif n'est composé que d'une seule lentille mince convergente (L), de diamètre utile D_L, et la pellicule se situe à une distance d fixe de la lentille. Aucune mise au point n'est possible, c'est-à-dire que la distance d est fixée lors de la fabrication et n'est pas modifiable par l'utilisateur. Nous travaillerons dans les conditions de Gauss.

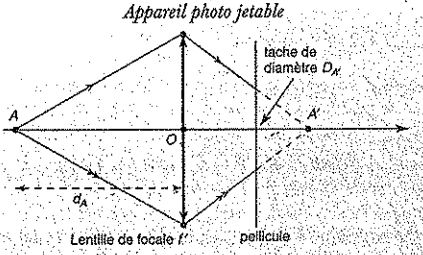
1 **a.** Rappeler en quoi consistent les conditions de Gauss ainsi que leurs avantages et leurs inconvénients.

b. Comment fait-on en pratique pour travailler dans les conditions de Gauss ?

2 L'objet à photographier étant situé à l'infini, déterminer la valeur de la distance d qu'il faut prévoir lors de la fabrication pour que son image soit nette sur la pellicule. On notera f' la distance focale image de la lentille.

3 **a.** Quelle est alors la dimension X, sur la pellicule, de l'image de la Lune qui a un diamètre apparent α (on pourra s'aider d'une construction pour répondre) ?
b. Faire l'application numérique avec $f' = 3{,}0$ cm et $\alpha = 0{,}5°$.

4 Un objet ponctuel A, sur l'axe optique, qui n'est pas situé à l'infini, a son image en dehors du plan de la pellicule et donne sur la pellicule une tache de diamètre $D_{A'}$, comme représenté sur la figure ci-dessous.



Soit d_A la distance entre le point A et la lentille (d_A est une distance et donc positive).
a. Exprimer $\overline{OA'}$ en fonction de d_A et f'.
b. Donner l'expression de $D_{A'}$ en fonction de D_L (diamètre utile de la lentille), f' et d_A.

5 La pellicule est formée de grains que l'on supposera circulaires et de même diamètre ε. Une image, après développement de la pellicule, paraît nette si un point objet n'a éclairé qu'un seul grain et a donc donné, sur la pellicule, une tache de diamètre inférieur ou égal à ε. Sachant que $f' = 3{,}0$ cm, que $D_L = 2{,}0$ mm (partie utile de la lentille) et que $\varepsilon = 20$ µm, calculer numériquement la position du point $A(d_A)$ le plus proche qui est encore net après développement.

6 Afin de pouvoir diminuer d_A, on augmente, lors de la fabrication, la distance d afin qu'un point à l'infini soit à la limite de netteté (il donne donc une tache de diamètre ε sur la pellicule).
a. Faire un schéma du dispositif montrant la tache donnée par l'objet à l'infini.
b. Déterminer d et faire l'application numérique.
c. Déterminer la nouvelle distance d_A correspondant au point le plus près donnant lui aussi une tache de diamètre ε sur la pellicule et faire l'application numérique. Commenter.

résolution méthodique

1 **a.** Le système est utilisé dans les conditions de Gauss si les rayons lumineux incidents sont **paraxiaux**, c'est-à-dire proches de l'axe optique, et faiblement inclinés sur celui-ci. Dans ces conditions, on obtient un stigmatisme et un aplanétisme approché, ce qui permet la formation d'images nettes. L'inconvénient, c'est qu'il faut nécessairement diaphragmer la lumière incidente pour se limiter à ces rayons ce qui limite la luminosité des images.

b. En pratique, on utilise un diaphragme à l'entrée du système optique. Attention toutefois à ne pas trop diaphragmer au risque de voir la formation des images perturbée par la diffraction.

Il faut donc arriver à un subtil compromis entre luminosité, diffraction et stigmatisme satisfaisant.

2 Si l'objet est situé à l'infini, son image par la lentille se trouve dans le plan focal image de cette dernière, c'est-à-dire à une distance f' du centre optique.

C'est dans ce plan qu'il faut placer la pellicule pour que l'image qui s'y forme soit nette.

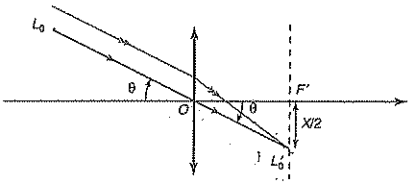
Par conséquent, il faut que $\boxed{d = f'.}$

Dans la pratique, il existe une marge de manœuvre puisque l'on n'a pas besoin que l'image d'un objet ponctuel soit rigoureusement ponctuelle pour que l'image globale soit nette. C'est ce qui permet d'ailleurs de prendre en photo des objets qui ne sont pas nécessairement à une distance infinie, comme le montre la suite de l'exercice.

3 a. Considérons deux points L_0 et L_1 de la Lune, diamètralement opposés. Le point L_0 est vu sous un angle θ depuis le centre optique de la lentille. Si l'axe optique de la lentille est dirigé vers le centre de la Lune, alors le diamètre apparent de la Lune est $\alpha = 2\theta$. Ce point L_0 est un point à l'infini hors de l'axe optique. Son image est donc un foyer secondaire image, situé dans le plan focal image, puisque la lentille présente un aplanétisme approché (elle est utilisée dans les conditions de Gauss).

Notons L_0' cette image. Sur le schéma de la figure ci-dessous, on voit que dans le triangle $OF'L_0'$, on a $\tan\theta = \dfrac{\dfrac{X}{2}}{f'}$, où $X = L_0'L_1'$ est la taille de l'image de la Lune sur la pellicule.

Image de la Lune



On peut assimiler l'angle à sa tangente puisque l'on travaille avec des angles très faibles.

Il vient $\alpha = 2\theta = 2\dfrac{X}{2f'}$, d'où $\boxed{X = \alpha f'.}$

b. L'application numérique donne $X = 2{,}6 \cdot 10^{-4}$ **m**

Attention lorsque l'on assimile un angle à sa tangente, cela veut dire que cet angle doit être exprimé en radians, et non en degrés. Ici l'énoncé fournit α en degrés, il faut donc commencer par le convertir en radians :

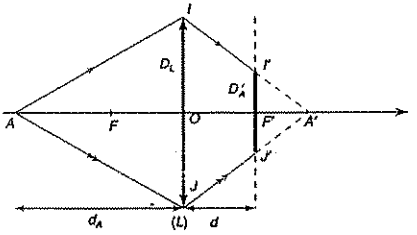
$$\alpha = 0{,}5° = \frac{2\pi}{360} \times 0{,}5 = 8{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

4

Pour évaluer la taille de la tache image sur la pellicule, on va s'appuyer sur les deux rayons marginaux provenant de A et s'appuyant sur les bords de la lentille (de diamètre utile D_L). Le point A étant situé avant F, l'image est située après F'.

Ce schéma représente la situation, où on a tracé les rayons extrêmes provenant du point A.

Tache image sur la pellicule



a. A' est l'image de A par la lentille : $A \xrightarrow{L} A'$. D'après la relation de conjugaison de Descartes, il vient :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{avec} \quad \overline{OA} = -d_A.$$

Attention, l'énoncé précise que la distance d_A est positive, et comme l'objet est bien réel et placé avant la lentille, on a donc $\overline{OA} = -d_A$. Il ne faut pas oublier ce signe $-$.

Par conséquent, $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{d_A} = \frac{d_A - f'}{D_A f'}$. Il vient $\boxed{\overline{OA'} = \frac{d_A f'}{d_A - f'}}$

b. Dans le triangle IJA', le théorème de Thalès donne :

$$\frac{\overline{I'J'}}{\overline{IJ}} = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{A'O}}$$

$$\frac{D_{A'}}{D_L} = \frac{\overline{A'O} + \overline{OF'}}{\overline{A'O}}$$

$$\frac{D_{A'}}{D_L} = 1 + \frac{\overline{OF'}}{\overline{A'O}}$$

$$\frac{D_{A'}}{D_L} = 1 + \frac{f'(f' - d_A)}{d_A f'}.$$

Il vient alors $\frac{D_{A'}}{D_L} = \frac{f'}{d_A}$ et $\boxed{D'_A = D_L \times \frac{f'}{d_A}}$

5 On souhaite que la tache image donnée par A sur la pellicule, de taille $D_{A'}$, puisse être assimilée à un point (pour que l'image globale soit nette). Il faut donc que $D_{A'} \leqslant \varepsilon$, ce qui donne $D_L \times \frac{f'}{d_A} \leqslant \varepsilon$, et il faut donc que l'objet soit situé à une distance d_A suffisamment grande : $\boxed{d_A \geqslant D_L \times \frac{f'}{\varepsilon}}$

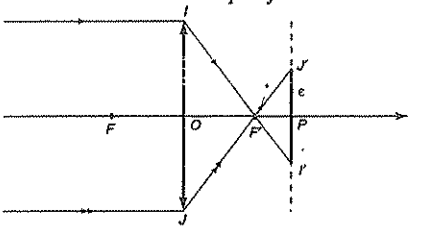
A.N. : $d_A \geqslant 3$ m.

6

Pour augmenter la gamme de distance pour lesquelles on peut obtenir une image nette, on recule la pellicule par rapport au foyer image de la lentille, de telle sorte que la limite de netteté soit obtenue pour un objet à l'infini, contrairement au cas précédent, où un objet à l'infini donnait une image parfaitement nette, puisque se formant dans le plan de la pellicule.

a. La figure ci-dessous représente schématiquement le nouveau dispositif ainsi que la tache image donnée par un objet situé à l'infini. Là encore, on s'appuie sur les rayons marginaux, passant par les extrémités de la lentille.

Nouveau dispositif



b. Les triangles OIF' et $F'PI$ étant semblables, l'application du théorème de Thalès donne :

$$\frac{\overline{PI'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{F'P}}{\overline{OF'}}$$

$$\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{D_L}{2}} = \frac{d-f'}{f'}$$

Il vient $\boxed{d = f'\left(1+\frac{\varepsilon}{D_L}\right)}$

A.N. : d = **3,03 cm.**

c. On considère désormais un point A à distance finie d_A de la lentille. La relation de conjugaison de Descartes donne la position de l'image A' : on a toujours $\overline{OA'} = \frac{d_A f'}{d_A - f'}$. Le théorème de Thalès donne désormais (puisque la pellicule n'est plus placée en F' mais en P) :

$$\frac{\overline{PI'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{A'P}}{\overline{A'O}}$$

$$\frac{\frac{D_{A'}}{2}}{\frac{D_L}{2}} = \frac{\overline{A'O}+\overline{OP}}{\overline{A'O}}$$

$$\frac{D_{A'}}{D_L} = 1+\frac{\overline{OP}}{\overline{A'O}}$$

$$\frac{D_{A'}}{D_L} = 1+f'\left(1+\frac{\varepsilon}{D_L}\right)\times\frac{(f'-d_A)}{d_A f'}$$

On cherche la condition donnant la distance d_A la plus petite possible pour que la tache image $D_{A'}$ sur la pellicule soit de taille inférieure ou égale à ε, la résolution de la pellicule. On remplace donc $D_{A'}$ par ε dans l'expression précédente :

$$\frac{\varepsilon}{D_L} = 1+\left(1+\frac{\varepsilon}{D_L}\right)\times\left(\frac{f'}{d_A}-1\right)$$

$$\frac{\varepsilon}{D_L}-1 = \left(1+\frac{\varepsilon}{D_L}\right)\times\left(\frac{f'}{d_A}-1\right)$$

$$\frac{f'}{d_A}-1 = \frac{\frac{\varepsilon}{D_L}-1}{1+\frac{\varepsilon}{D_L}}$$

$$\frac{f'}{d_A} = \frac{2\frac{\varepsilon}{D_L}}{1+\frac{\varepsilon}{D_L}}$$

$$\frac{f'}{d_A} = \frac{2}{1+\frac{D_L}{\varepsilon}}$$

Par conséquent $\boxed{d_A = \frac{f'}{2}\left(1+\frac{D_L}{\varepsilon}\right)}$

A.N. : d_A = **1,5 m**.

On peut désormais obtenir une image nette pour des objets compris entre 1,5 m et l'infini, ce qui améliore la qualité de l'appareil photo jetable, et sa gamme d'utilisation.

en conclusion

Cet exercice s'intéresse à la latitude de mise au point d'un appareil photographique jetable, c'est-à-dire à la plage des positions accessibles pour un objet afin d'obtenir une image nette sur la pellicule. Dans un premier temps, on effectue un réglage intuitif, consistant à mettre la pellicule au foyer image de la lentille, lieu de formation des images correspondant aux objets situés à l'infini, ce qui est idéal si l'on photographie des paysages, en général éloignés. La contrepartie étant que seuls des objets situés à plus de 3 mètres donnent une image nette sur la pellicule photographique. Ensuite, on réalise un réglage plus astucieux, en plaçant la pellicule à la limite de netteté pour un objet à l'infini, ce qui permet de ramener la distance minimale de l'objet à photographier à 1,5 mètre, ce qui est plus avantageux.

1 10 min

➤ Corrigé p. 129

Système afocal

On s'intéresse à un doublet optique, c'est-à-dire un système optique constitué de deux lentilles L_1 (O_1, $f'_1 = 20$ cm) et L_2 (O_2, $f'_2 = -5{,}0$ cm), les foyers F'_1 et F_2 étant confondus.

1. Déterminer la position des foyers objet et image du système global.

2. Calculer le grandissement γ. Ce grandissement dépend-il de la position de l'objet A ?

3. Un objet est vu, à l'infini, sous un angle α. Déterminer le grossissement $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$, α' étant l'angle sous lequel est vue l'image.

2 15 min

➤ Corrigé p. 130

Doublet optique de Huygens

On considère un doublet de lentilles minces définissant un doublet optique, caractérisé par la donnée de trois nombres : f'_1, $e = \overline{O_1O_2}$ et f'_2.
Un doublet de Huygens est de type : $f'_1 = 3a$, $e = 2a$ et $f'_2 = a$.
On prendra pour les applications numériques $a = 2{,}0$ cm et on notera $\Delta = \overline{F'_1F_2}$.

1. Placer sur l'axe optique, en effectuant une construction à l'échelle, les foyers de (L_1) et (L_2) et déterminer par construction géométrique les foyers objet et image du doublet, notés respectivement F et F'.

2. Vérifier ces résultats en déterminant algébriquement $\overline{F_1F}$ et $\overline{F_2F'}$.

3 40 min

➤ Corrigé p. 131

Associations de lentilles (d'après DEUG)

Les lentilles sphériques minces, notées $\mathscr{L}_i$, sont utilisées dans le cadre de l'approximation de Gauss. Chaque lentille $\mathscr{L}_i$ est caractérisée par son centre optique O_i et par sa distance focale image f'_i. Les foyers objet et image sont notés respectivements F_i et F'_i.

1. Étude d'une lentille mince convergente $\mathscr{L}_1$

On souhaite déterminer, expérimentalement, la distance focale image f'_1 de la lentille $\mathscr{L}_1$. Pour cela, on effectue le relevé, sur un banc optique gradué, des positions sur l'axe, du centre optique O_1, du point objet lumineux A et de son image A'. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

$\overline{AO_1}$ (cm)	24,0	26,0	28,0	30,0	32,0	34,0	36,0	38,0
$\overline{O_1A'}$ (cm)	120	86,7	70,2	60,2	53,1	48,6	45,2	42,2

a. Exploiter les résultats du tableau pour vérifier la formule de Descartes.

b. En déduire la valeur numérique de la distance focale image f'_1.

2. Étude d'une lentille mince divergente $\mathscr{L}_2$

a. On choisit un point A sur l'axe optique et un objet réel AB transverse, tels que $\overline{AF'_2} > 0$.
Faire un schéma de la lentille, placer l'objet AB sur ce schéma et proposer une construction géométrique, en la détaillant, de l'image $A'B'$ correspondante.
Quelle est la nature de l'image $A'B'$?

b. Application numérique : on donne $f'_2 = -5{,}0$ cm et $\overline{AO_2} = 7{,}5$ cm.

Calculer $\overline{A'O_2}$.

Calculer la valeur du grandissement linéaire défini par $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

3. Associations des deux lentilles

a. Grâce à la lentille précédente $\mathscr{L}_1$, on projette, sur un écran $\mathscr{E}$ plan et orthogonal à l'axe, l'image nette $A'B'$ d'un objet réel quelconque AB, dont la position n'est pas précisée.
On souhaite alors agrandir l'image $A'B'$. On maintient l'objet AB et la lentille $\mathscr{L}_1$ fixes dans leur position d'origine, mais on interpose, entre $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{E}$, la lentille divergente précédente $\mathscr{L}_2$.
Pour obtenir une image nette deux fois plus grande, il est nécessaire de reculer l'écran $\mathscr{E}$ d'une distance ℓ.

- Proposer un tracé de rayons qui illustre le rôle de la lentille $\mathscr{L}_2$.
- Exprimer la distance ℓ en fonction de f'_2.

Application numérique : on donne $f'_2 = -5{,}0$ cm. Calculer ℓ.

b. Soit α l'angle sous lequel un observateur voit, à l'œil nu, un objet réel AB transverse situé à l'infini. Le point A appartient à l'axe optique, α est appelé diamètre apparent de l'objet AB.
Afin de mieux observer cet objet, on utilise une lunette constituée des deux lentilles $\mathcal{L}_1$ (objectif convergent) et $\mathcal{L}_2$ (oculaire divergent).
La distance e séparant les deux lentilles est réglée pour qu'un œil normal n'ait pas à accommoder lorsqu'il observe, à travers la lunette, l'image d'un objet situé à l'infini. L'image doit donc se situer elle aussi à l'infini.

• Exprimer $\overline{O_1O_2}$ en fonction des valeurs algébriques f'_1 et f'_2.
• Faire un schéma du dispositif et tracer la marche d'un faisceau de rayons issus de B, point à l'infini n'appartenant pas à l'axe.
• Soit α' le diamètre apparent de l'image finale $A'B'$. Exprimer, en fonction des valeurs algébriques f'_1 et f'_2, le grossissement défini par $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$.
• Application numérique : on donne $f'_1 = 20$ cm et $f'_2 = -5{,}0$ cm.
Calculer le grossissement G.
• L'image $A'B'$ est-elle renversée par rapport à l'objet AB ?

4 ★ 30 min

➤ Corrigé p. 133

Focométrie (d'après DEUG)

La lentille sphérique mince, notée L, est utilisée dans le cadre de l'approximation de Gauss. Elle est caractérisée par son centre optique O et par sa distance focale image $f' = \overline{OF'}$.
Grâce à la lentille convergente L, on projette, sur un écran, l'image nette $A'B'$ d'un objet réel lumineux AB. Objet et écran, fixes et distants de D (constante positive) sur un banc optique, sont orthogonaux à l'axe.

1. Mesure de la distance focale image d'une lentille convergente L

a. Proposer une construction géométrique de l'image $A'B'$ de AB.

b. On pose $\overline{AO} = x$ (variable positive). Exprimer, en fonction de x et D, la quantité algébrique $\overline{OA'}$.

c. À l'aide de la formule de conjugaison de Descartes, établir une relation entre x, D et f', relation qui se présente sous la forme d'une équation du second degré en x.

d. Montrer qu'en-dessous d'une valeur D_{min} de D, il n'existe plus de valeur de x physiquement acceptable, correspondant à une image nette sur l'écran.
Déterminer, en fonction de f', la distance minimale D_{min}.

e. Pour $D \geqslant D_{min}$, il existe deux positions O_1 et O_2 de la lentille L pour lesquelles on observe une image nette de l'objet sur l'écran.
On pose $x_1 = \overline{AO_1}$, $x_2 = \overline{AO_2}$ (avec $x_1 \leqslant x_2$) et $d = O_1O_2$.
• Exprimer, en fonction de D et f', chacune des deux solutions x_1 et x_2.
• Calculer le produit des grandissements γ_1 et γ_2 correspondant aux deux positions possibles de la lentille. Que remarque-t-on ?
• Déterminer, en fonction de D et d, la distance focale image f'.
• Comment se nomme cette méthode focométrique ?
• Application numérique : $D = 1{,}00$ m ;
$x_1 = 0{,}275$ m ; $x_2 = 0{,}725$ m.
Calculer la distance focale image f'.

2. Mesure de la distance focale image d'une lentille divergente

La lentille convergente précédente L (focale f' et centre O) est, en réalité, constituée de deux lentilles minces L_I et L_{II} accolées. La lentille L_I est convergente, de distance focale image f'_I et de centre optique O_I. La lentille L_{II} est divergente, de distance focale image f'_{II} et de centre optique O_{II}. On admet que les points O_I et O_{II} sont pratiquement confondus avec le point O.

a. Connaissant f'_{II}, la mesure de f' par la méthode précédente permet d'accéder à la focale f'_{II} de la lentille divergente. Donner la relation entre f', f'_I et f'_{II}.

b. Les valeurs D et f'_{II} sont imposées. Pour obtenir une image nette sur l'écran, montrer que la focale f'_I doit être inférieure à une valeur maximale $f'_{I,max}$ que l'on exprimera en fonction de D et f'_{II}.
Application numérique :
$D = 1{,}00$ m ; $f'_{II} = -0{,}300$ m. Calculer $f'_{I,max}$.

5 15 min

➤ Corrigé p. 134

Triplet optique et point double

On s'intéresse à l'association de trois lentilles minces, de même axe optique :

L_1 $(O_1, f'_1 = +8{,}0\text{ cm})$, L_2 $(O_2, f'_2 = -4{,}0\text{ cm})$ et L_3 $(O_3, f'_3 = -4{,}0\text{ cm})$

1. Sachant que $\overline{O_1O_2} = 5{,}0$ cm, calculer $\overline{O_2O_3}$ pour obtenir un système $\{L_1, L_2, L_3\}$ afocal.

2. Pour le montage afocal, déterminer, s'il existe, la position $\overline{F_1D}$ du point double D du système, tel que l'image finale (D') par l'ensemble du système et l'objet (D) soient confondus.

6 20 min

➤ Corrigé p. 134

Doublet achromatique

L'indice d'un verre dépend de la longueur d'onde de la lumière. Pour caractériser sa dispersion, on utilise trois raies spectrales de référence :
raie D : 589 nm ; raie F : 486 nm (bleu) ;
raie C : 656 nm (rouge).
On définit alors une *constringence* par le rapport $\nu = \dfrac{n_D - 1}{n_F - n_C}$, $\nu > 0$.
De plus, la vergence V d'une lentille mince est proportionnelle à $(n-1)$: $V = (n-1)A$ où A est un facteur géométrique qui dépend de la courbure des dioptres.

1. Une lentille, de distance focale image $f'_D = 150$ mm pour la raie D, est taillée dans un verre de constringence $\nu = 40$. Déterminer l'écart entre les distances focales f'_F et f'_C.
Quelle est la conséquence de cette dispersion ?

2. On accole deux lentilles, de vergences moyennes (*i.e.* pour la raie D) égales à V_1 et V_2, taillées dans deux verres de constringence ν_1 et ν_2.
a. Rappeler l'expression de la vergence de l'association de deux lentilles accolées.
b. À quelle condition les distances focales f'_F et f'_C sont-elles confondues pour le doublet ?
c. Ce doublet est-il rigoureusement achromatique ? (Autrement dit, f' est-elle rigoureusement indépendante de la longueur d'onde ?)
d. *Application* : on veut construire un doublet approximativement achromatique de focale $f' = 500$ mm avec un *flint* pour lequel $\nu_1 = 30$ et un *crown* pour lequel $\nu_2 = 60$.
Calculer les focales des deux lentilles accolées.

7 20 min

➤ Corrigé p. 135

Mise au point

On place un écran à une distance D fixe derrière une lentille convergente L_1. On interpose entre L_1 et l'écran une lentille divergente L_2 dont on peut faire varier la distance d avec l'écran.
On donne $f'_1 = 4{,}0$ cm et $f'_2 = -6{,}0$ cm.

1. Mise au point à l'infini

a. Le système est réglé de façon à ce que les objets à l'infini donnent une image nette sur l'écran. Quel est nécessairement le signe de $D - f'_1$ pour que cela soit possible ?
b. Lorsque cette condition est réalisée, quelle est la valeur de d, notée d_∞ correspondante ?
c. Faire un schéma du système et construire l'image d'un objet AB à l'infini vu sous l'angle α, pour $D = 5{,}0$ cm.
d. Calculer la taille de l'image en fonction de α.

2. Modification du système

a. Lorsque l'on veut mettre au point sur un objet à distance finie, dans quel sens faut-il déplacer la lentille divergente ?
b. On souhaite réaliser un système tel que d_∞ corresponde à la valeur D. Calculer la nouvelle longueur de D à donner au système. Interpréter cette valeur.

3. Latitude de mise au point

a. Dans le cas précédent où $D = d_\infty$, indiquer la profondeur de mise au point du système, c'est-à-dire le domaine des positions de l'objet AB susceptibles de donner une image nette sur l'écran lorsque l'on donne à d une valeur adaptée.
b. Faire une construction à l'échelle 1/2 permettant de déterminer la position de A. Retrouver ce résultat par le calcul.
Donnée : $d = 6{,}0$ cm.

8 20 min

➤ Corrigé p. 137

Points de Bravais (d'après ENAC)

1. Une lentille mince convergente L a pour centre O, pour foyer objet F et pour foyer image F'. Sa distance focale image est $f' > 0$. Un miroir plan M, centré en S sur l'axe (Oz) de la lentille, est disposé parallèlement à celle-ci à la distance $d = 2f'$.
Toutes les abscisses des points de l'axe seront comptées positivement dans le sens de l'axe (Oz) (sens de la lumière incidente).
Un objet AB perpendiculaire à l'axe (Oz) est disposé de telle sorte que $p = \overline{OA}$. Soit A_1B_1 son image après traversée de L et réflexion sur M. Calculer $\overline{OA_1}$ en fonction de p.

☐ **a.** $\overline{OA_1} = \dfrac{(3p+4f')f'}{p+f'}$

☐ **b.** $\overline{OA_1} = \dfrac{(3p-2f')f'}{p-f'}$

☐ **c.** $\overline{OA_1} = \dfrac{(4f'-p)f'}{p+3f'}$

☐ **d.** $\overline{OA_1} = \dfrac{(p-f')f'}{p+f'}$

2. Soit A_2B_2 l'image définitive de AB après retraversée de la lentille L. Calculer $\overline{OA_2}$ en fonction de p.

☐ **a.** $\overline{OA_2} = \dfrac{pf'(-3pf')f'}{p^2+4pf'-3f'^2}$

☐ **b.** $\overline{OA_2} = -\dfrac{f'(3p+4f')}{2p+3f'}$

☐ **c.** $\overline{OA_2} = \dfrac{f'^2(-p+f')}{p^2-4pf'+f'^2}$

☐ **d.** $\overline{OA_2} = -\dfrac{f'^2(2p+f')}{-p^2+5pf'+f'^2}$

3. Trouver la condition à laquelle satisfait p lorsqu'il correspond à deux points de l'axe, dits points de Bravais, pour lesquels l'image A_2B_2 est dans le même plan que l'objet AB.

☐ **a.** $3p^2+4f'p-f'^2 = 0$

☐ **b.** $3p^2-f'p+f'^2 = 0$

☐ **c.** $2p^2+2f'p+f'^2 = 0$

☐ **d.** $p^2+3f'p+2f'^2 = 0$

4. En déduire les valeurs numériques p_1 et p_2 (avec $p_1 < p_2$) de p qui satisfont à cette condition, sachant que $f' = 10$ cm.

☐ **a.** $p_1 = -30$ cm

☐ **b.** $p_1 = -20$ cm

☐ **c.** $p_2 = -20$ cm

☐ **d.** $p_2 = -10$ cm

5. Déterminer en fonction de p, dans le cas d'une position quelconque de l'objet AB, le grandissement transversal γ du système.

☐ **a.** $\gamma = \dfrac{4f'^2}{p^2-4f'p+f'^2}$

☐ **b.** $\gamma = \dfrac{f'}{3p+8f'}$

☐ **c.** $\gamma = -\dfrac{f'}{2p+3f'}$

☐ **d.** $\gamma = \dfrac{4f'^2}{p^2+4f'p+8f'^2}$

6. Calculer les valeurs numériques γ_1 et γ_2 du grandissement transversal γ correspondant respectivement aux abscisses p_1 et p_2 des points de Bravais.

☐ **a.** $\gamma_1 = +1$

☐ **b.** $\gamma_1 = -2$

☐ **c.** $\gamma_2 = -1$

☐ **d.** $\gamma_2 = \dfrac{1}{2}$

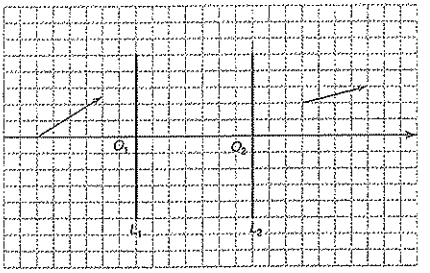
9 40 min

➤ Corrigé p. 138

Association de deux lentilles - Association lentille-miroir (d'après ENSTIM)

1. On étudie un doublet comportant deux lentilles L_1 et L_2, de centres O_1 et O_2 représenté ci-après :

Doublet de lentilles



Sur la gauche un rayon incident pénètre dans le système et émerge sur la partie droite, comme indiqué sur la figure. Un carreau correspond à un centimètre.

a. Ce système est-il globalement convergent ou divergent ? (Justifier rapidement la réponse)

b. Compléter sur le schéma le trajet du rayon lumineux.

c. En déduire la nature de chacune des deux lentilles (convergente ou divergente).

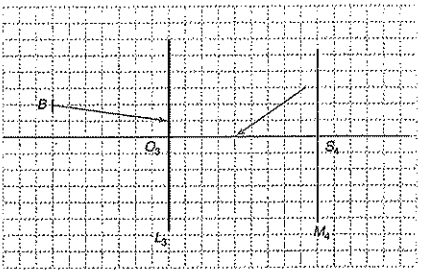
d. Soient F_1 et F_1' les foyers objet et image de la lentille L_1, F_2 et F_2' les foyers objet et image de la lentille L_2.
Trouver graphiquement la position de ces foyers.
Évaluer les valeurs algébriques $\overline{O_1F_1'}$ et $\overline{O_2F_2'}$.

e. Qu'appelle-t-on foyer objet F, foyer image F' d'un système optique ?
Trouver graphiquement la position de ces foyers.
Évaluer les valeurs algébriques $\overline{O_1F}$ et $\overline{O_1F'}$.

f. Si $\overline{O_1F_1'} = +4{,}0$ cm, $\overline{O_2F_2'} = -2{,}0$ cm et $\overline{O_1O_2} = +7{,}0$ cm, déterminer par le calcul les valeurs algébriques $\overline{O_1F}$ et $\overline{O_1F'}$.

2. On étudie à présent un doublet comportant une lentille L_3 de centre O_3 et un miroir M_4 de sommet S_4 représenté ci-dessous.

Doublet lentille et miroir



Sur la gauche, un rayon incident pénètre dans le système et après réflexion sur le miroir il se déplace comme indiqué sur la figure. Un carreau correspond à un centimètre.

a. Compléter sur le schéma le trajet du rayon lumineux entre la lentille et le miroir.

b. Soient F_3 et F_3' les foyers objet et image de la lentille L_3, F_4 le foyer objet-image du miroir M_4 et C_4 le centre de ce même miroir.
Trouver graphiquement la position des points F_3, F_3', F_4 et C_4. Évaluer les valeurs algébriques $\overline{O_3F_3'}$ et $\overline{S_4F_4}$.

c. En déduire le trajet du rayon émergent du système. Ce système est-il globalement convergent ou divergent ?

d. La lentille L_3 est-elle convergente ou divergente ? Le miroir M_4 est-il convergent ou divergent ?

e. Si le point C_4 est confondu avec le point O_3, où se situe le point B' image finale de B par L_3, M_4 et L_3 ?

Tester ses connaissances

1 Réponse **b.** Le foyer objet et le foyer image d'une lentille sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre optique de la lentille. Ils étaient confondus pour le miroir sphérique, puisqu'en quelque sorte, on repliait l'espace des images réelles sur celui des objets réels. En aucun cas le foyer image ne saurait être le conjugué par le système optique du foyer objet, puisque le foyer image est le conjugué d'un objet à l'infini et que le foyer objet est le conjugué d'une image à l'infini.

2 Réponse **c.** Comme on l'a vu au chapitre 2, pour un système en transmission, ou système dioptrique (ce qui est le cas d'une lentille), l'espace des objets réels est situé avant la face d'entrée du système, et l'espace des objets virtuels après cette face d'entrée. L'espace des images réelles est situé après la face de sortie du système optique et l'espace des images virtuelles est avant cette face de sortie. Pour une lentille sphérique mince, face d'entrée et face de sortie du système sont confondues. Un objet est réel s'il est avant O, virtuel s'il est après O. Une image est réelle si elle est après O, et virtuelle si elle est avant O.

3 Réponse **c.** Les foyers objet et image d'une lentille sphérique mince sont de même nature. Pour une lentille convergente, ils sont tous deux réels. F est placé avant O et F' après O.

