

Les bons réflexes pour réussir

PCSI
MPSI
PTSI

| Mécanique |

- > VÉRIFIER SES **CONNAISSANCES DE COURS**
- > DÉGAGER DES **MÉTHODES** POUR LES EXERCICES
- > SAVOIR RÉDIGER LES **SOLUTIONS**

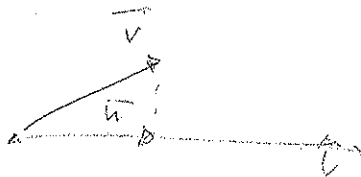
| Classe | prépa



PCSI
MPSI
PTSI

Mécanique

CINQUIÈME PRÉPARATION
N° INV. 29.419
Date 16.06.10



$u, v =$
 $||w|| = ||u|| + ||v||$

Michel Pullicino

Professeur de chaire supérieure
en classes préparatoires
au lycée Marcelin Berthelot
à Saint-Maur-des-Fossés



Proctudes.blogspot.com

PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

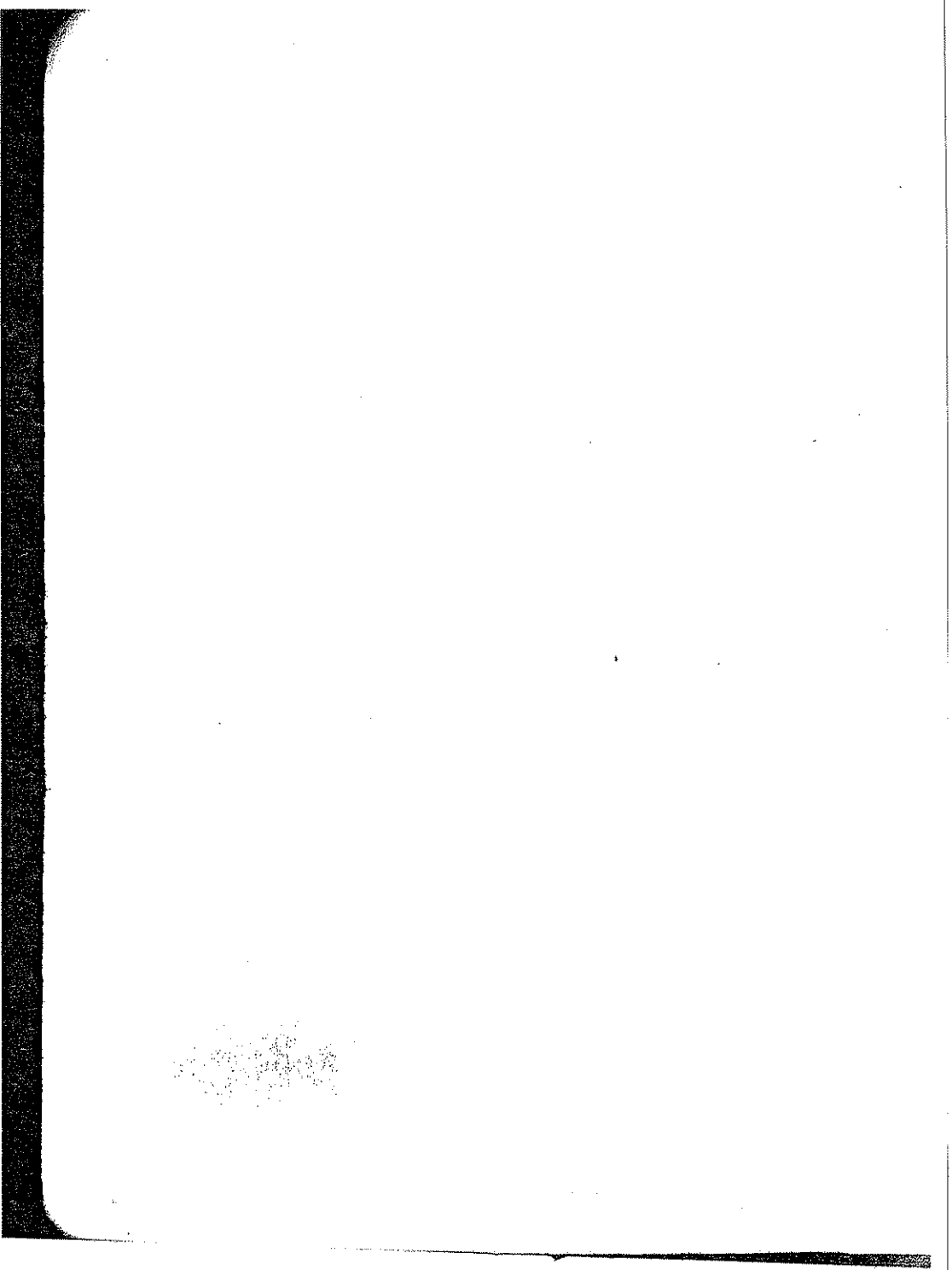
$$u, v = - ||u|| - ||v||$$



Lycée Technique - Mohammedia



Nathan



Cet ouvrage fait partie de la collection « Classe prépa », une collection d'ouvrages simples et accessibles couvrant l'ensemble des programmes des classes préparatoires aux Grandes Écoles scientifiques.

Élaborée pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés, cette collection est basée sur une approche pragmatique des programmes. Ainsi, chaque chapitre est constitué de cinq rubriques :

- **Retenir l'essentiel** qui reprend les notions indispensables du cours et indique des conseils pour éviter les erreurs les plus fréquentes ;
- **Avant la colle** qui regroupe des QCM et des exercices d'application immédiate pour vérifier les connaissances ;
- **Savoir résoudre les exercices** qui, sur la base d'exercices « classiques », permet aux élèves de développer les méthodes indispensables en prépa : analyse de l'énoncé, démarche à suivre, réflexes à acquérir ;
- **S'entraîner** qui regroupe par ordre de difficultés croissantes une batterie d'exercices ;
- **Corrigés** où l'ensemble des exercices sont corrigés en détails et commentés.

Coordination éditoriale : Isabelle Ravilly

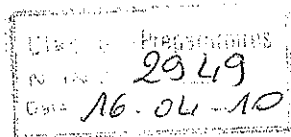
Composition : Alpha-Edit

Couverture : Marie-Astrid Bailly-Maître

Maquette intérieure : Thierry Méléard

© Nathan, 2006 - ISBN 2 09 187321-7

Avant-propos



Ce livre présente le cours sous une forme concise, sans complication et illustré d'« images » constructives simples. Il est conçu afin d'aider les étudiants des classes préparatoires à acquérir une méthode efficace qui leur permettra une résolution rapide des exercices sans recourir nécessairement à une hypothétique « astuce ».

La ligne claire du raisonnement va progressivement s'imposer par une approche systématique des problèmes en corrélation les uns par rapport aux autres et éclairés sous des angles différents. Ils assurent ainsi la maîtrise des concepts alors que de fréquents retours en arrière contrôlent la bonne assimilation des connaissances.

Résoudre un problème de mécanique est parfois peu aisé et il n'est pas anormal de rencontrer des difficultés. Ce livre existe pour accompagner et guider l'étudiant dans son travail personnel. Celui-ci est essentiel pour acquérir toute la rigueur et la méthode nécessaires, pourvu que l'on s'astreigne à rechercher sa propre solution avant de consulter la solution proposée.

Je souhaite que ce livre soit une rencontre favorable qui éveille en vous un peu d'étonnement, de la curiosité et l'envie d'en savoir plus.

Je tiens à remercier les Éditions Nathan et Isabelle Ravilly pour ses conseils d'édition, Jean-Louis Servoin qui, le premier, m'a fait confiance pour un travail d'écriture et Philippe Fleury pour sa lecture attentive et ses judicieux conseils. Merci à Solange d'avoir été là.

J'ai aussi une pensée pour Carmel Pullicino.

Michel Pullicino

Avant-propos	3
--------------------	---

1 Cinématique

1 - La cinématique du point	7
2 - Espace et temps d'un observateur	7
3 - Description du mouvement d'un point	9
4 - Référentiel et bases de projection	11
savoir résoudre les exercices	16
s'entraîner	26
corrigés	28

2 Dynamique

1 - Système étudié : le point matériel	35
2 - La dynamique	35
3 - Énoncé des trois lois de Newton	36
4 - Lois de force	38
savoir résoudre les exercices	42
s'entraîner	55
corrigés	58

3 Énergétique

1 - Puissance et travail d'une force dans un référentiel	69
2 - Théorème de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique	70
3 - Théorème de l'énergie mécanique	71
4 - Mouvement à un degré de liberté	73
savoir résoudre les exercices	82
s'entraîner	95
corrigés	98

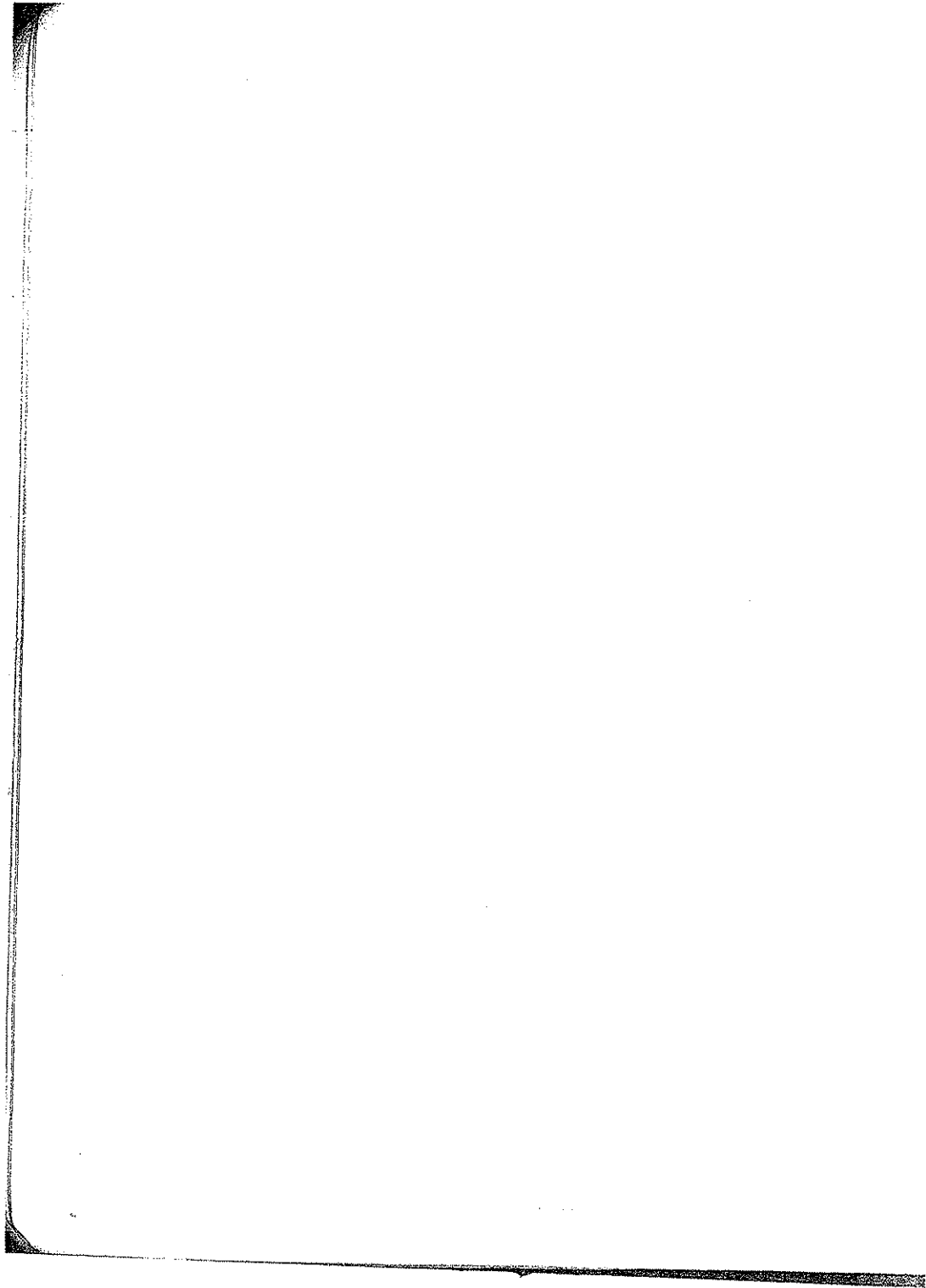
4 Mouvement libre d'un oscillateur harmonique