4 Réponse **d.** Pour une lentille divergente, les foyers sont tous deux virtuels, F est placé après O et F' avant O.

5 Réponse **c.** Si l'on renverse le sens de propagation de la lumière, une lentille convergente (à bords minces) reste une lentille convergente, et une lentille divergente reste une lentille divergente. Pour la lentille convergente, les foyers sont donc toujours réels, avec un foyer objet placé avant la lentille, dans le sens de propagation de la lumière, et un foyer image réel lui aussi, placé après la lentille dans le sens de propagation de la lumière. Ainsi, le nouveau foyer objet est situé à la position de l'ancien foyer image et le nouveau foyer image est situé à la position de l'ancien foyer objet.

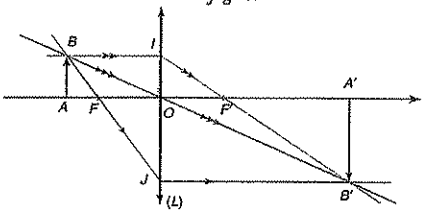
Savoir appliquer le cours

1 On se place dans le cas d'une lentille convergente, avec un objet situé avant F, mais la relation établie est générale et s'applique à toutes les positions possibles de l'objet et aux lentilles divergentes aussi bien qu'aux lentilles convergentes. La figure ci-dessous représente la configuration étudiée :

Les triangles OAB et $OA'B'$ sont semblables.

L'application du théorème de Thalès donne donc $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$. En notant $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$, il vient la formule du grandissement $\boxed{\gamma = \dfrac{p'}{p}}$

Relation de conjugaison



On considère désormais les triangles OIF' et $F'A'B'$ qui sont semblables. On applique alors le théorème de Thalès sachant que $\overline{OI} = \overline{AB}$:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'O} + \overline{OA'}}{\overline{F'O}}$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1 + \frac{\overline{OA'}}{\overline{F'O}}.$$

Or la formule du grandissement donne $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

On obtient donc par conséquent $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 1 - \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OF'}}$.

En divisant par $\overline{OA'}$, il vient la relation de conjugaison de Descartes pour une lentille sphérique mince :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}}$$

En introduisant les notations précédentes, avec $f' = \overline{OF'}$ la distance focale image, on écrit également

$$\boxed{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}}$$

2 Contrairement à la relation de conjugaison de Descartes, où on repère la position des objets et des images par rapport au centre optique de la lentille, la relation de conjugaison de Newton relie les positions de l'objet et de l'image conjuguée, en repérant la position de l'objet par rapport au foyer objet F, et la position de l'image par rapport au foyer image F'.

Ainsi, on va poser $\sigma = \overline{FA}$ et $\sigma' = \overline{F'A'}$.

On travaille toujours sur la représentation du dessus, et on remarque que les triangles FAB et FOJ sont semblables.

L'application du théorème de Thalès conduit à $\frac{\overline{OJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$. De même, les triangles $F'A'B'$ et $F'OI$ sont semblables, et il vient $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$.

Or, par construction, $\overline{OI} = \overline{AB}$ et $\overline{OJ} = \overline{A'B'}$. Les deux rapports précédents sont donc égaux :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

Il vient donc la formule du grandissement

$$\boxed{\gamma = -\frac{\sigma'}{f'} = -\frac{f}{\sigma}},$$ où $f = \overline{OF}$ et $f' = \overline{OF'}$ sont les distances focales respectivement objet et image.

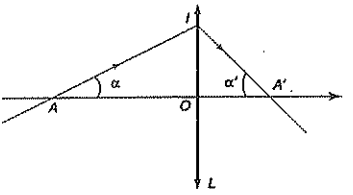
La relation précédente nous donne directement la relation de conjugaison de Newton avec origines aux foyers : $\boxed{\overline{FA} \times \overline{F'A'} = \overline{OF} \times \overline{OF'}}$

En utilisant les notations réduites, cela s'écrit encore

$$\boxed{\sigma\sigma' = ff' = -f'^2}$$

3 On se base sur cette figure, où A' est l'image de A par la lentille :

Relation de Lagrange-Helmholtz



Dans le triangle OIA, il vient $\tan\alpha = \frac{\overline{OI}}{\overline{OA}}$.

De même, dans le triangle OIA', il vient $\tan\alpha' = \frac{\overline{OI}}{\overline{OA'}}$.

On travaille dans les conditions de Gauss et on peut donc confondre l'angle avec sa tangente. Le rapport des deux relations précédentes donne par conséquent :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}.$$

Or, d'après la relation de grandissement établie dans la première application de cours, $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

Il est donc immédiat que le grandissement linéaire γ et le grossissement angulaire G sont liés par la relation :

$$\boxed{G\gamma = 1}$$

4 On utilise les trois rayons fondamentaux pour construire la position de l'image B' de B (en fait, deux suffisent) :

- le rayon issu de B passant par F émerge de la lentille parallèlement à l'axe optique,
- le rayon issu de B parallèle à l'axe optique émerge de la lentille en passant par F',
- le rayon issu de B passant par O n'est pas dévié.

La position de A' image de A est obtenue par projection de B' sur l'axe optique, puisque la lentille présente un aplanétisme approché dans les conditions de Gauss.

Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant. On rappelle que le signe du grandissement indique si l'image est droite ($\gamma > 0$) ou renversée ($\gamma < 0$), et sa valeur absolue renseigne sur la taille de l'image. Celle-ci est plus grande que l'objet si $|\gamma| > 1$ et plus petite que l'objet si $|\gamma| < 1$.

Objet réel

$\overline{OA} < 2f$

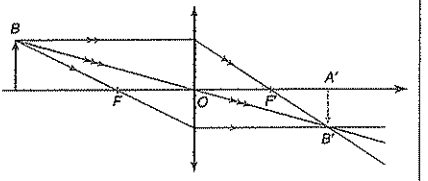


Image réelle, renversée, plus petite

$-1 < \gamma < 0$

Objet réel
$2f < \overline{OA} < f$

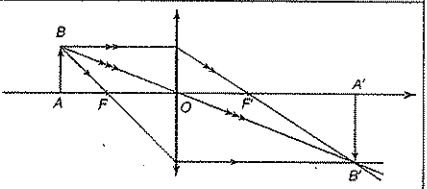


Image réelle, renversée, plus grande, $\gamma < -1$

Objet réel
A entre F et O ($f < \overline{OA} < 0$)

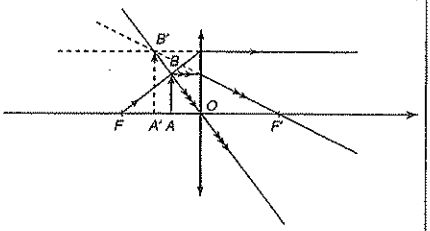


Image virtuelle, droite, plus grande, $\gamma > 1$

Objet virtuel
A après O ($\overline{OA} > 0$)

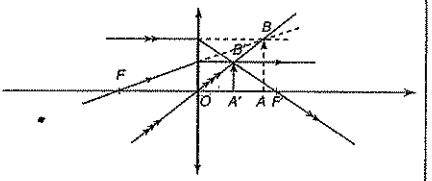


Image réelle, droite, plus petite, $0 < \gamma < 1$

On remarque que lorsque l'objet se déplace de $-\infty$ à $+\infty$, l'image se déplace dans le même sens, de F' à $+\infty$, puis de $-\infty$ à F'.

5 De la même façon qu'à l'application de cours précédente, on obtient l'image B' de B en traçant les rayons fondamentaux, puis on en déduit A' par projection sur l'axe optique.
Il faut toutefois faire attention à la façon de tracer la marche des rayons, car la position des foyers objet et image est inversée par rapport à une lentille convergente, ce qui cause parfois des erreurs.
Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant.

Objet réel
A avant O ($\overline{OA} < 0$)

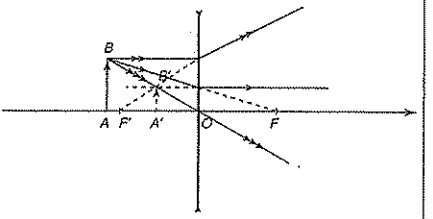


Image virtuelle, droite, plus petite, $0 < \gamma < 1$

Objet virtuel
A entre O et F ($0 < \overline{OA} < f$)

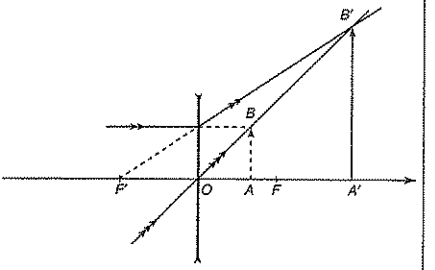


Image réelle, droite, plus grande, $\gamma > 1$

Objet virtuel
$f < \overline{OA} < 2f$

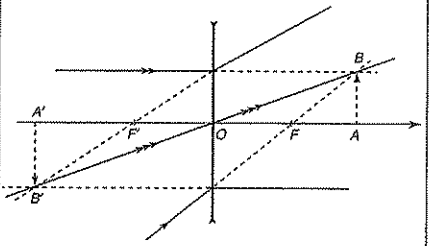


Image virtuelle,renversée, plus grande, $\gamma < -1$

Objet virtuel
$2f < \overline{OA}$

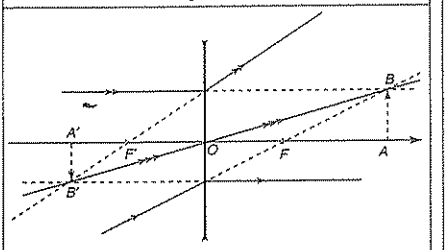


Image virtuelle, renversée, plus petite, $-1 < \gamma < 0$

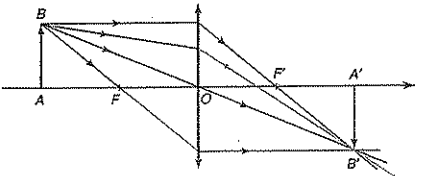
On remarque, comme dans l'exercice précédent, que lorsque l'objet se déplace de $-\infty$ à $+\infty$, l'image se déplace dans le même sens, de F' à $+\infty$, puis de $-\infty$ à F'.

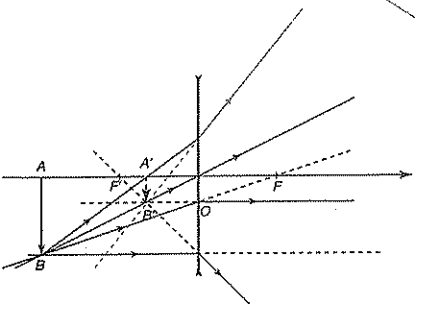
6 Pour tracer la marche d'un rayon quelconque à travers une lentille, plusieurs méthodes équivalentes sont possibles.

• *Méthode 1*

On prend un point B quelconque sur ce rayon. On trace l'image B' de B par la lentille, grâce aux rayons fondamentaux, puis en utilisant la propriété de stigmatisme de la lentille, le rayon quelconque doit émerger en passant par B', ce qui permet de le tracer (figure ci-dessous pour la lentille convergente en haut et pour la lentille divergente en bas).

Construction avec un objet fictif



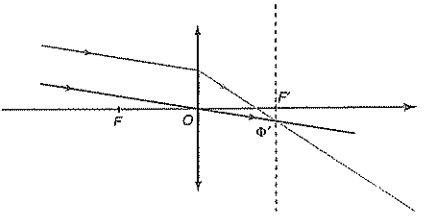


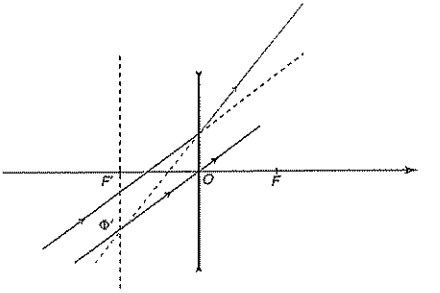
• *Méthode 2*

On considère que ce rayon quelconque est issu d'un point objet situé à l'infini hors de l'axe, émettant un faisceau de rayons parallèles, incliné sur l'axe. On trace le rayon de ce faisceau passant par le centre O de la lentille. Ce rayon n'étant pas dévié, il constitue un axe secondaire. Le rayon quelconque est alors parallèle à un axe secondaire et va émerger de la lentille en passant par le foyer secondaire image correspondant Φ' (en haut de la figure ci-dessous pour la lentille convergente, à gauche et en bas pour la lentille divergente).

Pour trouver ce point Φ', il suffit de prendre l'intersection de l'axe secondaire avec le plan focal image de la lentille.

Construction avec un foyer secondaire image





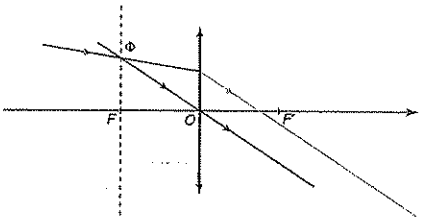
• *Méthode 3*

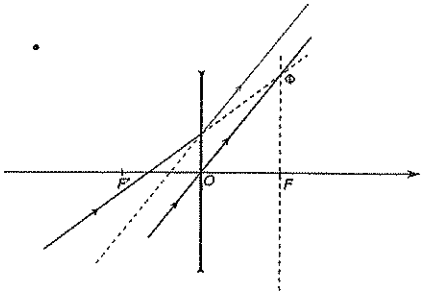
On considère que ce rayon quelconque passe par un foyer secondaire objet Φ, intersection du rayon quelconque avec le plan focal objet de la lentille. Ce foyer secondaire objet Φ voit son image par la lentille renvoyée à l'infini hors de l'axe. Tout rayon passant par Φ émerge donc de la lentille parallèlement à l'axe secondaire correspondant, que l'on trace en joignant Φ au centre O (en haut de la figure ci-après pour la lentille convergente, à gauche et en bas pour la lentille divergente).

On trouve ainsi la direction du rayon quelconque lorsqu'il émerge de la lentille.

 © Nathan, Classe prépa

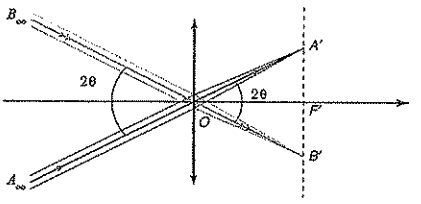
Construction avec un foyer secondaire objet





7 On vise le centre d'un astre avec une lentille. Deux points extrêmes, A_∞ et B_∞, diamétralement opposés sont donc vus depuis le centre optique O de la lentille sous un angle $\alpha = 2\theta$, représenté ci-après.

Diamètre angulaire d'un astre



L'image $A'B'$ de $A_\infty B_\infty$ est bien entendu située dans le plan focal image de la lentille, à la distance $f' = \overline{OF'}$ de O.

On a donc $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\dfrac{A'B'}{2}}{\overline{OF'}}$.

Or on travaille dans les conditions de Gauss, et l'angle peut être assimilé à sa tangente, par conséquent $\alpha \approx \dfrac{A'B'}{f'}$.

La vergence V d'une lentille est définie comme l'inverse de la distance focale image : $V = \dfrac{1}{f'}$.

Il vient donc $\boxed{A'B' = \dfrac{\alpha}{V}}$

Attention : pour que l'angle soit assimilé à sa tangente, il faut qu'il soit exprimé en radians, il faut donc convertir les degrés en radians. Comme un degré comporte 60 minutes d'arc, on a :

$$\alpha = 0°1' = \frac{1}{60}° = \frac{2\pi}{360} \times \frac{1}{60} = 2{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

A.N. : $A'B' = 2{,}9 \cdot 10^{-4}$ m.

S'entraîner

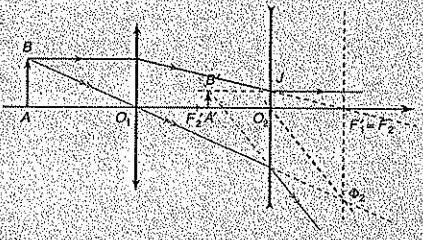
1 **1.** Prenons un point objet A_∞ à l'infini sur l'axe optique. Son image par la lentille L_1 est donc confondue avec le foyer image F_1' de la première lentille. Or, celui-ci est confondu avec le foyer objet F_2 de la deuxième lentille, donc l'image définitive de A_∞ par l'ensemble des deux lentilles est rejetée à l'infini.

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' = F_2 \xrightarrow{L_2} A_\infty'$$

Le foyer objet de l'ensemble est rejeté à l'infini. Le même raisonnement montre qu'il en va de même pour le foyer image de l'ensemble. Le système est **afocal**.

2. La construction de l'image définitive $A'B'$ d'un objet AB réel est réalisée sur la figure suivante :

Construction de l'image $A'B'$ de AB



Le rayon issu de B parallèle à l'axe optique émerge de la lentille L_1 en passant par le foyer image F_1', qui est

confondu avec le foyer objet F_2 de la lentille L_2. Il en émerge donc parallèlement à l'axe optique.
Le rayon issu de B passant par O_1 n'est pas dévié par la première lentille. Il arrive sur la lentille L_2 avec une incidence quelconque. Il passe par un foyer secondaire objet Φ_2 (intersection du rayon incident sur L_2 et du plan focal objet de L_2), il émerge donc de la deuxième lentille parallèlement à l'axe secondaire joignant O_2 et Φ_2.
Le prolongement de ces deux rayons émergents donne B' et on trouve A' par projection sur l'axe optique, puisque le système est aplanétique.

Par construction, $\overline{A'B'} = \overline{O_2J}$ et $\overline{AB} = \overline{O_1I}$.

On cherche le grandissement $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ du système.

On a $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{O_2J}}{\overline{O_1I}}$.

Or d'après le théorème de Thalès appliqué aux triangles O_2F_2J et $F_1'O_1I$ semblables, $\dfrac{\overline{O_2J}}{\overline{O_1I}} = \dfrac{\overline{F_2O_2}}{\overline{F_1'O_1}}$.

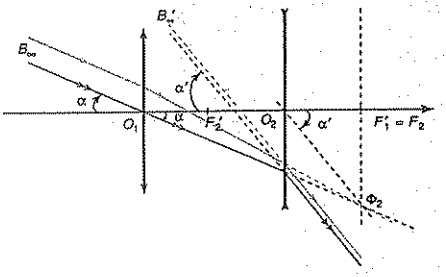
De plus, $\overline{F_1'O_1} = -f_1'$ et $\overline{F_2O_2} = -f_2 = f_2'$.

Par conséquent, $\boxed{\gamma = -\dfrac{f_2'}{f_1'}}$

A. N. : $\gamma = 0{,}25$. Le grandissement est donc indépendant de la position de l'objet AB, ce qui est une particularité d'un système afocal.

3. On s'intéresse au cas d'un objet à l'infini, vu sous un angle α. Son image par le système afocal est également renvoyée à l'infini, et elle est désormais vue sous un angle α' :

Image d'un objet à l'infini. Grandissement angulaire



Dans le triangle $O_1F_1'\Phi_2$, il vient $\tan\alpha = \dfrac{\overline{F_1'\Phi_2}}{\overline{O_1F_1'}}$.

De la même façon, dans le triangle $O_2F_2\Phi_2$, il vient $\tan\alpha' = \dfrac{\overline{F_2\Phi_2}}{\overline{O_2F_2}}$.

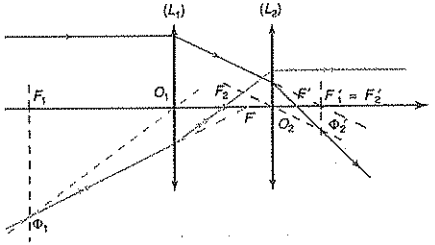
Puisque le système est utilisé dans les conditions de Gauss, $\tan\alpha \approx \alpha$ et $\tan\alpha' \approx \alpha'$. Le rapport des deux relations précédentes donne donc $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{\overline{O_1F_1'}}{\overline{O_2F_2}} = \dfrac{f_1'}{f_2}$

Il vient donc $\boxed{G = -\dfrac{f_1'}{f_2'}}$

On remarque que l'on retrouve la formule de Lagrange-Helmholtz, le grossissement angulaire $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ et le grandissement transversal γ sont liés par la relation $G\gamma = 1$.
A. N. : $G = 4{,}0$.

2 1. On cherche à déterminer graphiquement les foyers objet et image du dispositif étudié représenté ci-dessous :

Dispositif du doublet de Huygens



Pour cela, on va tracer la marche à travers le dispositif de deux rayons, un premier rayon arrivant sur la première lentille parallèlement à l'axe optique, et un deuxième rayon qui émerge de la deuxième lentille parallèlement à l'axe optique.

• Le premier rayon arrive parallèlement à l'axe optique, il émerge donc de la lentille L_1 en passant par le foyer principal image F_1' de la première lentille. Il arrive alors sur la deuxième lentille avec une incidence quelconque. On trace l'axe secondaire passant par O_2 auquel il est parallèle. Cet axe secondaire coupe le plan focal image de la deuxième lentille en Φ_2'. Le rayon considéré émerge donc de la deuxième lentille en passant par le foyer secondaire image Φ_2'. Il coupe l'axe optique en F', foyer image de l'association de L_1 et L_2.

On lit sur le schéma $\boxed{\overline{F_2'F'} = -\dfrac{a}{2}}$

A.N. : $\overline{F_2'F'} = -1$ cm.

• On s'intéresse maintenant au trajet d'un deuxième rayon, qui émerge du système optique parallèlement à l'axe optique. On va remonter le chemin de la lumière. S'il émerge de L_2 parallèlement à l'axe optique, c'est qu'il passait par le foyer objet F_2 de cette lentille. Ce rayon émerge donc de la lentille L_1 avec une émergence

quelconque. On trace l'axe secondaire passant par O_1 parallèlement auquel il sort de L_1. Cet axe secondaire coupe le plan focal objet de L_1 en un foyer secondaire objet Φ_1. Le rayon émergeant parallèlement à cet axe secondaire, il passait donc avant L_1 par le foyer secondaire objet Φ_1. Ce rayon incident coupe l'axe optique en F, foyer objet de l'association de L_1 et L_2.

On lit sur le schéma $\boxed{\overline{F_1F} = +\frac{9}{2}a}$

A.N. : $\overline{F_1F} = 9$ cm.

2. On demande de repérer les positions de F et F' par rapport au foyer objet de L_1 et au foyer image de L_2. On va donc utiliser la relation de conjugaison de Newton, avec origines aux foyers pour déterminer ces positions. Pour le foyer objet F, L_1 doit en donner une image intermédiaire confondue avec le foyer objet F_2 de la deuxième lentille pour que celle-ci renvoie l'image finale à l'infini :

$$F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$

La lentille L_1 conjugue donc F et F_2. La relation de conjugaison de Newton donne : $\overline{F_1F} \times \overline{F'_1F_2} = -(f'_1)^2$.

L'énoncé introduit la notation $\Delta = \overline{F'_1F_2}$.

Il vient donc $\boxed{\overline{F_1F} = -\frac{(f'_1)^2}{\Delta}}$

Or $\Delta = \overline{F'_1F_2} = \overline{F'_1O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2}$
$= -f'_1 + e - f'_2 = -3a + 2a - a = -2a$.

Par conséquent $\overline{F_1F} = -\frac{9a^2}{2a} = -\frac{9}{2}a$. On retrouve bien le résultat précédent. Pour le foyer image, on prend un objet A_∞ à l'infini sur l'axe. Son image par la première lentille est en F'_1. La deuxième lentille donne alors de cette image intermédiaire F'_1 une image finale F' :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 \xrightarrow{L_2} F'$$

La deuxième lentille conjugue donc F'_1 et F'. La relation de conjugaison de Newton donne :

$\overline{F_2F'_1} \times \overline{F'_2F'} = -(f'_2)^2$, avec $\overline{F_2F'_1} = -\Delta$.

Il vient donc $\boxed{\overline{F'_2F'} = \frac{(f'_2)^2}{\Delta}}$

Par conséquent $\overline{F'_2F'} = \frac{a^2}{-2a} = -\frac{a}{2}$. On retrouve bien le résultat précédent.

3 **1. a.** La relation de conjugaison de Descartes pour une lentille mince de centre O_1 conjuguant un point objet A et son image A' s'écrit $\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$.

On calcule, pour chaque valeur du tableau de données, la quantité $f'_1 = \frac{1}{\frac{1}{\overline{O_1A'}} + \frac{1}{\overline{AO_1}}}$.

$\overline{AO_1}$ (cm)	24,0	26,0	28,0	30,0	32,0	34,0	36,0	38,0
$\overline{O_1A'}$ (cm)	120	86,7	70,2	60,2	53,1	48,6	45,2	42,2
f'_1 (cm)	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0

On constate que les mesures sont particulièrement concordantes, la formule de Descartes est parfaitement vérifiée.

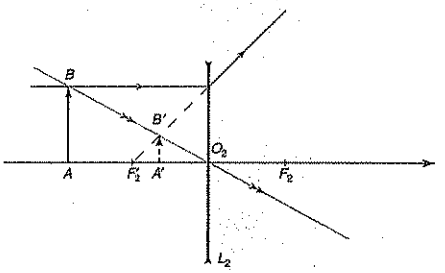
Remarque : félicitons au passage la performance de l'expérimentateur !

b. On en déduit $f'_1 = 20{,}0$ cm.

2. a. Par aplanétisme, l'image d'un objet transverse est également transverse. On se contente de trouver l'image B' de B puis on en déduit l'image A' de A par simple projection sur l'axe optique.

On utilise deux rayons particuliers, comme sur le schéma ci-dessous par exemple. Le rayon incident passant par B et parallèle à l'axe optique, émerge de la lentille L_2 en passant par le foyer principal image F'_2. Le rayon passant par B et le centre optique O_2 de la lentille n'est pas dévié. L'intersection de ces deux rayons donne B'.

Détermination de l'image $A'B'$ de AB



Les rayons émergents ne se coupent que si on les prolonge dans l'espace des images virtuelles. L'image $A'B'$ est donc virtuelle.

b. D'après la relation de conjugaison de Descartes,

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A}} = \frac{1}{f'_2}$$

$$\frac{1}{\overline{A'O_2}} = -\frac{1}{f'_2} - \frac{1}{\overline{O_2A}}$$

$$\frac{1}{\overline{A'O_2}} = -\frac{f'_2 + \overline{OA_2}}{f'_2 \times \overline{OA_2}}$$

Il vient $\boxed{\overline{A'O_2} = \dfrac{f_2' \times \overline{OA_2}}{f_2' + \overline{OA_2}}}$

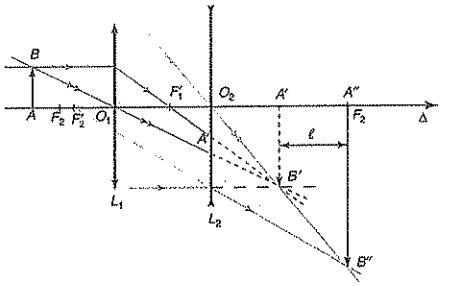
A.N. : $\overline{A'O_2} = 3{,}0$ cm.

Le grandissement est défini par $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. D'après les relations de grandissement, on a $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A}}$.

A.N. : $\gamma = 0{,}4$.

3. a. Pour obtenir une image réelle, que l'on puisse matérialiser sur un écran, avec une lentille divergente, il lui faut un objet virtuel, placé entre O_2 et F_2 (se reporter aux constructions de la rubrique « Savoir appliquer le cours »). Ici, on a $A \xrightarrow{L_1} A' \xrightarrow{L_2} A''$, il faut donc que l'image intermédiaire A' soit placée entre O_2 et F_2.

Rôle de la seconde lentille



On souhaite que l'image soit deux fois plus grande, il faut donc que la lentille L_2 réalise un grandissement

$\gamma_2 = \dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = 2.$

Or $\dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{O_2A''}}{\overline{O_2A'}}$ et $\overline{O_2A''} = \overline{O_2A'} + \ell$.

Par conséquent, $\gamma_2 = \dfrac{\overline{O_2A'} + \ell}{\overline{O_2A'}} = 1 + \dfrac{\ell}{\overline{O_2A'}} = 2.$

Cela impose $\ell = \overline{O_2A'}$.

On peut remarquer sur la figure ci-dessus que ce résultat était immédiat par le théorème de Thalès. D'autre part, d'après la relation de conjugaison de Descartes pour la deuxième lentille, on a :

$$\frac{1}{\overline{O_2A''}} - \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f_2'}$$

Avec $\overline{O_2A'} = \ell$ et $\overline{O_2A''} = \overline{O_2A'} + \ell = 2\ell$, cette relation donne $\dfrac{1}{2\ell} - \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{f_2'}$, c'est-à-dire $\boxed{\ell = -\dfrac{f_2'}{2}}$

A.N. : $\ell = 2{,}5$ cm.

b. Pour que l'œil puisse observer l'image sans accomoder, il faut que cette dernière soit rejetée à l'infini. En somme, il faut régler le système de telle sorte qu'il soit afocal et que l'image d'un point objet à l'infini soit rejetée à l'infini :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' = F_2 \xrightarrow{L_2} A_\infty'$$

Le foyer image de la première lentille doit être confondu avec le foyer objet de la seconde lentille :

$\boxed{F_1' = F_2}$

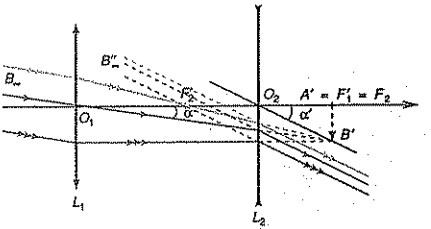
On cherche la distance entre les deux centres optiques :

$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_2O_2} = f_1' + f_2'$

$\boxed{\overline{O_1O_2} = f_1' + f_2'}$

• Sur la figure ci-dessous est représentée la marche d'un faisceau de rayons issus d'un point à l'infini hors de l'axe optique.

Marche d'un faisceau parallèle à travers le système afocal



• Dans le triangle O_2F_2B', on exprime l'angle α' :

$$\tan\alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_2F_2}} = -\frac{\overline{A'B'}}{f_2'}$$

Dans le triangle $O_1F_1'B'$, on peut exprimer l'angle α :

$$\tan\alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1F_1'}} = \frac{\overline{A'B'}}{f_1'}$$

Les lentilles sont utilisées dans les conditions de Gauss supposant des rayons paraxiaux. On peut donc assimiler les angles α et α' à leurs tangentes respectives. On obtient alors :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \approx \frac{\tan\alpha'}{\tan\alpha} = -\frac{\overline{A'B'}}{f_2'} \times \frac{f_1'}{\overline{A'B'}}$$

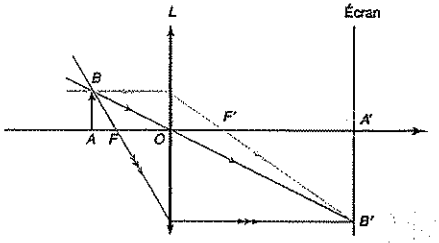
Il vient donc $\boxed{G = -\dfrac{f_1'}{f_2'}}$

• L'application numérique donne $G = 4{,}0$.

• L'image finale $A''B''$ est droite, c'est le principe de la lunette de Galilée, ou encore des jumelles de théâtre.

4 **1. a.** L'image $A'B'$ de AB doit se former dans le plan de l'écran. Le rayon issu de B et passant par le centre optique O de la lentille n'est pas dévié. Sa marche est représentée ci-dessous. Il nous donne la position de B' sur l'écran. On peut alors, au passage trouver la position des foyers F et F' de la lentille en traçant les rayons issus de B, parallèle à l'axe (qui émerge alors par F') ou bien passant par F (qui émerge alors parallèlement à l'axe).

Détermination de la position de B' sur l'écran



b. On pose $\overline{AO} = x$. On cherche à calculer $\overline{OA'}$.
On a $\overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'}$, avec $\overline{AA'} = D$.

Il vient par conséquent $\boxed{\overline{OA'} = D - x}$

c. D'après la relation de conjugaison de Descartes, on a $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$, ce qui se traduit ici par :

$$\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

En multipliant cette équation par $(D-x)xf'$, il vient :

$$xf' + f'(D-x) = x(D-x)$$
$$Df' = xD - x^2$$

On établit alors la relation suivante :

$$\boxed{x^2 - Dx + Df' = 0}$$

d. Cette équation du second degré n'admet de racines réelles que si son discriminant $\Delta = D^2 - 4Df'$ est positif. Cela impose $D^2 - 4Df' \geqslant 0$, soit $D \geqslant 4f'$. Pour qu'il existe une valeur de x acceptable, il faut donc que $D \geqslant D_{min}$, avec $\boxed{D_{min} = 4f'}$.

e. On se place dans le cas où $D \geqslant D_{min}$. Il y a alors deux solutions réelles à l'équation du second degré précédente.

• Ces deux solutions sont :

$$\boxed{x_1 = \frac{+D - \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}} \text{ et } \boxed{x_2 = \frac{+D + \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}}$$

• Par définition du grandissement, $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

Dans la première position de la lentille, on obtient

$$\gamma_1 = -\frac{D - x_1}{x_1} = 1 - \frac{D}{x_1}.$$

Pour la deuxième position de la lentille, on a :

$$\gamma_2 = -\frac{D - x_2}{x_2} = 1 - \frac{D}{x_2}.$$

Le produit de ces grandissements donne :

$$\gamma_1\gamma_2 = 1 - D\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} + \frac{D^2}{x_1x_2}.$$

Or x_1 et x_2 sont les racines de l'équation

$x^2 - Dx + Df' = 0$ et on a donc $\begin{cases} x_1 + x_2 = D \\ x_1x_2 = Df' \end{cases}$

On obtient par conséquent : $\gamma_1\gamma_2 = 1 - D\frac{D}{Df'} + \frac{D^2}{Df'} = 1$.