1 - Une approche du portrait de phase	109
2 - L'oscillateur harmonique non amorti	110
3 - L'oscillateur harmonique amorti par frottement fluide	115
savoir résoudre les exercices	122
s'entraîner	140
corrigés	143

5 Oscillations forcées

1 - Oscillations libres et oscillations forcées	153
2 - Régime transitoire et régime forcé	156
3 - Oscillations forcées d'un oscillateur linéaire amorti - Résonances	158
4 - Analogies électromécaniques	163
savoir résoudre les exercices	168
s'entraîner	191
corrigés	195

➤	6 Théorème du moment cinétique	
	1 - Moment d'une force	203
	2 - Moment cinétique d'un point matériel dans un référentiel \mathcal{R}	206
	3 - Théorème du moment cinétique	207
	savoir résoudre les exercices	212
	s'entraîner	223
	corrigés.....	226
➤	7 Force centrale conservative	
	1 - Forces centrales conservatives	235
	2 - Champ de forces centrales newtonien	240
	3 - Étude des trajectoires en champ newtonien	241
	4 - Les lois de Kepler	247
	savoir résoudre les exercices	250
	s'entraîner	257
	corrigés.....	261
➤	8 Changement de référentiel	
	1 - Changement de référentiel	271
	2 - Composition des mouvements	273
	3 - Mouvements d'entraînement particuliers de (\mathcal{R}') par rapport à (\mathcal{R}) ...	275
	4 - Dynamique en référentiel non galiléen	279
	5 - Énergétique en référentiel non galiléen	281
	savoir résoudre les exercices	285
	s'entraîner	302
	corrigés.....	306
➤	9 Système de deux points matériels	
	1 - Système étudié : ensemble de deux points matériels	317
	2 - Éléments cinétiques du système	319
	3 - Éléments dynamiques du système	321
	4 - Éléments énergétiques du système	324
	5 - Lois de conservation pour un système isolé de deux points matériels ...	327
	6 - Réduction canonique du problème à deux corps	329
	savoir résoudre les exercices	336
	s'entraîner	345
	corrigés.....	349
➤	10 Caractère galiléen approché des référentiels de la mécanique	
	1 - Les référentiels galiléens	361
	2 - Terme de marée	363
	3 - Les référentiels usuels de la mécanique newtonienne	367
	savoir résoudre les exercices	376
	s'entraîner	381
	corrigés.....	383



1 Cinématique

1 La cinématique du point

La cinématique est l'étude du mouvement d'un point M indépendamment des causes qui lui ont donné naissance ou des effets qu'il pourrait produire, elle décrit le mouvement sans chercher à l'interpréter. Le point n'a ici aucune matérialité, il est un objet mathématique dont la position instantanée est définie à l'aide de 3 coordonnées spatiales.

[1] La première étape de résolution d'un problème de mécanique est la définition précise du système S étudié. Dans ce chapitre, il s'agit du point M observé.

2 Espace et temps d'un observateur

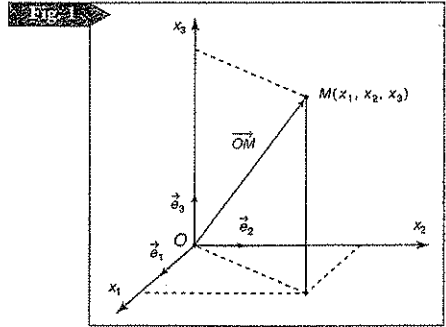
2.1. Notion de référentiel d'un observateur

La notion de mouvement ou de repos de M est relative à son observateur. Tous les observateurs assis dans le compartiment d'un train observent un point M collé et fixe sur la vitre alors que tous les observateurs immobiles sur le quai de la gare voient le même point se déplacer. L'ensemble des observateurs liés au train constitue le référentiel du train, l'ensemble des observateurs liés au sol constitue le référentiel du sol ou référentiel terrestre. Le mouvement du point M est **relatif** car sa description dépend du référentiel d'étude \mathcal{R} . Les observateurs, immobiles les uns par rapport aux autres, constituent le référentiel d'étude \mathcal{R} . Inversement \mathcal{R} est un solide de référence, virtuel ou non, sur lequel sont fixés les observateurs.

[2] La seconde étape consiste à définir le référentiel d'étude \mathcal{R} .

2.2. Repérage du point M dans l'espace

L'observateur est situé en O . Pour préciser sans ambiguïté la position du point observé M , il rapporte l'espace à trois axes orthogonaux (Ox_1) , (Ox_2) , (Ox_3) tracés sur le solide de référence \mathcal{R} et issus du point O choisi comme origine. Ce système d'axes est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de notation abrégée B.O.N.D. L'observateur en O observe le point M . Il détermine le vecteur position \vec{OM} de composantes x_1 , x_2 et x_3 dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:



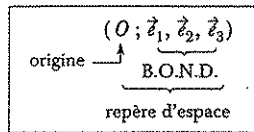
$$\vec{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3,$$

avec la disposition pratique :

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

Les paramètres x_1 , x_2 et x_3 sont les valeurs des projections orthogonales du vecteur position sur les trois axes du repère. Ces nombres algébriques sont les **trois degrés de liberté** du point M . Un vecteur est défini par sa direction, son sens et par sa norme (ou valeur, intensité) notée $\|\vec{OM}\| = OM = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. C'est une grandeur strictement positive, indépendante de la base d'explicitation qui représente la distance séparant le point O du point M , elle est affectée d'une unité : le mètre.

L'association de O et de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ définit le **repère d'espace** de l'observateur :



2.3. Repérage du point M dans le temps

Le point M se déplace dans l'espace. L'observateur se munit d'une horloge pour mesurer le temps et peut ainsi étudier l'évolution de ces coordonnées en fonction du temps :

$$\vec{OM}(t) = x_1(t) \vec{e}_1 + x_2(t) \vec{e}_2 + x_3(t) \vec{e}_3 \quad \text{ou} \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

Attention

La distinction entre repère et référentiel n'est pas essentielle dans le cadre de la mécanique classique, mais pour un même référentiel il y a une infinité de repères possibles : certains sont fixes et d'autres mobiles dans \mathcal{R} .

2.4. Référentiel ou repère d'espace-temps

L'adjonction de temps t au repère d'espace définit le référentiel \mathcal{R} :



La cinématique et la mécanique classiques reposent sur l'hypothèse du temps absolu introduite par Newton en 1687 : le temps s'écoule de la même façon pour tous les observateurs, autrement dit dans tous les référentiels.

Le temps **absolu** est indépendant du référentiel ; il est donc inutile de préciser le temps t dans l'écriture du référentiel \mathcal{R} que l'on écrira :

$$\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

3 Description du mouvement d'un point

Le repérage du point M dans l'espace nécessite trois coordonnées scalaires. La description de son mouvement dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est caractérisée par trois grandeurs vectorielles toutes relatives à \mathcal{R} : les vecteurs position, vitesse et accélération.

3.1. Vecteur position et trajectoire

Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le vecteur position du point M par rapport au référentiel \mathcal{R} se décompose de la façon suivante :

$$\vec{r}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM}(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + x_3(t)\vec{e}_3,$$

\uparrow
 référentiel de définition du vecteur position de M

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{matrix}$$

Commentaires :

- La connaissance des trois équations horaires $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ définit entièrement le mouvement de M .
- La trajectoire dans le référentiel considéré est la courbe décrite par M au cours du temps. Lorsqu'elle est bidimensionnelle, son équation est obtenue en éliminant le temps t par combinaison des deux équations horaires.

Il y a alors perte d'une information, visualiser une trajectoire ou un itinéraire sur une carte routière ne permet pas d'accéder à la position instantanée du mobile.

- Si le point M est immobile dans \mathcal{R} , ses composantes x_1 , x_2 et x_3 sont indépendantes du temps t .

3.2. Vecteur vitesse

Attention

Contrairement à la dérivée d'une fonction scalaire, la dérivée d'une fonction vectorielle dépend de la base choisie pour décrire le référentiel d'observation.

Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le vecteur vitesse du point M par rapport au référentiel \mathcal{R} est :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overline{OM}}{dt} \right) / \mathcal{R}$$

référentiel de définition
du vecteur vitesse de M \uparrow
← référentiel de dérivation
du vecteur position

Pour bien comprendre, effectuons la dérivée du vecteur position :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \frac{dx_1}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dx_2}{dt} \vec{e}_2 + \frac{dx_3}{dt} \vec{e}_3 + x_1 \left(\frac{d\vec{e}_1}{dt} \right) / \mathcal{R} + x_2 \left(\frac{d\vec{e}_2}{dt} \right) / \mathcal{R} + x_3 \left(\frac{d\vec{e}_3}{dt} \right) / \mathcal{R}$$

L'observateur dans \mathcal{R} distingue deux types de bases de projection $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

(i) La base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est **liée au référentiel** d'étude \mathcal{R} : elle est invariante au cours du temps, indépendante de M et reste **fixe** tout au long du mouvement de M . Ainsi :

$$\left(\frac{d\vec{e}_1}{dt} \right) / \mathcal{R} = \left(\frac{d\vec{e}_2}{dt} \right) / \mathcal{R} = \left(\frac{d\vec{e}_3}{dt} \right) / \mathcal{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \frac{dx_1}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dx_2}{dt} \vec{e}_2 + \frac{dx_3}{dt} \vec{e}_3$$

Dans ce cas il suffit de dériver les composantes de $\vec{r}(M/\mathcal{R})$.

(ii) La base $(\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ est une base **locale mobile, liée au point M** et qui l'accompagne dans son mouvement ; il faudra prendre en compte les dérivées non nulles des vecteurs unitaires de la base.

Commentaires :

- Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.
- Le mouvement de M est rectiligne uniforme si $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ est un vecteur constant.
- Le mouvement de M est uniforme si la norme $\|\vec{v}(M/\mathcal{R})\|$ est constante.
- Sa norme v est indépendante de la base d'explicitation $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et s'exprime en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3.3. Vecteur accélération

Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le vecteur accélération de M par rapport au référentiel \mathcal{R} est :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt} \right) / \mathcal{R} = \left(\frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} \right) / \mathcal{R}$$

référentiel de définition
du vecteur vitesse de M \uparrow
← référentiel de dérivation
du vecteur position

Commentaires :

- Si le point M est immobile dans \mathcal{R} :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

- Sa norme a est indépendante de la base d'explicitation $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et s'exprime en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

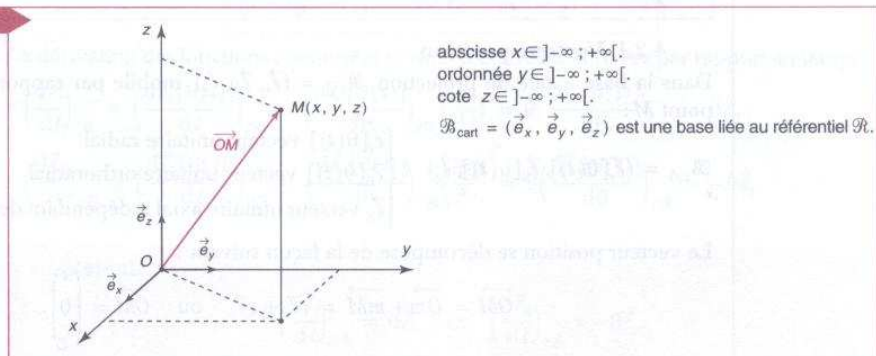
4 Référentiel et bases de projection

[3] La troisième étape est le choix du système de coordonnées. Ce paramétrage est dicté par la nature du mouvement et doit exploiter les symétries du problème.