Les grandissements obtenus pour les deux positions possibles de la lentille sont l'inverse l'un de l'autre :

$$\boxed{\gamma_1\gamma_2 = 1}$$

• La distance d est la distance entre les deux positions de la lentille qui donnent une image nette sur l'écran, c'est-à-dire que :

$$d = \overline{O_1O_2}$$
$$d = \overline{AO_2} - \overline{AO_1}$$
$$d = x_2 - x_1$$
$$d = \frac{+D\sqrt{D^2 - 4Df'}}{2} - \frac{+D - \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}$$
$$d = \sqrt{D^2 - 4Df'}$$
$$d^2 = D^2 - 4Df'$$

On en déduit alors la distance focale $\boxed{f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}}$

• Il s'agit de la méthode de focométrie de Bessel.

A.N. : $f' = 0{,}199$ m.

2. a. Les deux lentilles sont accolées $O_I = O_{II} = O$.

Pour la conjugaison suivante, $A \xrightarrow{L_I} A_1 \xrightarrow{L_{II}} A'$, les relations de Descartes donnent :

pour la lentille L_I : $\frac{1}{\overline{O_1}} - \frac{1}{\overline{O_{IA}}} = \frac{1}{f_I'}$ et pour la lentille L_{II} :

$\frac{1}{\overline{O_{II}A'}} - \frac{1}{\overline{O_{II}A_1}} = \frac{1}{f_{II}'}$. Les centres étant confondus, en faisant la somme des deux relations précédentes, il vient

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f_I'} + \frac{1}{f_{II}'} = \frac{1}{f'}.$$

Par conséquent, on obtient pour l'association :

$$\boxed{f' = \frac{f_I'f_{II}'}{f_I' + f_{II}'}}$$

b. Pour que l'on obtienne une image nette sur l'écran, il faut d'une part que l'ensemble soit convergent, ce qui se traduit par $f' > 0$, et d'autre part que la condition $D \geqslant 4f'$ soit vérifiée.

Il faut donc que $\frac{f_I' f_{II}'}{f_I' + f_{II}'} \leqslant \frac{D}{4}$.

Or $f_I' > 0$ mais $f_{II}' < 0$.

Cependant, comme l'ensemble doit être convergent ($f' > 0$), il faut que $f_I' + f_{II}' < 0$.

Par conséquent, $\frac{f_I' + f_{II}'}{f_{II}'} > 0$ et l'inégalité précédente s'écrit donc :

$$f_I' \leqslant \frac{D}{4} \times \frac{f_I' + f_{II}'}{f_{II}'}$$

$$f_I'\left(1 - \frac{D}{4f_{II}'}\right) \leqslant \frac{D}{4}$$

$$f_I' \leqslant f_{I,\max}'$$

avec $f_{I,\max}' = \frac{D f_{II}'}{4f_{II}' - D}$

A.N. : $f_{I,\max}' = \mathbf{0{,}136\ m}$.

5 **1.** On souhaite obtenir un système afocal, tel que l'image d'un point objet à l'infini soit renvoyée à l'infini : $A_\infty \xrightarrow{L_1+L_2+L_3} A_\infty'$. Or la lentille L_1 donne d'un point à l'infini sur l'axe une image intermédiaire en son foyer image F_1', et pour que la lentille L_3 renvoie l'image finale à l'infini sur l'axe, il faut que la deuxième image intermédiaire soit en son foyer objet F_3 :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_2} F_3 \xrightarrow{L_3} A_\infty'$$

La lentille L_2 doit donc conjuguer F_1' et F_3.

La relation de conjugaison de Newton pour la deuxième lentille donne $\overline{F_2F_1'} \times \overline{F_2'F_3} = -(f_2')^2$.

On a, en introduisant $\delta_1 = \overline{O_1O_2}$ et $\delta_2 = \overline{O_2O_3}$:

$\overline{F_2F_1'} = \overline{F_2O_2} + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1'}$,

$\overline{F_2'F_3} = \overline{F_2'O_2} + \overline{O_2O_3} + \overline{O_3F_3}$,

et $\overline{F_2F_1'} = f_2' - \delta_1 + f_1'$, $\overline{F_2'F_3} = -f_2' + \delta_2 - f_3'$.

La relation de Newton s'écrit donc :

$$(f_2' - \delta_1 + f_1') \times (-f_2' + \delta_2 - f_3') = -(f_2')^2$$

$$-f_2' + \delta_2 - f_3' = \frac{(f_2')^2}{\delta_1 - (f_1' + f_2')}$$

On en déduit donc que $\boxed{\delta_2 = f_2' + f_3' + \frac{(f_2')^2}{\delta_1 - (f_1' + f_2')}}$

A.N. : $\delta_2 = \mathbf{8{,}0\ cm}$.

2. On cherche désormais la position d'un éventuel point double du système, c'est-à-dire tel que son image par l'ensemble du système soit confondu avec lui-même : $D \xrightarrow{L_1+L_2+L_3} D$.

En décomposant les conjugaisons successives, et en nommant D_1 et D_2 les images intermédiaires, on a :

$$D \xrightarrow{L_1} D_1 \xrightarrow{L_2} D_2 \xrightarrow{L_3} D$$

Posons $x = \overline{F_1D}$.

La relation de conjugaison de Newton pour la lentille L_1 donne $\overline{F_1D} \times \overline{F_1'D_1} = -(f_1')^2$, ce qui donne

$$\overline{F_1'D_1} = -\frac{(f_1')^2}{x}.$$

Pour la lentille L_2 : $\overline{F_2D_1} \times \overline{F_2'D_2} = -(f_2')^2$.

Or $\overline{F_2D_1} = \overline{F_2O_2} + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'D_1}$

$$= f_2' - \delta_1 + f_1' - \frac{(f_1')^2}{x}.$$

On a donc $\left(f_2' - \delta_1 + f_1' - \frac{(f_1')^2}{x}\right) \times \overline{F_2'D_2} = -(f_2')^2$.

Pour la lentille L_3 : $\overline{F_3D_2} \times \overline{F_3'D} = -(f_3')^2$.

Or, en exprimant les distances en cm :

$$\overline{F_3D_2} = \overline{F_3O_3} + \overline{O_3O_2} + \overline{O_2F_2'} + \overline{F_2'D_2}$$

$$\overline{F_3D_2} = f_3' - \delta_2 + f_2' - \frac{(f_2')^2}{f_2' - \delta_1 + f_1' - \frac{(f_1')^2}{x}}$$

$$\overline{F_3D_2} = -4 - 8 - 4 - \frac{16}{-4 - 5 + 8 - \frac{64}{x}}$$

$$\overline{F_3D_2} = -16 + \frac{16}{1 + \frac{64}{x}} = \frac{-16 \times \frac{64}{x}}{1 + \frac{64}{x}}.$$

D'autre part, toujours en exprimant les distances en cm

$$\overline{F_3'D} = \overline{F_3'O_3} + \overline{O_3O_2} + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1} + \overline{F_1D}$$

$$\overline{F_3'D} = -f_3' - \delta_2 - \delta_1 - f_1' + x$$

$$\overline{F_3'D} = +4 - 8 - 5 - 8 + x = x - 17.$$

La troisième relation donne donc, en remplaçant les différentes grandeurs par leur valeur numérique (en cm) :

$$-16 \times \frac{64}{x}(x - 17) = -16\left(1 + \frac{64}{x}\right)$$

$$63x = 1\,152$$

A.N. : $x = \mathbf{18{,}3\ cm}$.

6 **1.** La vergence de la lentille est donnée par $V = (n-1)A$, où A est un facteur purement géométrique. En notant V_C et V_F les vergences extrêmes pour les raies bleue et rouge, on a donc :

$$V_F - V_C = (n_F - 1)A - (n_C - 1)A$$

$$V_F - V_C = (n_F - n_C)A$$

$$V_F - V_C = \frac{(n_F - n_C)}{n_D - 1} \times (n_D - 1)A$$

$$V_F - V_C = \frac{V_D}{\nu}.$$

En repassant aux distances focales, il vient :

$$\frac{1}{f'_F} - \frac{1}{f'_C} = \frac{1}{\nu f'_D}$$

$$\frac{f'_C - f'_F}{f'_C f'_F} = \frac{1}{\nu f'_D}$$

La dispersion étant faible, on peut écrire que $f'_F f'_C \approx (f'_D)^2$. Il vient alors $\boxed{f'_C - f'_F \approx \frac{f'_D}{\nu}}$.

Pour la lentille étudiée, l'application numérique donne $f'_C - f'_F = 3{,}8$ **mm**.

Deux radiations de longueur d'onde différentes vont donc être confrontées à des lentilles équivalentes de distances focales légèrement différentes. La position de l'image d'un objet éclairé en lumière bleue sera donc légèrement décalée par rapport à la position de l'image d'un objet éclairé en lumière rouge. Si l'on éclaire un objet en lumière blanche, on aura donc un phénomène d'aberrations chromatiques, les bords de l'image seront légèrement irisés, ce qui perturbe la netteté des images obtenues.

2. a. Pour deux lentilles accolées (de centre optique commun O), la vergence de l'association est la somme des vergences : $\boxed{V = V_1 + V_2}$

b. Les distances focales f'_F et f'_C seront donc confondues pour le doublet si les vergences V_C et V_F sont confondues également, ce qui se traduit par :

$$V_{1F} + V_{2F} = V_{1C} + V_{2C}$$

$$A_1(n_{1F} - 1) + A_2(n_{2F} - 1) = A_1(n_{1C} - 1) + A_2(n_{2C} - 1)$$

$$A_1(n_{1F} - n_{1C}) + A_2(n_{2F} - n_{2C}) = 0.$$

Or $A_1 = \frac{V_1}{n_{1D} - 1}$ et $A_2 = \frac{V_2}{n_{2D} - 1}$.

Il vient donc $V_1 \times \frac{n_{1F} - n_{1C}}{n_{1D} - 1} + V_2 \times \frac{n_{2F} - n_{2C}}{n_{2D} - 1} = 0.$

On obtient $\boxed{\frac{V_1}{\nu_1} + \frac{V_2}{\nu_2} = 0}$

La constringence étant une grandeur positive $\nu_1 > 0$ et $\nu_2 > 0$, il faut que les vergences soient de signes opposés. Il doit y avoir une lentille convergente et une lentille divergente.

c. Ce doublet n'est pas rigoureusement achromatique, on s'est uniquement arrangé pour que les distances focales extrêmes pour le bleu et le rouge soient confondues, mais cette égalité n'est réalisée que pour ces deux radiations particulières. Les autres distances focales sont encore dispersées, mais l'écart est désormais très faible, on peut dire que le doublet est approximativement achromatique.

d. On connaît la vergence V que doit avoir l'ensemble $V_1 + V_2 = V$, et pour que le doublet soit approximativement achromatique, il faut en outre que V_1 et V_2 satisfassent à la relation précédente : $\frac{V_1}{\nu_1} + \frac{V_2}{\nu_2} = 0.$

Comme $\nu_2 = 2\nu_1$, il vient $V_2 = -2V_1$, et par conséquent $\boxed{V_1 = -V}$ et $\boxed{V_2 = 2V.}$ L'application numérique donne les vergences en dioptries $V_1 = -2\delta$ et $V_2 = 4\delta$. Pour les distances focales, on a donc $f'_1 = -500$ **mm** et $f'_2 = 250$ **mm**.

7 1. a. $AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$.

Pour être recueillie sur un écran, l'image finale $A'B'$ doit être réelle, donc l'image intermédiaire A_1B_1, dont $A'B'$ est l'image par L_2, doit se trouver entre O_2 et F_2, et l'image $A'B'$ est alors après l'objet A_1B_1.

Donc A' est après A_1 lui-même après O_2 sur l'axe optique. La distance D entre la lentille L_1 et l'écran doit donc vérifier $D = \overline{O_1A'} \geqslant \overline{O_1A_1}$. Lorsque A est à l'infini, alors A_1 est confondue avec F'_1, et la relation précédente se traduit donc par $D \geqslant f'_1$ et donc

$$\boxed{D - f'_1 \geqslant 0}$$

b. On a les conjugaisons successives suivantes :

$A_\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 \xrightarrow{L_2} A' = E$ (sur l'écran)

La lentille L_2 conjugue donc F'_1 et E. On cherche la distance $d_\infty = \overline{O_2E}$ correspondante, on va donc utiliser la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{O_2E}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

Or $\overline{O_2F'_1} = \overline{O_2E} + \overline{EO_1} + \overline{O_1F'_1} = d_\infty - D + f'_1$.

Il vient donc :

$$\frac{1}{d_\infty} - \frac{1}{d_\infty - D + f'_1} = \frac{1}{f'_2}$$

$$(d_\infty - D + f'_1)f'_2 - d_\infty f'_2 = (d_\infty - D + f'_1)d_\infty$$

$$d_\infty^2 + (f'_1 - D)d_\infty - f'_2(f'_1 - D) = 0.$$

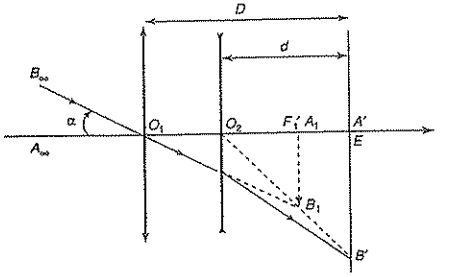
Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = (f'_1 - D)^2 - 4d_\infty f'_2(f'_1 - D) = (D - f'_1)(D - f'_1 - 4f'_2)$.

On a vu que $D - f'_1 > 0$, et comme $f'_2 < 0$, on a $\Delta > 0$. L'équation du second degré sur d_∞ a deux solutions, dont une seulement est positive :

$$\boxed{d_\infty = \frac{1}{2}((D - f'_1) + \sqrt{(D - f'_1)(D - f'_1 - 4f'_2)})}$$

c. Voici le système :

Mise au point du système



On construit l'image de l'objet AB à l'infini, A étant sur l'axe optique en considérant par exemple le rayon incident provenant de B et passant par le centre optique O_1 de la première lentille. Il n'est pas dévié à la traversée de L_1 et coupe le plan focal image de L_1 en B_1, image intermédiaire. On construit alors B' en prenant un rayon passant par B_1 et O_2 qui n'est pas dévié à la traversée de la deuxième lentille. Ce rayon coupe le plan de l'écran en B'.

d. D'après la construction précédente, on a, dans le triangle $O_1F_1'B_1$, $\tan\alpha = -\dfrac{\overline{F_1'B_1}}{\overline{O_1F_1'}}$. En assimilant l'angle à sa tangente, il vient $\overline{A_1B_1} = -\alpha f_1'$. D'après la relation de grandissement pour la deuxième lentille, qui donne de $A_1 = F_1'$ l'image $A' = E$, on obtient :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2E}}{\overline{O_2F_1'}}$$

$$\overline{A'B'} = \frac{d_\infty}{d_\infty - D + f_1'} \times (-\alpha f_1').$$

Il vient par conséquent $\boxed{\overline{A'B'} = -\alpha \dfrac{d_\infty f_1'}{d_\infty - D + f_1'}}$

2. a. Si l'objet AB est à une distance finie de la lentille L_1, avant son foyer objet F_1, alors l'image intermédiaire A_1B_1 se situe après le foyer image F_1'. Elle s'éloigne de F_1' et s'approche de l'écran.

Pour que l'image définitive reste sur l'écran, il faut approcher la lentille divergente de l'écran, et donc diminuer d : $\boxed{d < d_\infty}$

b. Si $d_\infty = D$, les deux lentilles sont accolées, leur association est donc équivalente à une lentille unique de vergence la somme des vergences :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}, \text{ d'où } f' = \frac{f_1'f_2'}{f_1' + f_2'}.$$

Le plan focal image de cette lentille équivalente est confondue avec l'écran, par construction, donc :

$$\boxed{D = f' = \frac{f_1'f_2'}{f_1' + f_2'}}$$

A.N. : $D = 12$ cm.

3. a. Les positions limites de la lentille L_2 correspondent aux deux valeurs extrêmes $d = 0$ et $d = D$. Dans le cas où $d = 0$, l'image intermédiaire A_1B_1 est confondue avec $A'B'$ (l'objet virtuel pour L_2 et son image réelle $A'B'$ sont tous deux dans le plan de la lentille : $A_1 = A' = O_2$).

La relation de conjugaison de Descartes pour la lentille L_1 donne alors $\dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{f_1'}$,

avec $\overline{O_1A_1} = D = \dfrac{f_1'f_2'}{f_1' + f_2'}$.

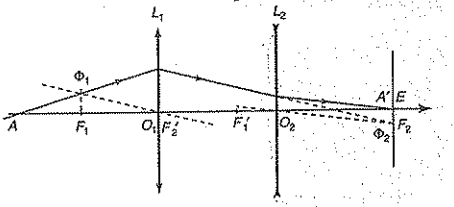
Il vient alors $\boxed{\overline{O_1A} = f_2'}$.

A.N. : $\overline{O_1A} = -6$ cm.

Dans le cas où $d = D$, on a une mise au point à l'infini. La plage de mise au point est donc entre l'infini et 6 cm avant la lentille L_1.

b. La construction est réalisée ci-dessous.

Détermination de la position de A



On trace un rayon quelconque passant par A'. Il émerge de la lentille L_2 parallèlement à un axe secondaire $(O_2\Phi_2)$, il passait donc, avant la lentille L_2 par le foyer secondaire objet Φ_2.

Ce même rayon émerge de L_1 parallèlement à un axe secondaire (Φ_1O_1), il passait donc, avant la lentille L_1 par le foyer secondaire objet Φ_1. On en déduit le rayon incident sur L_1. Son intersection avec l'axe optique donne alors la position du point A. Graphiquement, on trouve $\overline{O_1A} = -7{,}2$ cm. Par le calcul, on applique les relations de conjugaisons successives :

$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$. Pour la lentille L_2 :

on a $\dfrac{1}{\overline{O_2A'}} - \dfrac{1}{\overline{O_2A_1}} = \dfrac{1}{f_2'}$, dont on déduit que

$\overline{O_2A_1} = 3{,}0$ cm.

Pour la lentille L_1 : on a $\dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{f_1'}$,

dont on déduit que $\overline{O_1A} = -7{,}2$ cm.

8 **1.** On a les conjugaisons successives :
$A \xrightarrow{L} A_0 \xrightarrow{M} A_1$. Pour la lentille, la relation de conjugaison de Descartes avec origine au centre O donne :

$$\frac{1}{\overline{OA_0}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Il vient donc $\frac{1}{\overline{OA_0}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{p}$, et $\overline{OA_0} = \frac{pf'}{p+f'}$.

La relation de conjugaison pour le miroir plan donne $\overline{SA_0} + \overline{SA_1} = 0$. Il vient :

$$\overline{SO} + \overline{OA_0} + \overline{SO} + \overline{OA_1} = 0$$
$$\overline{OA_1} = 2\overline{OS} - \overline{OA_0}.$$

Or $\overline{OA_0} = \frac{pf'}{p+f'}$ et $\overline{OS} = 2f'$ par construction.

Par conséquent :

$$\overline{OA_1} = 4f' - \frac{pf'}{p+f'}$$
$$\overline{OA_1} = \frac{4pf' + 4(f')^2 - pf'}{p+f'}$$
$$\overline{OA_1} = \frac{3pf' + 4(f')^2}{p+f'}$$

On obtient donc la réponse **a.** : $\boxed{\overline{OA_1} = \frac{(3p+4f')f'}{p+f'}}$

2. A_1 était l'image après réflexion sur le miroir, la lumière retraverse encore la lentille L : $A_1 \xrightarrow{L_{inv}} A_2$.
La relation de conjugaison de Descartes pour la lentille, prise dans le sens inverse donne alors :

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{\overline{OF'_{inv}}}$$

Le foyer image F'_{inv} de la lentille prise de droite à gauche est confondu avec le foyer objet F de la lentille prise dans le sens direct. Par conséquent $\overline{OF'_{inv}} = \overline{OF} = -f'$.

Il vient $\overline{OA_2} = \frac{\overline{OA_1} \times \overline{OF'_{inv}}}{\overline{OA_1} + \overline{OF'_{inv}}}$, avec $\overline{OA_1} = \frac{(3p+4f')f'}{p+f'}$:

$$\overline{OA_2} = \frac{(3p+4f')f'}{p+f'} \times (-f') \times \frac{1}{\frac{(3p+4f')f'}{p+f'} - f'}$$
$$\overline{OA_2} = -\frac{(3p+4f')(f')^2}{p+f'} \times \frac{p+f'}{(3p+4f')f' - f'(p+f')}$$
$$\overline{OA_2} = -\frac{(3p+4f')f'}{2p+3f'}$$

On obtient la réponse **b.** : $\boxed{\overline{OA_2} = -\frac{f'(3p+4f')}{2p+3f'}}$

3. Pour que l'image définitive A_2B_2 soit dans le plan de front de l'objet AB, il faut que $\overline{OA_2} = \overline{OA} = p$.

Cela se traduit par :

$$-\frac{f'(3p+4f')}{2p+3f'} = p$$
$$-f'(3p+4f') = p(2p+3f')$$
$$2p^2 + 6pf' + 4(f')^2 = 0.$$

La bonne réponse est donc la réponse **d.** :

$$\boxed{p^2 + 3f'p + 2f'^2 = 0}$$

4. L'équation précédente $p^2 + 3f'p + 2f'^2 = 0$ a pour racines :

- $p_1 = \frac{-3f' - \sqrt{9(f')^2 - 8(f')^2}}{2}$
  $p_1 = \frac{-3f' - f'}{2}$
  $p_1 = -2f'$;
- $p_2 = \frac{-3f' + \sqrt{9(f')^2 - 8(f')^2}}{2}$
  $p_2 = \frac{-3f' + f'}{2}$
  $p_2 = -f'$.

L'application numérique donne les réponses **b. et d.** : $p_1 = -20$ cm et $p_2 = -10$ cm.

5. Le grandissement global du système est donné par $\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{AB}}$. On décompose cette relation :

$$\gamma = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} \times \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_0B_0}} \times \frac{\overline{A_0B_0}}{\overline{AB}}$$

Le grandissement du miroir plan donne $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_0B_0}} = 1$.

Pour les lentilles, on a $\frac{\overline{A_0B_0}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA_0}}{\overline{OA}}$ et $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}}$.

Il vient donc, d'après les questions précédentes :

$$\gamma = -\frac{f'(3p+4f')}{2p+3f'} \times \frac{p+f'}{(3p+4f')f'} \times 1 \times \frac{pf'}{p+f'} \times \frac{1}{p}$$

On obtient la réponse **c.** : $\boxed{\gamma = -\frac{f'}{2p+3f'}}$

6. Pour les points de Bravais, on a établi que $p_1 = -2f'$ et $p_2 = -f'$. On obtient donc les grandissements correspondants :

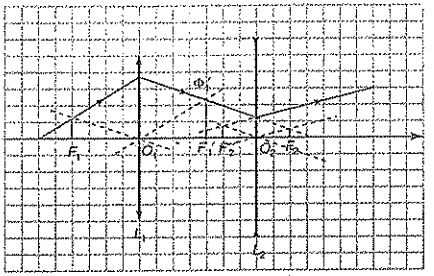
- $\gamma_1 = -\frac{f'}{2p_1 + 3f'} = -\frac{f'}{-4f' + 3f'}$
  $\gamma_1 = 1$
- $\gamma_2 = -\frac{f'}{2p_2 + 3f'} = -\frac{f'}{-2f' + 3f'}$
  $\gamma_2 = -1$

On a les réponses **a. et c.** : $\gamma_1 = 1$ et $\gamma_2 = -1$.

9 **1. a.** Le système est globalement *convergent* puisque le rayon émergent fait avec l'axe optique un angle inférieur à celui que fait le rayon incident avec l'axe optique.

b. Pour compléter le trajet du rayon lumineux sur le schéma, il suffit de prolonger les rayons incident et émergent jusqu'aux lentilles, puis de relier les deux points d'intersection.

Marche du rayon lumineux



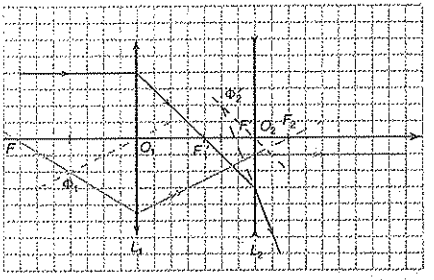
c. On en déduit que la première lentille rapproche le rayon incident de l'axe optique : elle est *convergente*. La seconde lentille écarte le rayon de l'axe optique : elle est *divergente*.

d. Pour trouver la position du foyer image de la première lentille, on trace le rayon incident parallèle à celui donné sur la figure, mais passant par O_1. Il n'est pas dévié par la lentille L_1. Son intersection avec le rayon intermédiaire donne le foyer secondaire Φ_1', image d'un objet à l'infini hors de l'axe envoyant un faisceau de rayons parallèles. Il ne reste plus qu'à projeter ce point sur l'axe pour trouver, par aplanétisme la position du foyer principal image F_1' de la première lentille (figure ci-avant). On trouve alors le foyer objet F_1 en prenant le symétrique de F_1' par rapport à O_1. Ces deux foyers sont réels. On procède de même pour la deuxième lentille. On trouve bien des foyers virtuels, symétriques l'un de l'autre par rapport à O_2. On lit graphiquement $\overline{O_1F_1'} = +4{,}0$ cm et $\overline{O_2F_2'} = -2{,}0$ cm.

e. Le foyer objet F du système global est le point de l'axe optique dont l'image par le système global est renvoyée à l'infini sur l'axe optique : $F \xrightarrow{L_1+L_2} A_\infty'$.

Pour le trouver graphiquement, on trace la marche d'un rayon émergent parallèlement à l'axe optique. Un tel rayon parallèle à l'axe optique après la lentille L_2 arrivait donc sur la lentille L_2 en passant par F_2. Ce rayon émerge donc de L_1 de façon quelconque. On trace le rayon parallèle à ce rayon émergent quelconque, passant par O_1. Le rayon incident passe donc par un foyer secondaire objet Φ_1, intersection de ce rayon passant par O_1 et du plan principal objet de la première lentille.

Détermination des foyers de l'association



L'intersection de ce rayon incident sur L_1 avec l'axe optique donne la position du foyer objet global F.

On trouve graphiquement $\overline{O_1F} = -7{,}2$ cm. Le foyer image F' du système global est l'image d'un point objet à l'infini sur l'axe optique : $A_\infty \xrightarrow{L_1+L_2} F'$.

On le construit en traçant la marche d'un rayon incident parallèle à l'axe optique. Il émerge de la première lentille en passant par F_1', il arrive donc sur la lentille L_2 avec une incidence quelconque. On trace le rayon parallèle à celui-ci passant par O_2, ce qui permet de définir un foyer secondaire image Φ_2' par lequel le rayon émergent de L_2 doit passer (figure ci-avant).

On lit sur la figure $\overline{O_1F'} = 5{,}8$ cm.

f. On cherche désormais à déterminer la position des foyers de l'ensemble par le calcul. Pour le foyer objet, on a :

$$F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} A_\infty'$$

F est donc le conjugué par L_1 de F_2 :

$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{\overline{O_1F_1'}}.$$

Il vient $\overline{O_1F} = \dfrac{\overline{O_1F_1'} \times \overline{O_1F_2}}{\overline{O_1F_1'} - \overline{O_1F_2}}$.

Or $\overline{O_1F_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2}$, et par conséquent

$$\boxed{\overline{O_1F} = \frac{\overline{O_1F_1'} \times (\overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2})}{\overline{O_1F_1'} - (\overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2})}}$$

A.N. : $\overline{O_1F} = -7{,}2$ cm.

Pour le foyer image, on a :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_2} F'$$

Le foyer image global F' est donc le conjugué par la lentille L_2 du foyer image F_1' de la première lentille. La relation de conjugaison pour L_1 donne :

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{\overline{O_2F_2'}}$$

Il vient $\overline{O_2F'} = \dfrac{\overline{O_2F_2'} \times \overline{O_2F_1'}}{\overline{O_2F_2'} + \overline{O_2F_1'}}$.

Or $\overline{O_2F_1'} = \overline{O_1F_1'} - \overline{O_1O_2}$, et par conséquent

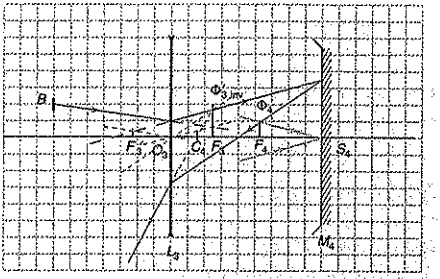
$$\overline{O_2F'} = \frac{\overline{O_2F_2'} \times (\overline{O_1F_1'} - \overline{O_1O_2})}{\overline{O_2F_2'} + (\overline{O_1F_1'} - \overline{O_1O_2})}$$

et $\boxed{\overline{O_1F'} = \overline{O_1O_2} + \dfrac{\overline{O_2F_2'} \times (\overline{O_1F_1'} - \overline{O_1O_2})}{\overline{O_2F_2'} + (\overline{O_1F_1'} - \overline{O_1O_2})}}$

A.N. : $\overline{O_1F'} = 5{,}8$ cm.

2. a. On poursuit le rayon réfléchi sur le miroir et le rayon incident sur la lentille, il suffit alors de joindre les intersections pour trouver le rayon intermédiaire entre la lentille et le miroir.

Marche du rayon lumineux dans le système $L_3 + M_4$



b. On détermine F_3' en traçant le rayon incident parallèle au rayon donné, passant par le centre optique de la lentille L_3. Ce dernier, non dévié, coupe le rayon émergent de la lentille en Φ_3', foyer secondaire image, donc la projection sur l'axe optique donne le foyer image F_3'. On trouve alors F_3 par symétrie. Ces deux foyers sont virtuels. On détermine graphiquement $\overline{O_3F_3'} = -2{,}5$ cm. Pour le miroir, on détermine la position du foyer de la même manière, en traçant le rayon incident parallèle à celui arrivant sur le miroir, mais passant par le sommet S_4 de ce dernier. Il se réfléchit symétriquement à l'axe optique. L'intersection des deux rayons réfléchis donne un foyer secondaire Φ_4, dans le plan focal du miroir. On détermine alors F_4 par simple projection sur l'axe optique. On peut alors placer le centre C_4 du miroir sachant que F_4 est le milieu du segment $[C_4S_4]$. Graphiquement, on lit alors $\overline{S_4F_4} = -3{,}7$ cm.

c. On construit alors le rayon émergent de la lentille en traçant un axe secondaire passant par O_3 auquel le rayon arrivant sur la lentille est parallèle. Cela permet de définir un foyer image secondaire de la lentille inversée $\Phi'_{3,inv}$ par lequel le rayon émergent doit passer (figure ci-dessus). Le système est globalement divergent, car le rayon émergent de l'ensemble du système fait avec l'axe optique un angle supérieur à celui du rayon incident sur le système.

d. Puisque les foyers obtenus sont virtuels, la lentille L_3 est *divergente*. Le miroir sphérique est quand à lui concave, vu la position du foyer F_4, il est donc *convergent*.

e. Si le centre C_4 du miroir est confondu avec le centre O_3 de la lentille, alors un rayon passant par O_3 n'est dévié ni par la lentille ni par le miroir. L'image finale B' d'un point B par l'ensemble de ce système est donc situé sur la droite (O_3B).

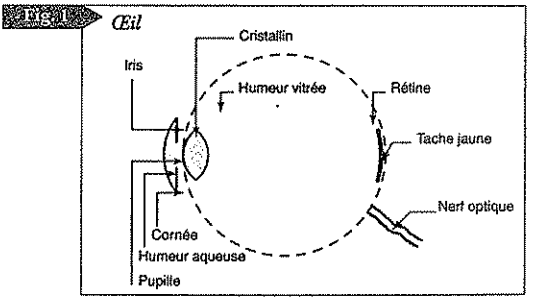
Instruments d'optique

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude des instruments d'optique, à commencer par celui que nous utilisons sans même y penser, l'œil. On verra ensuite des notions sur les différents systèmes optiques utilisés en travaux pratiques, ou dans la vie quotidienne.

1 Notions sur l'œil

1.1. Œil normal ou emmétrope

L'œil est un système optique complexe, essentiellement constitué des éléments suivants (figure 1) :
– la cornée et le cristallin, le tout équivalent à un système convergent, de vergence variable grâce à un système musculaire. La vergence est de l'ordre de $+20\delta$;
– la pupille, dont la taille s'adapte à la luminosité de l'objet observé, permettant de diaphragmer les rayons incidents ;
– la rétine, constituée de cônes et de bâtonnets, est la zone où se forme l'image par le cristallin ;
– le nerf optique enfin, il transmet l'information au cerveau, qui va avoir pour tâche de décoder les informations simultanées fournies par les deux yeux, donnant ainsi la notion de relief et de distance notamment.