4.1. La base cartésienne

Dans le cas général, le point M est localisé par ses **coordonnées cartésiennes** x , y et z (fig. 2) :

Fig. 2



4.1.1. Vecteur position

Dans la base $\mathcal{B}_{\text{cart}} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ liée au référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

4.1.2. Vecteur vitesse

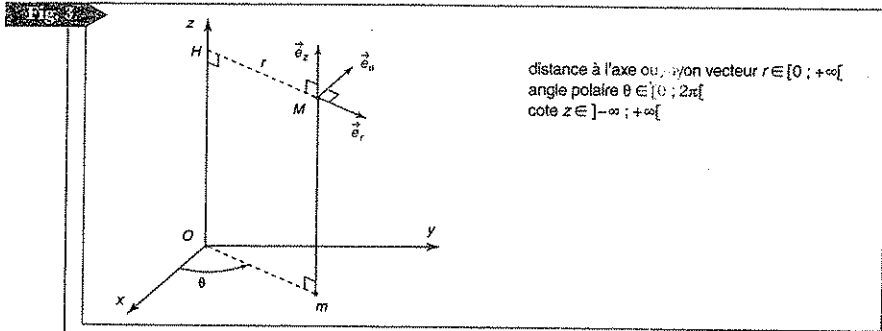
$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \quad \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

4.1.3. Vecteur accélération

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

4.2. La base locale cylindro-polaire

Les coordonnées **cylindriques** ou **cylindro-polaires** r , θ et z sont mieux adaptées pour décrire le mouvement d'un point M animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe privilégié (Oz).



distance à l'axe ou rayon vecteur $r \in]0 ; +\infty[$
 angle polaire $\theta \in]0 ; 2\pi[$
 cote $z \in]-\infty ; +\infty[$

4.2.1. Vecteur position

Dans la base locale de projection $\mathcal{B}_{cyl} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ mobile par rapport à \mathcal{R} et liée au point M :

$$\mathcal{B}_{cyl} = (\vec{e}_r[\theta(t)], \vec{e}_\theta[\theta(t)], \vec{e}_z) \quad \begin{cases} \vec{e}_r[\theta(t)] \text{ vecteur unitaire radial} \\ \vec{e}_\theta[\theta(t)] \text{ vecteur unitaire orthoradial} \\ \vec{e}_z \text{ vecteur unitaire axial indépendant de } t \end{cases}$$

Le vecteur position se décompose de la façon suivant :

$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

4.2.2. Vecteur vitesse

• Notation

• Si f est une fonction de la variable d'espace x :

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \quad \text{et} \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x).$$

• Si x est une fonction du temps t :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} \quad \text{et} \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}.$$

• Dérivée d'une fonction composée

Si f est une fonction de la variable d'espace x et x une fonction du temps t , pour dériver f par rapport à t , il faut décomposer :

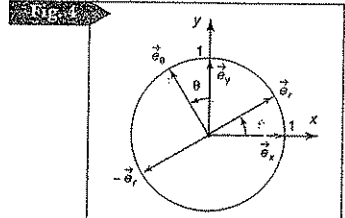
$$\frac{df[x(t)]}{dt} = \frac{df}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

Tout se passe comme si on pouvait manipuler $\frac{df}{dx}$ et $\frac{dx}{dt}$ comme des fractions ordinaires.

• Calcul des dérivées temporelles des vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ de la base mobile locale des coordonnées cylindriques

Projetons \vec{e}_r et \vec{e}_θ dans la base liée au référentiel \mathcal{R} puis dérivons ces expressions par rapport à θ :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y \end{cases}$$



$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{e}_r[\theta(t)]}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y = \vec{e}_\theta \\ \left(\frac{d\vec{e}_\theta[\theta(t)]}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = -\cos\theta\vec{e}_x - \sin\theta\vec{e}_y = -\vec{e}_r \end{cases}$$

Ainsi la dérivation par rapport à l'angle polaire θ est obtenue par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ rad :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r[\theta(t)]}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{e}_r'(\theta) = \vec{e}_r\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \vec{e}_\theta$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta[\theta(t)]}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{e}_\theta'(\theta) = \vec{e}_\theta\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\vec{e}_r$$

La dérivation des fonctions composées permet d'écrire les dérivées par rapport au temps :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r[\theta(t)]}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r[\theta(t)]}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \dot{\theta} \left(\frac{d\vec{e}_r[\theta(t)]}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta;$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_\theta[\theta(t)]}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_\theta[\theta(t)]}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \dot{\theta} \left(\frac{d\vec{e}_\theta[\theta(t)]}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\vec{e}_r.$$

Retenir :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\vec{e}_r.$$

$\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire du mobile, elle s'exprime en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et est souvent notée ω .

Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation du vecteur position par rapport à t dans \mathcal{R} :

$$\vec{v}(M_{/\mathcal{R}}) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r \underbrace{\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}}_{\dot{\theta}\vec{e}_\theta} + \dot{z}\vec{e}_z + z \underbrace{\left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}}_{\vec{0}}.$$

Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

$$\vec{v}(M_{/\mathcal{R}}) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \quad \vec{v}(M_{/\mathcal{R}}) = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

4.2.3. Vecteur accélération

Le vecteur accélération s'obtient par dérivation du vecteur vitesse par rapport à t dans \mathcal{R} :

$$\vec{a}(M_{/\mathcal{R}}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z \quad \vec{a}(M_{/\mathcal{R}}) = \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

• Vocabulaire

- vitesse radiale : $v_r = \dot{r}$;
- vitesse orthoradiale : $v_\theta = r\dot{\theta}$;
- vitesse axiale : $v_z = \dot{z}$;
- accélération radiale : $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$;
- accélération orthoradiale : $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$;
- accélération axiale : $a_z = \ddot{z}$.

4.3. La base locale polaire

Lorsque le mouvement est plan, il est avantageux de se placer à $z = 0$ et d'utiliser les coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire.

• Paramétrage en coordonnées polaires

$$\begin{aligned} r &\in [0 ; +\infty[\\ \theta &\in [0 ; 2\pi[\\ z &= 0 \end{aligned}$$

Pour écrire les composantes des vecteurs vitesse et accélération, il suffit de reprendre leurs expressions en coordonnées cylindro-polaires en supprimant les termes suivant \vec{e}_z :

• Vecteur position

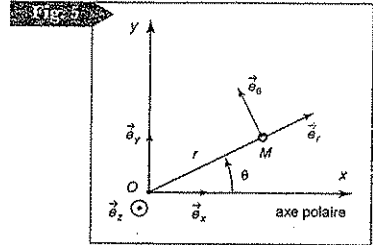
$$\vec{OM} = r\vec{e}_r$$

• Vecteur vitesse

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

• Vecteur accélération

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$



Avant la colle

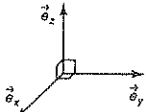
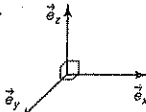
Tester ses connaissances

> corrigé p. 28

1 Les deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} sont exprimés dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. En notant $\alpha = (\vec{A}, \vec{B})$, leur produit scalaire noté $\vec{A} \cdot \vec{B}$ est un scalaire (ou nombre) tel que :

- a. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin \alpha$;
 b. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \alpha$.

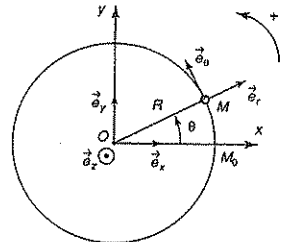
2 La base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est orthonormée directe.

- a. $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$;
 b. $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$;
 c. $\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1$.
 d.  e. 

3 Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

- a. $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = -\vec{e}_r$;
 b. $\left(\frac{d^2\vec{e}_\theta}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}} = -\vec{e}_\theta$; c. $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_r$.

4 Un point M est animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$. Sa trajectoire est un cercle de centre O et de rayon R .



- a. Le vecteur vitesse est constant.
- b. La norme v du vecteur vitesse est constante.
- c. Le mouvement est accéléré.
- d. Le vecteur accélération est constant.

5 Les domaines de variation des coordonnées cylindro-polaires r , θ et z sont :

- a. $r \in]-\infty ; +\infty[$, $\theta \in [0 ; 2\pi[$,
 $z \in]0 ; +\infty[$.
- b. $r \in [0 ; +\infty[$, $\theta \in [0 ; \pi[$,
 $z \in]-\infty ; +\infty[$.
- c. $r \in [0 ; +\infty[$, $\theta \in [0 ; 2\pi[$,
 $z \in]-\infty ; +\infty[$.

6 Le mouvement d'une particule s'effectue suivant un axe (Ox) avec une accélération \ddot{x} proportionnelle à la distance x qui la sépare de l'origine O . Elle a été abandonnée sans vitesse initiale en un point d'abscisse $x = x_0$. Coupler l'équation de son mouvement $x(t)$ au signe du coefficient de proportionnalité :

Données : $\text{ch}(\omega_0 t) = \frac{\exp(\omega_0 t) + \exp(-\omega_0 t)}{2}$

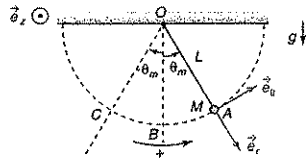
et $\text{sh}(\omega_0 t) = \frac{\exp(\omega_0 t) - \exp(-\omega_0 t)}{2}$.

- a. coefficient négatif $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$;

- b. coefficient positif $\ddot{x} = \omega_0^2 x$;
- c. $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$;
- d. $x(t) = x_0 \text{ch}(\omega_0 t)$.

7 Les petites oscillations d'un pendule simple de longueur L abandonné sans vitesse initiale en un point d'abscisse angulaire θ_m dans un milieu sans frottement sont décrites par l'équation horaire :

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t)$$



Une oscillation correspond au trajet du point M :

- a. $C \rightarrow B$;
- b. $C \rightarrow B \rightarrow A$;
- c. $C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$.

8 Que représente la fréquence propre N_0 des oscillations ?

9 Expliquer : « le temps est absolu et le mouvement relatif ».

Savoir appliquer le cours

> corrigé p. 29

1 Montrer que $\left(\frac{d\|\vec{v}(M_{t_{gk}})\|}{dt} \right)_{t_{gk}}$ est de même signe que le produit scalaire $\vec{v}(M_{t_{gk}}) \cdot \vec{a}(M_{t_{gk}})$. Discuter la nature du mouvement en distinguant : mouvement accéléré, mouvement retardé, mouvement rectiligne uniforme et mouvement circulaire uniforme.

2 L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et sans second membre :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

décrit un mouvement rectiligne sinusoïdal suivant l'axe Ox . Sa solution générale :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

est définie à 2 constantes d'intégration près :

$$X_m \text{ et } \varphi.$$

Déterminez ces constantes à partir des conditions initiales :

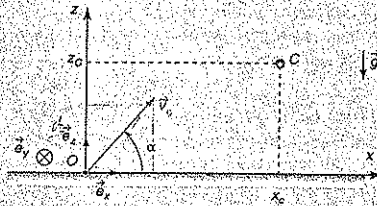
$$x(0) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0) = v_0.$$

1 – Système à vecteur accélération constant

La connaissance du vecteur accélération constant et la donnée des conditions initiales permettent de définir complètement le mouvement du point M .

Le vecteur accélération est ici le vecteur accélération de la pesanteur \vec{g} . Même si la cinématique exclue toute interprétation du mouvement, nous ne perdrons pas de vue qu'il s'agit de l'étude d'un tir balistique dans le champ de pesanteur supposé uniforme et en négligeant la résistance de l'air.

À l'instant $t = 0$, une particule ponctuelle M est lancée du point O avec une vitesse initiale \vec{v}_0 située dans le plan (Oxz) et faisant avec l'horizontale un angle $\alpha > 0$ susceptible d'être ajusté.



Le mouvement de ce point, étudié dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, est à vecteur accélération constant :

$$\vec{a}(M_{/gR}) = \vec{a} = -g\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad g = \|\vec{g}\| > 0.$$

- 1 Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M_{/gR})$ à l'instant t et les équations horaires du mouvement.
- 2 En déduire l'équation de la trajectoire de M et préciser la nature de celle-ci.
- 3 A quel instant t_S , le sommet S de cette trajectoire est-il atteint ? Quelles sont ses coordonnées x_S et z_S ?
- 4 Quelle est la portée OP du projectile, c'est-à-dire le point P où la trajectoire coupe l'axe (Ox) . A quel instant t_P ce point est-il atteint ? Quelle est la norme du vecteur vitesse en P ?
- 5 Montrer qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles ces trajectoires issues de l'origine O atteignent une même cible C dans le plan (Oxy) .
- 6 Rechercher l'ensemble des points du plan (Oxy) accessibles au projectile lancé de O avec une vitesse initiale \vec{v}_0 de norme constante mais de direction quelconque. Vous déterminerez pour cela l'équation de la « parabole de sûreté » séparant les points du plan pouvant être atteints par le projectile de ceux qui ne le seront jamais.