Le champ angulaire de l'œil est très grand, de l'ordre de 40 à 50°, mais la zone dans laquelle les images doivent se former pour être perçues de manière fine correspond à la tache jaune, au voisinage de l'axe optique, ce qui limite la zone de visibilité fine.
La rétine est située au foyer du cristallin, et l'œil au repos observe donc des objets à l'infini. Il s'agit du *punctum remotum* (PR). Cependant, comme le cristallin peut se déformer, on peut observer des images nettes d'objets bien plus près, jusqu'au *punctum proximum* (PP), correspondant à une accommodation maximale. Pour un œil adulte normal, cela correspond à une distance d_m = 25 cm environ. C'est du moins la norme utilisée pour définir les conditions d'utilisation d'un instrument d'optique commercial.
Pour un œil normal, ou emmétrope, la vision nette est possible pour des objets situés entre 25 cm (PP) et l'infini (PR).

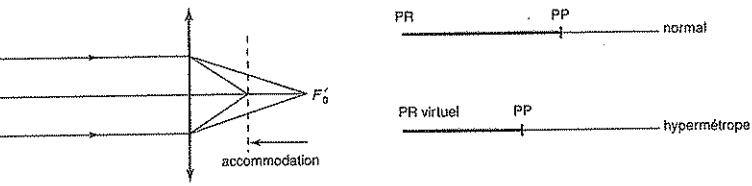
1.2. Défauts de l'œil

Il existe un certain nombre de défauts de l'œil, dont certains sont dus au vieillissement. On peut distinguer les cas suivants :
• *la myopie* : le cristallin est dans ce cas trop convergent et l'image d'un objet à l'infini se forme avant la rétine, ce qui a pour effet de rapprocher le *punctum remotum* (PR). De la même façon, le *punctum proximum* (PP) est également plus proche que dans le cas d'un œil emmétrope (figure 2) ;

Fig. 2 *Œil myope*

• *l'hypermétropie* : le cristallin est ici trop peu convergent, et même pour un objet à l'infini, l'œil hypermétrope doit accommoder. Le *punctum proximum* (PP) est lui aussi plus éloigné que pour un œil emmétrope (il est donc virtuel, situé derrière l'œil, figure 3) ;

Fig. 3 *Œil hypermétrope*



• *la presbytie* : il s'agit d'un défaut d'accommodation de l'œil, dû au vieillissement. Petit à petit, le système musculaire qui assure l'accommodation perd son efficacité, le PP s'éloigne. La seule zone de vision finit par correspondre uniquement au *punctum remotum* (PR), soit à la vision de loin ;
• *l'astygmatie* : l'œil n'est pas rigoureusement sphérique, ce qui provoque des phénomènes d'aberrations géométriques.

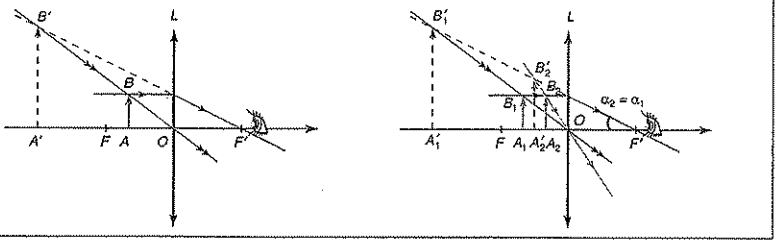
Ces différents défauts peuvent être corrigés par le port de lunettes adaptées (divergentes pour la myopie, convergentes pour l'hypermétropie, à double foyer, ou verres progressifs pour la presbytie et des verres non sphériques pour corriger l'astigmatie).
On ne considèrera par la suite que des yeux emmétropes, ou dont les défauts sont corrigés.

2 Loupe – Oculaire

2.1. Caractéristiques de la loupe

Une loupe est une lentille convergente utilisée pour observer des objets situés entre le foyer objet et le centre optique. L'image fournie est alors virtuelle, et agrandie (figure 4 à gauche), ce qui permet une meilleure observation de l'objet par l'œil, généralement placé au voisinage du foyer image de la loupe, de façon à ce que le diamètre angulaire de l'image soit toujours le même (figure 4 à droite).

Fig. 4 *Observation d'un objet AB à l'aide d'une loupe*



° La *mise au point* correspond à une observation nette par l'œil, il faut donc que l'image virtuelle soit située entre le PP et le PR de l'observateur.
Les deux positions extrêmes de l'objet correspondent à la *latitude de mise au point* de la loupe, ou encore à la *profondeur de champ*, notée ℓ.

On démontre aisément que $\boxed{\ell = \dfrac{f'^2}{d_m}}$

Remarque : cette démonstration est faite dans la partie « Savoir appliquer le cours ».

° Le *grossissement* de la loupe est défini par le rapport des diamètres angulaires de l'objet vu à travers la loupe et de l'objet vu à l'œil nu. Par définition du grossissement commercial, l'objet vu à l'œil nu est placé au *punctum proximum* (pris à 25 cm par convention), et l'observation à travers l'instrument d'optique se fait sans accommodation, avec une image qui doit donc être située au *punctum remotum*.

° La *puissance* d'un instrument d'optique est définie par le rapport du diamètre apparent de l'image à la taille de l'objet. Pour un objet *AB*, dont l'image observée par l'œil, à travers l'instrument considéré, a un diamètre angulaire α', la puissance est donc donnée par $\boxed{P = \dfrac{\alpha'}{AB}}$

On parle de *puissance intrinsèque* lorsque l'image est renvoyée à l'infini, l'objet *AB* est alors dans le plan focal de la loupe, et on a $\boxed{P = \dfrac{1}{f'} = V.}$

La loupe présente un certain *pouvoir séparateur*. En effet, pour que deux objets soient distingués par l'œil, il faut que leurs images sur la rétine se forment sur deux cellules différentes de la rétine. Cette restriction impose un diamètre angulaire minimum α_m pour l'observation, ce qui se traduit par une taille minimale pour un objet au-delà duquel il sera résolu.

On parle de limite de résolution, et il faut donc que $\boxed{AB_m = \frac{\alpha'}{P} = \alpha_m f'.}$

2.2. Oculaire

L'oculaire est un instrument d'optique permettant l'observation d'une image agrandie. Il est constitué de deux lentilles convergentes : une lentille de champ et une lentille de vue (placée du côté de l'œil).
Pour que l'observation se fasse sans accommodation, il faut que l'image intermédiaire par la première lentille se trouve dans le plan focal objet de la seconde lentille. Pour effectuer ce réglage, un réticule (deux fils croisés) ou bien une règle micrométrique, est placé(e) dans ce plan focal et doit être observé(e) de façon nette par l'opérateur.
En général, on modélise ce système de deux lentilles par une lentille unique, afin de simplifier la compréhension des montages.

3 Observations d'objets et d'images

En travaux pratiques, on utilise un ensemble de systèmes optiques permettant la visualisation d'images nettes, et la détermination des paramètres de systèmes optiques inconnus (focométrie par exemple), grâce à une observation plus précise que simplement à l'œil nu.

3.1. Condenseur et collimateur

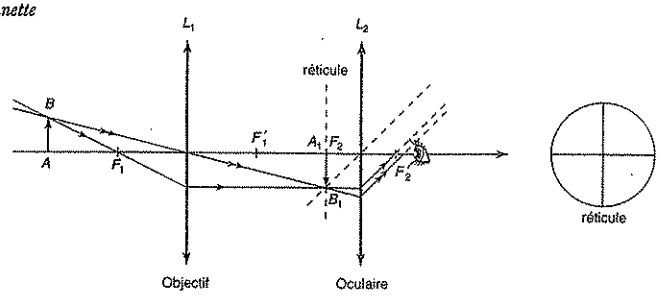
Pour former un objet d'optique, on travaille avec un *condenseur*, système de deux lentilles convergentes accolées permettant d'éclairer de manière uniforme un objet donné. Cet objet diffuse la lumière reçue de la source, et est donc un objet secondaire.
On travaille généralement avec des objets à l'infini, ce qui est nécessaire pour le réglage de la plupart des instruments utilisés. Pour former un objet à l'infini à partir d'un objet quelconque, il suffit de placer ce dernier au foyer objet d'une lentille convergente, qui va en former une image à l'infini, qui jouera le rôle d'objet pour le système optique suivant.
Le système (lentille + petit objet dans son plan focal objet) qui forme un faisceau quasi-parallèle est appelé *collimateur*.

3.2. Lunette

Une lunette est schématiquement constituée de deux lentilles convergentes (figure 5) :
– l'*objectif*, qui, comme son nom l'indique, est placé du côté de l'objet AB, et donne de ce dernier une image intermédiaire A_1B_1 ;
– l'*oculaire*, placé quant à lui du côté de l'œil, et qui fournit l'image définitive $A'B'$.
Une lunette comporte également un *réticule*, constitué de deux fils croisés, qui permet les différents réglages.

Remarque
L'oculaire est en réalité constitué lui-même de deux lentilles convergentes non accolées, équivalentes à une lentille unique.

Fig. 5 *Lunette*



La lunette est dite *lunette de visée à l'infini* lorsqu'elle forme un système afocal, qui renvoie donc à l'infini l'image d'un objet à l'infini. Le foyer image de l'objectif doit donc être confondu avec le foyer objet de l'oculaire :

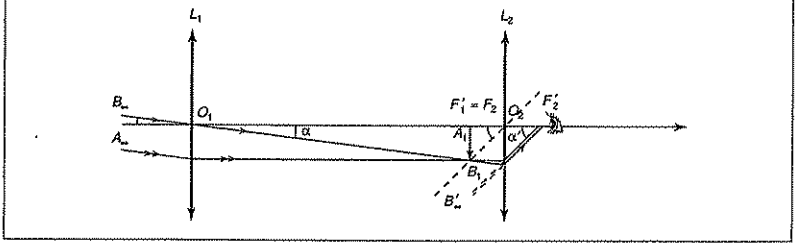
$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty.$$

Pour effectuer le réglage, on commence par placer le réticule dans le plan focal objet de l'oculaire. Ensuite, on forme l'image d'un objet à l'infini (par exemple fourni par un collimateur) en faisant coïncider l'image intermédiaire A_1B_1 et le réticule. L'image intermédiaire se trouve alors dans le plan focal objet de l'oculaire, et ce dernier en fournit une image définitive à l'infini.

Si l'on ne dispose pas d'objet à l'infini, on peut utiliser un miroir d'*autocollimation*. On commence toujours par placer le réticule dans le plan focal objet de l'oculaire. Il s'agit ensuite de déplacer l'objectif de telle sorte que son plan focal image coïncide avec le plan focal objet de l'oculaire. Il suffit de placer un miroir devant l'objectif et de placer l'image du réticule dans le même plan que le réticule lui-même. On a alors une *lunette autocollimatrice*.

Les *lunettes astronomiques* sont des lunettes de visée à l'infini, pour l'observation d'astres, par définition éloignés, mais avec un objectif de très grande distance focale, ce qui permet un grossissement angulaire important (figure 6).

Fig. 6 *Lunette astronomique*



Constituée de deux lentilles convergentes, la lunette astronomique donne toujours une image renversée.

Les sytèmes de type *lunette de Galilée* ou bien certaines *jumelles* sont également des systèmes afocaux, mais ils utilisent un oculaire divergent, ce qui permet de réduire l'encombrement global du système et d'obtenir également une image droite qui rend l'observation plus confortable.

3.3. Viseur

Le *viseur à frontale fixe* est une lunette permettant l'observation d'un objet à distance finie. Le système n'est plus afocal, et l'objet est placé au foyer objet du système global pour permettre à l'œil une observation sans accommodation.
On a la conjugaison suivante :

$$A(F) \xrightarrow{\text{objectif}} A_1(F_2) \xrightarrow{\text{oculaire}} A'_\infty$$

On fixe la distance objectif-oculaire, et par conséquent la position du foyer de l'ensemble F. C'est pourquoi on parle de viseur à frontale fixe, car pour être observé de façon nette (image intermédiaire dans le même plan que le réticule), l'objet doit être à une distance bien déterminée de l'objectif.
On peut alors mesurer la distance entre deux points en mesurant la distance dont on a dû déplacer le viseur pour viser successivement ces deux positions. Lorsque l'objet AB en question est virtuel, cette technique permet de remplacer la matérialisation de AB sur un écran, possible uniquement dans le cas d'un objet réel.

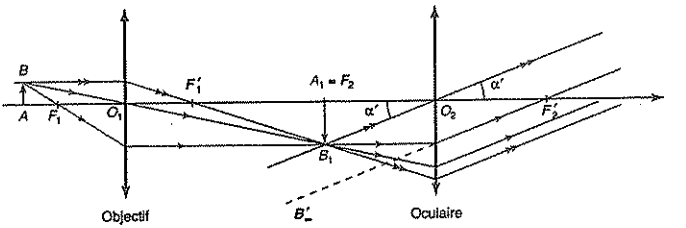
3.4. Projecteur

Lorsque l'on souhaite projeter l'image d'un objet de petite taille sur un écran, on utilise un dispositif constitué :
– d'une lentille de projection, convergente, pour agrandir l'objet ;
– d'un système d'éclairage de l'objet afin d'accentuer sa luminosité (condenseur), tel que les rayons provenant de la source éclairent l'objet dans sa totalité, et viennent converger au voisinage du centre optique de la lentille de projection, afin que celle-ci soit utilisée dans les conditions de Gauss ;
– d'un écran pour recueillir l'image (réelle) projetée.
Pour éviter les phénomènes d'aberrations géométriques, on utilise généralement un diaphragme au voisinage de la lentille de projection, et pour limiter les phénomènes d'aberrations chromatiques (irisation de l'image lorsque l'objet est éclairé en lumière blanche), on utilisera une lentille achromatique.

3.5. Microscope

Le microscope est un dispositif optique dont le but est l'observation d'objets à distance finie. Il est constitué d'un ensemble de deux lentilles convergentes, un objectif et un oculaire (figure 7). La plupart des microscopes possèdent plusieurs objectifs interchangeables, pour réaliser des grossissements différents.

Fig. 7 *Schéma de fonctionnement d'un microscope*



Remarque
On se reportera à l'exercice 3 de la rubrique « Savoir résoudre les exercices ».

L'œil est placé au foyer image de l'oculaire, et on règle l'appareil par déplacement de l'ensemble des deux lentilles.

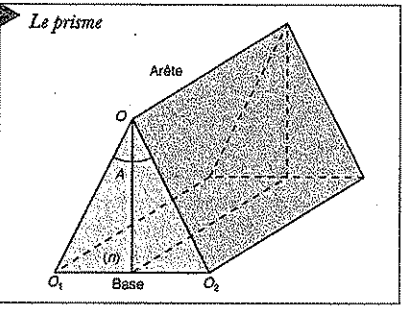
4 Goniomètre et spectroscope à prisme

Ces deux instruments d'optique, permettant des mesures d'angle, ou bien des mesures de longueur d'onde, utilisent un système optique particulier, le prisme.

4.1. Le prisme

Le prisme est une portion de milieu homogène transparent isotrope (MHTI) délimité par deux plans faisant entre eux un angle A, appelé angle du prisme. Cet angle est généralement voisin de 60° pour l'utilisation dans un goniomètre ou dans un spectroscope. La section du prisme est un triangle isocèle (figure 8).

Fig. 8 *Le prisme*



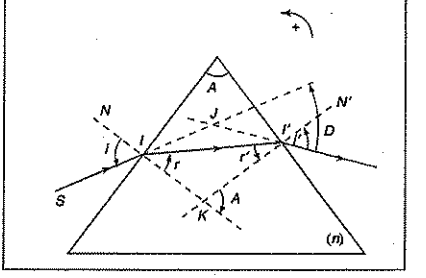
Un prisme est généralement constitué de verre, et présente un indice qui varie avec la longueur d'onde. On parle de dispersion.

4.1.1. Déviation d'une onde monochromatique

Considérons un rayon incident sur un prisme, d'angle A et d'indice n, arrivant au point I, comme sur la figure 9. Il subit une réfraction à son entrée dans le prisme, puis à nouveau en I' pour en ressortir. L'angle que fait le rayon émergent avec le rayon incident est appelé *déviation* et est noté D.

Remarque
Le rayon est toujours dévié vers la base du prisme.

Fig. 9 *Le prisme : marche d'un rayon lumineux*



Soit J le point d'intersection des prolongements des rayons incident et émergent, et K le point d'intersection des normales aux faces du prisme en I et I'.
L'application des lois de Snell-Descartes en I et I' donne :

$$\sin i = n \sin r$$
$$n \sin r' = \sin i'$$

D'autre part, la somme des angles dans les triangles IKI' et JJI' donne les deux relations suivantes :

$$r + r' + \pi - A = \pi \quad \text{soit} \quad r + r' = A$$
$$i - r + i' - r' + \pi - D = \pi \quad \text{soit} \quad D = i + i' - A$$

Pour de petits angles, on assimile le sinus à l'angle et on obtient $i = nr$, $i' = nr'$ et

$$\boxed{D = (n-1)A.}$$

La déviation (quelconque, pas nécessairement aux petits angles) par le prisme dépend :
- de l'angle du prisme (fixé) ;
- de l'indice du milieu constitutif (fixé en lumière monochromatique) ;
- de l'angle d'incidence (variable).

On constate expérimentalement que la déviation passe par un minimum D_m lorsque l'on fait varier l'incidence. Les rayons émergent et incident sont alors symétriques par rapport au plan de symétrie du prisme, le rayon II' étant parallèle à sa base.

Remarque
Ce résultat sera revu dans la partie « Savoir appliquer le cours ».

On montre alors que $i = i'$, et $r = r'$, et l'indice du prisme est alors donné par :

$$\boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

La mesure, en lumière monochromatique, de A et D_m permet donc une détermination de l'indice du prisme (pour la longueur d'onde utilisée).

4.1.2. Dispersion d'une onde polychromatique

Si l'on travaille en lumière polychromatique (lumière blanche d'une lampe à incandescence ou bien lampe spectrale), en maintenant l'incidence fixe, on constate que la lumière est dispersée, puisque la déviation est fonction de l'indice, lui-même fonction de la longueur d'onde.

On constate que la déviation est fonction décroissante de la longueur d'onde :
$D_{(\text{rouge})} < D_{(\text{violet})}$.

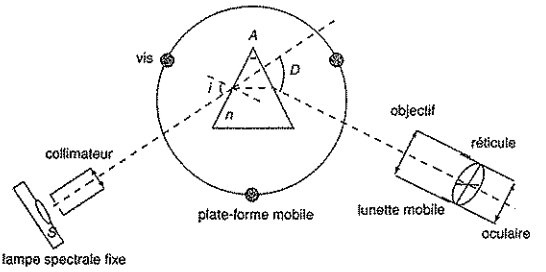
Le prisme dévie plus le violet que le rouge.

C'est cette propriété qui est mise à profit dans le spectroscope à prisme.

4.2. Le goniomètre

Il s'agit d'un système optique permettant la mesure d'angles. Il est constitué (figure 10) :
- d'un collimateur, fournissant un faisceau de lumière parallèle ;
- d'une plate-forme mobile, sur laquelle est posée un prisme ;
- d'une lunette de visée à l'infini, dont la position sur le plateau circulaire est repérée à l'aide d'un vernier.

Fig. 10 *Le goniomètre*

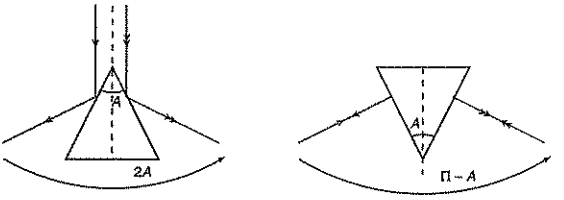


Ce dispositif permet la **mesure de l'angle au sommet** A du prisme. On peut procéder de deux façons différentes :

1. on utilise le collimateur et on place l'arête du prisme dans sa direction, de telle sorte que le faisceau lumineux se répartisse de façon approximativement identique sur les deux faces du prisme. Il reste alors à viser, avec la lunette réglée à l'infini, les deux images obtenues par réflexion sur ces deux faces. Les deux positions correspondantes de la lunette sont séparées d'un angle $2A$ (figure 11 à gauche) ;

2. on vise successivement les deux faces du prisme par réflexion grâce à la lunette de visée à l'infini, et on réalise une autocollimation sur ces deux faces. Les deux positions correspondantes de la lunette sont séparées d'un angle $\pi - A$ (figure 11 à droite).

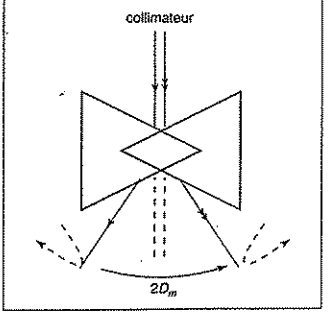
Fig. 11 *Mesure de A*



Une fois l'angle au sommet du prisme évalué, on peut effectuer la **mesure de l'indice du prisme pour une longueur d'onde donnée.**

On se place en lumière monochromatique, et on fait varier l'angle d'incidence jusqu'à obtenir le minimum de déviation. On effectue alors la même manipulation, mais de manière symétrique, en utilisant l'autre face du prisme. Les deux positions correspondantes de la lunette de visée sont alors séparées par un angle $2D_m$ (figure 12).

Fig. 12 *Mesure de D_m*



Sachant que $n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)}$, la mesure de A et D_m donne accès à la valeur de n.

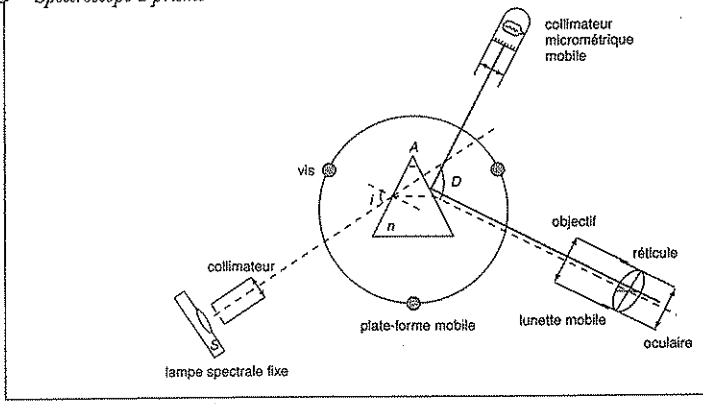
En travaillant avec plusieurs longueurs d'onde successives, on obtient alors une courbe de dispersion $n(\lambda)$ du milieu constitutif du prisme.

Remarque
Voir exercice 10 de la rubrique « S'entraîner ».

Le *spectroscope à prisme* est un instrument d'optique destiné à l'observation qualitative et quantitative de spectres. Il est presque constitué des mêmes éléments que le goniomètre. On lui adjoint simplement un collimateur micrométrique qui permet de repérer plus facilement la position des raies spectrales (figure 13).

Pour l'utiliser, il faut réaliser un *étalonnage* préalable, grâce à des lampes spectrales dont les raies ont des longueurs d'onde connues, ce qui permet d'établir une relation entre la graduation du micromètre et la longueur d'onde de la raie.

Fig. 13 *Spectroscope à prisme*



Ensuite, on peut passer à la mesure de longueurs d'ondes de raies spectrales inconnues, en évaluant la déviation lue sur la graduation du micromètre et en la reportant sur la courbe d'étalonnage.

Remarque : une mesure absolue de longueur d'onde est impossible avec un spectroscope à prisme.

Avant la colle

Tester ses connaissances

➢ *corrigés p. 176*

1 Pour un œil myope :

- ☐ **a.** il est plus facile de lire les petits caractères d'un journal.
- ☐ **b.** il est plus facile d'observer les étoiles filantes.
- ☐ **c.** la correction est faite par une lentille divergente.
- ☐ **d.** la correction est faite par une lentille convergente.

2 Un œil hypermétrope :

- ☐ **a.** peut voir des objets réels très proches de l'œil.
- ☐ **b.** n'a pas de *punctum remotum* (PR).
- ☐ **c.** est corrigé par une lentille divergente.
- ☐ **d.** est corrigé par une lentille convergente.

3 Plus la distance focale image d'une loupe est grande :

- ☐ **a.** plus il faut rapprocher l'objet de la loupe.
- ☐ **b.** plus sa profondeur de champ est grande.
- ☐ **c.** plus l'image est grossie.

4 Une lunette est dite réglée à l'infini lorsque :

- ☐ **a.** l'objectif et l'oculaire sont infiniment éloignés l'un de l'autre.
- ☐ **b.** le foyer objet de l'objectif est confondu avec le foyer objet de l'oculaire.
- ☐ **c.** le foyer image de l'objectif est confondu avec le foyer objet de l'oculaire.
- ☐ **d.** elle est afocale.

5 On considère un prisme éclairé en lumière blanche.

- ☐ **a.** Les rayons sont déviés vers la base du prisme.
- ☐ **b.** Les rayons sont déviés vers l'arête du prisme.
- ☐ **c.** Le rouge est plus dévié que le violet.
- ☐ **d.** Le violet est plus dévié que le rouge.

6 On éclaire un prisme sous une incidence variant de 0° à 90°.

- ☐ **a.** La déviation est une fonction monotone croissante de l'angle d'incidence.
- ☐ **b.** Il existe un minimum de déviation.
- ☐ **c.** Il existe un angle d'incidence limite au-delà duquel il y a réflexion totale sur la face d'entrée du prisme.

Savoir appliquer le cours

➢ corrigés p. 176

1 Montrer que la profondeur de champ d'une loupe de focale f', utilisée par un œil emmétrope, de PP distant de d_m est $\ell = \dfrac{f'^2}{d_m}$.

On supposera que l'utilisateur place son œil au niveau du foyer image F' de la lentille.

2 Soit un myope possédant un champ de vision compris entre :

$d_m = 10\,\text{cm}$ (PP) et $D_M = 1{,}0\,\text{m}$ (PR).

1. À quelle distance doit-il placer une photographie pour en percevoir le plus de détails ?

2. L'œil myope est équipé d'une lentille correctrice de vergence $V = -1{,}0\delta$. Le système œil-lentille correctrice est assimilé à deux lentilles accolées.

Quels sont les nouveaux PP et PR de l'œil corrigé ?

3. Au lieu d'utiliser ses lentilles de contact, le myope utilise une loupe de vergence $V = +20\delta$, en plaçant son œil au foyer image de la loupe.

Déterminer la profondeur de champ de l'association « œil myope non corrigé-loupe ».

3 Un observateur emmétrope regarde un petit objet AB transversal de longueur ℓ. On note d_m la distance de son *punctum proximum*.

1. Dans un premier temps, il observe cet objet directement à l'œil nu.

Déterminer l'angle maximal α_m sous lequel l'objet peut être vu.

2. L'observateur regarde désormais AB à travers une loupe, lentille convergente de distance focale f' et de centre O. Son œil est situé à une distance $a < d_m$ de la loupe.

a. Déterminer les positions de l'objet rendant possible l'observation d'une image nette par l'œil emmétrope.

Faire une construction géométrique de l'image. Est-elle droite ou renversée ?

b. Pour quelle position de l'objet l'observation se fait-elle sans accommodation ?

Exprimer l'angle α' sous lequel l'œil voit l'image.

4 Un viseur est constitué d'un objectif et d'un oculaire de même axe optique (Ox).

L'objectif est assimilé à une lentille convergente L_1, de centre O_1 et de distance focale f'_1. L'oculaire est quant à lui assimilé à une lentille convergente L_2, de centre O_2 et de distance focale f'_2.

On pose $\overline{O_1O} = D$ et $\overline{OO_2} = d$, les distances D et d étant positives et réglables.

Dans un plan transverse passant par O est disposé un réticule, constitué de deux traits fins perpendiculaires.

L'observateur place son œil (emmétrope, dont le PP est à d_m) à une distance a derrière l'oculaire, avec $a < d_m$.

1. Quel est l'intervalle de valeurs de d permettant à l'observateur de voir le réticule net à travers l'oculaire ?

Où doit-on placer le réticule pour l'observer sans accommodation ?

2. Le réticule est placé pour permettre une observation sans accommodation. On souhaite observer à travers le viseur un objet A situé sur l'axe optique à l'abscisse $x = \overline{OA}$. L'image intermédiaire doit se trouver dans le plan du réticule.

a. Montrer que $x \leqslant -4f'_1$.

b. Déterminer l'expression de D en fonction de x.

c. En déduire la plage de réglage de la distance D que le constructeur doit prévoir.

5 Dans le cas d'un prisme d'angle au sommet A et d'indice n, éclairé en lumière monochromatique, établir l'expression de l'indice du prisme en fonction de l'angle minimum de déviation D_m.

1 – L'œil et ses défauts

L'œil normal, ou emmétrope, observe sans accommoder des objets situés à l'infini. En accommodant, il peut voir des objets plus proches, jusqu'à son *punctum proximum* (distance d_m).

Partie A – Œil normal

1 Le pouvoir séparateur angulaire d'un œil normal est de l'ordre de $\Delta\alpha = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$ rad. En déduire un ordre de grandeur de la taille caractéristique h d'une cellule rétinienne, en assimilant le cristallin à une lentille convergente de focale $f' = 1{,}5$ cm.

2 Soit un objet A situé à une distance $d > d_m$ de cet œil. Si R est le rayon de la pupille, qui joue le rôle d'un diaphragme, déterminer le rayon r de la tache image associée à l'objet A si l'œil n'accommode pas.

3 On considère que l'objet A ponctuel est vu de façon nette si $r < h$. Justifier ce critère.
Si $R = 1{,}0$ mm, calculer la distance minimale d'un objet qui est vu net en même temps qu'un autre objet à l'infini.
Conclure sur la profondeur de netteté de l'œil.

Partie B – Myopie et presbytie (vieillissement)

Un œil myope est un œil dont le cristallin est trop convergent. Son *punctum proximum* (d_m) et son *punctum remotum* (D_M) sont plus proches de l'œil que pour un œil emmétrope.
Avec l'âge, le champ de vision d'un œil emmétrope ou myope est réduit par la presbytie, qui caractérise la diminution de la capacité du cristallin à se déformer pour permettre l'accommodation.
On modélise le cristallin par une lentille de focale f'_0 constante pour l'œil presbyte, et la rétine par un écran situé à la distance $d_0 = 15$ mm du cristallin.

1 Un œil normal presbyte voit net un objet situé à l'infini, alors qu'un œil myope presbyte voit net un objet situé en son *punctum remotum* ($D_M = 15$ cm).
Dans les deux cas, quelle est la relation entre f'_0 et d_0 ?

2 Une personne presbyte lit un journal placé à 25 cm de ses yeux. Le rayon r_0 de la pupille de l'œil est de 1,0 mm.
Calculer le diamètre de la tache image, sur la rétine, d'un point du journal, pour un œil myope et pour un œil normal.
Conclure.

Partie C – Hypermétropie

Un œil hypermétrope est un œil dont le cristallin n'est pas assez convergent, ce qui a comme conséquence de repousser son *punctum proximum* par rapport à un œil normal.
Considérons un œil hypermétrope dont le PP est à 50 cm. En accommodant, il fait varier sa vergence de $\Delta V = 4\delta$.

1 Quelle doit être la vergence d'un verre correcteur placé à 1,0 cm du cristallin pour que le PR de l'ensemble soit à l'infini ?

2 Où est alors situé le PP de l'œil corrigé ?

3 Comment ces résultats sont modifiés si l'on utilise une lentille de contact ?

résolution méthodique

Partie A

1 Le cristallin est assimilé à une lentille convergente de focale f'.

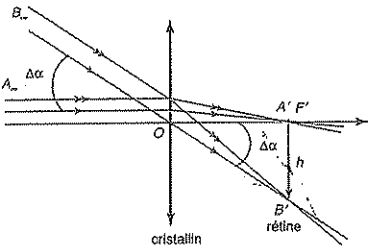
Pour que l'œil n'ait pas à accommoder, il faut que l'objet qu'il observe soit placé au PR (*punctum remotum*), et pour un œil normal, ou emmétrope, ce PR est à l'infini. La rétine est alors placée dans le plan focal de la lentille équivalente au cristallin.

Deux objets à l'infini, A_∞ sur l'axe, et B_∞ hors de l'axe seront séparés par l'œil, c'est-à-dire vus comme deux points distincts si l'angle que font les rayons issus de B_∞ avec ceux issus de A_∞ est au moins égal à $\Delta\alpha$. Ces deux objets à l'infini ont une image sur la rétine, dans le plan focal du cristallin, A' étant au foyer image. Ils seront distingués s'ils sont perçus par deux cellules rétiniennes différentes.

Ils sont donc au moins distants de h, la taille caractéristique recherchée.

La figure suivante représente la configuration étudiée.

Taille de l'image sur la rétine d'un objet à l'infini



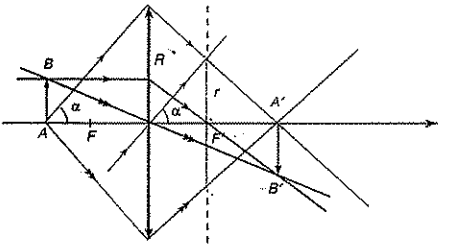
Il vient immédiatement $\tan(\Delta\alpha) = \dfrac{h}{f'}$. Or, comme on travaille dans les conditions de Gauss, on peut assimiler l'angle à sa tangente.

Par conséquent $\boxed{h = f'\Delta\alpha}$

A.N. : $h = 7{,}5 \cdot 10^{-6}$ m.

2 On considère maintenant un objet A situé à une distance comprise entre le PR et le PP (*punctum proximum*). Comme l'œil n'accommode toujours pas, l'image A' de A ne se forme pas dans le plan de la rétine, mais en arrière de celui-ci, comme le montre le schéma suivant.

Tache image pour une observation sans accommodation d'un objet à distance finie



Le faisceau issu de A et diaphragmé par la pupille va donner une tache dans le plan de la rétine, de rayon r, porté sur le schéma précédent. Le théorème de Thalès donne immédiatement $\frac{r}{R} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{OA'}}$.

Il reste à déterminer la position de A' en utilisant une relation de conjugaison (au choix) pour le cristallin.

La relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{(-d)}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{d-f'}{df'}.$$

Il vient donc $\overline{OA'} = \frac{df'}{d-f'}$ et $\overline{F'A'} = -f' + \frac{df'}{d-f'} = \frac{-f'd+f'^2+df'}{d-f'} = \frac{f'^2}{d-f'}$.

La relation de Thalès s'écrit alors $r = R\frac{f'^2}{d-f'} \times \frac{d-f'}{df'}$.

On obtient alors le rayon de la tache formée sur la rétine $\boxed{r = R\frac{f'}{d}}$

On aurait pu se passer de la détermination de la position de A'. En effet, il suffit de considérer le rayon passant par O, parallèle au rayon marginal. Ce rayon définit l'extrémité de la tache image dans le plan focal image de la lentille.
On a alors $\tan\alpha = \frac{r}{f'} = \frac{R}{d}$ et on retrouve le résultat précédent.

3 Si le rayon de la tache formée par les rayons issus de A sur la rétine est inférieur à la taille caractéristique d'une cellule rétinienne, alors toute l'information venant de A est perçue par une unique cellule rétinienne, et est donc interprétée par le cerveau comme provenant d'un point unique. L'objet A est alors vu de façon nette.

L'œil n'accommode pas, il voit donc de façon parfaitement nette les objets situés à l'infini. Mais il peut aussi avoir une impression de netteté simultanée pour des objets plus proches, tant que la tache image correspondante sur la rétine est plus petite que la taille d'une cellule. Cela nous donne une distance minimale à laquelle doit se trouver ce deuxième objet.

On a vu que la taille maximale que doit avoir la tache formée par l'objet A est h, la distance d correspondante est donc $\boxed{d_{min} = \frac{Rf'}{h}}$

A.N. : $d_{min} = 2{,}0\ \text{m}$.

L'œil peut donc voir simultanément, de façon nette, tout objet compris entre 2 m et l'infini. Il n'accommode que pour observer des objets plus proches.

Partie B

1

Le *punctum remotum* n'est pas modifié par la presbytie, puisque c'est la capacité du cristallin à se déformer, capacité qui permet l'accommodation, qui est perdue avec l'âge.
L'image d'un point au *punctum remotum* de l'œil se forme exactement dans le plan de la rétine.

Pour un œil normal, la rétine est située dans le plan focal image du cristallin, on a donc $\boxed{f'_0 = d_0}$ A.N. : $f'_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$.

Pour l'œil myope, la rétine est située dans le plan conjugué du *punctum remotum* ($\overline{OA_{PR}} = -D_M$). La relation de conjugaison de Descartes donne alors :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_0}$$

$$\frac{1}{d_0} - \frac{1}{(-D_M)} = \frac{1}{f'_0}$$

$$\frac{d_0 + D_M}{d_0 D_M} = \frac{1}{f'_0}.$$

Pour l'œil myope vieillissant $\boxed{f'_0 = \frac{d_0 D_M}{d_0 + D_M}}$

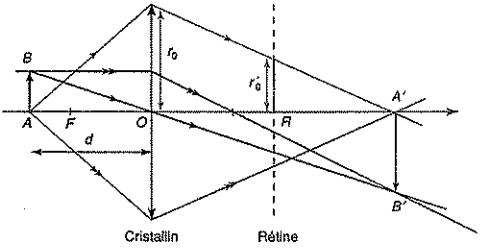
A.N. : $f'_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$.

2

On cherche à évaluer la netteté pour un journal tenu à la même distance par une personne à l'œil normal presbyte, et par une personne à l'œil myope presbyte.

Le journal est placé à la distance $\overline{OA} = -d$ de l'œil, la rétine R étant à une distance d_0 du cristallin. Le journal n'est pas au PR de l'œil, l'image A' d'un point A du journal ne se forme donc pas dans le plan rétinien, et le faisceau incident issu de A et diaphragmé par la pupille forme une tache image de rayon r'_0 sur la rétine (figure ci-dessous).

Observation, sans accommodation, d'un objet à distance finie par un œil myope



Le théorème de Thalès donne alors $\dfrac{r'_0}{r_0} = \dfrac{\overline{RA'}}{\overline{OA'}}$.

La relation de conjugaison de Descartes pour le cristallin donne d'autre part :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_0}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{(-d)} = \frac{1}{f'_0}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'_0} - \frac{1}{d}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{d - f'_0}{df'_0}.$$

On obtient alors $\overline{OA'} = \dfrac{df'_0}{d - f'_0}$ et $\overline{RA'} = \overline{OA'} - \overline{OR} = \dfrac{df'_0}{d - f'_0} - d_0 = \dfrac{df'_0 - d_0(d - f'_0)}{d - f'_0}$.

Le rayon r'_0 est alors donné par $r'_0 = r_0\left(\dfrac{df'_0 - d_0(d - f'_0)}{d - f'_0} \times \dfrac{d - f'_0}{df'_0}\right)$.

Il vient $\boxed{r'_0 = r_0\left(1 - \dfrac{d_0}{f'_0} + \dfrac{d_0}{d}\right).}$

Pour l'œil emmétrope presbyte, $d_0 = f'_0$ et $\boxed{r'_0 = \dfrac{r_0 d_0}{d}}$

A.N. : $r'_0 = \mathbf{6{,}0 \cdot 10^{-5}\ m}$.

Pour l'œil myope presbyte, $f'_0 = \dfrac{d_0 D_M}{d_0 + D_M}$, donc $\boxed{r'_0 = r_0\left(1 - \dfrac{d_0 + D_M}{D_M} + \dfrac{d_0}{d}\right)}$

A.N. : $r'_0 = \mathbf{4{,}0 \cdot 10^{-5}\ m}$.

La tache est donc plus petite pour l'œil myope que pour l'œil normal, l'œil myope a un meilleur pouvoir de résolution.

Partie C – Hypermétropie

1

On va commencer par chercher le PR de l'œil hypermétrope, avant de considérer le cas où on lui adjoint un verre correcteur.

On s'intéresse au *punctum proximum*, correspondant à une accommodation maximale. Notons V_0 la vergence du cristallin quand il n'accommode pas et $V_1 = V_0 + \Delta V$ la vergence du cristallin déformé.

La rétine est située dans le plan conjugué du PR, en l'absence d'accommodation, soit pour une vergence V_0. On a alors $\frac{1}{\overline{OR}} - \frac{1}{\overline{OA_{PR}}} = V_0$.

De même, elle est située dans le plan conjugué du PP, lorsque l'accommodation est maximale, soit pour une vergence V_1. On a alors $\frac{1}{\overline{OR}} - \frac{1}{\overline{OA_{PP}}} = V_1$.

De ces deux relations, on déduit un lien entre le PP et le PR de l'œil hypermétrope :

$$\frac{1}{\overline{OA_{PP}}} - \frac{1}{\overline{OA_{PR}}} = V_0 - V_1 = -\Delta V.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{\overline{OA_{PR}}} = \frac{1}{\overline{OA_{PP}}} + \Delta V$$

$$\frac{1}{\overline{OA_{PR}}} = \frac{1 + \Delta V \times \overline{OA_{PP}}}{\overline{OA_{PP}}}$$

$$\overline{OA_{PR}} = \frac{\overline{OA_{PP}}}{1 + \Delta V \times \overline{OA_{PP}}}$$

A.N. : $\overline{OA_{PR}} = 50$ cm.

Le PR est virtuel, et situé derrière l'œil.

On ajoute au système un verre correcteur de vergence V_c, de centre optique O_L tel que $\overline{O_L O} = d = 1$ cm. Le PR de l'ensemble « œil + lunettes » est le point $A_{PR,O+L}$ tel que :

$$A_{PR,O+L} \xrightarrow{\text{lunettes}} A_{PR,O} \xrightarrow{\text{œil}} \text{accommodation nulle}$$

On souhaite que ce point soit rejeté à l'infini, son image $A_{PR,O}$ par les lunettes est donc au foyer image F'_L des verres correcteurs : $\overline{O_L A_{PR,O}} = \frac{1}{V_c}$.

On a déjà calculé $\overline{O_L O} = 1$ cm et $\overline{OA_{PR,O}} = 50$ cm. On en déduit donc que $\overline{O_L A_{PR,O}} = 51$ cm.

Les verres correcteurs sont donc convergents, de distance focale 51 cm, et de vergence $V_c = 1{,}96\delta$.

2 Le PP de l'œil corrigé est le point $A_{PP,O+L}$ tel que :

$$A_{PP,O+L} \xrightarrow{\text{lunettes}} A_{PP,O} \xrightarrow{\text{œil}} \text{accommodation maximale}$$

La relation de conjugaison pour les lunettes donne :

$$\frac{1}{\overline{O_L A_{PP,O}}} - \frac{1}{\overline{O_L A_{PP,O+L}}} = V_c$$

$$\frac{1}{\overline{O_L A_{PP,O+L}}} = \frac{1}{\overline{O_L A_{PP,O}}} - V_c$$

$$\frac{1}{\overline{O_L A_{PP,O+L}}} = \frac{1}{d + \overline{OA_{PP,O}}} - V_c$$

$$\frac{1}{\overline{O_L A_{PP,O+L}}} = \frac{d + \overline{OA_{PP,O}}}{1 - V_c(d + \overline{OA_{PP,O}})}.$$

On a donc $\boxed{\overline{OA_{PP,O+L}} = -d + \dfrac{d + \overline{OA_{PP,O}}}{1 - V_c(d + \overline{OA_{PP,O}})}}$

A.N. : $\overline{OA_{PP,O+L}} = -26$ **cm**.

3 Si l'on utilise des lentilles de contact, la distance d est réduite à zéro, on a alors $V'_c = 2{,}0\delta$, il faut des lentilles convergentes de focale 50 cm, et la nouvelle position du PP de l'œil corrigé est $\overline{OA_{PP,O+L}} = -25{,}3$ cm.

Les formules établies dans la question précédente s'appliquent toujours ici. On peut toutefois remarquer que si on n'avait pas fait l'étude préalable sur les verres correcteurs éloignés de l'œil, alors l'étude des lentilles de contact serait plus facile, puisque dans ce cas, la lentille correctrice est accolée au cristallin, et on peut appliquer les relations des lentilles accolées, et notamment $V_{\text{œil+lentille}} = V_{\text{œil}} + V_c$. Les calculs sont simplifiés.

en conclusion

On s'est intéressé ici à l'étude de l'œil normal et de certains de ses défauts. On utilise bien entendu les notions sur les lentilles, et il convient de bien poser systématiquement le problème, en écrivant les conjugaisons successives notamment. On voit qu'un œil normal a une certaine profondeur de champ, et peut voir nettement, sans accommoder, des objets qui ne sont pas nécessairement en son PR. On voit aussi qu'en vieillissant, le myope voit plus de détails qu'un œil normal. Enfin, on aura considéré les deux cas possibles de correction d'un œil présentant un défaut de distance focale, avec des lunettes ou des lentilles de contact.

2 – Lunette de Galilée

Une lunette de Galilée est constituée d'un objectif, assimilable à une lentille mince convergente L_1, de centre O_1 et de distance focale $f_1' = 50$ cm et d'un oculaire, assimilable à une lentille mince divergente L_2, de centre O_2 et de distance focale $f_2 = 5{,}0$ cm.

1 La lunette est réglée à l'infini. Quelles sont alors les positions relatives des deux lentilles ?

2 On considère un objet AB situé à 75 cm de l'objectif. L'image $A'B'$ de AB est-elle réelle ou virtuelle ? Calculer le grandissement transversal de l'ensemble. Dépend-il de la position de AB ?

3 On considère désormais un objet à l'infini, hors de l'axe optique.

a. Tracer la marche d'un faisceau lumineux parallèle incident faisant avec l'axe optique un angle α.

b. Déterminer le grossissement angulaire de la lunette.

c. On observe un phare de hauteur $h = 10$ m situé à une distance $d = 2{,}0$ km. Sous quel angle le voit-on à travers la lunette ?

d. L'observateur retourne la lunette sans modifier les réglages, et regarde à nouveau le phare. Sous quel angle le voit-il désormais ?

résolution méthodique

1

Le réglage à l'infini signifie qu'un objet à l'infini voit son image par le système global renvoyée à l'infini également. L'ensemble est donc afocal.

Pour rendre le système afocal, il faut considérer les conjugaisons suivantes :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$

L'image par L_1 d'un objet à l'infini sur l'axe optique est en son foyer image : $A_1 = F_1'$.

D'autre part, pour que A'_∞ soit rejetée à l'infini par la lentille L_2, il faut que l'image intermédiaire A_1 soit confondue avec son foyer objet F_2.

Par conséquent, pour obtenir un système afocal, il faut que $\boxed{F_1' = F_2}$.

La distance entre les centres des lentilles est donc $\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_2O_2} = f_1' - f_2 = f_1' + f_2'$.

Les lentilles sont séparées de la distance $\boxed{D = \overline{O_1O_2} = f_1' + f_2'}$

A.N. : $D = 45$ cm.

Attention aux signes ! La deuxième lentille dans une lunette de Galilée est une lentille divergente, de distance focale négative. Son foyer objet est situé après la lentille. Il faudra y prendre garde dans la représentation graphique du système.

2 L'objet AB donne par la première lentille une image intermédiaire A_1B_1, dont la deuxième lentille donne une image définitive $A'B'$:

$$AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$$

Pour déterminer la position de l'image, on peut utiliser indifféremment les deux relations de conjugaison de Descartes ou de Newton. Ici, puisque le foyer image de l'objectif est confondu avec le foyer objet de l'oculaire, les formules de Newton, avec origines aux foyers, semblent plus indiquées.

Les relations de conjugaison de Newton appliquées aux deux lentilles L_1 et L_2 donnent :

$$\overline{F_1A} \times \overline{F'_1A_1} = -(f'_1)^2 \quad \text{soit} \quad \overline{F'_1A_1} = -\frac{(f'_1)^2}{\overline{F_1A}}$$

$$\overline{F_2A_1} \times \overline{F'_2A'} = -(f'_2)^2 \quad \text{soit} \quad \overline{F_2A_1} = -\frac{(f'_2)^2}{\overline{F'_2A'}}.$$

Or $F'_1 = F_2$, et on a par conséquent : $\overline{F'_2A'} = \left(\frac{f'_2}{f'_1}\right)^2 \overline{F_1A}$.

Il vient $\overline{O_2A'} = \overline{O_2F'_2} + \overline{F'_2A'}$ et la position de l'image A' est donc donnée par

$$\boxed{\overline{O_2A'} = f'_2 + \left(\frac{f'_2}{f'_1}\right)^2 (f'_1 + \overline{O_1A})}$$

A.N. : $\overline{O_2A'} = -5{,}25$ cm.

L'image est virtuelle.

On rappelle la formule de grandissement de Newton. Soit une lentille L, de distance focale image f' et de distance focale objet f, donnant de l'objet AB une image $A'B'$: $AB \xrightarrow{L} A'B'$.

Le grandissement transversal est $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}}$.

Pour la première lentille, $AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1$, on obtient $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'_1A_1}}{f'_1}$.

Pour la deuxième lentille, $A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$, on obtient $\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = -\frac{\overline{f_2}}{\overline{F_2A_1}}$.

Le grandissement global de l'association est donc $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_1\gamma_2 = \frac{\overline{F'_1A_1}}{f'_1} \times \frac{\overline{f_2}}{\overline{F_2A_1}}$.

Comme la lunette est réglée à l'infini, on a $F'_1 = F_2$ et par conséquent $\overline{F'_1A_1} = \overline{F_2A_1}$.

L'expression du grandissement transversal de la lunette se simplifie donc en $\boxed{\gamma = \frac{f_2}{f'_1}}$

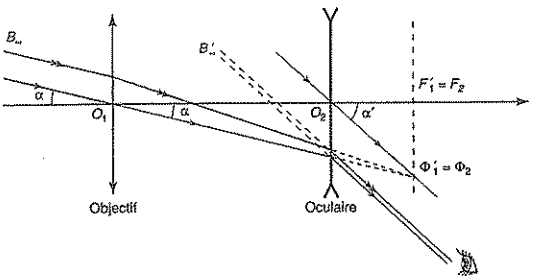
A.N. : $\gamma = 0{,}1$.

On voit que ce résultat est indépendant de la position de l'objet. C'est une caractéristique d'un système afocal.

3 a. L'objet à l'infini (B_∞) envoie des rayons parallèles entre eux, mais faisant avec l'axe optique un angle α.

La figure suivante représente la construction demandée.

Lunette de Galilée : marche des rayons lumineux



Considérons le rayon particulier issu de ce point B_∞ et passant par le centre optique O_1 de l'objectif. Il n'est pas dévié, et coupe (virtuellement) le plan focal image de L_1 en un foyer secondaire image Φ'_1. Les autres rayons du faisceau incident émergent donc de la lentille L_1 en passant par ce foyer secondaire image.

Revenons au rayon incident passant par O_1. Il arrive sur l'oculaire avec une incidence quelconque, mais en passant par un point Φ_2 du plan focal objet de l'oculaire. Or, comme la lunette est afocale, le plan focal objet de l'oculaire est confondu avec le plan focal image de l'objectif, et $\Phi'_1 = \Phi_2$. Ce rayon incident sur L_2 passe par le foyer secondaire objet Φ_2, il émerge donc de la lentille parallèlement à un axe secondaire défini par $(O_2\Phi_2)$.

Il en va de même pour tout autre rayon du faisceau incident issu de B_∞.

L'image B'_∞ est bien entendu renvoyée à l'infini (système afocal), elle est virtuelle, et vue sous un angle α'.

- Il faut s'appliquer pour le tracé de la marche de ce faisceau à travers le système, car c'est lui qui va fournir la figure qui nous permetra de répondre à la question suivante. Notamment, si l'on n'utilise pas la droite $(O_2\Phi_2)$ pour tracer les rayons émergents, la relation entre α et α' est beaucoup moins évidente. Il ne faut pas hésiter à faire plusieurs schémas sur un tel exercice.
- On remarque que l'image est virtuelle, car renvoyée à l'infini à gauche, puisque c'est de là que semblent provenir les rayons émergents pour un œil placé après la lunette. L'image est droite, ce qui permet une observation confortable.

b. Sur le schéma précédent, on détermine α dans le triangle $O_1F'_1\Phi'_1$:

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\overline{F'_1\Phi'_1}}{\overline{O_1F'_1}}.$$

Puis on détermine α' dans le triangle $O_2F_2\Phi_2$:

$$\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\overline{F_2\Phi_2}}{\overline{O_2F_2}}.$$

Or $F'_1 = F_2$ et $\Phi'_1 = \Phi_2$, le grossissement angulaire G s'écrit donc :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{F_2\Phi_2}}{\overline{O_2F_2}} \times \frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{F'_1\Phi'_1}} = \frac{f'_1}{f_2}.$$

On obtient $\boxed{G = \frac{f'_1}{f_2}}$

A.N. : $G = 10$.

On remarque qu'on retrouve la relation de Lagrange-Helmholtz : $G\gamma = \frac{f'_1}{f_2} \times \frac{f_2}{f'_1} = 1$.

c. Le haut du phare est vu, sans la lunette, sous l'angle α tel que $\tan\alpha = \frac{h}{d}$. Il est suffisamment loin pour être considéré à l'infini par l'observateur, on est donc dans le cas de la question précédente, et l'angle α' sous lequel il est vu à travers la lunette est $\alpha' = G\alpha$.

On a donc $\boxed{\alpha' = \frac{f'_1}{f_2} \times \frac{h}{d}}$

A.N. : $\alpha = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ rad $= 17'$ et $\alpha' = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ rad $= 2°52'$.

d. Si l'on retourne la lunette, le grandissement angulaire est inversé, d'après le principe du retour inverse de la lumière, donc $G' = \frac{f_2}{f'_1} = 0{,}1$.

On voit alors le phare rapetissé, sous un angle $\boxed{\alpha'' = \frac{f_2}{f'_1} \times \frac{h}{d}}$

A.N. : $\alpha'' = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$ rad $= 1'43''$.

en conclusion

Cet exercice étudie le dispositif de la lunette de Galilée, constituée d'un objectif convergent associé à un oculaire divergent pour former un système afocal. Cela permet d'avoir un grandissement transversal pour des objets finis, indépendant de la position de l'objet, et surtout d'obtenir une image virtuelle, agrandie, et droite. C'est aussi le principe de certaines jumelles. L'utilisation d'un oculaire divergent permet de limiter l'encombrement de l'ensemble.
La difficulté éventuelle réside dans le calcul du grandissement si le tracé de la marche des rayons n'est pas complet.

3 – Latitude de mise au point d'un microscope

Un microscope peut être schématisé par deux lentilles minces convergentes de même axe optique. L'objectif L_1 a pour centre O_1 et pour distance focale $f'_1 = 5{,}0$ mm, et l'oculaire L_2 a pour centre O_2 et pour distance focale $f'_2 = 25$ mm. Le foyer image de l'objectif F'_1 et le foyer objet de l'oculaire F_2 sont distants de $\ell = 25$ cm.

1 Un observateur, l'œil placé au foyer image de l'oculaire, étudie un petit objet AB transversal. Où doit être situé A pour que l'œil effectue l'observation sans accommoder ?

2 Représenter la marche d'un pinceau lumineux issu de B à travers le système.

3 Soit α' l'angle sous lequel l'œil voit l'image définitive de AB à travers le microscope et α l'angle sous lequel il apercevrait l'objet sans se déplacer, en l'absence du microscope.
Calculer le rapport $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$.

4 Construire les positions de ses foyers principaux.

5 En accommodant, l'œil normal peut observer nettement des objets situés entre $d_m = 25$ cm (PP) et l'infini (PR).
Quelle est la latitude de mise au point du microscope, ou autrement dit, de combien peut-on modifier la distance ℓ entre l'objectif et l'oculaire en conservant une observation nette de l'objet AB ?

résolution méthodique

1 On observe un objet A à travers un système de deux lentilles :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A' \xrightarrow{\text{œil}} \text{observation}$$

Un œil observe sans accommoder un objet si celui-ci se trouve en son PR (*punctum remotum*), c'est-à-dire à l'infini pour un œil normal. Il faut donc que l'objet pour l'œil, c'est-à-dire l'image A' par le système des deux lentilles, soit renvoyé à l'infini. Or A' est l'image de A_1 par l'oculaire. L'image intermédiaire A_1 doit donc être située au foyer objet de l'oculaire : $A_1 = F_2$.

On a la conjugaison suivante :

$$A_{PR} \xrightarrow{L_1} A_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty \xrightarrow{\text{œil}} \text{observation sans accommodation}$$

Pour déterminer la position particulière de A correspondant à une observation sans accommodation (d'où la notation A_{PR}), il faut utiliser une relation de conjugaison pour la lentille L_1. On a le choix entre celle de Descartes et celle de Newton. Comme la donnée sur la distance entre les lentilles repose sur la distance entre leurs foyers respectifs, il semble naturel d'utiliser la relation de Newton plutôt que celle de Descartes.

La relation de conjugaison de Newton pour la lentille L_1 donne alors :

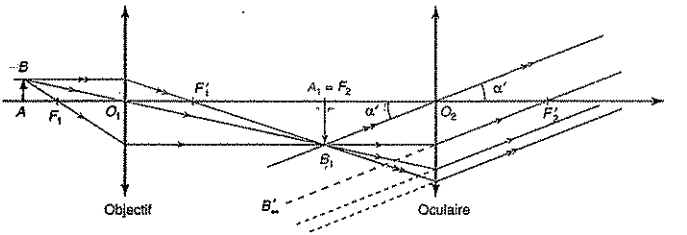
$$\overline{F_1A_{PR}} \times \overline{F'_1F_2} = -(f'_1)^2$$

$$\overline{F_1A_{PR}} = -\frac{(f'_1)^2}{\overline{F'_1F_2}}.$$

Or $\overline{F'_1F_2} = \ell$, donc $\boxed{\overline{F_1A_{PR}} = -\dfrac{(f'_1)^2}{\ell}}$

A.N. : $\overline{F_1A_{PR}} = -0{,}1$ mm.

Marche d'un faisceau lumineux à travers un microscope (échelle non respectée)



2 On a représenté la marche d'un pinceau lumineux issu du point B à travers le système sur la figure ci-dessus.

La figure ne saurait être à l'échelle, vu les valeurs numériques. Pour réaliser une construction juste, on va donc en réalité placer d'abord l'objet intermédiaire A_1B_1 dans le plan focal objet de la lentille L_2 puis construire la position de l'objet AB, et ensuite tracer la marche du pinceau lumineux issu de B.
Le rayon issu de B_1 et parallèle à l'axe émerge de la lentille L_2 en passant par le foyer image F'_2, et le rayon issu de B_1 passant par O_2 n'est pas dévié. Ces deux rayons sont parallèles, puisque B_1 est dans le plan focal objet de L_2 et son image B'_∞ est donc renvoyée à l'infini.
Pour construire l'objet AB, on considère le rayon passant par B_1 et parallèle à l'axe, il passait nécessairement par le foyer objet F'_1 avant de rencontrer la lentille L_1. Il nous faut un autre rayon pour construire le point B. On peut considérer le rayon passant par B_1 et le centre O_1 de la lentille L_1, qui n'est pas dévié.
Une fois les positions de B, B_1 et B_∞ construites, on prend un fin pinceau lumineux issu de B et on trace aisément sa marche à travers le système.

3 D'après la figure précédente, $\tan\alpha' = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_2A_1}}$.

La taille de l'image intermédiaire A_1B_1 est donnée par le grandissement de l'objectif :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{OA}} = -\frac{\overline{F'_1A_1}}{f'_1} = -\frac{f_1}{\overline{F_1A}}.$$

On a trois formules qui donnent le grandissement, l'une liée à la relation de conjugaison de Descartes et les autres à la relation de conjugaison de Newton. La plus adaptée est celle qui fait intervenir une donnée de l'énoncé, à savoir $\overline{F'_1A_1} = \overline{F'_1F_2} = \ell$.

Il vient, sachant que $A_1 = F_2$:

$$\tan\alpha' = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_2F_2}}$$

$$\tan\alpha' = \frac{1}{f_2'} \times \gamma_1 \overline{AB}$$

$$\tan\alpha' = \frac{1}{f_2'} \times \overline{AB} \times \left(-\frac{\ell}{f_1'}\right)$$

$$\tan\alpha' = \overline{AB} \times \frac{\ell}{f_1' f_2'}.$$

En l'absence de microscope, on observerait l'objet AB sous l'angle α tel que $\tan\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{F_2'A}}$, puisque l'œil est placé en F_2'.

Or, on a :

$$\overline{AF_2'} = \overline{AF_1} + \overline{F_1F_1'} + \overline{F_1'F_2} + \overline{F_2F_2'}$$

$$\overline{AF_2'} = \frac{(f_1')^2}{\ell} + 2f_1' + \ell + 2f_2'.$$

En assimilant les angles à leurs tangentes, il vient :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \simeq \frac{\tan\alpha'}{\tan\alpha}$$

$$G = \left(\overline{AB} \times \frac{\ell}{f_1' f_2'}\right) \times \left(-\frac{\dfrac{(f_1')^2}{\ell} + 2f_1' + \ell + 2f_2'}{\overline{AB}}\right).$$

Il vient $\boxed{G = -\dfrac{(f_1')^2 + 2\ell(f_1' + f_2') + \ell^2}{f_1' f_2'}}$

A.N. : $\boldsymbol{G = 620}$.

4 On a travaillé dans les questions précédentes avec un objet placé de telle façon que l'observation par l'œil se fasse sans accommodation. L'image B' étant renvoyée à l'infini, par stigmatisme, il en va de même de l'image A' de A. Par conséquent, le point A_{PR} dont on a déterminé la position précédemment est le foyer objet F de l'association des deux lentilles.

Pour déterminer la position du foyer image, il suffit de prendre un objet A_∞ à l'infini sur l'axe optique. Son image par la première lentille est au foyer image F_1'. Le foyer de l'association est le conjugué, par la lentille L_2, de ce point :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_2} F'$$

Il reste à choisir la relation de conjugaison la plus adaptée, ici, toujours celle de Newton.

La relation de conjugaison de Newton pour l'oculaire donne :

$$\overline{F_2F_1'} \times \overline{F_2'F'} = -(f_2')^2$$

$$\overline{F_2'F'} = -\frac{(f_2')^2}{\overline{F_2F_1'}}.$$

Il vient $\boxed{\overline{F_2'F'} = \dfrac{(f_2')^2}{\ell}}$

A.N. : $\overline{F_2'F'} = 2{,}5$ mm.

5 On a déjà calculé la position A_{PR} de l'objet qui donne, à travers le microscope, une observation sans accommodation.

On cherche maintenant la nouvelle position A_{PP} de l'objet qui donne une observation par l'œil au maximum d'accommodation :

$$A_{PP} \xrightarrow{L_1} A_{1,PP} \xrightarrow{L_2} A'_{PP} \xrightarrow{\text{œil}} \text{accommodation maximale}$$

L'œil étant placé au foyer image de l'oculaire, on a $\overline{F_2'A'_{PP}} = -d_m$.

On remonte à la position correspondante de l'objet grâce aux formules de conjugaison de Newton pour les deux lentilles.

Pour la lentille L_2, on a :

$$\overline{F_2A_{1,PP}} \times \overline{F_2'A'_{PP}} = -(f_2')^2$$

$$\overline{F_2A_{1,PP}} = -\frac{(f_2')^2}{(-d_m)}.$$

Pour la lentille L_1, on a :

$$\overline{F_1A_{PP}} \times \overline{F_1'A_{1,PP}} = -(f_1')^2$$

$$\overline{F_1A_{PP}} = -\frac{(f_1')^2}{\ell + \dfrac{(f_2')^2}{d_m}}.$$

Or on a vu que $\overline{F_1A_{PR}} = -\dfrac{(f_1')^2}{\ell}$.

La latitude de mise au point du microscope étant $\delta = \overline{A_{PR}A_{PP}}$, il vient :

$$\overline{A_{PR}A_{PP}} = \overline{F_1A_{PP}} - \overline{F_1A_{PR}}$$

$$\delta = -\frac{(f_1')^2}{\ell + \dfrac{(f_2')^2}{d_m}} + \frac{(f_1')^2}{\ell}$$

$$\delta = \frac{(f_1')^2}{\ell}\left(1 - \frac{1}{1 + \dfrac{(f'_2)^2}{\ell d_m}}\right).$$

Comme $\dfrac{(f_2')^2}{\ell d_m} \ll 1$, on peut faire un développement limité : $\dfrac{1}{1 + \dfrac{(f_2')^2}{\ell d_m}} \simeq 1 - \dfrac{(f_2')^2}{\ell d_m}$,

et on a alors $\boxed{\delta \simeq \dfrac{(f_1'f_2')^2}{\ell^2 d_m}}$

A.N. : $\delta = 1$ µm.

en conclusion

° On a dans cet exercice étudié les propriétés d'un microscope. L'œil observe au foyer de l'oculaire, et le réglage idéal consiste à placer l'objet à observer au niveau du foyer objet de l'association des deux lentilles, permettant une observation sans accommodation. On a ensuite calculé la position de l'objet qui permet une observation nette tout en accommodant au maximum. La différence entre ces deux positions donne la latitude de mise au point du microscope. On voit que celle-ci est très faible, le réglage doit être très précis, c'est pourquoi les microscopes sont pourvus de vis micrométriques pour déplacer l'objectif.

° Sur le plan technique, on voit qu'on a avantageusement tiré parti des formules de conjugaison de Newton pour calculer les différentes positions des objets étudiés. En effet, comme les données du problème se rapportent à la distance entre les foyers des lentilles, et non à celle entre leurs centres, il est plus direct d'utiliser les foyers comme origine.

1 ★ 10 min

➤ Corrigé p. 179

Cercle oculaire d'une lunette astronomique

Soit une lunette astronomique, constituée d'un objectif convergent (L_1, O_1, $f'_1 = +50$ cm) et d'un oculaire convergent (L_2, O_2, $f'_2 = +1$ cm), réglée pour une mise au point à l'infini.