Données : $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha.$$

résolution méthodique

Méthode générale

• **Position du problème :** de quelles données dispose-t-on pour étudier le mouvement ?

Nous disposons de l'expression du vecteur accélération et des conditions initiales. Ses composantes (a_x, a_y, a_z) sont le point de départ de la résolution du problème.

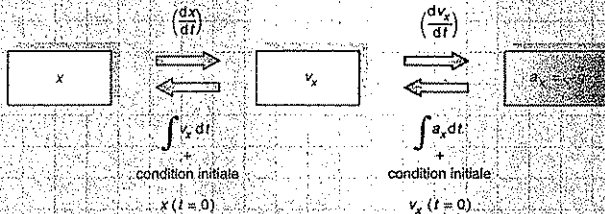
[1] Définir le système étudié.

[2] Choisir le référentiel d'étude.

[3] Choisir la base de projection. Est-elle fixe ou mobile dans \mathcal{R} ?

Si la base est liée au référentiel \mathcal{R} , le passage du vecteur position au vecteur vitesse puis au vecteur accélération s'effectue par dérivations successives par rapport à t de chaque composante. Inversement, le passage du vecteur accélération au vecteur vitesse puis au vecteur position s'effectue par intégrations successives par rapport à t de chaque composante, les constantes d'intégration étant précisées à partir des conditions initiales.

Suivant \vec{e}_x , vecteur unitaire fixe dans \mathcal{R} :



1 Le système est le point M ; son mouvement est étudié dans le référentiel \mathcal{R} .

Choix de la base de projection :

(i) le repère cartésien $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est bien adapté car le mouvement n'admet pas d'axe privilégié de rotation ;

(ii) la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est liée au référentiel, donc non dérivée par rapport à t .

L'expression du vecteur accélération projeté sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = -g\vec{e}_z \Rightarrow \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \begin{cases} a_x = \ddot{x} = 0 \\ a_y = \ddot{y} = 0 \\ a_z = \ddot{z} = -g \end{cases}$$

Ces trois équations différentielles constituent les équations du mouvement du point M . En les intégrant séparément, les constantes d'intégration étant précisées à partir des conditions initiales, on accède successivement au vecteur vitesse puis au vecteur position de M dans \mathcal{R} . Les conditions initiales sont :

$$\vec{OM}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_x(0) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(0) = 0 \\ v_z(0) = v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Partant de \vec{a} , les intégrations successives par rapport à t donnent :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \begin{cases} v_x = v_x(0) = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_y(0) = 0 \\ v_z = -gt + v_z(0) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} ;$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t + x(0) = v_0 \cos \alpha t \\ y = y(0) = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + z(0) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases} ;$$

Résumons

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} ; \quad \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ 0 \\ -gt + v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} ; \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \end{pmatrix}$$

• *Analyse du résultat*

- Le mouvement de M reste dans le plan (Oxz) puisqu'à chaque instant : $y = 0$.
- Le mouvement projeté suivant \vec{e}_x est rectiligne uniforme de vitesse $v_x = v_0 \cos \alpha$ et le mouvement projeté suivant \vec{e}_z uniformément accéléré d'accélération $a_z = -g$.
- Effectuons le produit scalaire : $\vec{a}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}) = g^2 t - gv_0 \sin \alpha$.

(i) le mouvement est décéléré ou ralenti si $\vec{a}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}) < 0$: $t < \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$

(ii) le mouvement est accéléré lorsque $\vec{a}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}) > 0$: $t > \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$

Le sommet S de la trajectoire est atteint à l'instant $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$.

» 2

Les deux équations paramétriques de la trajectoire ou équations horaires du mouvement sont connues, l'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant le temps entre ces deux équations :

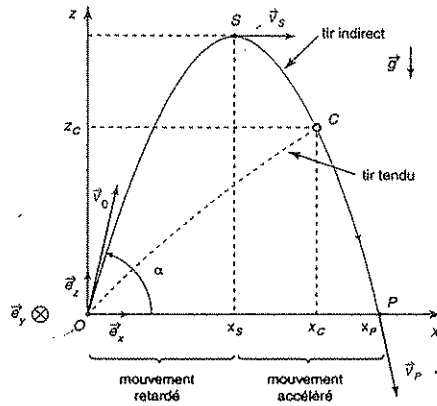
Les deux équations paramétriques de la trajectoire ou équations horaires du mouvement sont :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t. \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant le temps t entre ces deux équations :

$$z = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$$

C'est une parabole d'axe parallèle à (Oz) , issue de O , qui coupe l'axe (Ox) en P et admet le point S comme sommet. La trajectoire est représentée sur la figure ci-contre :



3

Observons que la composante v_z de la vitesse du mobile s'annule à l'instant t_s .

Le point S correspond au sommet de la trajectoire, la composante v_z de la vitesse du mobile s'annule à l'instant t_s .

$$-gt_s + v_0 \sin \alpha = 0, \text{ d'où :}$$

$$t_s = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

En remplaçant t_s par sa valeur dans les composantes du vecteur position, on accède à l'altitude maximale atteinte par M et à l'abscisse du sommet S de la trajectoire :

$$\begin{cases} x_s = v_0^2 \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{g} = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{2g} \\ z_s = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{cases}$$

4 La symétrie de la parabole par rapport à l'axe $(S; \vec{t}_z)$ suffit pour conclure $t_p = 2t_s$.

L'instant t_p correspond à l'équation $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t = 0$, dont les deux solutions sont :

$$t = 0 \text{ (la particule est à l'origine } O) \text{ et } t_p = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \text{ (la particule est en } P).$$

5 $\vec{OC} = \begin{pmatrix} x_C \\ 0 \\ z_C \end{pmatrix}$, la cible C appartient à la trajectoire et ses coordonnées vérifient l'équation :

$$z_C = -\frac{1}{2}g \frac{x_C^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x_C \tan \alpha.$$

En utilisant la relation trigonométrique $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$, $\tan \alpha$ satisfait l'équation du second degré :

$$\tan^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{gx_C} \tan \alpha + \left(1 + \frac{2z_C v_0^2}{gx_C^2}\right) = 0.$$

Le discriminant réduit de cette équation est :

$$\Delta' = \left(\frac{v_0^2}{gx_C}\right)^2 - 1 - \frac{2z_C v_0^2}{gx_C^2}$$

Si $\Delta' \geq 0$, il y a bien deux valeurs α_1 et α_2 pour lesquelles la cible C est atteinte :

$$\tan \alpha_1 = \frac{v_0^2}{gx_C} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_C}\right)^2 - 1 - \frac{2z_C v_0^2}{gx_C^2}} \quad \text{et} \quad \tan \alpha_2 = \frac{v_0^2}{gx_C} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_C}\right)^2 - 1 - \frac{2z_C v_0^2}{gx_C^2}}$$

$\tan \alpha_2 \geq \tan \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \geq \alpha_1$ car la tangente est une fonction croissante : α_2 correspond à un tir indirect et α_1 correspond à un tir direct ou tendu pour atteindre la même cible C .

6 Reprenons la condition sur le discriminant, l'équation du second ordre n'admet pas de solution, autrement dit la cible n'est pas atteinte, si $\Delta' < 0$.

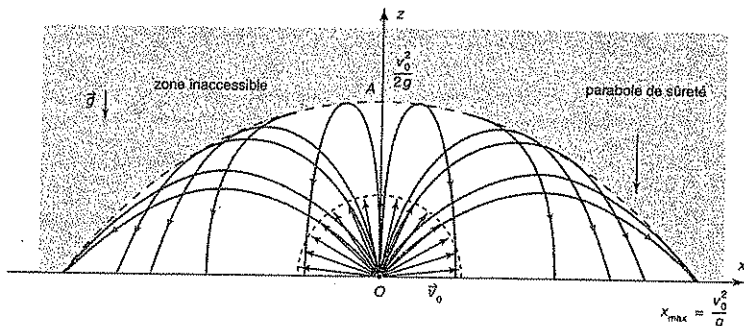
$$\left(\frac{v_0^2}{gx_C}\right)^2 - 1 - \frac{2z_C v_0^2}{gx_C^2} < 0 \quad \text{impose la condition sur la position de } C: z_C > -\frac{gx_C^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Inversement la cible C est atteinte si sa position est telle que :

$$z_C \leq -\frac{gx_C^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}$$

L'égalité correspond à la limite entre les deux domaines, cette courbe est une parabole d'axe (Oz) et de sommet $A(z_A = \frac{v_0^2}{2g})$ qui enveloppe toutes les trajectoires que permet de réaliser le vecteur \vec{v}_0 de norme constante et de directions ajustables.

La parabole de sûreté coupe l'axe Ox en $x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$.



en conclusion

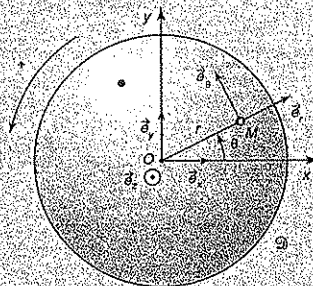
Dans cet exercice, la description du mouvement du point M est déduite de l'expression du vecteur accélération et de la connaissance des conditions initiales sur la position et la vitesse du mobile. Nous considérerons dans le chapitre suivant la corrélation entre cette accélération et les forces extérieures appliquées au point M .

2 – Spirale d'Archimède

Il s'agit de la trajectoire décrite par un point M en mouvement rectiligne uniforme sur un axe animé d'une rotation uniforme dans le plan (Oxy) .

Un disque \mathcal{D} de centre O tourne dans le plan (Oxy) à vitesse angulaire constante ω_0 autour de l'axe (Oz) . Un mobile ponctuel M part de O à l'instant $t = 0$ et est astreint à se déplacer à vitesse constante le long d'un rayon du disque :

$$\vec{v}(M/\mathcal{D}) = \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_r \quad (v_0 > 0)$$



L'étude du mouvement guidé de M peut s'effectuer dans deux référentiels : le référentiel terrestre $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ou le référentiel du disque $\mathcal{D}(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1 Exprimer les coordonnées cartésiennes x et y en fonction des coordonnées polaires r et θ .

2 Considérons le mouvement de M par rapport au référentiel \mathcal{R} . Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération du point M en fonction de r , θ et de leurs dérivées temporelles successives :

a. dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$;

b. dans la base cylindro-polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Ces expressions sont-elles équivalentes ? Quelle est la base la mieux adaptée pour résoudre ce problème ?

3 Donner, en coordonnées polaires, les équations horaires de M : $r(t)$ et $\theta(t)$. Vous les exprimerez en fonction de v_0 , ω_0 et t , en tenant compte du caractère guidé de M sur un rayon du disque à la vitesse \vec{v}_0 .

4 En déduire l'équation et tracer l'allure de sa trajectoire dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Montrer que r est incremented d'une longueur constante d à chaque tour du disque.

5 Exprimer les vecteurs \vec{OM} , $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ en coordonnées polaires dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, en fonction de v_0 , ω_0 et t .

6 Quelle est la trajectoire et l'accélération $\vec{a}(M/\mathcal{D})$ dans le référentiel du disque ?

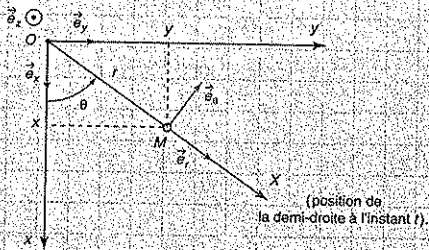
résolution méthodique

Méthode générale

Vous êtes invités à reprendre le plan d'étude systématique présenté en introduction de la résolution de l'exercice précédent.



Lorsqu'on aborde un problème de mécanique, il est recommandé de s'appuyer sur un schéma clair de façon à visualiser de façon simple les axes, les angles, les vecteurs et leurs projections. Le système étudié sera représenté dans une position telle que ses coordonnées soient positives. Les angles seront orientés pour être positifs et leurs valeurs comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.



• **Première analyse** : une spirale d'Archimède est la trajectoire d'un point mobile M dont le mouvement est le résultat de la composition de deux mouvements uniformes : le mouvement circulaire uniforme d'une demi-droite (un rayon du disque) autour de l'axe (Oz) et le mouvement rectiligne uniforme de M sur cette demi-droite.

Les projections du point M respectivement sur les axes (Ox) et (Oy) permettent d'écrire ses abscisse et ordonnée de M en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$



• **Position du problème** : de quelles données dispose-t-on pour étudier le mouvement ?

Nous disposons de l'expression du vecteur position, point de départ de la résolution du problème. Il faudra dériver deux fois ce vecteur par rapport au temps dans le référentiel d'étude \mathcal{R} pour accéder aux vecteurs vitesse et accélération.



Prendre garde au caractère fixe ou mobile de la base de projection dans \mathcal{R} .

Le système étudié est le point M dans le référentiel terrestre \mathcal{R} .

a. Dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

(i) L'axe (O, \vec{e}_z) est un axe privilégié de rotation pour le mouvement. Le repère cartésien $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ n'est sans doute pas le mieux adapté pour décrire ce mouvement.

(ii) La base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) est liée au référentiel \mathcal{R} , donc non dérivée par rapport à t .

La détermination du vecteur vitesse est obtenue par dérivation des composantes du vecteur position suivant \vec{e}_x et \vec{e}_y :

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Dérivation d'un produit de fonctions :

$$x = r(t) \cos[\theta(t)] \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta(t) + r \frac{d \cos[\theta(t)]}{dt} = \dot{r} \cos \theta(t) + r \frac{d \cos[\theta(t)]}{dt}$$

Dérivation d'une fonction composée :

$$\frac{d \cos[\theta(t)]}{dt} = \frac{d \cos[\theta(t)]}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\sin \theta \dot{\theta} \quad v_x = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}$$

Pour déterminer le vecteur accélération, dérivons maintenant le vecteur vitesse :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos \theta - \dot{r} \sin \theta \dot{\theta} - \dot{r} \sin \theta \dot{\theta} - r \cos \theta \dot{\theta}^2 - r \sin \theta \ddot{\theta} \\ \ddot{r} \sin \theta + \dot{r} \cos \theta \dot{\theta} + \dot{r} \cos \theta \dot{\theta} - r \sin \theta \dot{\theta}^2 + r \cos \theta \ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

• **Analyse du résultat** : ce choix mal adapté de base de projection conduit à une expression de l'accélération peu lisible. De plus les calculs sont longs et périlleux.

b. Dans la base cylindro-polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

En adoptant la base cylindro-polaire comme base de projection :

(i) L'axe (O, \vec{e}_z) est un axe privilégié de rotation pour le mouvement. Le repère cylindro-polaire $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est bien adapté pour décrire ce mouvement.

(ii) La base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est mobile par rapport au référentiel \mathcal{R} , les vecteurs $\vec{e}_r(t)$ et $\vec{e}_\theta(t)$ sont dérivés par rapport à t .

Dérivons successivement les vecteurs position et vitesse dans la base mobile dans \mathcal{R} :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \quad \text{avec} \quad \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Dérivons à nouveau par rapport au temps pour obtenir le vecteur accélération :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

Les expressions obtenues dans les deux bases de projection sont équivalentes dans le même référentiel.

Prenons le cas du vecteur vitesse et partons de son expression en coordonnées polaires :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y \end{cases} \Rightarrow \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \dot{r}(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) + r\dot{\theta}(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y).$$

En réunissant les termes en \vec{e}_x et \vec{e}_y :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\vec{e}_x + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e}_y.$$

Cette expression est identique à celle obtenue en coordonnées cartésiennes.

• **Analyse du résultat** : ce choix de la base de projection polaire pour étudier le mouvement de rotation de M est mieux adapté, les calculs sont plus rapides (attention néanmoins au caractère mobile de cette base) et les résultats obtenus mieux lisibles.

3

• **Position du problème** : de quelles données dispose-t-on pour étudier ce mouvement ?

Le mouvement de M est la composition de deux mouvements uniformes :

- un mouvement circulaire uniforme d'une demi-droite (un rayon du disque) autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω_0 ;
- un mouvement rectiligne uniforme de M sur cette demi-droite à la vitesse linéaire v_0 .

• **Description du mouvement**

- $r(t)$ est la distance linéaire parcourue par M sur la demi-droite à l'instant t .
- $\theta(t)$ est l'angle parcouru par la demi-droite à l'instant t .

(i) La vitesse de M dans le référentiel du disque \mathcal{D} est :

$$\vec{v}(M/\mathcal{D}) = v_0\vec{e}_r = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r.$$

L'intégration de $\frac{dr}{dt} = v_0$ donne la solution générale : $r = v_0t + A$.

La constante A est à déterminer à partir de la condition initiale $r(t=0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\boxed{r = v_0t}$$

(ii) La vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ est constante et égale à ω_0 : $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0$.

L'intégration donne : $\theta = \omega_0t + B$ et la constante B est à déterminer à partir de la condition initiale $\theta(t=0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$$\boxed{\theta = \omega_0t}$$

4 L'équation polaire de la trajectoire dans le référentiel \mathcal{R} est obtenue en éliminant le temps dans les deux équations horaires précédentes :

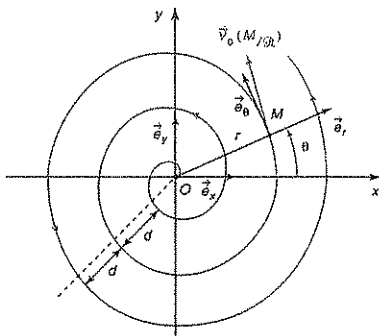
$$\boxed{r = \frac{v_0}{\omega_0}\theta}$$

La trajectoire décrite par M dans le référentiel \mathcal{R} est la spirale d'Archimède (voir ci-contre).
 Exprimons la variation de r pour un tour du disque :

$$\begin{aligned} r(\theta + 2\pi) &= \frac{v_0}{\omega_0}(\theta + 2\pi) = r(\theta) + 2\pi \frac{v_0}{\omega_0} \\ &= r(\theta) + d \end{aligned}$$

avec
$$d = 2\pi \frac{v_0}{\omega_0}$$

À chaque tour, le rayon vecteur est incremented de la longueur d . Le rapport $\frac{v_0}{\omega_0}$ est une constante caractéristique de la trajectoire.



5 Le vecteur position du point M est $\vec{OM} = r\vec{e}_r = v_0 t \vec{e}_r$. La dérivée par rapport à t donne :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v_0\vec{e}_r + r\omega_0\vec{e}_\theta = v_0(\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta).$$

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = v_0(\vec{e}_r + \omega_0 t \vec{e}_\theta)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(M/\mathcal{R}) &= \left(\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = v_0\omega_0\vec{e}_\theta + v_0(\omega_0\vec{e}_\theta - \omega_0^2 t \vec{e}_r), \text{ car : } \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta = \omega_0\vec{e}_\theta \\ & \qquad \qquad \qquad \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\vec{e}_r = -\omega_0\vec{e}_r, \end{aligned}$$

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = v_0\omega_0(-\omega_0 t \vec{e}_r + 2\vec{e}_\theta)$$

6 Dans le référentiel du disque, la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est fixe.

$$\vec{OM} = v_0 t \vec{e}_r; \quad \vec{v}(M/\mathcal{D}) = v_0 \vec{e}_r; \quad \vec{a}(M/\mathcal{D}) = \vec{0}.$$

Pour un observateur fixe sur le disque \mathcal{D} , la trajectoire de M est une droite.

Le vecteur vitesse étant tangent à la trajectoire, celle-ci est confondue avec l'axe (O, \vec{e}_r) .

en conclusion

- * La trajectoire du point M et les vecteurs vitesse et accélération, dépendent du référentiel d'étude. Préférons une description du mouvement dans le référentiel du disque où leurs expressions sont simples.
- * Pour un référentiel donné il y a plusieurs repères possibles sans influence sur les vecteurs caractéristiques du mouvement. Choisissons la base de projection polaire bien adaptée à ce mouvement de rotation plan, les calculs y sont plus simples et les résultats faciles à interpréter.



20 min

> Corrigé p. 30

Spirale logarithmique

Cette courbe appelée « spirale logarithmique » par Varignon fut étudiée par Descartes et Torricelli en 1638, puis par Jacques Bernoulli (1654-1705). Celui-ci fit graver une spirale logarithmique sur sa tombe dans la cathédrale de Bâle, avec l'épigraphie : « déplacée, je réapparaîs à l'identique ». Mais le graveur a tracé une spirale d'Archimède...

Le mouvement d'un point M analysé dans le référentiel terrestre \mathcal{R} est repéré par ses coordonnées polaires $r = r_0 e^{\theta}$ et $\theta = \omega t$. Les paramètres r_0 et ω sont des constantes positives.

1. Tracer qualitativement l'allure de la courbe décrite par M .
2. Exprimer les composantes radiale et orthoradiale de $\vec{v}(M/\mathcal{R})$. En déduire la valeur de l'angle φ entre la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ et le vecteur position \vec{OM} à l'instant t .
3. Exprimer les composantes radiale et orthoradiale de $\vec{a}(M/\mathcal{R})$. Que remarque-t-on ?

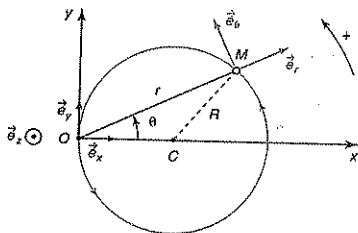


20 min

> corrigé p. 31

Trajectoire circulaire d'un mobile

Dans le référentiel terrestre \mathcal{R} , un point M décrit une trajectoire circulaire de centre C et de rayon R dans le plan de figure (Oxy). Il est repéré en coordonnées polaires comme l'indique la figure ci-dessous et se déplace avec une vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega_0$ constante.



1. Déterminer l'équation de la trajectoire de M en coordonnées polaires.
2. Exprimer, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, les vecteurs vitesse et accélération de ce point par rapport au

référentiel terrestre \mathcal{R} . Quelles sont leurs normes respectives ?

3. Montrer que le vecteur accélération de ce point peut s'exprimer simplement en fonction de ω_0 et du vecteur \vec{CM} . En déduire que le mouvement de M est circulaire uniforme et qu'il s'effectue avec une vitesse angulaire que vous préciserez.

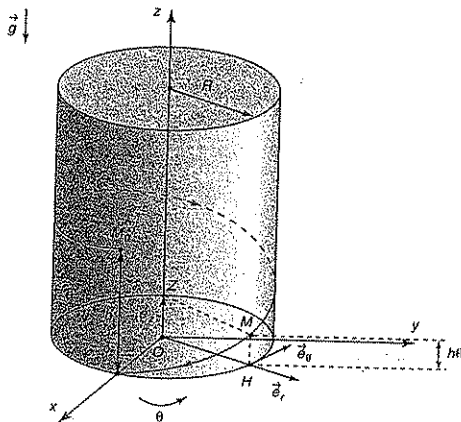


30 min

> Corrigé p. 32

Mouvement hélicoïdal

L'étude s'effectue dans le référentiel terrestre \mathcal{R} . Les coordonnées cylindriques d'une particule mobile M sont $r = R$, $\theta = \omega t$ et $z = a\theta$. Les grandeurs ω et a sont des constantes positives. La trajectoire de M est une hélice enroulée sur un cylindre circulaire. Le pas h de cette hélice est la distance séparant deux positions successives de M sur une même verticale à la surface latérale du cylindre.



1. Exprimer le vecteur position \vec{OM} .
2. Établir la relation entre h et a .
3. Déterminer $\vec{v}(M/\mathcal{R})$. Montrer que le mouvement de M se déduit de la superposition de deux mouvements que l'on précisera. Préciser l'angle $\alpha = (\vec{v}(M/\mathcal{R}), \vec{e}_z)$. Commenter.
4. Déterminer $\vec{a}(M/\mathcal{R})$. Quelle est la particularité de l'accélération de ce mouvement ?

Mouvement cycloïdal

Cette courbe, appelée cycloïde par Galilée en 1599, est décrite par un point M fixe sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite.

Une roue de rayon R (présentée sur la figure suivante) roule sur l'horizontale (Ox) , son centre C est animé d'un vecteur vitesse constant \vec{v}_C . La vitesse angulaire constante de rotation de la roue est notée $\omega = \dot{\theta}$. Le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est lié au référentiel \mathcal{R} du support plan et l'étude est effectuée dans le plan (Oxz) .