1. Calculer le grossissement angulaire algébrique G et le grandissement transversal γ de cette lunette astronomique.

2. L'objectif a une monture-diaphragme de rayon $r = 10$ cm. Déterminer la position et la dimension du cercle oculaire (image de la monture de l'objectif, donnée par l'oculaire).

2 ★ 10 min

➤ Corrigé p. 180

Projection d'une diapositive

On souhaite projeter l'image d'une diapositive de taille 24 mm × 36 mm, à l'aide d'une lentille sphérique mince, telle que $|f'| = 5{,}0$ cm.

1. Préciser quelle doit être la nature (convergente ou divergente) de la lentille.

2. L'écran étant situé à une distance de 5,0 m de la lentille, où doit se situer la diapositive, et quelle est la taille de l'image sur l'écran ?

3. On ne modifie pas la distance D entre la diapositive et l'écran. Montrer qu'il existe une autre position de la lentille convergente qui donne une image nette sur l'écran. Donner alors la taille de l'image projetée.

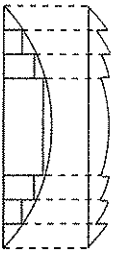
3 ★ 10 min

➤ Corrigé p. 180

Rétroprojecteur

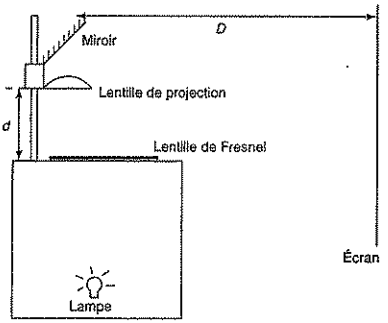
Un rétroprojecteur est un dispositif utilisé pour projeter sur un écran vertical des transparents que l'on pose horizontalement sur une table. Cette table est en réalité une lentille de Fresnel, constituée d'une lentille centrale et de formes prismatiques (figure ci-après), qui est équivalente à une lentille mince de distance focale 10 cm mais qui a l'avantage de pouvoir être utilisée en dehors des conditions de Gauss.

Lentille de Fresnel



Le rétroprojecteur comporte également une lentille de projection, convergente, de focale 32 cm et un miroir plan, qui permet de renvoyer l'image sur l'écran vertical. Une lampe éclaire la table du rétroprojecteur. La lentille de projection est à une distance d de la table du rétroprojecteur, et d peut varier de 30 cm à 45 cm.

Rétroprojecteur



1. Pourquoi l'image de la lampe du rétroprojecteur doit-elle avoir son image par la lentille de Fresnel au voisinage de la lentille de projection ?

2. Comment doit-on placer le transparent pour qu'il soit vu à l'endroit du public ?

3. Quelles sont les distances possibles entre le rétroprojecteur et l'écran ?
On négligera la distance entre la lentille de projection et le miroir devant la distance entre le miroir et l'écran.
On souhaite que l'image projetée ait une dimension d'environ 2 m sur 3 m, pour un transparent de taille *A4* (environ 20 cm sur 30 cm). À quelle distance de

l'écran doit-on placer le rétroprojecteur ? Quelle doit-être alors la distance entre le transparent et la lentille de projection ?

4 30 min

➤ Corrigé p. 187

Objectif photographique bifocal

A- Questions préliminaires

On considère deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2 de distances focales images respectives f'_1 et f'_2, de même axe optique, et dont les centres optiques O_1 et O_2 sont distants de $d = \overline{O_1O_2}$. On supposera O_1 situé avant O_2 dans le sens de propagation de la lumière.

1. Déterminer en fonction de d, f'_1 et f'_2 la position par rapport à O_2 de l'image A' d'un point lumineux réel A situé à l'infini sur l'axe optique.

2. Dans le cas particulier d'un objet réel à l'infini, en déduire que deux lentilles minces accolées ($d = 0$) peuvent être remplacées par une lentille mince unique de centre optique confondu avec les centres optiques communs des deux lentilles et dont on déterminera la distance focale image f'_{12}.

B- Étude simplifiée d'un objectif photographique bifocal

1. On considère un système optique comprenant sur un même axe optique trois lentilles minces L_1, L_2 et L_3, de centres optiques respectifs O_1, O_2 et O_3, et de foyers images respectifs F'_1, F'_2 et F'_3.
L_1 et L_3 sont des lentilles identiques, divergentes, de distance focale image $f'_1 = f'_3 = -60$ mm.
L_2 est une lentille convergente de distance focale image $f'_2 = 35$ mm.
Dans la première position (qui sera appelée **position 1** dans la suite), les lentilles L_1 et L_2 sont accolées.

a. Déterminer en fonction de f'_1 et f'_2 la position par rapport à O_1 du foyer image F'_{12} de la lentille mince équivalente à l'association de deux lentilles $L_1 + L_2$.
Faire l'application numérique.
Quelle est la nature de la lentille équivalente ?

b. En déduire, en fonction de f'_1 et f'_2, la distance entre les lentilles L_1 et L_3 pour qu'un rayon incident parallèle à l'axe optique ressorte du système parallèle à cet axe (système afocal).
Faire l'application numérique.

c. Déterminer en fonction de f'_1 et f'_2 le grandissement $\gamma_1 = \dfrac{D'}{D}$, rapport entre le diamètre D' du faisceau émergent et le diamètre D du faisceau incident parallèle à l'axe optique.
Faire l'application numérique.

2. Dans la deuxième position de la lentille (**position 2**), la lentille L_2 est maintenant accolée à la lentille L_3.

a. Montrer que si l'on déplace, suivant la direction de l'axe optique, la lentille L_2 jusqu'à la lentille L_3 (L_1 et L_3 restant fixes), on obtient aussi un système afocal.

b. Déterminer dans ce cas, en fonction de f'_1 et f'_2, le rapport γ_2 entre le diamètre D' du faisceau émergent et le diamètre D du faisceau incident parallèle à l'axe.
Faire l'application numérique.

3. a. Construire la marche d'un faisceau lumineux à travers le système, le faisceau incident étant parallèle, incliné d'un angle α par rapport à l'axe optique du système dans la **position 1**. On notera α' l'angle du faisceau émergent parallèle par rapport à l'axe optique.

b. En déduire en fonction de f'_1 et f'_2 la valeur du rapport $G_1 = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ (appelé grossissement) entre les angles de sortie et d'entrée du faisceau.
Faire l'application numérique.

c. Quelle est la relation entre γ_1 et G_1 ?

d. En déduire la valeur en fonction de f'_1 et f'_2 du grossissement G_2 du système dans la **position 2**.
Faire l'application numérique.

4. On dispose alors, derrière L_3, une lentille mince convergente L_4, de distance focale image $f'_4 = 50$ mm.

a. Où doit-on placer le film photographique pour obtenir une image nette d'un objet très éloigné ?
La distance de L_3 à L_4 a-t-elle une importance ?

b. Où doit-on placer la lentille L_4 pour que l'encombrement du système lentilles-film soit le plus faible possible ?
Quelle est alors la distance entre L_1 et le film photographique ?

c. Quelle est la dimension de l'image sur le film d'un objet très éloigné, caractérisé par son diamè-

tre apparent α (angle sous lequel il est vu) pour chacune des deux positions de L_2 ?
Application numérique : calculer dans les deux cas la taille de l'image pour $\alpha = 5°$.

d. On appelle distance focale f' de l'objet composé des quatre lentilles la longueur égale au rapport entre la taille de l'image et l'angle α : $f' = \dfrac{\overline{A'B'}}{\alpha}$.
Déterminer les valeurs numériques de cette distance focale dans les **positions 1 et 2.**

5 15 min

➤ *Corrigé p. 183*

Téléobjectif

On considère une lentille convergente L_1 de centre O_1 et de distance focale $f'_1 = 75$ mm. On lui accole une lentille divergente L_2, de centre O_2 et de distance focale $f'_2 = -25$ mm. Enfin, on place devant le système ainsi formé une lentille convergente L_3 de centre O_3 et de distance focale $f'_3 = 100$ mm.
Ce système permet de schématiser le fonctionnement d'un objectif photographique. La pellicule (ou capteur CCD pour les appareils numériques) est placée au foyer image F'_1 de la lentille L_1. La distance O_3O_1 est réglée de façon à assurer que l'image d'un objet éloigné se forme sur la pellicule (mise au point).

1. Représenter ce dispositif sur un schéma. Construire la position du foyer F' de l'ensemble des trois lentilles.

2. Calculer l'encombrement de l'appareil, c'est-à-dire la distance du centre de la lentille L_3 à la pellicule.

3. Calculer la taille $\overline{A'B'}$ de l'image d'une tour $\overline{AB}$ de hauteur $h = 60$ m, située à une distance $d = 3{,}0$ km de l'objectif.

4. Calculer l'encombrement d'un appareil qui serait constitué d'une lentille unique, et qui donnerait une image de même taille. Commenter.

6 10 min

➤ *Corrigé p. 184*

Macrophotographie

On cherche à modéliser le dispositif optique permettant de photographier des objets à très courte distance (macrophotographie). On considère une lentille L_1 de centre O_1 et de distance focale $f'_1 = 75$ mm. La pellicule peut-être déplacée entre deux positions extrêmes : P_{min} confondu avec F'_1, et P_{max} tel que $\overline{OP_{max}} = \overline{OF'_1} + \tau$, où $\tau = 4{,}25$ mm est appelé le tirage de l'objectif.

1. Soit une fleur située à une distance $\overline{AO_1} = 10$ cm devant l'objectif, dans un plan transverse. Peut-on en faire une photographie nette ?

2. On place désormais devant l'objectif une lentille additionnelle L_2 convergente, de centre O_2 et de vergence $V_2 = 9{,}5\delta$, à une distance $\overline{O_2O_1} = 5$ cm constante.
On suppose le tirage τ inchangé. Dans quelle plage de distances doit se trouver la fleur pour qu'une mise au point permette d'en donner une image nette ?

7 15 min

➤ *Corrigé p. 184*

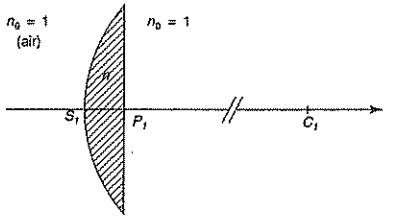
Appareil jetable utilisé sous l'eau
(d'après CCP)

On donne la relation de conjugaison pour un dioptre sphérique de sommet S et de centre C séparant deux milieux d'indices respectifs n_1 (avant le dioptre) et n_2 (après le dioptre). La position de l'image A' d'un objet A est donnée par la relation :

$$n_1\left(\frac{1}{\overline{SA}} - \frac{1}{\overline{SC}}\right) = n_2\left(\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SC}}\right)$$

1. En déduire la relation de conjugaison d'un dioptre plan.

2. Utilisation de l'appareil dans l'air
L'objectif de l'appareil est constitué d'une lentille simple convexe-plan L_1 dont la géométrie est présentée sur la figure ci-dessous. La lentille est en plastique d'indice $n = 1{,}4500$. Les différentes dimensions sont $\overline{S_1C_1} = 15{,}75$ mm et $\overline{S_1P_1} = 2{,}900$ mm. Les résultats seront donnés avec quatre chiffres significatifs.

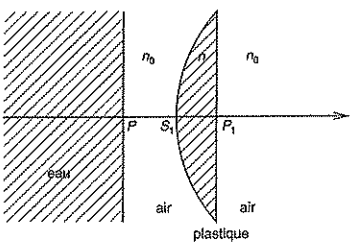


a. Méthode pas à pas : déterminer la position de l'image d'un objet A tel que $\overline{S_1A} = -7035$ mm en déterminant les images successives par le dioptre sphérique puis par le dioptre plan.

b. On souhaite caractériser la lentille par ses foyers pour n'avoir à utiliser qu'une relation de conjugaison. Déterminer la position des foyers objet et image F_1 et F_1'.
Déterminer la distance focale de la lentille L_1 définie par la distance entre le foyer objet et S_1. Le centre optique O de la lentille est confondu avec les points $S_1 = P_1$ (approximation des lentilles minces). Dans toute la suite du problème, on utilisera cette distance focale.
Utiliser ces résultats pour retrouver la position de l'image de l'objet A par la lentille L_1. Comparer avec le résultat de la méthode pas à pas.

3. Utilisation sous-marine

L'appareil photo est utilisé en immersion. Un caisson étanche possède un hublot d'épaisseur négligeable de sorte qu'il définit un dioptre plan de sommet P séparant l'eau d'indice 1,350 et l'air contenu dans le caisson étanche. La distance entre P et S_1 est $\overline{PS_1} = 5$ mm (figure ci-dessous).



a. Méthode pas à pas : en utilisant successivement les relations de conjugaison du dioptre plan et de la lentille L_1, déterminer la position de l'image de l'objet A (on a toujours $\overline{S_1A} = -7035$ mm).

b. Comparer cette position avec le résultat du paragraphe précédent. Peut-on avoir pour une même position du film une image nette au sens de l'optique géométrique ?

8 20 min

➢ *Corrigé p. 185*

Doubleur de focale (d'après DEUG)

Un objectif d'appareil photographique peut être modélisé par une lentille convergente de focale $f_1' = 50$ mm. Le négatif se trouve sur un écran plan fixe, perpendiculaire à l'axe optique de l'objectif, à une distance d de celui-ci. Pour la mise au point, on déplace l'objectif par rapport au négatif. La distance d est donc variable mais ne peut excéder $d_{max} = 100$ mm.
Soit un objet haut de $h = 2{,}0$ m et distant de $D = 50$ m du négatif.

1. Montrer que la formule de conjugaison permet d'établir une relation entre d, D et f_1', sous la forme d'une équation du second degré en d.

2. Calculer alors d en tenant compte des contraintes pour l'objectif. Faire l'application numérique.

3. Déterminer la taille h' de l'image sur le négatif. Faire l'application numérique.
On place maintenant entre l'objectif et le négatif un doubleur de focale assimilable à une lentille divergente $f_2' = -40$ mm à une distance $d_2 = 40$ mm du négatif. La distance d' entre l'objectif et le négatif peut maintenant atteindre $d'_{max} = 120$ mm.

4. Soient $\overline{AB}$ l'objet à photographier, $\overline{A'B'}$ l'image de $\overline{AB}$ formée par l'objectif seul et $\overline{A''B''}$ l'image finale (celle de $\overline{A'B'}$ formée par le doubleur de focale). $\overline{A''B''}$ étant sur le négatif, déterminer d_1, la distance entre $\overline{A'B'}$ et le négatif. Vérifier à l'aide d'un schéma. Faire l'application numérique.

5. Calculer le grandissement γ_2 apporté par le doubleur de focale. Faire l'application numérique.

6. $\overline{AB}$ étant toujours à la distance D du négatif, déterminer la distance d' correspondante pour une mise au point nette. Faire l'application numérique.

7. Calculer la nouvelle hauteur h'' de l'image. Faire l'application numérique.

9 20 min

➢ *Corrigé p. 186*

Lunette astronomique (d'après ENSTIM)

On considère une lunette astronomique formée :
– d'un objectif constitué d'une lentille mince convergente L_1, de distance focale $f_1' = \overline{O_1F_1'} > 0$;
– d'un oculaire constitué d'une lentille mince convergente L_2, de distance focale $f_2' = \overline{O_2F_2'} > 0$.
Ces deux lentilles ont même axe optique Δ.
On souhaite observer la planète Mars, qui est vue à l'œil nu sous un diamètre apparent α.

1. Pour voir la planète nette à travers la lunette, on forme un système afocal.

a. Que cela signifie-t-il ? Que cela implique-t-il pour les positions des lentilles ?

b. Faire le schéma de la lunette en prenant $f'_1 = 5f'_2$.
Dessiner sur ce schéma la marche à travers la lunette d'un faisceau lumineux formé de rayons issus de la planète. On appellera $\overline{A'B'}$ l'image intermédiaire.

c. On souhaite photographier cette planète. Où faut-il placer la pellicule ?

2. On note α' l'angle que forment les rayons émergents extrêmes en sortie de la lunette.

a. L'image est-elle droite ou renversée ?

b. La lunette est caractérisée par son grossissement $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$. Exprimer G en fonction de f'_1 et f'_2.

c. Le principal défaut d'une lentille est appelé défaut d'aberrations chromatiques : expliquer brièvement l'origine de ce défaut et ses conséquences. Pour quelle raison un miroir n'a-t-il pas ce défaut ?

3. On veut augmenter le grossissement de cette lunette et redresser l'image. Pour cela, on interpose entre L_1 et L_2 une lentille convergente L_3, de distance focale $f'_3 = \overline{O_3F'_3} > 0$.
L'oculaire est déplacé pour avoir de la planète une image nette à l'infini à travers le nouvel ensemble optique.

a. Quel couple de points doit conjuguer L_3 pour qu'il en soit ainsi ?

b. On appelle γ_3 le grandissement de la lentille L_3. En déduire $\overline{O_3F'_1}$ en fonction de f'_3 et γ_3.

c. Faire un schéma. On placera O_3 entre F'_1 et F_2, et on appellera $\overline{A'B'}$ la première image intermédiaire et $\overline{A''B''}$ la seconde image intermédiaire.

d. En déduire le nouveau grossissement G' en fonction de γ_3 et G. Comparer à G, en norme et en signe. Conclure.

10 30 min

➤ *Corrigé p. 188*

Spectrographe à prisme

(d'après CCP option MP)

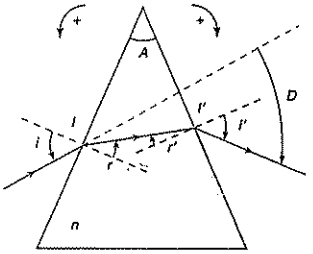
A- Le prisme

Un prisme, constitué par un matériau transparent, homogène, isotrope, d'indice $n_1(\lambda_D) > 1$ pour la radiation $\lambda_D = 589{,}3$ nm (valeur moyenne du doublet jaune du sodium), se trouve plongé dans l'air dont l'indice sera pris égal à 1.

1. Formules du prisme

On se réfèrera à la figure suivante :

Le prisme



Les orientations des angles sont choisies pour que les valeurs des angles i, i', r, r' et D soient positives.

a. Exprimer les lois de Snell-Descartes en fonction de i, i', r, r' et n, traduisant les réfractions à l'entrée en I et à la sortie en I' du prisme, lors du passage d'un rayon lumineux monochromatique dans le plan de section principale.

b. Déterminer les relations géométriques liant les angles A, r et r' d'une part et l'angle de déviation D aux angles A, i et i' d'autre part.

2. Minimum de déviation

Expérimentalement, en lumière monochromatique, on met en évidence l'existence d'un minimum de déviation, noté D_m, quand l'angle d'incidence i varie. Le tracé du rayon lumineux est alors symétrique par rapport au plan bissecteur de l'angle A du prisme. Préciser dans le cas de cette déviation minimale :

a. les relations entre les angles i et i' d'une part, puis r et r' d'autre part ;

b. expliciter la relation donnant l'indice n en fonction de l'angle A du prisme et de la déviation minimale D_m.

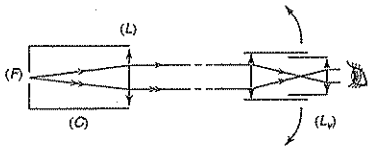
c. Lorsque les mesures des angles A et D_m s'effectuent avec les incertitudes absolues ΔA et ΔD_m, déterminer l'expression de l'incertitude relative $\dfrac{\Delta n}{n}$ sur l'indice n du prisme.

3. Mesure de l'indice du prisme

L'indice du prisme peut être calculé en mesurant l'angle A du prisme et l'angle de déviation mini-

male D_m (pour la radiation λ_D) à l'aide d'un goniomètre. Le prisme est disposé sur la plate-forme du goniomètre, plate-forme qui comprend un collimateur (C) et une lunette de visée (L_v) (voir figure ci-dessous). Le collimateur est constitué par une fente (F) placée au foyer objet d'une lentille (L) et éclairée par la radiation monochromatique. La lunette (L_v), munie d'un réticule, est réglée sur l'infini et permet donc d'observer l'image de la fente. Le centre du réticule de la lunette doit coïncider avec l'image de la fente pour effectuer la lecture sur le cercle, gradué au demi-degré (de 0° à 359,5°), du goniomètre. Un vernier au $1/30^e$ est utilisé dans le repérage des positions angulaires de la lunette de visée, depuis une direction arbitraire de référence ($\mathcal{D}_0$).

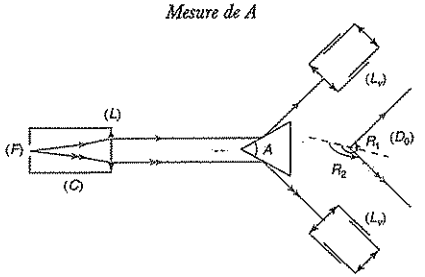
Collimateur et lunette de visée



a. *Mesure de A*

Le prisme, fixé sur la plate-forme, est éclairé par le collimateur (C). Les images de la fente (F) formées par les rayons qui se réfléchissent sur les deux faces de l'angle A du prisme sont repérées par la lunette (L_v) (voir figure). Les repérages des deux positions donnent : $R_1 = 245°10'$ et $R_2 = 125°18'$.

Mesure de A



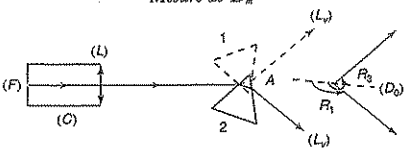
En déduire la valeur de l'angle A du prisme.

Donner la valeur de ΔA (en minute d'arc) sachant que chaque lecture de position est définie à deux graduations près du vernier.

b. *Mesure de D_m*

Pour mesurer la déviation minimale D_m, on observe à la lunette l'image de la fente quand la radiation a traversé le prisme en position 1 (voir ci-dessous). Cette position correspond au minimum de déviation pour le rayonnement monochromatique. On recommence la même expérience dans une position 2 du prisme. Les lectures correspondant aux deux positions de la lunette sont alors : $R_3 = 233°58'$ et $R_4 = 136°14'$.

Mesure de D_m



En déduire la valeur de la déviation minimale D_m.

c. *Détermination de n*

Calculer, à partir des valeurs de A et D_m, l'indice n pour la radiation de longueur d'onde λ_D.

Dans le cas où $\Delta A = \Delta D_m = \varepsilon$, montrer que l'incertitude relative sur n, définie précédemment, devient : $\frac{\Delta n}{n} = k_3 \varepsilon \cot\frac{A}{2}$, où k_3 est un facteur numérique que l'on déterminera.

Calculer alors $\frac{\Delta n}{n}$.

Exprimer le résultat de la mesure de l'indice du prisme sous la forme $n \pm \Delta n$.

B- Le spectrographe à prisme

Un spectrographe à prisme est constitué (voir figure ci-dessous) :

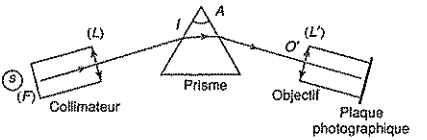
d'un collimateur composé d'une fente (F), éclairée par une source (S) et placée dans le plan focal objet d'une lentille mince achromatique (L) ;

d'un prisme en verre dont l'indice varie avec la longueur d'onde suivant la loi empirique de Cauchy qui s'écrit dans le domaine du visible :

$n = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2}$ avec $\alpha = 1{,}5973$ et $\beta = 0{,}0106\ \mu m^2$;

d'un objectif achromatique assimilé à une lentille mince (L'), qui donne sur une plaque photographique, située dans le plan focal image de (L'), le spectre de la lumière émise par la source (S).

Le spectrographe à prisme



Les distances focales images des lentilles (L) et (L') sont respectivement $f = 20$ cm et $f' = 100$ cm.

1. Tracé de rayons lumineux

La figure précédente représente la marche, à travers le prisme et l'objectif, d'un rayon lumineux incident (OI) pour la longueur d'onde λ_1. Reproduire cette figure et tracer la marche d'un rayon incident (OI) de longueur d'onde λ_2 légèrement supérieure à λ_1.

2. Variation de la déviation D_m

Le prisme est réglé au minimum de déviation pour une longueur d'onde λ donnée.

a. Montrer que la variation de D_m avec l'indice n du prisme s'exprime par : $\dfrac{dD_m}{dn} = 2\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{A+D_m}{2}}$.

b. En déduire le pouvoir dispersif angulaire $\dfrac{dD_m}{d\lambda}$ en fonction des angles A, D_m et de la dispersion du verre $\dfrac{dn}{d\lambda}$.

3. Doublet jaune du sodium

La lumière émise par la source (S) est composée des deux seules radiations jaunes du sodium de longueurs d'onde voisines λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$.

a. Le passage d'une radiation de longueur d'onde λ à $\lambda + d\lambda$ entraîne, au minimum de déviation, une variation dD_m de la déviation.

Exprimer dD_m en fonction de A, D_m, β, λ et $d\lambda$.

b. Déterminer, sur la plaque photographique, la distance d_p séparant les images F_1' et F_2' de la fente (F) éclairée par les deux radiations du sodium.

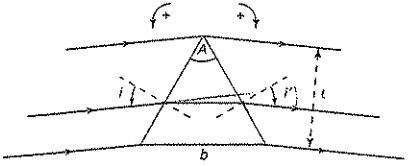
c. Calculer d_p numériquement.

On donne pour le sodium : Na : $\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm.

4. Pouvoir de résolution

Le prisme est éclairé, sous une incidence i fixée, dans les conditions du minimum de déviation (pour une radiation de longueur d'onde λ donnée), de sa base de largeur b jusqu'a son arête. Le faisceau, émergeant sous l'angle i', a une largeur ℓ dans le plan de section principale du prisme.

Déviation d'un faisceau incident



a. Exprimer le pouvoir dispersif angulaire $\dfrac{dD_m}{d\lambda}$ ainsi que d_p en fonction de b, ℓ, f', $\dfrac{dn}{d\lambda}$ et $\Delta\lambda$.

b. La fente (F), de largeur a, est assez large pour négliger tout phénomène de diffraction quand elle est uniformement éclairée en lumière monochromatique. Son image géométrique, sur la plaque photographique, a une largeur a'. Les Δi et $\Delta i'$ mentionnés (voir figure ci-dessous) sont les variations des angles d'incidence et d'émergence correspondant aux bords de a et de a'.

Déterminer a' en fonction de a, f et f'.

Quelle est la condition sur d_p et a' pour que les deux images de la fente source, correspondantes aux longueurs d'onde λ et $\lambda + \Delta\lambda$, soient séparées ?

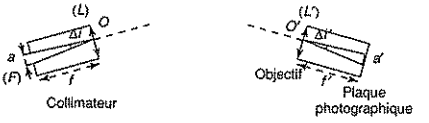
En déduire la limite de résolution $(\Delta\lambda)$ du spectrographe imposée par la largeur de la fente source et l'exprimer en fonction de a, b, ℓ, f et $\dfrac{dn}{d\lambda}$.

Si l'on désire séparer, à l'aide de ce prisme, des raies très voisines en longueurs d'onde, quels sont les réglages à apporter ? Préciser leurs limites.

Calculer les valeurs de $(\Delta\lambda)$ et du pouvoir de résolution $PR = \dfrac{\lambda}{(\Delta\lambda)}$ pour la longueur d'onde λ_D.

Données numériques : $a = 40$ µm ; $b = 3{,}5$ cm.

Déviation d'un faisceau incident



Tester ses connaissances

1 Réponses (a) et (c). Un œil myope a un *punctum proximum* (PP) plus proche que celui d'un œil normal, il peut donc mieux voir les petits caractères d'un journal, puisque le journal peut être placé plus près de l'œil. En revanche, comme son *punctum remotum* (PR) n'est pas à l'infini, il a du mal à voir les étoiles sans correction. Il lui faut une correction par une lentille divergente, car son cristallin est trop convergent.

2 Réponse (d). L'œil hypermétrope a un PP plus éloigné qu'un œil normal, et un PR également plus éloigné, il est virtuel et situé derrière l'œil. Il lui est donc impossible d'observer des objets réels très proches, et il doit accommoder, même pour observer des étoiles. La correction se fait par une lentille convergente, car le cristallin ne l'est pas assez.

3 Réponse (b). Si la distance focale de la loupe est grande, comme il faut placer l'objet entre F et O, il ne faut pas rapprocher la loupe de l'objet, c'est même plutôt le contraire, puisqu'il faut placer l'objet au foyer objet pour une observation sans accommodation par un œil normal. L'image n'est pas plus grosse, puisqu'elle est vue sous un angle $\alpha' = \frac{h}{f'}$ pour un objet de hauteur h placé en F. En revanche, la profondeur de champ étant donnée par $\ell = \frac{f'^2}{d_m}$, elle est d'autant plus grande que la distance focale de la loupe est importante.

4 Réponses (c) et (d). La lunette est dite réglée à l'infini si l'image d'un objet à l'infini est renvoyée à l'infini. Il faut pour cela que l'image intermédiaire soit placée au foyer objet de la deuxième lentille (oculaire). Comme cette image intermédiaire est placée au foyer image de la première lentille (objectif), il faut donc que $F_1' = F_2$. La lunette est alors dite afocale, puisque ses foyers image et objet sont renvoyés à l'infini.

5 Réponses (a) et (d). Les rayons sont toujours déviés vers la base du prisme, et en lumière polychromatique, c'est le violet qui est plus dévié que le rouge, d'après l'expression de la déviation en fonction de l'indice, et d'après la variation de l'indice avec la longueur d'onde (on se reportera à la partie « Retenir l'essentiel » ou à l'exercice 10 de la rubrique « S'entraîner »).

6 Réponse (b). À l'entrée dans le prisme, on passe d'un milieu moins réfringent (l'air) à un milieu plus réfringent (le verre), le rayon réfracté se rapproche de la normale, on ne peut avoir de phénomène de réflexion totale. L'expérience (ou l'étude numérique de la déviation) montre que celle-ci passe par un minimum, noté D_m, pour lequel le spectre en sortie du prisme semble alors « rebrousser chemin ». Bien entendu, cela exclut la réponse (a) qui affirme la monotonie de la fonction.

Savoir appliquer le cours

1 La profondeur de champ du système « loupe + œil » est définie par la distance entre les deux positions extrêmes de l'objet qui donnent une image nette pour l'œil. Notons A_{PP} la position de l'objet qui donne une image intermédiaire au PP de l'œil, et A_{PR} la position de l'objet qui donne une image intermédiaire au PR de l'œil : $\ell = \overline{A_{PR}A_{PP}}$.

$A_{PP} \xrightarrow{\text{lentille}} A_{1,PP} \xrightarrow{\text{œil}}$ accommodation maximale

$A_{PR} \xrightarrow{\text{lentille}} A_{1,PR} \xrightarrow{\text{œil}}$ vision sans accommodation

Pour que l'œil voie sans accommoder, il faut que $A_{1,PR}$ soit à l'infini, cela correspond à un objet A_{PR} placé au foyer objet de la lentille : $\boxed{A_{PR} = F.}$

La position de l'image intermédiaire $A_{1,PP}$ est telle que la distance à l'œil (foyer F') est $\overline{A_{1,PP}F'} = d_m$. Par application de la relation de conjugaison de Newton pour la lentille, on obtient :

$$\overline{FA_{PP}} \times \overline{F'A_{1,PP}} = -f'^2$$
$$\ell \times (-d_m) = -f'^2$$

Par conséquent $\boxed{\ell = \frac{f'^2}{d_m}.}$

2 **1.** Pour percevoir un maximum de détails sur une photographie, il faut placer celle-ci au PP (*punctum proximum*) de l'œil, soit ici à une distance de 10 cm.

2. De la même façon qu'à l'application de cours précédente, il faut recalculer les nouvelles positions extrêmes de l'objet correspondant à une vision nette. Cette fois-ci cependant, comme la lentille est une lentille de contact, l'œil est au centre de la lentille, et non plus en F'.

$A_{PP} \xrightarrow{\text{lentille}} A_{1,PP} \xrightarrow{\text{œil en O}}$ accommodation maximale

$A_{PR} \xrightarrow{\text{lentille}} A_{1,PR} \xrightarrow{\text{œil en O}}$ vision sans accommodation

L'œil myope voit sans accommoder si $A_{1,PR}$ est placé à une distance D_M : $\overline{A_{1,PR}O} = D_M$. La relation de conjugaison de Descartes donne alors :

$$\frac{1}{\overline{OA_{1,PR}}} - \frac{1}{\overline{OA_{PR}}} = V$$

$$\frac{1}{\overline{OA_{PR}}} = \frac{1}{(-D_M)} - V$$

$$\frac{1}{\overline{OA_{PR}}} = -\frac{1+VD_M}{D_M}.$$

On en déduit, sachant que $D'_M = -\overline{OA_{PR}}$,

$$\boxed{D'_M = \frac{D_M}{1+VD_M}.}$$

Or, comme $V = -1\delta$ et $D_M = 1\,\text{m}$, il vient $1+VD_M = 0$ donc A_{PR} est renvoyé à l'infini, comme pour un œil emmétrope.

L'œil myope voit en accommodant jusqu'en $A_{1,PP}$ tel que $\overline{A_{1,PP}O} = d_m$.