1. À l'instant initial $t = 0$, M est au point O . La roue roule sans glisser sur son support et la vitesse de C vérifie la condition $v_C = \dot{x}_C = R\omega$. Justifier succinctement cette égalité.

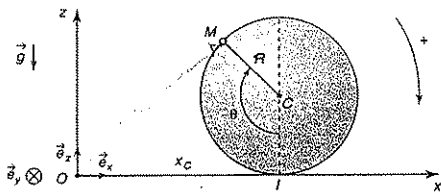
2. La roue démarre à l'instant initial $t = 0$ avec une vitesse nulle. Donner les expressions des coordonnées x et z du point M en fonction de R , ω et du temps t .

3. Déterminer à partir de ces coordonnées les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ et les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$.

4. Montrer que le vecteur $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ est à tout instant orthogonal au vecteur \vec{IM} .

5. Déterminer $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ lorsque le point M est en contact avec le sol.

6. Représenter la trajectoire du point M , $z = f(x)$, en notant sur ce schéma quelques points caractéristiques (points de vitesse nulle et points de vitesse maximale).

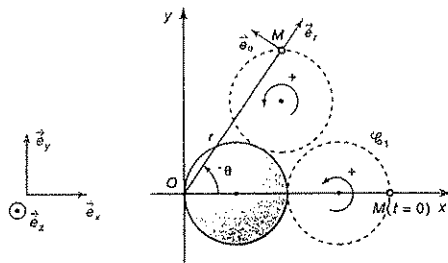


7. Déterminer la longueur d'un arc de cycloïde.

Donnée : $2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \cos\theta$.

Cardioïde

Cette courbe, appelée cardioïde par Castillon en 1741, est générée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur un cercle fixe de même rayon R .



Un point M du cercle (\mathcal{C}_1) décrit la courbe plane d'équation en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r(\theta) = \frac{1}{2}r_0(1 + \cos\theta) \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

1. Que représente la constante positive r_0 ?
 2. Quel est, par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ l'allure de la trajectoire de M appelée cardioïde. Justifier son nom.

3. Exprimer dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ en fonction de r_0 , ω et t .

4. Calculer la norme v du vecteur vitesse en fonction de r_0 , ω et t . En quel point cette vitesse est-elle nulle ?

5. Dédurre de l'expression de v le périmètre p de la trajectoire.

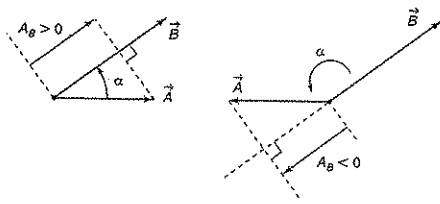
6. La trajectoire étant décrite avec une vitesse angulaire constante ω , exprimer l'accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ dans la base polaire en fonction de r_0 , ω et t . Quelle est la propriété de l'accélération au point de vitesse nulle ?

Donnée : $2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 + \cos\theta$.

Tester ses connaissances

1 Réponse b. Le produit scalaire sous sa forme géométrique, est : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos(\vec{A}, \vec{B}) = A_B$.

A_B représente la projection du vecteur \vec{A} dans la direction du vecteur \vec{B} :



• **Forme analytique dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

• **Propriétés :**

Le produit scalaire est :

- une grandeur scalaire indépendante de la base d'explicitation.

- commutatif : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.

- si \vec{A} est perpendiculaire à \vec{B} , alors $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$.

- $\vec{A} \cdot \vec{A} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow (\vec{A})^2 = \|\vec{A}\|^2$ ou $\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A}^2}$.

2 En mécanique, les bases adoptées sont orthonormées directes (B.O.N.D.) :

• **Ortho :** \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z sont orthogonaux entre eux

$$\Rightarrow \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0.$$

a. Vrai.

• **Normée :** \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z sont des vecteurs unitaires :

$$\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1$$

et

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1.$$

b. Vrai.

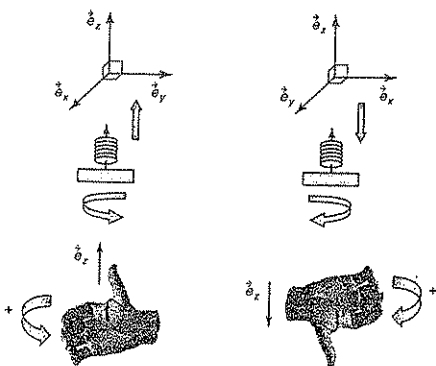
c. Vrai.

• **Directe :** \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z sont liés de façon conventionnelle entre eux afin que la base ainsi définie soit directe.

La règle du tire-bouchon permet de relier un sens de rotation positif dans le plan (Oxy) à l'orientation

de \vec{e}_z : lorsque le tire-bouchon est vissé dans le sens positif permettant de passer de \vec{e}_x à \vec{e}_y , il indique par sa progression l'orientation de \vec{e}_z .

Une autre règle est la règle de la main droite : les doigts indiquent le sens de rotation positif permettant de passer de \vec{e}_x à \vec{e}_y , et le pouce oriente \vec{e}_z .



d. Vrai.

e. Faux.

3 a. Faux. Une analyse dimensionnelle permet de conclure au caractère erroné de cette expression : le membre de droite est non dimensionné alors que le membre de gauche correspond à l'inverse d'un temps.

b. Vrai.

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right)_{/R_0} = \vec{e}_\theta'(\theta) = \vec{e}_\theta\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2\vec{e}_\theta}{d\theta^2}\right)_{/R_0} = \vec{e}_\theta''\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \vec{e}_\theta(\theta + \pi) = -\vec{e}_\theta.$$

c. Faux.

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/R_0} = \left(\frac{d\vec{e}_\theta[\theta(t)]}{dt}\right)_{/R_0} = \left(\frac{d\vec{e}_\theta[\theta(t)]}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}\right)_{/R_0}$$

$$= \dot{\theta} \left(\frac{d\vec{e}_\theta[\theta(t)]}{d\theta}\right)_{/R_0} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\dot{\theta} \vec{e}_r.$$

4 Le mouvement est circulaire uniforme, dans la base polaire adaptée, le vecteur position est :

$$\vec{OM} = R \vec{e}_r.$$

Pour obtenir le vecteur vitesse, il faut dériver ce vecteur position par rapport à t dans le référentiel \mathcal{R} . Le vecteur \vec{e}_r de la base mobile de projection varie au cours du temps, alors que R est constant :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d \overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = R \left(\frac{d \vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = R \omega \vec{e}_\theta$$

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = R \omega \vec{e}_\theta$$

a. Faux. Le vecteur vitesse change de direction à tout instant, ce n'est par un vecteur constant.

b. Vrai. Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, ω est constant et $v = R\omega$ est une constante du mouvement.

Pour déterminer l'accélération, il faut dériver à nouveau le vecteur vitesse par rapport à t :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = R\omega \left(\frac{d \vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = -R\omega^2 \vec{e}_r$$

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = -R\omega^2 \vec{e}_r = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$$

c. Vrai. Le mouvement est accéléré, son accélération est radiale et centripète.

Remarque : dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω : $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = R\omega \vec{e}_\theta$

$$\text{et } \vec{a}(M/\mathcal{R}) = -R\omega^2 \vec{e}_r = -\omega^2 \overrightarrow{OM} = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r.$$

d. Faux. Le vecteur accélération n'est pas constant car il varie en direction au cours du temps.

5 Réponse c.

$$r \in [0, +\infty[; \theta \in [0, 2\pi[; z \in]-\infty, +\infty[.$$

6 Dérivons deux fois par rapport au temps la première solution :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t);$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t);$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t).$$

La réponse **c.** est solution de l'équation différentielle **a.** Procédons de même avec la seconde solution :

$$\bullet x(t) = x_0 \operatorname{ch}(\omega_0 t);$$

$$\bullet \dot{x}(t) = \omega_0 x_0 \frac{\exp(\omega_0 t) - \exp(-\omega_0 t)}{2}$$

$$\dot{x}(t) = \omega_0 \operatorname{sh}(\omega_0 t);$$

$$\bullet \ddot{x}(t) = \omega_0^2 x_0 \frac{\exp(\omega_0 t) + \exp(-\omega_0 t)}{2}$$

$$\ddot{x}(t) = \omega_0^2 x_0 \operatorname{ch}(\omega_0 t) = \omega_0^2 x(t).$$

La réponse **d.** est solution de l'équation différentielle **a.**

Remarque : attention au signe du terme placé devant $x(t)$:

$\bullet \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ a pour solution générale :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t)$$

$\bullet \ddot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) = 0$ a pour solution générale :

$$x(t) = A \operatorname{ch}(\omega_0 t + \varphi) = B \operatorname{ch}(\omega_0 t) + C \operatorname{sh}(\omega_0 t).$$

7 Réponse **c.** Une oscillation correspond au premier retour à la position initiale.

8 La fréquence est le nombre d'oscillations par seconde.

9 Le mouvement est relatif car sa description dépend du référentiel d'étude. Le temps est absolu car, en mécanique classique, il s'écoule de la même façon dans tous les référentiels.

Savoir appliquer le cours

1 Passons au carré de la norme de la vitesse :

$$\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2;$$

dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à t , dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\begin{aligned} 2\vec{v}(M/\mathcal{R}) \cdot \left(\frac{d \vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} &= 2\vec{v}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{a}(M/\mathcal{R}) \\ &= 2\|\vec{v}\| \left(\frac{d \|\vec{v}(M/\mathcal{R})\|}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \|\vec{v}\| \left(\frac{d \|\vec{v}(M/\mathcal{R})\|}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{a}(M/\mathcal{R})$$

comme $\|\vec{v}\| > 0$, le signe de $\left(\frac{d \|\vec{v}(M/\mathcal{R})\|}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$ est celui de $\vec{v}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{a}(M/\mathcal{R})$.

• Conséquences

– Mouvement accéléré si

$$\left(\frac{d \|\vec{v}(M/\mathcal{R})\|}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} > 0 \Rightarrow \vec{v}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{a}(M/\mathcal{R}) > 0.$$

– Mouvement retardé si

$$\left(\frac{d \|\vec{v}(M/\mathcal{R})\|}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} < 0 \Rightarrow \vec{v}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{a}(M/\mathcal{R}) < 0.$$

- Si $\|\vec{v}\|$ est constant, le mouvement est uniforme :

$$\left(\frac{d\|\vec{v}(M/\mathcal{R})\|}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = 0 \Rightarrow \vec{v}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{a}(M/\mathcal{R}) = 0.$$

Le point étant en mouvement, il y a deux possibilités :

(i) $\vec{a} = \vec{0}$, le mouvement est rectiligne uniforme ;

(ii) $(\vec{v}, \vec{a}) = \frac{\pi}{2}$, le mouvement est circulaire uniforme.

2 L'équation horaire du mouvement est :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

La vitesse du mobile M est définie par :

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Pour déterminer les deux constantes d'intégration X_m et φ , deux conditions initiales sont nécessaires :

$$x(0) = x_0 = X_m \cos \varphi$$

$$\text{et } v(0) = \dot{x}(0) = v_0 = -\omega_0 X_m \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_m \sin \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0} \\ X_m \cos \varphi = x_0. \end{cases}$$

La phase à l'instant origine s'obtient en effectuant le rapport membre à membre de ces équations :

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$

Considérant que $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, l'amplitude des oscillations est :

$$X_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

Rappelons que l'amplitude X_m est positive.

La durée T d'une oscillation est obtenue pour $x(t) = x(t+T)$

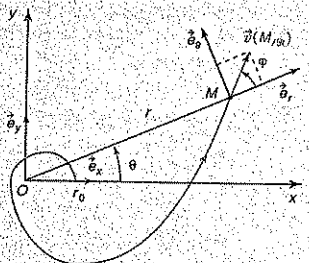
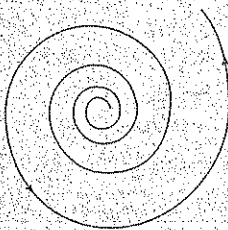
$$\begin{aligned} X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) &= X_m \cos[\omega_0(t+T) + \varphi] \\ &= X_m \cos[\omega_0 t + \varphi + \omega_0 T]. \end{aligned}$$

Pour une période : $\omega_0 T = 2\pi$.

$$\text{Retenons que } T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

S'entraîner

1. L'allure de la trajectoire décrite par le système M dans le référentiel terrestre est la spirale ci-dessous :



2. Les équations $r(t) = r_0 e^{\omega t}$ et $\theta(t) = \omega t$ sont les équations horaires du mouvement. La base de projection adaptée à ce mouvement de rotation est la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ mobile dans \mathcal{R} .

(i) Le vecteur position de M est :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r = r_0 e^{\omega t} \vec{e}_r. \text{ Sa dérivée par rapport à } t \text{ donne :}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(M/\mathcal{R}) &= \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ &= \omega r_0 e^{\omega t} (\vec{e}_r + \vec{e}_\theta). \end{aligned}$$

• Les deux composantes radiale et orthoradiale sont égales :

$$v_r = v_\theta = \omega r_0 e^{\omega t}$$

• La norme du vecteur vitesse est :

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{2} \omega r_0 e^{\omega t}$$

On remarquera que $v = \sqrt{2} v_r$.

(ii) Le produit scalaire $\vec{OM} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R})$ fait apparaître le cosinus de l'angle φ .

Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, le produit scalaire est :

$$\vec{OM} \cdot \vec{v}(M_{/R}) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = rv_r$$

Or le produit scalaire est aussi égal à :

$$\vec{OM} \cdot \vec{v}(M_{/R}) = \|\vec{OM}\| \|\vec{v}\| \cos \varphi = rv \cos \varphi$$

D'où $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La solution est $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ou $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

D'autre part, $\tan \varphi = \frac{v_r}{v_\theta} = 1$ a pour solution :

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \varphi = \frac{\pi}{4} + \pi.$$

La seule solution compatible est :

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Une observation de la trajectoire et de l'orientation du vecteur vitesse qui lui est tangent en M permet de conclure directement à la solution $\frac{\pi}{4}$.

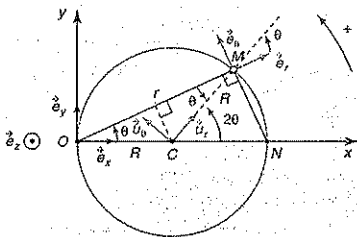
3. Dérivons le vecteur vitesse dans la base mobile :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M_{/R}) &= \omega^2 r_0 e^{\omega t} (\vec{e}_r + \vec{e}_\theta) + \omega r_0 e^{\omega t} \left(\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/R} + \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/R} \right) \\ &= \omega^2 r_0 e^{\omega t} (\vec{e}_r + \vec{e}_\theta) + \omega^2 r_0 e^{\omega t} (\vec{e}_\theta - \vec{e}_r) \end{aligned}$$

$$\vec{v}(M_{/R}) = 2\omega^2 r_0 e^{\omega t} \vec{e}_\theta \quad ; \quad a_\theta = 2\omega^2 r_0 e^{\omega t} \quad \text{et} \quad a_r = 0$$

L'accélération est orthoradiale.

2 Le système est le point M , son étude est effectuée dans le référentiel terrestre \mathcal{R} .



1. Le triangle OCM est isocèle

et $OM = r = 2OC \cdot \vec{e}_r = 2R \cos \theta$

$$r = 2R \cos \theta$$

Remarque : projeter le vecteur \vec{OC} suivant \vec{e}_r revient à effectuer le produit scalaire $\vec{OC} \cdot \vec{e}_r$.

Cette équation constitue l'équation de la trajectoire de M dans le référentiel terrestre \mathcal{R} , en coordonnées polaires.

2. Le vecteur position est : $\vec{OM} = r\vec{e}_r = 2R \cos \theta \vec{e}_r$. La base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est mobile dans \mathcal{R} . Le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(M_{/R}) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/R} = \frac{dr[\theta(t)]}{dt} \vec{e}_r + r \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/R}$$

$$\frac{dr[\theta(t)]}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -2R \sin \theta \dot{\theta} = -2R\omega_0 \sin \theta$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/R} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \omega_0 \vec{e}_\theta$$

$$\vec{v}(M_{/R}) = -2R\omega_0 \sin \theta \vec{e}_r + 2R\omega_0 \cos \theta \vec{e}_\theta$$

Le vecteur accélération s'exprime par :

$$\begin{aligned} \vec{a}(M_{/R}) &= 2R\omega_0 \left(-\frac{d \sin[\theta(t)]}{dt} \vec{e}_r - \sin \theta \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/R} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d \cos[\theta(t)]}{dt} \vec{e}_\theta + \cos \theta \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \right)_{/R} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d \sin[\theta(t)]}{dt} = \frac{d \sin \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \cos \theta$$

et $\frac{d \cos[\theta(t)]}{dt} = \frac{d \cos \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\omega_0 \sin \theta$

$$\begin{aligned} \vec{a}(M_{/R}) &= 2R\omega_0 (-\omega_0 \cos \theta \vec{e}_r - \omega_0 \sin \theta \vec{e}_\theta \\ &\quad - \omega_0 \sin \theta \vec{e}_\theta - \omega_0 \cos \theta \vec{e}_r) \end{aligned}$$

$$\vec{a}(M_{/R}) = -4R\omega_0^2 (\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

3. Les vecteurs unitaires \vec{u}_r et \vec{u}_θ sont définis par :

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{CM} = R\vec{u}_r = R(\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{v}(M_{/R}) = 2R\omega_0 (-\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) = R(2\omega_0) \vec{u}_\theta.$$

$$\vec{a}(M_{/R}) = -4R\omega_0^2 (\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$$= -R(2\omega_0)^2 \vec{u}_r = -(2\omega_0)^2 \vec{CM}.$$

Ce sont les caractéristiques d'un mouvement circulaire uniforme de M autour de C avec la vitesse angulaire $2\omega_0$.

Remarque : la somme des trois angles du triangle CMN , orientés dans le même sens de façon à être positifs, est égale à π :

$$(\vec{CN}, \vec{CM}) = \pi - (\vec{NC}, \vec{NM}) - (\vec{MC}, \vec{MN})$$

$$= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = 2\theta.$$

$(\vec{CN}, \vec{CM}) = 2\theta$, la rotation s'effectue avec un angle polaire 2θ , sa vitesse de rotation est bien $\omega = 2\dot{\theta} = 2\omega_0$.

3 1. Le système étudié dans le référentiel terrestre \mathcal{R} est le point M . Celui-ci est repéré en coordonnées polaires dans la base cylindrique mobile $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ bien adaptée car (Oz) est axe de rotation. Le vecteur position est :

$$\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = R\vec{e}_r + z\vec{e}_z.$$

2. Considérons la variation de la cote z du point M pour un tour de l'hélice :

$$z(\theta + 2\pi) = a(\theta + 2\pi) = a\theta + 2\pi a = z(\theta) + 2\pi a.$$

Le pas de l'hélice est : $h = z(\theta + 2\pi) - z(\theta) = 2\pi a$

$$\begin{aligned} 3. \vec{v}(M/\mathcal{R}) &= \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = R\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \dot{z}\vec{e}_z \\ &= R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z = R\omega\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z. \end{aligned}$$

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = R\omega\vec{e}_\theta + a\omega\vec{e}_z$$

On reconnaît la somme vectorielle de deux termes :

- $\vec{v}_{\text{rot}} = R\omega\vec{e}_\theta$ est la vitesse du point H , projection orthogonale du point M dans le plan (Oxy) . H décrit un mouvement circulaire uniforme de centre O et de rayon R .

- $\vec{v}_{\text{trans}} = \dot{z}\vec{e}_z$ est la vitesse du point Z , projection orthogonale du point M sur l'axe (Oz) . Z décrit un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse constante $\dot{z} = a\omega$. Pour déterminer l'angle α , calculons le produit scalaire dans sa forme géométrique :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{e}_z &= (R\omega\vec{e}_\theta + a\omega\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = a\omega \\ &= \|\vec{v}(M/\mathcal{R})\| \|\vec{e}_z\| \cos\alpha = \omega \sqrt{a^2 + R^2} \cos\alpha \end{aligned}$$

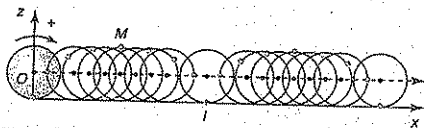
$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

L'angle α reste constant tout au long du mouvement de M .

$$4. \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = R\omega\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = -R\omega^2\vec{e}_r$$

Le mouvement s'effectue avec une vitesse dont la norme est constante. L'accélération de M se réduit à l'accélération centripète du mouvement circulaire uniforme autour de O . La projection du mouvement selon l'axe (Oz) n'est pas accélérée.

4 Première analyse : en isolant un point M quelconque sur la circonférence d'un disque, le tracé point par point de sa trajectoire obtenue par rotation du disque sur l'axe (Ox) :



La courbe est une cycloïde.

1. Partons de la condition de roulement sans glissement : $\dot{x}_C = R\omega = \frac{dOI}{dt}$.

I est un point géométrique, projection orthogonale de C sur l'axe (Ox) ; il est situé en O à l'instant initial $t = 0$.

En intégrant $\frac{dOI}{dt} = R\omega$:

$$OI = R\omega t + OI(t=0) = R\omega t \Rightarrow x_C = R\omega t$$

La rotation étant uniforme et en considérant que I est confondu avec O à l'instant initial, l'intégration de $\dot{\theta} = \omega$ donne :

$$\theta = \omega t + \theta(t=0) = \omega t \Rightarrow OI = R\theta = \widehat{IM}$$

Le mouvement s'effectuant sans glissement, la longueur OI est exactement égale à l'arc de cercle \widehat{IM} .

2. Le mouvement du point M est étudié dans le référentiel terrestre, la base (\vec{e}_x, \vec{e}_z) est liée à ce référentiel, donc constante.

Le vecteur position de M est défini par :

$$\vec{OM} = \vec{OI} + \vec{IC} + \vec{CM}$$

Suivant \vec{e}_x et \vec{e}_z , les composantes du vecteur position sont :

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ 0 \\ -R\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R\omega t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ 0 \\ -R\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\omega t - \sin\omega t) \\ 0 \\ R(1 - \cos\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = R(\omega t - \sin\omega t) \\ y = 0 \\ z = R(1 - \cos\omega t) \end{cases}$$

Remarque : pour projeter correctement le vecteur \vec{CM} dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_z) , refaire un schéma en adoptant un angle θ inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

3. La base étant fixe dans \mathcal{R} , les vecteurs vitesse et accélération sont obtenus par dérivations successives par rapport à t des composantes du vecteur position :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} R\omega(1 - \cos\omega t) \\ 0 \\ R\omega\sin\omega t \end{pmatrix}; \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} R\omega^2\sin\omega t \\ 0 \\ R\omega^2\cos\omega t \end{pmatrix}$$

4. Le vecteur \vec{IM} est défini par la relation :

$$\vec{IM} = \vec{IC} + \vec{CM}$$

$$\vec{IM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \sin \omega t \\ 0 \\ -R \cos \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \sin \omega t \\ 0 \\ R(1 - \cos \omega t) \end{pmatrix}$$

Calculons le produit scalaire :

$$\vec{v}(M_{/R}) \cdot \vec{IM} = \begin{pmatrix} R\omega(1 - \cos \omega t) \\ 0 \\ R\omega \sin \omega t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin \omega t \\ 0 \\ R(1 - \cos \omega t) \end{pmatrix} = 0.$$

Ce produit scalaire étant nul et le point M en mouvement, les vecteurs $\vec{v}(M_{/R})$ et \vec{IM} sont orthogonaux entre eux à tout instant.