La relation de conjugaison de Descartes donne alors :

$$\frac{1}{\overline{OA_{1,PP}}} - \frac{1}{\overline{OA_{PP}}} = V$$

$$\frac{1}{\overline{OA_{PP}}} = \frac{1}{(-d_m)} - V$$

$$\frac{1}{\overline{OA_{PP}}} = -\frac{1+Vd_m}{d_m}$$

On en déduit, sachant que $d'_m = -\overline{OA_{PP}}$,

$$\boxed{d'_m = \frac{d_m}{1+Vd_m}.}$$

Le nouveau PP est donc

$$d'_m = \left|\overline{F'A_{PP}}\right| = \left|\overline{F'F} + \overline{FA_{PP}}\right|$$

$$= \left|-2f' + \frac{f'^2}{D_M}\right| = \left|\frac{f'(f'-2D_M)}{D_M}\right|.$$

A.N. : $\boldsymbol{d'_m = 11{,}1\ \text{cm}}$.

3. L'œil est maintenant placé au foyer image d'une lentille convergente. La profondeur de champ ℓ de l'association est la distance entre les nouveaux PP et PR. Il faut les recalculer. On a désormais $d_m = \overline{A_{1,PP}F'}$ et $D_M = \overline{A_{1,PR}F'}$.

La relation de conjugaison de Newton donne, pour ces deux points :

$$\overline{FA_{PP}} \times \overline{F'A_{1,PP}} = -f'^2 \qquad \overline{FA_{PR}} \times \overline{F'A_{1,PR}} = -f'^2$$

$$\overline{FA_{PP}} = -\frac{f'^2}{(-d_m)} \qquad \overline{FA_{PR}} = -\frac{f'^2}{(-D_M)}$$

On en déduit alors :

$$\ell = \overline{A_{PR}A_{PP}} = \overline{FA_{PP}} - \overline{FA_{PR}} = \frac{f'^2}{d_m} - \frac{d'^2}{D_M}.$$

Par conséquent $\boxed{\ell = f'^2\frac{D_M - d_m}{d_M D_M}}$

A.N. : $\boldsymbol{\ell = 2{,}25\ \text{cm}}$.

3 **1.** L'angle d'observation de cet objet sera maximal s'il est placé au plus proche de l'œil, à la distance d_m minimale permettant une vision nette, avec une accommodation maximale. On a alors $\boxed{\tan\alpha = \frac{\ell}{d_m}.}$

2. a. L'œil emmétrope peut voir des objets qui sont situés entre d_m et l'infini. Il faut donc que l'image A_1B_1 de l'objet AB donnée par la loupe soit dans cette gamme de distances.

Soit P le point de l'axe où l'observateur place son œil. On a alors $\overline{OP} = a$. Et pour que l'œil puisse voir l'image A_1B_1 de l'objet, il faut que $d_m < \overline{A_1P} < \infty$.

La position extrême avec A_1 à l'infini correspond à un objet A placé au foyer objet F de la lentille, et on a alors $\overline{OA_{PR}} = -f'$.

L'autre position extrême de A_1 correspond à $\overline{A_1P} = d_m$ soit $\overline{OA_1} = \overline{OP} - \overline{A_1P} = a - d_m < 0$ (l'image intermédiaire A_1B_1 doit être virtuelle).

La relation de conjugaison de Descartes donne alors la position de A_{PP} correspondante :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA_{PP}}} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{\overline{OA_{PP}}} = \frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{\overline{OA_{PP}}} = \frac{1}{a-d_m} - \frac{1}{f'}$$

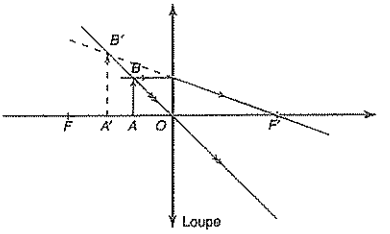
$$\frac{1}{\overline{OA_{PP}}} = \frac{f'-a+d_m}{f'(a-d_m)}.$$

L'objet doit donc être placé entre F et O tel que

$$\boxed{-f' \leqslant \overline{OA} \leqslant \frac{f'(a-d_m)}{f'-a+d_m}.}$$

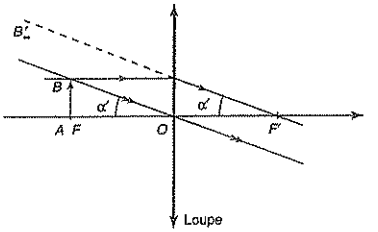
La construction géométrique de l'image est réalisée sur le schéma suivant. L'image est droite et virtuelle.

Observation de AB à travers une loupe



b. Pour que l'objet soit observé à travers la lentille sans accommodation, il faut que l'image intermédiaire A_1 soit rejetée à l'infini et donc que l'objet A soit au foyer objet de la lentille, $A = F$.

Observation de AB à travers une loupe, sans accommodation



D'après la construction du schéma précédent, l'angle sous lequel est alors vue l'image A_1B_1 est α' tel que

$$\boxed{\tan\alpha' = \frac{\ell}{\overline{f'}}.}$$

4 **1.** L'œil est placé en P tel que $\overline{O_2P} = a < d_m$. Il pourra observer le réticule O sans accommoder si celui-ci est placé au foyer objet de l'oculaire $\overline{O_2O} = -f_2'$ (son image intermédiaire est alors renvoyée à l'infini), et il observera le réticule avec une accommodation maximale si l'image intermédiaire est placée à la distance d_m en avant de P, ce qui correspond (voir application de cours précédente) à un objet placé à la distance $\overline{O_2O} = \dfrac{f_2'(a-d_m)}{f_2'-a+d_m}$.

La distance $d = \overline{OO_2}$ doit donc être telle que

$$\boxed{\frac{f_2'(d_m-a)}{f_2'-a+d_m} \leqslant d \leqslant f_2'.}$$

Pour une observation du réticule sans accommodation, il faut que celui-ci soit placé au foyer objet de l'oculaire, soit $\boxed{d = f_2'.}$

2. a. On a les conjugaisons suivantes :

$$A \xrightarrow{\text{objectif}} A_1 = O \xrightarrow{\text{oculaire}} A_2(\infty) \xrightarrow{\text{œil}}$$
observation sans accommodation.

La relation de conjugaison de Descartes pour l'objectif donne alors :

$$\frac{1}{\overline{O_1O}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'}$$
$$\frac{1}{D} - \frac{1}{D+x} = \frac{1}{f_1'}$$
$$(D+x)f_1' - Df_1' = D(D+x)$$
$$D^2 + xD - xf_1' = 0.$$

On obtient une équation du second degré sur D qui n'a de solution réelle que si son discriminant est positif :

$$\Delta = x^2 + 4xf_1'$$
$$\Delta = x(x+4f_1').$$

Or la grandeur x est négative, puisque A est placé avant O sur l'axe optique. Pour que $\Delta \geqslant 0$, il faut donc que $x + 4f_1' \leqslant 0$, ce qui se traduit sur x par la condition demandée : $\boxed{x \leqslant -4f_1'.}$

b. On a alors une seule racine positive de cette équation du second degré :

$$\boxed{D = \frac{-x + \sqrt{x(x+4f_1')}}{2}.}$$

c. On peut placer des objets entre l'infini et $x_{max} = -4f_1'$.

Dans le premier cas, l'image intermédiaire est au foyer image de l'objectif, ce qui donne $D_1 = f_1'$.

Dans le deuxième cas, on a $D_2 = 2f_1'$.

Cela donne la plage de réglage que le constructeur du viseur doit prévoir : $\boxed{f_1' \leqslant D \leqslant 2f_1'.}$

5 On a, dans un prisme, les relations suivantes (voir la partie « Retenir l'essentiel ») :

$\sin i = n\sin r$ $\qquad A = r + r'$

$\sin i' = n\sin r'$ $\qquad D = i + i' - A$

Lorsque l'on fait varier l'incidence i, en lumière monochromatique (donc n est constant), cela produit une variation de r, donc de r', donc de i', et donc de la déviation D. En différenciant les relations du prisme, à n constant, on relie ces différentes variations :

$\cos i\,di = n\cos r\,dr$ $\qquad 0 = dr + dr'$

$\cos i'\,di' = n\cos r'\,dr'$ $\qquad dD = di + di'$

Il vient :

$$dD = di + \frac{n\cos r'}{\cos i'}dr'$$

$$dD = di + n\cos r'(-dr)$$

$$dD = di - \frac{n\cos r'}{\cos i'}\frac{\cos i}{n\cos r}di.$$

Par conséquent $\dfrac{dD}{di} = 1 - \dfrac{\cos r'\cos i'}{\cos i\cos r}$.

L'angle de déviation est donc extremum (l'étude expérimentale montre qu'il s'agit d'un minimum) lorsque $i = i' = i_m$ et $r = r' = r_m$.

L'angle de déviation vaut alors $D_m = 2i_m - A$, d'où $i_m = \dfrac{D_m + A}{2}$; d'autre part, $r_m = \dfrac{A}{2}$.

La première relation de Snell-Descartes à l'entrée du prisme donne donc $\sin i_m = n\sin r_m$, d'où on déduit aisément l'indice du prisme :

$$n = \frac{\sin\left(\dfrac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\dfrac{A}{2}}.$$

La mesure de D_m et de A permet donc la détermination de l'indice n du prisme.

S'entraîner

1 On considère une association de deux lentilles, mise au point à l'infini, ce qui signifie qu'un objet à l'infini voit son image renvoyée à l'infini. Il faut pour cela que le foyer image de la première lentille (objectif) soit confondu avec le foyer objet de la seconde lentille (oculaire) :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' = F_2 \xrightarrow{L_2} A_\infty'$$

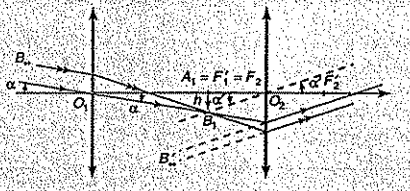
1. Pour calculer le grossissement angulaire, on choisit un objet à l'infini hors de l'axe, envoyant un faisceau incident parallèle, incliné d'un angle α par rapport à l'axe.

Puisque le système est afocal, le faisceau émergent est également parallèle, l'image finale étant rejetée à l'infini hors de l'axe, et les rayons sont inclinés d'un nouvel angle α' par rapport à l'axe.

La figure ci-dessous représente la marche d'un rayon lumineux issu d'un objet à l'infini hors de l'axe à travers le dispositif.

$$B_\infty \xrightarrow{L_1} B_1 \xrightarrow{L_2} B_\infty'$$

Grossissement d'une lunette afocale



Sur la figure, on voit dans le triangle $O_1F_1'B_1$ que l'angle α, assimilé à sa tangente, est donné par $\alpha = \dfrac{\overline{F_1'B_1}}{\overline{O_1F_1'}} = -\dfrac{h}{f_1'}$.

Dans le triangle $O_2F_2B_1$, l'angle α' d'émergence des rayons est donné par $\alpha' = \dfrac{\overline{F_2B_1}}{\overline{O_2F_2}} = \dfrac{h}{f_2'}$.

Par conséquent, pour le grossissement angulaire G, on obtient :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

$$G = \frac{h}{f_2'} \times \left(-\frac{f_1'}{h}\right)$$

Il vient, après simplification $\boxed{G = -\dfrac{f_1'}{f_2'}}$

A. N. : $G = -50$.

Pour calculer le grandissement transversal, on considère un objet AB à distance finie.

$$AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$$

Le grandissement global $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ est le produit du grandissement de chaque lentille :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \qquad \gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}}$$

$$\gamma_1 = -\frac{\overline{F_1'A_1}}{f_1'} \qquad \gamma_2 = -\frac{f_2'}{\overline{F_2A_1}}$$

Il vient $\gamma = \dfrac{\overline{F_1'A_1}}{\overline{f_1'}} \times \dfrac{f_2}{\overline{F_2A_1}}$, avec $F_1' = F_2$,

d'où $\boxed{\gamma = -\dfrac{f_2'}{f_1'}}$

A. N. : $\gamma = -0{,}02$.

On vérifie au passage la relation de Lagrange-Helmholtz : $G\gamma = 1$.

2. On cherche la position du cercle oculaire C, qui est l'image de la monture de l'objectif par l'oculaire. On cherche donc la position du point C, conjugué de O_1 par L_2.

La relation de conjugaison de Newton donne :

$$\overline{F_2O_1} \times \overline{F_2'C} = -(f_2')^2$$

$$\overline{F_2'C} = -\frac{(f_2')^2}{\overline{F_1'O_1}}.$$

Il vient $\boxed{\overline{F_2'C} = \dfrac{(f_2')^2}{f_1'}}$

A. N. : $\overline{F_2'C} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$ m.

Le grandissement associé est $\gamma_2 = -\dfrac{f_2}{\overline{F_2O_1}} = -\dfrac{f_2'}{f_1'}$.

On a alors $\dfrac{r'}{r} = |\gamma_2|$ et $\boxed{r' = \dfrac{f_2'}{f_1'}r}$

A. N. : $r' = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ m.

2

1. L'objet (diapositive) est réel, et pour que son image par la lentille puisse être matérialisée sur un écran de projection, il faut que celle-ci soit réelle également. Or, d'un objet réel, une lentille divergente fournit nécessairement une image virtuelle (on se reportera au chapitre précédent).

La lentille de projection doit donc être **convergente**.

2. L'écran est situé en E, pour que l'image de la diapositive placée en A s'y matérialise, la lentille doit conjuguer A et E : $A \xrightarrow{L} E$.

La relation de conjugaison de Descartes donne alors :

$$\frac{1}{\overline{OE}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OE}} - \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{f' - \overline{OE}}{f'\overline{OE}}.$$

Il vient $\boxed{\overline{OA} = \dfrac{f'\overline{OE}}{f' - \overline{OE}}}$

A.N. : $\overline{OA} = -5{,}05$ cm.

Le grandissement est alors :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \overline{OE} \times \frac{f' - \overline{OE}}{f'\overline{OE}} = \frac{f' - \overline{OE}}{f'} = -99.$$

Si ℓ et L sont respectivement la largeur et la longueur de la diapositive alors la largeur et la longueur de l'image sont données par ℓ' et L' telles que $\boxed{\ell' = |\gamma|\ell}$ et $\boxed{L' = |\gamma|L}$

A. N. : on obtient $\ell' = 2{,}38$ m et $L' = 3{,}56$ m.

Remarque : comme γ est négatif, il faut placer la diapositive à l'envers, pour que l'image projetée soit à l'endroit.

3. La démonstration est vue au chapitre précédent (exercice 9, « S'entraîner »). Il s'agit de la méthode de Bessel. Pour une distance fixe entre l'objet et l'image (supérieure à $4f'$), il existe deux positions distinctes de la lentille qui permettent l'obtention d'une image nette. Elles sont symétriques par rapport au milieu du segment $[AA']$ et les grandissements correspondants sont inversés.

Il faut donc placer la lentille en une position telle que $\overline{OE} = 5{,}05$ cm, et le grandissement est alors $\gamma' = -\dfrac{1}{99}$.

3

1. Contrairement à un verre dépoli utilisé en sortie du condenseur en TP, le transparent de projection ne diffuse pas la lumière, il ne modifie donc quasiment pas le faisceau issu de la lampe. Pour que l'image soit la plus lumineuse possible, il faut qu'un maximum de lumière atteigne la lentille de projection. Les rayons lumineux provenant de la lentille de Fresnel doivent donc converger au voisinage de la lentille de projection.

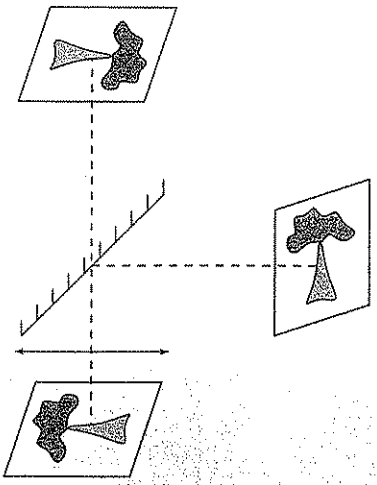
2. La lentille de projection fournit du transparent une image renversée et horizontale. Le miroir, placé à 45°, en donne une image verticale, projetée sur l'écran.

Lorsque la personne présentant le transparent fait face au public, elle doit placer le transparent à l'endroit, le haut vers le public, pour que celui-ci voit sur l'écran le haut du transparent en haut de l'écran (voir ci-après). Ce dispositif rend très simple la présentation.

Remarque : lors d'une présentation, il vaut toutefois mieux ne pas regarder directement le transparent (très lumineux) mais plutôt l'image projetée, qui est celle que voit aussi le public. Vous pouvez ainsi, entre autres, vous assurer que vous n'êtes pas perpétuellement dans le champ de vision du public, et rendre l'exposé plus dynamique.

3. Si d est la distance de la lentille au transparent et D la distance de la lentille à l'écran, la relation de conjugaison de Descartes pour la lentille donne $\dfrac{1}{D} - \dfrac{1}{(-d)} = \dfrac{1}{f'}$.

Projection d'un transparent à l'aide d'un rétroprojecteur



Pour que l'image de l'objet réel soit réelle, l'objet doit être placé avant le foyer objet de la lentille : $d > f'$.
Pour 30 cm $\leqslant d <$ 32 cm, l'image est virtuelle, et ne peut être projetée.
Pour $d = f' = 32$ cm, on obtient une image renvoyée à l'infini.
Pour $d = 45$ cm, on obtient une image à la distance $D = \dfrac{df'}{d-f'} = 1{,}1$ m.
La distance D entre le rétroprojecteur et l'écran peut donc varier entre 1,1 m et l'infini, avec des grandissements différents.
On souhaite que le grandissement soit environ de 10 (en valeur absolue). Or le grandissement est donné par $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\dfrac{D}{d}$.
On souhaite donc que $D = 10d$. En réinjectant dans la relation de conjugaison de Descartes, on obtient $\dfrac{1}{D} + \dfrac{10}{D} = \dfrac{1}{f'}$, d'où $\boldsymbol{D = 11f' = 3{,}52}$ **m**. Il s'agit de la distance minimale.
On a alors, pour d : $\dfrac{1}{10d} + \dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{f'}$,
soit $\boldsymbol{d = \dfrac{11f'}{10} = 35{,}2}$ **cm**.

Remarque : la distance D donnée ici est la distance minimale pour avoir au moins un grandissement de 10. On peut encore éloigner l'écran pour avoir un grandissement plus important. Le critère sera aussi la taille de l'écran recevant l'image projetée.

4 Partie A

1. Soit un objet A_∞ à l'infini sur l'axe. On a les conjugaisons successives :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_2} A'$$

L'image de A_∞ par la première lentille est située au foyer image de L_1. L'image définitive A' est alors l'image de F_1' par la lentille L_2. Il s'agit également du foyer image de l'association des deux lentilles.
La relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{f_2'}$$

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{\overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1'}}$$

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{f_1' - d + f_2'}{f_2'(f_1' - d)}.$$

Il vient $\boxed{\overline{O_2A'} = \dfrac{f_2'(f_1' - d)}{f_1' - d + f_2'}}$.

2. Si les deux lentilles sont accolées, alors $O_1 = O_2 = O$, et $d = 0$.
On a alors $\overline{O_2A'} = \dfrac{f_2'f_1'}{f_1' + f_2'}$.
Le point A' est le foyer image de l'association des deux lentilles, et leurs centres sont confondus, on a donc

$$\boxed{\overline{OF'} = f_{12}' = \frac{f_2'f_1'}{f_1' + f_2'}}$$

Les vergences s'ajoutent pour deux lentilles accolées :

$$\boxed{V_{12} = V_1 + V_2}.$$

Partie B

1. a. On se place dans la **position 1**, dans laquelle les lentilles L_1 et L_2 sont accolées.
D'après la question **(A)2**, on a $\boxed{\overline{O_1F_{12}'} = \dfrac{f_2'f_1'}{f_1' + f_2'}}$
A.N. : $\boldsymbol{\overline{O_1F_{12}'} = 84}$ **mm**.
Cette distance étant positive, la lentille équivalente est convergente.

b. Pour que le système soit afocal, il faut que l'image d'un objet à l'infini soit renvoyée à l'infini. Or l'image intermédiaire donnée par les lentilles L_1 et L_2 accolées se situe en F_{12}' qu'on vient de déterminer. Pour que la lentille L_3 en forme une image définitive à l'infini, il faut que F_{12}' soit confondu avec le foyer objet F_3 de la dernière lentille :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1 + L_2} F_{12}' = F_3 \xrightarrow{L_3} A_\infty'$$

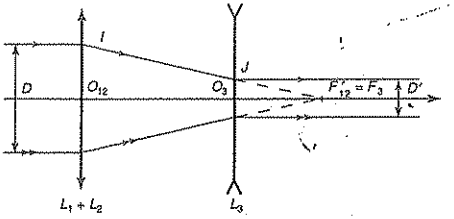
Si on appelle $\Delta = \overline{O_1O_3}$ la distance entre les lentilles L_1 et L_3, alors $\Delta = \overline{O_1O_3} = \overline{O_1F'_{12}} + \overline{F'_{12}O_3}$, avec $F'_{12} = F_3$. Il vient $\Delta = f'_{12} - f_3$, avec $f_3 = -f'_3 = -f'_1$ d'après l'énoncé.

Par conséquent $\boxed{\Delta = \dfrac{f'_2 f'_1}{f'_1 + f'_2} + f'_1}$

A.N. : $\Delta = 24$ mm.

c. Le tracé de la marche d'un faisceau parallèle à l'axe, de diamètre D, à travers le dispositif est représenté sur la figure ci-dessous.

Marche d'un faisceau parallèle à l'axe



Les triangles $O_1IF'_{12}$ et O_3JF_3 étant semblables, on a :

$$\frac{\overline{O_3J}}{\overline{O_1I}} = \frac{\overline{O_3F_3}}{\overline{O_1F'_{12}}}$$

$$\frac{2D'}{2D} = \frac{-f'_3}{f'_{12}} = \frac{f'_1(f'_1+f'_2)}{f'_1 f'_2}.$$

Par conséquent le grandissement $\gamma_1 = \dfrac{D'}{D}$ vaut

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{f'_1 + f'_2}{f'_2}}$$

A.N. : $\gamma_1 = 0{,}71$.

2. On se place dans une nouvelle position dans laquelle la lentille L_2 est désormais accolée à la lentille L_3 (**position 2**).

a. En accolant la lentille L_2 à la lentille L_3, on obtient une lentille convergente de focale $f'_{23} = f'_{12}$ puisque les lentilles L_1 et L_3 sont identiques. Le système est symétrique du précédent, et d'après le principe de retour inverse de la lumière, le système obtenu est toujours afocal.

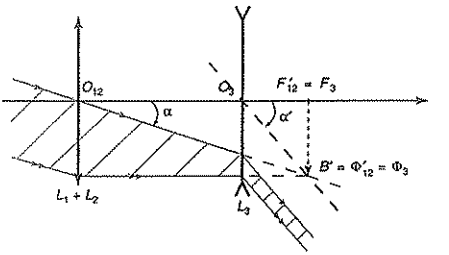
b. En revanche, le grandissement est inversé : $\gamma_2 = \dfrac{1}{\gamma_1}$.

On a $\boxed{\gamma_2 = -\dfrac{f'_2}{f'_1 + f'_2}}$

A.N. : $\gamma_2 = 1{,}4$.

3. a. La construction est réalisée sur la figure suivante.

Marche d'un faisceau incliné. Grossissement angulaire



Pour déterminer la direction du faisceau émergent, on utilise le rayon incident sur la première lentille $\{L_1 + L_2\}$, passant par O_{12}, non-dévié. Il passe par un foyer secondaire image Φ'_{12}.

Il arrive sur la lentille L_3 en passant virtuellement par un foyer secondaire objet Φ_3, et émerge donc parallèlement à l'axe secondaire $(O_3\Phi_3)$ correspondant.

b. Par construction, dans le triangle $O_{12}F'_{12}\Phi'_{12}$, on a

$$\tan\alpha = \frac{\overline{F'_{12}\Phi'_{12}}}{\overline{O_{12}F'_{12}}} = \frac{h}{f'_{12}}.$$

De la même façon, dans le triangle $O_3F_3\Phi_3$, on a

$$\tan\alpha' = \frac{\overline{F_3\Phi_3}}{\overline{O_3F_3}} = \frac{h}{(-f'_3)}.$$

Dans les conditions de Gauss, on peut assimiler les angles à leurs tangentes, et il vient alors

$$G_1 = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{h}{(-f'_3)} \times \frac{f'_{12}}{h}.$$

Comme $f'_3 = f'_1$, on a simplement

$$\boxed{G_1 = -\frac{f'_{12}}{f'_1} = -\frac{f'_2}{f'_1 + f'_2}}$$

A.N. : $G_1 = 1{,}4$.

Remarque : ce système rappelle la lunette de Galilée, étudié dans la rubrique « Savoir résoudre les exercices ».

c. On reconnaît la relation de Lagrange-Helmholtz

$$\boxed{G_1 = \frac{1}{\gamma_1}.}$$

d. Dans la configuration de la **position 2**, on a donc

$$\boxed{G_2 = \frac{1}{\gamma_2}}$$

A.N. : $G_2 = 0{,}71$.

4. a. Il faut placer le film photographique dans le plan où se forme l'image, c'est-à-dire dans le plan focal image de la lentille convergente L_4, puisque le dispositif $\{L_1 + L_2 + L_3\}$ est afocal.

La distance entre L_3 et L_4 n'a *a priori* pas d'importance, mais afin de limiter les pertes de luminosité, il vaut mieux placer la lentille L_4 au plus proche de L_3. Ainsi, le faisceau émergent de L_3 peut être totalement collecté par L_4.

b. Pour que l'encombrement du système soit le plus faible possible, il faut accoler L_4 à L_3 : $\boxed{O_3 = O_4}$.

La distance entre L_1 et la pellicule est alors

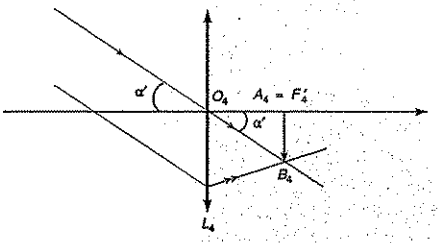
$d = \overline{O_1F_4'} = \overline{O_1O_3} + \overline{O_4F_4'}$.

On a donc $\boxed{d = \Delta + f_4'}$

A.N. : $d = 74$ **mm.**

c. Le faisceau incident sur L_4 est parallèle et incliné par rapport à l'axe optique d'un angle α'.
L'image finale A_4B_4 se forme dans le plan focal image de L_4 (voir ci-dessous).

Taille de l'image sur la plaque photographique



On a alors $\alpha' = \tan\alpha' = \dfrac{\overline{A_4B_4}}{\overline{O_4F_4'}}$.

• Pour la **position 1**, on a $\alpha' = G_1\alpha$; il en découle

$\boxed{\overline{A_4B_4}\ (\text{position 1}) = G_1f_4'\alpha}$

A.N. : $\overline{A_4B_4}$ **(position 1) = 6,1 mm.**

• Pour la **position 2**, on a $\alpha' = G_2\alpha$; il en découle

$\boxed{\overline{A_4B_4}\ (\text{position 2}) = G_2f_4'\alpha}$

A.N. : $\overline{A_4B_4}$ **(position2) = 3,1 mm.**

Attention : il faut bien penser à exprimer les angles en radians quand on assimile l'angle à sa tangente.

d. On définit la distance focale de l'ensemble par $f' = \dfrac{\overline{A_4B_4}}{\alpha}$.

Pour la **position 1**, on obtient $\boxed{f'(\text{position 1}) = G_1f_4'}$

A.N. : f'**(position 1) = 70 mm.**

Pour la **position 2**, on obtient $\boxed{f'(\text{position 2}) = G_2f_4'}$

A.N. : f'**(position 2) = 36 mm.**

5 1. Les deux lentilles accolées L_1 et L_2 sont équivalentes à une lentille unique, de vergence

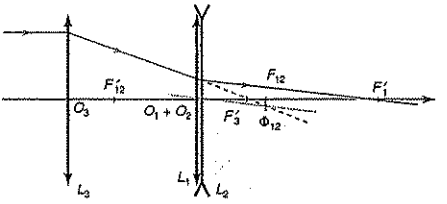
$V_{12} = V_1 + V_2 = \dfrac{1}{f_1'} + \dfrac{1}{f_2'} = \dfrac{f_1' + f_2'}{f_1'f_2'}$.

La distance focale de l'association est donc

$f_{12}' = \dfrac{f_1'f_2'}{f_1' + f_2'}$.

Dans le cas qui nous concerne, on obtient
$f_{12}' = -37{,}5$ **mm.** La lentille équivalente L_{12} est donc divergente. Notons F_{12} et F_{12}' ses foyers objet et image respectivement.
La figure suivante représente le schéma du dispositif.

Dispositif téléobjectif



Pour construire la position du foyer de l'ensemble des trois lentilles, on considère un rayon incident parallèle à l'axe optique. Il émerge de la lentille L_3 en passant par le foyer image F_3'. Il arrive alors sur la lentille équivalente L_{12} avec une incidence quelconque, mais en passant par un foyer secondaire objet Φ_{12}. Il émerge donc finalement parallèlement à l'axe secondaire $(O_{12}\Phi_{12})$. L'intersection du rayon émergent avec l'axe optique donne le foyer image F' de l'ensemble.

2. La mise au point consiste à régler la distance $d = \overline{O_3O_1}$ telle que l'image d'un objet à l'infini se fasse au foyer image de L_1, endroit où l'on a placé la pellicule. Or l'image par l'ensemble des lentilles d'un objet à l'infini sur l'axe est en F'.

On a donc $\boxed{F' = F_1'}$.

Pour déterminer l'encombrement de l'appareil, il faut calculer $\Delta = \overline{O_3F'}$.
On a les conjugaisons suivantes :

$$A_\infty \xrightarrow{L_3} F_3' \xrightarrow{L_1+L_2} F' = F_1'$$

La relation de conjugaison de Descartes pour la lentille équivalente L_{12} donne :

$$\frac{1}{\overline{O_{12}F_1'}} - \frac{1}{\overline{O_{12}F_3'}} = \frac{1}{f_{12}'}$$

$$\frac{1}{\overline{O_{12}F_3'}} = \frac{1}{f_1'} - \frac{f_1' + f_2'}{f_1'f_2'}$$

$$\frac{1}{\overline{O_{12}F_3'}} = -\frac{f_1'}{f_1'f_2'}$$

$$\overline{O_{12}F_3'} = -f_2'.$$

En conséquence,

$$\Delta = \overline{O_3F'}$$
$$\Delta = \overline{O_3F_3'} + \overline{F_3'O_1} + \overline{O_1F_1'}$$
$$\Delta = f_3' + f_2' + f_1'.$$

On a donc un encombrement $\boxed{\Delta = f_3' + f_1' + f_2'}$

A.N. : $\Delta = 150$ mm.

3. La tour est suffisamment loin de l'appareil pour être jugée à l'infini. L'image intermédiaire A_1B_1 formée par L_3 est alors dans son plan focal image, avec $A_1 = F_3'$. La lentille équivalente L_{12} donne alors une image définitive $A'B'$ dans le plan de la pellicule : $A' = F_1' = F'$, puisque la mise au point est faite à l'infini.
Le sommet de la tour émet un faisceau incident parallèle, incliné d'un angle $\alpha = \dfrac{h}{d}$ par rapport à l'axe. Dans le triangle $O_1F_3'B_1$, on a $\tan\alpha = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_3F'3}} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{f_3'}$.

D'après les relations de grandissement pour la lentille L_{12}, on a $\gamma_{12} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{O_{12}A'}}{\overline{O_{12}A_1}}$.

Or $A' = F_1'$ et $A_1 = F_3'$, d'où $\gamma_{12} = \dfrac{f_1'}{(-f_2')}$.

Il vient $\overline{A'B'} = \gamma_1\overline{A_1B_1} = \dfrac{f_1'}{(-f_2')} \times \alpha \times f_3'$.

En définitive, $\boxed{\overline{A'B'} = -\dfrac{f_1'f_3'}{f_2'} \times \dfrac{h}{d}}$

A.N. : $\overline{A'B'} = 6{,}0$ mm.

4. Si l'on utilisait une unique lentille convergente L de focale f', on aurait directement $\overline{A'B'} = \alpha f' = \dfrac{hf'}{d}$.

Pour avoir une image de même taille, il faudrait donc que $\boxed{f' = \dfrac{\overline{A'B'} \times d}{h}}$

A.N. : $f' = 30$ cm.

L'appareil prendrait deux fois plus de place.

6 **1.** La fleur est placée en A, devant la lentille L_1 qui en donne une image A' telle que, d'après la relation de conjugaison de Descartes,

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'}$$
$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{\overline{O_1A}}$$
$$\overline{O_1A'} = \frac{f_1' \times \overline{O_1A}}{f_1' + \overline{O_1A}}$$

A.N. : $\overline{O_1A'} = 300$ mm.

Cette position n'est pas comprise entre $\overline{OP_{min}} = 75$ mm et $\overline{OP_{max}} = 79{,}25$ mm, il est donc impossible de faire une image nette de la fleur.

2. On a désormais les conjugaisons suivantes :

$$A \xrightarrow{L_2} A_1 \xrightarrow{L_1} A'$$

Les relations de conjugaison de Descartes successives donnent :

$$\frac{1}{\overline{O_2A_1}} - \frac{1}{\overline{O_2A}} = \frac{1}{f_2'} \qquad \frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f_1'}$$
$$\frac{1}{\overline{O_2A}} = \frac{1}{\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}} - \frac{1}{f_2'} \qquad \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{f_1'}$$
$$\overline{O_2A} = \frac{f_2'(\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1})}{f_2' - (\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1})} \qquad \overline{O_1A_1} = \frac{f_1'\overline{O_1A'}}{f_1' - \overline{O_1A'}}$$

Pour une pellicule en $P_{min} = F_1'$, l'image intermédiaire A_1 doit être à l'infini, ce qui correspond à un objet A au foyer objet de la lentille L_2 :

$$A_{min} = F_2, \text{ donc } \overline{O_2A_{min}} = -10{,}5 \text{ cm}.$$

Pour une pellicule en P_{max}, l'image A' définitive est telle que $\overline{O_1A'} = \overline{O_1P_{max}} = 79{,}25$ mm, ce qui donne $\overline{O_1A_1} = -1{,}40$ m, ce qui donne finalement $\overline{O_2A_{max}} = -9{,}8$ cm.

La fleur peut désormais se trouver entre 10,5 cm et 9,8 cm en avant de l'appareil photographique pour donner une image nette après mise au point. On peut faire une image nette de la fleur située à 10 cm devant l'appareil.

7 **1.** On a pour un dioptre sphérique :

$$n_1\left(\frac{1}{\overline{SA}} - \frac{1}{\overline{SC}}\right) = n_2\left(\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SC}}\right).$$

On obtiendra la relation de conjugaison d'un dioptre plan en faisant tendre le rayon de courbure $\overline{SC}$ vers l'infini.

Il vient alors $\dfrac{n_1}{\overline{SA}} = \dfrac{n_2}{\overline{SA'}}$, soit la relation $\boxed{\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \dfrac{n_2}{n_1}}$.

2. **a.** On a les conjugaisons suivantes :

$$A \xrightarrow{\text{dioptre sphérique}} A_1 \xrightarrow{\text{dioptre plan}} A'$$

• Pour le dioptre sphérique $(1 \to n)$, on a la relation :

$$\frac{1}{\overline{S_1A}} - \frac{1}{\overline{S_1C_1}} = n\left(\frac{1}{\overline{S_1A_1}} - \frac{1}{\overline{S_1C_1}}\right)$$
$$\frac{n}{\overline{S_1A_1}} = \frac{1}{\overline{S_1A}} - \frac{1-n}{\overline{S_1C_1}}$$
$$\overline{S_1A_1} = \frac{n\overline{S_1A} \times \overline{S_1C_1}}{\overline{S_1C_1} + (n-1)\overline{S_1A}}$$

A.N. : $\overline{S_1A_1} = 51{,}00$ mm.

• Pour le dioptre plan $(n \to 1)$, on a simplement

$$\frac{n}{\overline{P_1A_1}} = \frac{1}{\overline{P_1A'}}$$
$$\overline{P_1A'} = \frac{\overline{P_1S_1} + \overline{S_1A_1}}{n}$$

A.N. : $\overline{P_1A'} = 33{,}18$ mm, ou encore $\overline{S_1A'} = 36{,}08$ mm.

b. Pour déterminer la position du foyer image, on considère un objet à l'infini :

$$A_\infty \xrightarrow{\text{dioptre sphérique}} A_2 \xrightarrow{\text{dioptre plan}} F'$$

La relation de conjugaison du dioptre sphérique donne, avec A_∞ :

$$-\frac{1}{\overline{S_1C_1}} = n\left(\frac{1}{\overline{S_1A_2}} - \frac{1}{\overline{S_1C_1}}\right),$$

ce qui conduit à $\overline{S_1A_2} = \frac{n}{n-1}\overline{S_1C_1}$.

A.N. : $\overline{S_1A_2} = 50{,}75$ mm.

Ensuite, pour le dioptre plan : $\overline{P_1F'} = \frac{\overline{P_1S_1} + \overline{S_1A_2}}{n}$.

A.N. : $\overline{P_1F'} = 33{,}00$ mm, ou encore $\overline{S_1F'} = 35{,}90$ mm.

Pour déterminer la position du foyer objet, on cherche le point de l'axe optique qui a son image par les deux dioptres rejetée à l'infini :

$$F \xrightarrow{\text{dioptre sphérique}} A_3 \xrightarrow{\text{dioptre plan}} A'_\infty$$

La relation de conjugaison du dioptre plan donne, avec A'_∞, un objet intermédiaire A_3 à l'infini également.

La relation de conjugaison du dioptre sphérique se simplifie alors en :

$$\frac{1}{\overline{S_1F}} - \frac{1}{\overline{S_1C_1}} = n\left(-\frac{1}{\overline{S_1C_1}}\right), \text{ soit } \overline{S_1F} = \frac{\overline{S_1C_1}}{1-n}.$$

A.N. : $\overline{S_1F} = -35{,}00$ mm.

La distance focale f' est donc $\boxed{f' = \overline{FS_1} = 35{,}00 \text{ mm}}$.

On peut à présent retrouver l'image A' de A par la lentille en appliquant directement la relation de conjugaison de Descartes, avec $O_1 = S_1 = P_1$. Il vient :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{O_1A}}$$

On en déduit $\boxed{\overline{O_1A'} = \frac{f'\overline{O_1A}}{f' + \overline{O_1A}}}$

A.N. : $\overline{O_1A'} = 35{,}18$ mm.

On obtient un résultat légèrement différent, ce qui tient au fait qu'on a négligé dans ce deuxième calcul la distance séparant S_1 et P_1.

3. a. On a désormais les conjugaisons suivantes :

$$A \xrightarrow{\text{dioptre plan } (n_0 \to 1)} A_4 \xrightarrow{\text{lentille } (f')} A'$$

Pour le premier dioptre plan, la relation de conjugaison donne $\frac{\overline{PA_4}}{\overline{PA}} = \frac{1}{n_0}$, soit $\overline{OA_4} = \overline{OP} + \frac{\overline{OA} - \overline{OP}}{n_0}$.

A.N. : $\overline{OA_4} = -5\,212$ mm.

La lentille en donne alors une image telle que

$$\overline{OA'} = \frac{f'\overline{OA_4}}{f' + \overline{OA_4}}.$$

A.N. : $\overline{OA'} = 35{,}23$ mm.

b. L'image est légèrement décalée par rapport à une utilisation dans l'air. Au sens strict de l'optique géométrique, il faudrait donc déplacer légèrement la pellicule pour avoir une image nette. Cela étant, il faudrait prolonger l'étude en caractérisant la taille de la tache image correspondant à un objet ponctuel, dans le cas où on ne modifie pas la position de la pellicule pour l'utilisation sous-marine.
Si cette tache image est inférieure à la taille d'un grain de la pellicule (ou d'un pixel du capteur numérique), alors l'image obtenue sera également nette sous l'eau, sans réglage supplémentaire.

8 **1.** L'image $A'B'$ de l'objet AB doit se former dans le plan du négatif après mise au point pour être nette :

$$AB \xrightarrow{\text{lentille } (f)} A'B'$$

La relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{\overline{O_1E} - \overline{AE}} = \frac{1}{f'_1}$$

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{d-D} = \frac{1}{f'_1}$$

$$(d-D)f'_1 - df'_1 = d(d-D).$$

On obtient une équation du second degré en d :

$$\boxed{d^2 - dD + f'_1D = 0.}$$

2. Cette équation a deux solutions possibles :

$$\boxed{d_1 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4f'_1D}}{2}} \text{ et } \boxed{d_2 = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4f'_1D}}{2}}$$

A.N. : on trouve $d_1 = 49{,}9$ m et $d_2 = 5{,}0$ cm.
Seule la deuxième solution est acceptable compte tenu des contraintes techniques sur d.

3. La formule du grandissement donne $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

On a ici $\overline{OA} = d - D$ et $\overline{OA'} = d$, d'où un grandissement $\gamma = \frac{d}{d-D} = \frac{h'}{h}$.

La taille h' de l'image sur le négatif est donc $\boxed{h' = \frac{hd}{d-D}}$

A.N. : $h' = -2{,}0$ mm.

L'image est renversée, et plus petite (heureusement, car la taille du négatif est limitée).

4. On a les conjugaisons suivantes :

$$AB \xrightarrow{\text{lentille } (f'_1)} A'B' \xrightarrow{\text{lentille } (f_2)} A''B''$$

A'' étant sur le négatif, on a $\overline{O_2A''} = d_2$. On cherche la position de A' par rapport au négatif, soit la distance $\overline{A'A''}$.

La relation de conjugaison de Descartes pour la deuxième lentille donne :

$$\frac{1}{\overline{O_2A''}} - \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f'_2}$$

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f'_2}$$

$$\overline{O_2A'} = \frac{d_2 f'_2}{f'_2 - d_2}.$$

Il en découle que

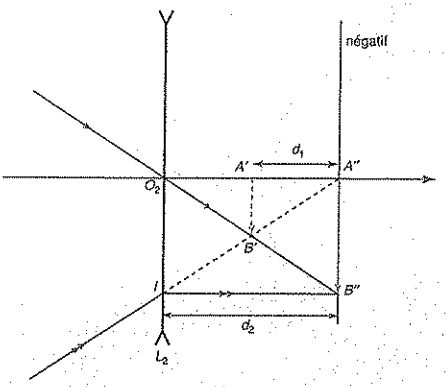
$$d_1 = \overline{A'A''} = \overline{O_2A''} - \overline{O_2A'} = d_2 - \frac{d_2 f'_2}{f'_2 - d_2}.$$

Finalement, $\boxed{d_1 = d_2\left(1 - \dfrac{f'_2}{f'_2 - d_2}\right).}$

A.N. : $d_1 = 20$ mm.

Le dispositif est représenté sur la figure suivante.

Doubleur de focale



On place d'abord la lentille et le négatif, ainsi que l'image $A''B''$ qui s'y forme. Pour construire l'objet $A'B'$ dont L_2 forme l'image, on choisit le rayon passant par B'' et le centre O_2, non dévié. Puis on considère le rayon émergent de L_2 parallèlement à l'axe optique. Le rayon incident correspondant passait donc par le foyer objet F_2, confondu avec A'' puisque $d_2 = -f'_2$. On détermine ainsi B' comme intersection de ces deux rayons incidents.

$(O_2B'B'')$ et $(IB'A'')$ sont les diagonales d'un rectangle, elles se coupent en leur milieu, il est donc évident que $d_1 = \dfrac{d_2}{2}$.

5. Sur le schéma précédent, on voit que le théorème de Thalès donne $\overline{A''B''} = 2\overline{A'B'}$.

Le grandissement γ_2 apporté par le doubleur de focale est donc $\boxed{\gamma_2 = \dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = 2.}$

6. La relation de conjugaison de Descartes pour la deuxième lentille donne :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

$$\frac{1}{\overline{O_1A''} + \overline{A''A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A''} + \overline{A''A}} = \frac{1}{f'_1}$$

$$\frac{1}{d' - d_1} - \frac{1}{d' - D} = \frac{1}{f'_1}$$

$$(d' - D)f'_1 - (d' - d_1)f'_1 = (d' - d_1)(d' - D)$$

$$(d')^2 - (d_1 + D)d' + (d_1D + Df'_1 - d_1f'_1) = 0.$$

On obtient une équation du second ordre en d', qui possède deux solutions :

$$\boxed{d'_1 = \frac{d_1 + D + \sqrt{(d_1 + D)^2 - 4(d_1D + Df'_1 - d_1f'_1)}}{2}}$$

et $\boxed{d'_2 = \dfrac{d_1 + D - \sqrt{(d_1 + D)^2 - 4(d_1D + Df'_1 - d_1f'_1)}}{2}}$

A.N. : $d'_1 = 49{,}9$ m et $d'_2 = 6{,}9$ cm. Seule la deuxième solution correspond au réglage permis.

7. On a vu que le doubleur de focale donnait un grandissement $\gamma_2 = 2$. Il reste à évaluer le grandissement de la première lentille : $\gamma_1 = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{-h'}{h}$.

D'après la relation de grandissement, on a :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}} = \frac{d' - d_1}{d' - D}.$$

Il vient donc $h' = -h \times \dfrac{d' - d_1}{d' - D}$, et comme pour la deuxième lentille $h'' = \gamma_2 h' = 2h'$, il vient

$$\boxed{h'' = -2h \times \frac{d' - d_1}{d' - D}}$$

A.N. : $h'' = 3{,}9$ mm.

9 1. a. Un système est dit *afocal* s'il ne possède ni foyer objet ni foyer image. Autrement dit, l'image d'un objet à l'infini est alors rejetée à l'infini également. Il faut pour cela que le foyer image de la première lentille soit confondu avec le foyer objet de la seconde lentille. On a les conjugaisons suivantes :

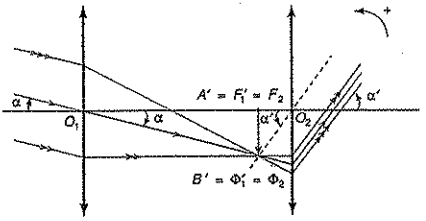
$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$

$$\boxed{F'_1 = F_2.}$$

 © Nathan, Classe prépa

b. Le schéma de la lunette est réalisé sur la figure suivante :

Lunette astronomique



Pour tracer la marche d'un faisceau lumineux issu d'une étoile, incliné d'un angle α par rapport à l'axe optique, on sait que ces rayons convergent après la lentille L_1 dans le plan focal image, en un foyer secondaire image $\Phi_1' = B'$. Ce point est déterminé comme intersection du rayon incident passant par O_1 et du plan focal image de L_1. Comme ce plan est également le plan focal objet de L_2, tous les rayons passent par un foyer secondaire objet $\Phi_2 = \Phi_1' = B'$, et émergent donc parallèlement à l'axe secondaire $(O_2\Phi_2)$. Les rayons émergents forment un angle α' avec l'axe optique.

c. Puisque la planète est à l'infini, son image est renvoyée à l'infini également par la lunette afocale. Il faut donc placer la pellicule au foyer image d'une lentille annexe convergente.

2. a. L'image est renversée comme on peut le voir sur le schéma précédent, α' et α sont de signes opposés.

b. On se base sur le schéma de la figure précédente.

Dans le triangle $O_1F_1'B'$, on obtient $\tan\alpha = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1F_1'}}$.

Dans le triangle O_2F_2B', on obtient $\tan\alpha' = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{O_2F_2}}$.

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, on peut assimiler les angles à leurs tangentes, et le grossissement angulaire est donc donné par $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{O_2F_2}} \times \dfrac{\overline{O_1F_1'}}{\overline{A'B'}}$.

Par conséquent $\boxed{G = -\dfrac{f_1'}{f_2'}}$

A.N. : $G = -5$.

c. Les rayons lumineux traversant les lentilles subissent des réfractions, dont les caractéristiques géométriques font intervenir l'indice du milieu constitutif de la lentille (par les lois de Snell-Descartes). Or ce dernier dépend de la longueur d'onde (milieu dispersif), et les différentes radiations composant la lumière blanche vont suivre des trajets légèrement différents. Par conséquent, on obtient une image irisée, dont les bords sont colorés, c'est le phénomène d'aberrations chromatiques.

Un miroir ne fait intervenir que des réflexions, insensibles à la dispersion, puisque l'indice du milieu n'intervient pas dans les lois de Snell-Descartes. Le problème d'aberrations chromatiques ne se pose pas ; c'est pourquoi on utilise préférentiellement des téléscopes qui ne font intervenir que des réflexions.

3. On interpose une troisième lentille entre L_1 et L_2, en maintenant le système afocal :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} A' = F_1' \xrightarrow{L_3} A'' = F_2 \xrightarrow{L_2} A'''_\infty$$

a. On souhaite que le système reste afocal, or l'image d'un objet à l'infini par L_1 est en son foyer image F_1', et pour que l'image finale A''' soit rejetée à l'infini par la lentille L_2, il faut que l'image A'' intermédiaire soit en son foyer objet F_2.

La lentille L_3 doit donc **conjuguer les points F_1' et F_2** :

$$\boxed{F_1' \xrightarrow{L_3} F_2}$$

b. Si γ_3 est le grandissement de la troisième lentille, on a $\gamma_3 = \dfrac{\overline{O_3F_2}}{\overline{O_3F_1'}}$.

D'autre part, la relation de conjugaison de Descartes pour L_3 s'écrit :

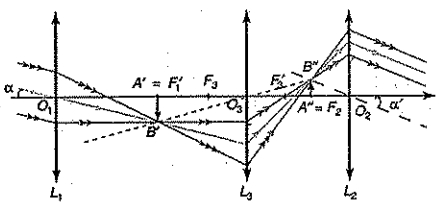
$$\frac{1}{\overline{O_3F_2}} - \frac{1}{\overline{O_3F_1'}} = \frac{1}{f_3'}$$

$$\frac{1}{\gamma_3\overline{O_3F_1'}} - \frac{1}{\overline{O_3F_1'}} = \frac{1}{f_3'}$$

$$\left(\frac{1}{\gamma_3} - 1\right)\frac{1}{\overline{O_3F_1'}} = \frac{1}{f_3'}$$

On a donc $\boxed{\overline{O_3F_1'} = f_3'\left(\dfrac{1}{\gamma_3} - 1\right)}$.

c. *Lunette astronomique constituée de trois lentilles*



On trace tout d'abord B' comme intersection du rayon incident passant par O_1 et du plan focal image de L_1. Puis on trace son image B'' par L_3 en utilisant le rayon passant par le centre O_3, non dévié. Son intersection avec le plan focal objet de L_2 fournit la position de B'', puisque l'on sait que $A''B''$ doit avoir son image par L_2 renvoyée à l'infini. Ensuite, le rayon passant par B'' et O_2 fournit la direction du faisceau émergent.

d. Sur le schéma de la figure précédente, on a :

dans le triangle $O_1F_1'B'$, $\tan\alpha = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1F_1'}}$;

dans le triangle O_2F_2B'', $\tan\alpha'' = \dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{O_2F_2}}$.

De plus, $\gamma_3 = \dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}}$.

On obtient donc, dans le cadre de l'approximation de Gauss :

$$G' = \frac{\alpha''}{\alpha} = \frac{\overline{A''B''}}{(-f_2')} \times \frac{\overline{f_1'}}{\overline{A'B'}} = -\gamma_3 \frac{f_1'}{f_2'}.$$

On retrouve le grossissement G précédent : $\boxed{G' = \gamma_3 G.}$

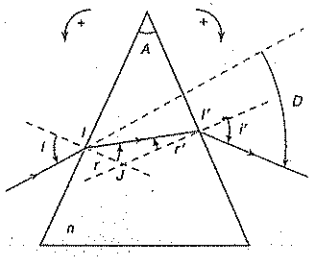
Comme $\gamma_3 < 0$ et $G < 0$, le grossissement avec les trois lentilles est positif. L'image est donc droite. Comme en outre on peut choisir de réaliser $|\gamma_3| > 1$, il est possible d'agrandir l'image.

10 Partie A

1. a. Les lois de Snell-Descartes en I et I' donnent $\boxed{\sin i = n \sin r}$ et $\boxed{\sin i' = n \sin r'}$

b. On se base sur la figure suivante :

Marche d'un rayon à travers le prisme



Dans le triangle $II'J$, on retrouve l'angle $A = (IJ, JI')$, les droites (IJ) et (JI') étant les normales aux faces du prisme. La somme des angles de ce triangle est : $r + \pi - A + r' = \pi$.

Par conséquent, on obtient $\boxed{A = r + r'.}$

En I, le rayon subit une déviation de $i - r$, et en I', il subit une nouvelle déviation de $i' - r'$.

La déviation totale du rayon à travers le prisme est donc $D = i + i' - (r + r')$, soit $\boxed{D = i + i' - A.}$

2. a. Les rayons incidents et émergents étant symétriques par rapport au plan bissecteur de A, on a donc $\boxed{i = i'}$ et par application des lois de Snell-Descartes en I et I', il vient également $\boxed{r = r'.}$

b. On a alors $A = 2r$ d'où $r = \dfrac{A}{2}$, et $D_m = 2i - A$ soit $i = \dfrac{A + D_m}{2}$. Si l'on réinjecte ceci dans la relation de Snell-Descartes en I, on obtient $\sin\dfrac{A + D_m}{2} = n \sin\dfrac{A}{2}$,

d'où on tire aisément que $\boxed{n = \dfrac{\sin\dfrac{A + D_m}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}.}$

c. On chercher à évaluer $\dfrac{\mathrm{d}n}{n}$. Procédons par différentiation logarithmique :

$$\ln n = \ln\left(\sin\frac{A + D_m}{2}\right) - \ln\left(\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = \cot\frac{A + D_m}{2} \times d\left(\frac{A + D_m}{2}\right) - \cot\frac{A}{2} \times d\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = d\left(\frac{A}{2}\right) \times \left(\cot\frac{A + D_m}{2} - \cot\frac{A}{2}\right) + d\left(\frac{D_m}{2}\right) \times \cot\frac{A + D_m}{2}.$$

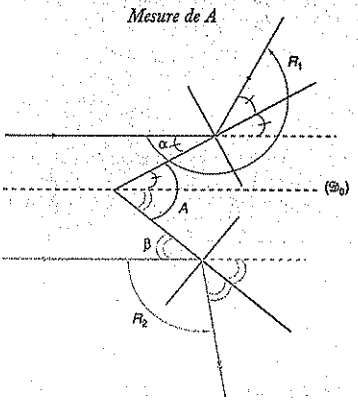
En passant aux valeurs absolues, il vient une majoration de l'incertitude relative :

$$\boxed{\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta A}{2}\left|\cot\frac{A + D_m}{2} - \cot\frac{A}{2}\right| + \frac{\Delta D_m}{2}\left|\cot\frac{A + D_m}{2}\right|}$$

Remarque : il faut bien penser à regrouper les termes en dA d'une part et ceux en dD_m d'autre part avant de passer aux valeurs absolues.

3. a. On utilise le schéma ci-dessous, et on utilise les propriétés des angles opposés par le sommet, ainsi que les lois de Snell-Descartes de la réflexion.

Mesure de A



On voit que $R_1 = \pi + 2\alpha$, et $R_2 = \pi - 2\beta$ d'une part. D'autre part, $A = \alpha + \beta$.

Par conséquent, $\boxed{A = \dfrac{R_1}{2} - \dfrac{R_2}{2}}$

A.N. : $A = 59°56'$.

On a $\Delta A = \frac{\Delta R_1}{2} + \frac{\Delta R_2}{2}$ d'où $\Delta A = 2'$.

Une graduation du vernier correspond à une minute d'arc. Les deux erreurs de lecture sur R_1 et R_2 se cumulent, et l'incertitude absolue sur A est donc $\Delta A = 2'$.

Remarque : là encore, il s'agit d'une majoration de l'erreur effectuée.

b. Le schéma de l'énoncé montre qu'on a

$2D_m = R_3 - R_4$, d'où $\boxed{D_m = \frac{R_3 - R_4}{2}}$

A.N. : $D_m = 48°52'$.

c. On a $D_m = 48{,}87°$, et $A = 59{,}93°$. Il suffit de remplacer dans l'expression de n, et on obtient $n = 1{,}6278$. Si on a la même incertitude sur A et D_m, la relation démontrée précédemment se simplifie en :

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\left|\cot\frac{A+D_m}{2} - \cot\frac{A}{2}\right| + \left|\cot\frac{A+D_m}{2}\right|\right)$$

Or $0 < \cot\frac{A+D_m}{2} < \cot\frac{A}{2}$ donc

$\left|\cot\frac{A+D_m}{2} - \cot\frac{A}{2}\right| = \cot\frac{A}{2} - \cot\frac{A+D_m}{2}$ d'une part, et

$\left|\cot\frac{A+D_m}{2}\right| = \cot\frac{A+D_m}{2}$ d'autre part.

La relation précédente se simplifie donc en

$$\boxed{\frac{\Delta n}{n} = \frac{\varepsilon}{2}\cot\frac{A}{2}}$$

A.N. : $\frac{\Delta n}{n} = 1{,}009 \cdot 10^{-3}$.

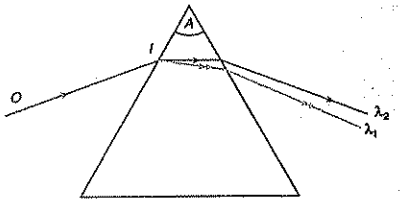
On en déduit alors $\Delta n = 1{,}64 \cdot 10^{-3}$

L'indice du prisme est donc $\boxed{n = 1{,}6278 \pm 0{,}0016.}$

Partie B

1. Le tracé des rayons est porté sur la figure suivante.

Tracé de deux rayons de longueurs d'onde différentes



Le rayon correspondant à λ_2 est moins dévié.
En effet $\lambda_2 > \lambda_1$, donc, d'après la formule de Cauchy, $n_2 < n_1$. Cela implique que $r_2 > r_1$, et par conséquent que $r_2' < r_1'$. Finalement, $i_2' < i_1'$.

2. a. On repart de la formule donnant l'indice n du prisme : $n\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{A+D_m}{2}$.

En différenciant cette formule à A constant, on obtient $\mathrm{d}n\sin\frac{A}{2} = \frac{\mathrm{d}D_m}{2}\cos\frac{A+D_m}{2}$, et finalement :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}n} = 2\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A+D_m}{2}}.}$$

b. Le pouvoir dispersif angulaire est donné par $\frac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}n} \times \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$.

Par conséquent, $\boxed{\frac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}\lambda} = 2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \times \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A+D_m}{2}}.}$

3. a. Il faut désormais expliciter la variation de l'indice avec la longueur d'onde. La loi de Cauchy donne $n = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2}$. Par différenciation, on obtient :

$\mathrm{d}n = -2\frac{\beta}{\lambda^3}\mathrm{d}\lambda$, d'où $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -2\frac{\beta}{\lambda^3}$.

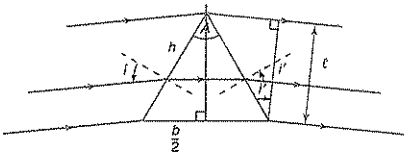
En réinjectant dans la relation obtenue à la question précédente, il vient : $\frac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}\lambda} = -4\frac{\beta}{\lambda^3} \times \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A+D_m}{2}}$, et enfin

$$\boxed{\mathrm{d}D_m = -4\frac{\beta}{\lambda^3} \times \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A+D_m}{2}}\mathrm{d}\lambda}$$

b. Le faisceau émergent du prisme est parallèle, comme provenant d'un objet à l'infini. L'image définitive de la fente (F) se forme donc dans le plan focal image de la lentille (L') de projection.
La distance angulaire entre les deux faisceaux correspondant aux deux raies du doublet jaune du sodium séparées d'un angle $\mathrm{d}D_m$; sur la plaque photographique, les deux images F_1' et F_2' correspondantes sont donc séparées d'une distance $\boxed{d_p = f'|\mathrm{d}D_m|.}$

c. A.N. : $d_p = 1{,}06 \cdot 10^{-4}$ **m**.

4. a. Il s'agit d'exprimer les angles A et D_m à partir des caractéristiques géométriques du prisme, comme sur la figure :



Marche d'un faisceau à travers le prisme

Si l'on note h la largeur d'une face du prisme, on a immédiatement $\sin\frac{A}{2} = \frac{b}{2h}$.

D'autre part, dans la configuration du minimum de déviation, on a $i = i' = \frac{A+D_m}{2}$, d'où $\cos\frac{A+D_m}{2} = \frac{\ell}{h}$.

Le pouvoir dispersif angulaire est donc donné par :

$$\frac{dD_m}{d\lambda} = 2\frac{dn}{d\lambda}\times\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A+D_m}{2}}$$

$$\frac{dD_m}{d\lambda} = 2\frac{dn}{d\lambda}\times\frac{b}{2h}\times\frac{h}{\ell}.$$

Finalement, $\boxed{\frac{dD_m}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda}\times\frac{b}{\ell}.}$

Sur la pellicule, deux raies séparées de $\Delta\lambda$ seront distantes de $d_p = f'\left|dD_m\right|\Delta\lambda$.

Il vient par conséquent $\boxed{d_p = \left|\frac{dn}{d\lambda}\right|\times\frac{b}{\ell}\times f'\Delta\lambda.}$

b. • Dans la configuration du minimum de déviation, en lumière monochromatique, on a $D_m + A = 2(i+i')$, soit par différenciation, $di + di' = 0$, ce qui nous donne, en passant aux valeurs absolues $\Delta i = \Delta i'$.

La fente source de largeur a est dans le plan focal de la lentille (L), l'angle Δi d'ouverture du faisceau est donc $\Delta i = \frac{a}{f}$.

Le faisceau émergent du prisme a une ouverture $\Delta i'$, l'image dans le plan focal de la lentille (L') de projection est donc $a' = f'\Delta i'$.

Par conséquent $\boxed{a' = \frac{f'}{f}a.}$

• Pour que les deux images de la fente source soient séparées sur la plaque photographique, il faut qu'elles soient éloignées d'une distance supérieure à leur largeur : $\boxed{a' < d_p.}$

• On a exprimé d_p et a', il s'agit de les comparer :

$$d_p > a'$$

$$\left|\frac{dn}{d\lambda}\right|\times\frac{b}{\ell}\times f'\Delta\lambda > \frac{f'}{f}a$$

$$(\Delta\lambda) > \frac{a\ell}{fb}\times\frac{1}{\left|\frac{dn}{d\lambda}\right|}.$$

Le pouvoir de résolution est donc limité par la largeur de la fente, qui fait qu'on ne peut pas séparer deux raies, si la différence de leurs longueurs d'onde est inférieure à

$$\boxed{(\Delta\lambda) = \frac{a\ell}{fb}\times\frac{1}{\left|\frac{dn}{d\lambda}\right|}.}$$

• Pour le doublet du sodium : $(\Delta\lambda) = \mathbf{1{,}122\cdot10^{-9}\,m}$ et $PR = 525$.

Les deux raies du sodium $(\Delta\lambda = 0{,}6\cdot10^{-9}\,\text{m})$ ne sont pas séparées par ce dispositif, il faudrait rétrécir la fente source.

Remarque : en réalité, il existe une autre limite due à la diffraction, qui fait que l'on ne peut pas rétrécir la fente source au-delà d'une certaine valeur. Il existe toutefois un compromis permettant l'observation du doublet du sodium.

Index

A

Aberrations
  chromatiques 45
  géométriques 44
Accommodation 142
Aplanétisme 65
Arc-en-ciel 15
Astygmatie 142
Autocollimation 108

C

Célérité de la lumière 7
Champ de vision 56
Collimateur 144
Condenseur 144
Conditions de Gauss 66
Construction
  d'Huygens 14
  de Descartes 14

D

Déviation 147
Diamètre angulaire apparent 103
Diffraction 10
Dioptre plan 43
Dispersion 148
Distance focale 102
Domaine visible 8
Dualité onde-corpuscule 9

E

Emmétrope 141, 153

F

Fibre optique 22
Focométrie 121
Formule de Lagrange-Helmholtz 104
Foyer image – plan focal image 66
Foyer objet – plan focal objet 67
Foyer principal d'un miroir sphérique F 70
Foyers principaux d'une lentille 101

G

Goniomètre 147, 148
Grandissement angulaire 41
Grandissement linéaire 41

H

Hypermétropie 142, 153

I

Image
  étendue 40
  ponctuelle 40
  réelle 40
  virtuelle 41
Indice de réfraction absolu 8

L

Lentille accolée 105
Loi de
  Cauchy 8
  la réflexion 10
  la réfraction 11
  Snell-Descartes 10
Loupe 143

Lunette 144
astronomique 145, 172
de Galilée 160

M

Microscope 146, 164
Milieux Homogènes Transparents Isotropes 8
Mirage 12, 14
Miroir
parabolique 48
plan 42
sphérique 68
Myopie 142, 153

O

Objet
à l'infini 40, 47
étendu 39
ponctuel 39
primaire 39
réel 40
secondaire 39
virtuel 40
Oculaire 144
Œil 141
Ondes électromagnétiques 7

P

Paraxiaux 66
Plans focaux d'une lentille 101
Presbytie 142, 153
Principe de Fermat 10, 27
Prisme 147, 173
Projecteur 146
Punctum
proximum 142
remotum 142

R

Rayon vert 14
Réflexion totale 11
Réfraction limite 11, 37
Réfringent 9
Relation de conjugaison 41
de Descartes 69, 104
de Descartes avec origine au centre C 72
de Descartes avec origine au sommet S 72
de Newton 72, 104

S

Spectroscope à prisme 147, 150, 173
Stigmatisme 41, 65, 100
approché 42
rigoureux 42
Système
catadioptrique 43
dioptrique 45
Système afocal 120

T

Télescope 81

V

Viseur à frontale fixe 146

Proetudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

N° d'éditeur : 10147051 - Dépôt légal : août 2008
Imprimé en France par CPI-Hérissey à Évreux - N° 108972

Bibliothèque
69342
1/07/03

·éat
eur