5. Lorsque le point M est en contact avec le sol : $\theta = 2n\pi = \omega t_n$ (n est un entier positif)

$$\vec{v}(I_{/R}) = \begin{pmatrix} R\omega(1 - \cos \omega t_n) \\ 0 \\ R\omega \sin \omega t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\omega[1 - \cos(2n\pi)] \\ 0 \\ R\omega \sin(2n\pi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R\omega[1 - 1] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(I_{/R}) = \begin{pmatrix} R\omega^2 \sin \omega t_n \\ 0 \\ R\omega^2 \cos \omega t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\omega^2 \sin(2n\pi) \\ 0 \\ R\omega^2 \cos(2n\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R\omega^2 \end{pmatrix}$$

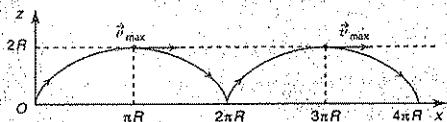
Ainsi :

$$\vec{v}(I_{/R}) = \vec{0}$$

Cette condition constitue la condition de roulement sans glissement.

$$\vec{a}(I_{/R}) = R\omega^2 \vec{e}_z$$

6. la trajectoire du point M , $z = f(x)$, est la cycloïde suivante :



Les lieux de vitesse nulle sont les points où M est en contact avec le sol : $\theta_n = 2n\pi = \omega t_n$

$$x_n = R(\theta_n - \sin \theta_n) = 2n\pi R$$

$$z_n = R(1 - \cos \theta_n) = 0$$

$$\Rightarrow x(n=0) = 0, \quad x(n=1) = 2\pi R, \quad x(n=2) = 4\pi R \dots$$

Les lieux où la vitesse est maximale :

$$v = R\omega \sqrt{(1 - \cos \omega t)^2 + (\sin \omega t)^2}$$

$$= \sqrt{2} R\omega \sqrt{1 - \cos \omega t} = 2R\omega \left| \sin \left(\frac{\omega t}{2} \right) \right|$$

$$v_{\max} = 2R\omega \text{ pour } \frac{\omega t}{2} = (2p+1)\frac{\pi}{2} \text{ (} p \text{ entier positif)}$$

$$\Rightarrow \theta_p = \omega t_p = (2p+1)\pi$$

$$x_p = R(\theta_p - \sin \theta_p) = (2p+1)\pi R$$

$$z_p = R[1 - \cos(2p+1)\pi] = 2R$$

$$\Rightarrow x(p=0) = \pi R, \quad x(p=1) = 3\pi R \dots$$

7. Pour calculer la longueur ℓ de l'arc, remarquons que $d\ell$ représente la longueur élémentaire décrite par M à la vitesse v , sur sa trajectoire pendant la durée dt :

$$d\ell = v dt$$

$$v = \frac{d\ell}{dt} = 2R\omega \left| \sin \left(\frac{\omega t}{2} \right) \right| = 2R\omega \left| \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| = 2R \frac{d\theta}{dt} \left| \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|$$

$$\Rightarrow d\ell = v dt = 2R \left| \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| d\theta.$$

Sur un arc de cycloïde, θ varie de 0 à 2π , d'où :

$$\ell = 2R \int_0^{2\pi} \left| \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| d\theta.$$

En effectuant le changement de variable $u = \frac{\theta}{2}$:

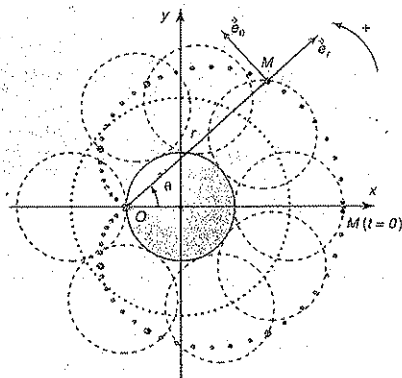
$$\ell = 4R \int_0^{\pi} |\sin u| du.$$

Comme $\sin u$ est positif dans cet intervalle :

$$\ell = 4R \int_0^{\pi} \sin u du = -4R [\cos u]_0^{\pi}$$

$$\ell = 8R$$

5 **Première analyse** : le tracé point par point de la trajectoire du point M de la circonférence du disque roulant sans glissement sur un disque identique donne :



1. L'observation de la position initiale du disque sur la figure permet d'écrire :

$$\theta = 0 \text{ et } r = 4R,$$

l'équation de la courbe donne alors : $r_0 = 4R$

2. Avant d'effectuer une étude succincte de la courbe, remarquons que $r(\theta) = r(-\theta)$; la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox) .

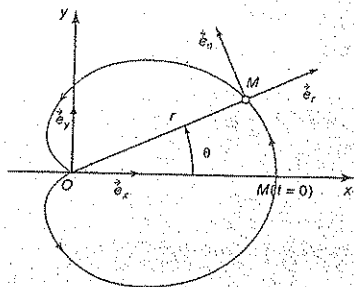
L'étude peut ainsi être réduite à l'intervalle à $\theta \in [0, \pi]$.

Dérivons : $r'(\theta) = -\frac{1}{2}r_0 \sin \theta$.

Cette dérivée est négative et r est une fonction décroissante de θ dans cet intervalle.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
r	r_0	$0,853r_0$	$0,5r_0$	$0,146r_0$	0

En traçant point par point la courbe on obtient :



Il s'agit d'une cardioïde, le graphe a la forme d'un cœur.

3. Dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, le vecteur vitesse $\vec{v}(M_{/M})$ s'écrit :

$$\vec{v}(M_{/M}) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \dot{r}\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\theta$$

La dérivée par rapport à t de la fonction composée $r[\theta(t)]$ est obtenue en décomposant :

$$\dot{r} = \frac{dr[\theta(t)]}{dt} = \frac{dr[\theta(t)]}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}r_0\omega \sin \theta$$

$$\vec{v}(M_{/M}) = \underbrace{-\frac{1}{2}r_0\omega \sin \theta \vec{e}_r}_{v_r} + \underbrace{\frac{1}{2}r_0\omega(1 + \cos \theta) \vec{e}_\theta}_{v_\theta}$$

4. La norme de \vec{v} est :

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}r_0\omega\sqrt{1 + \cos \theta}$$

$$= r_0\omega \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \Rightarrow v = r_0\omega \left| \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right|$$

$v = 0$ lorsque $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$, c'est-à-dire pour l'angle

$\theta_1 = \pi$: la vitesse nulle est obtenue quand M est en contact avec le support circulaire. Se retrouve ici la condition de roulement sans glissement déjà observée dans le mouvement cycloïdal.

5. $d\ell$ représente la longueur élémentaire décrite par M à la vitesse v , sur la trajectoire, pendant la durée dt :

$$v = \frac{d\ell}{dt} = r_0\omega \left| \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right| = 4R\omega \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|$$

$$\Rightarrow d\ell = 4R \frac{d\theta}{dt} \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| dt = 4R \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| d\theta$$

$$L = 4R \int_0^{2\pi} \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| d\theta$$

En effectuant le changement de variable $u = \frac{\theta}{2}$

$$L = 8R \int_0^\pi |\cos u| du = 8R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du - 8R \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos u du$$

car $\cos u$ est positif dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et négatif dans l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

$$L = 8R[\sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} - 8R[\sin u]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \Rightarrow \boxed{L = 16R}$$

Le périmètre représente quatre fois la longueur $OM(t=0)$.

6. L'accélération du point M est obtenue par la dérivée du vecteur vitesse.

$$\begin{aligned} \vec{a}(M_{/M}) &= \left(\frac{d\vec{v}(M_{/M})}{dt} \right)_{/M} \\ &= -\frac{1}{2}r_0\omega^2 \cos \omega t \vec{e}_r - \frac{1}{2}r_0\omega \sin \omega t \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/M} \\ &\quad - \frac{1}{2}r_0\omega^2 \sin \omega t \vec{e}_\theta + \frac{1}{2}r_0\omega(1 + \cos \omega t) \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/M} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/M} = \omega \vec{e}_\theta \text{ et } \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right)_{/M} = -\omega \vec{e}_r$$

$$\vec{a}(M_{/M}) = -\frac{1}{2}r_0\omega^2(1 + 2\cos \omega t)\vec{e}_r - r_0\omega^2 \sin \omega t \vec{e}_\theta$$

Au point de vitesse nulle ($\theta = \omega t = \pi$), l'accélération est radiale :

$$\vec{a}(M_{/M}) = \frac{1}{2}r_0\omega^2 \vec{e}_r$$

2 Dynamique

1 Système étudié : le point matériel

Remarque
L'inertie caractérise la résistance que le point matériel oppose au mouvement.

En cinématique, le point n'a aucune matérialité. La dynamique lui associe une grandeur scalaire positive et constante qui caractérise ses propriétés d'inertie : la masse (ou « masse inerte ») notée m et exprimée en kilogramme (kg).

Un point matériel M est un objet physique défini par quatre nombres : trois coordonnées de position (x ; y ; z) et une masse m . Il constitue un modèle qui permet de décrire convenablement le comportement d'un solide dont les dimensions sont très petites devant les distances d'observation.

La première étape de résolution d'un problème de mécanique est la définition précise du système S étudié, il s'agit du point M observé.

2 La dynamique

Alors que la cinématique étudie le mouvement de manière purement descriptive, la dynamique en propose une interprétation en établissant la corrélation entre le mouvement observé du point M et les causes qui l'engendrent, c'est-à-dire les forces appliquées à M par les objets extérieurs.

L'état mécanique du point matériel est défini à l'instant $t = 0$ par la donnée des conditions initiales sur sa position et sa vitesse. Les trois lois de Newton appliquées au système constitué du point matériel traduisent par une équation différentielle son évolution au cours du temps. La résolution de cette équation pour un champ de force donné permet de prévoir l'état mécanique du système à l'instant t à partir des conditions initiales : le système est dit déterministe.

3 Énoncé des trois lois de Newton

Isaac Newton (1642-1727) a fondé la mécanique sur trois lois couplées entre elles : la loi de l'inertie, la loi fondamentale de la dynamique et la loi des actions réciproques. Ces lois sont aussi appelées principes : un principe est l'énoncé d'une loi générale non démontrée, fondatrice d'une théorie physique et qu'aucune expérience n'a encore contredite.

3.1. Principe d'inertie : première loi de Newton

Un point matériel qui n'est soumis à aucune action mécanique et donc à aucune force est dit isolé.

3.1.1. Énoncé du principe d'inertie

Il existe des référentiels privilégiés dits galiléens dans lesquels un point matériel isolé est soit en mouvement rectiligne uniforme soit au repos.

Commentaires :

- Un mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par un vecteur vitesse constant.
- Un point matériel isolé est une abstraction irréalisable. Par contre il est dit *pseudo-isolé* lorsque les actions mécaniques qui lui sont appliquées se compensent exactement. Il est alors possible de lui appliquer le principe de l'inertie.

3.1.2. À la recherche des référentiels galiléens

Un référentiel \mathcal{R}_g est galiléen si le principe de l'inertie y est applicable, autrement dit si un point matériel M isolé du reste de l'univers s'y déplace avec un vecteur $\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$ constant ou s'il reste au repos $\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$.

Dans la plupart des expériences courantes, pour de petits mouvements et de petits intervalles de temps, le référentiel terrestre lié à la surface de la Terre ou référentiel du laboratoire est considéré comme galiléen.

Tout référentiel \mathcal{R}' animé par rapport au référentiel terrestre d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme est lui-même galiléen.

Autrement dit, tout référentiel accéléré (en translation non uniforme ou en rotation) par rapport au référentiel terrestre n'est pas galiléen, on ne peut pas lui appliquer le principe de l'inertie.

La seconde étape consiste à définir le référentiel d'étude \mathcal{R}_g que l'on choisira galiléen.

3.2. Principe fondamental de la dynamique : deuxième loi de Newton

3.2.1. Vecteur quantité de mouvement

Un point matériel M , de masse m , est animé par rapport à un référentiel quelconque \mathcal{R} de la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$. Par définition, le vecteur quantité de mouvement de ce point est :

$$\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m \vec{v}(M/\mathcal{R}).$$

Commentaires :

- Le vecteur quantité de mouvement est relatif au référentiel \mathcal{R} .
- Le vecteur quantité de mouvement d'un système isolé (ou pseudo-isolé) dans un référentiel galiléen reste constant.
- Sa mesure s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3.2.2. Énoncé du principe fondamental de la dynamique

Un point matériel M dont le mouvement n'est pas rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen a un vecteur accélération non nul. Il n'est plus isolé et est donc soumis à l'action d'une force ou de plusieurs forces. Autrement dit, dès qu'un objet change de vitesse, il faut invoquer les forces.

Soit \mathcal{R}_g un référentiel galiléen, M un point matériel de masse constante m et \mathcal{E}_{ext} l'ensemble de l'Univers à l'exception de M , les forces appliquées à M et son mouvement sont liés par le postulat :

$$\text{Dans le référentiel galiléen } \mathcal{R}_g : \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} = \left(\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g).$$

$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M}$ est la résultante ou somme vectorielle des forces dues aux actions sur M de tous les autres objets \mathcal{E}_i de l'Univers. Ces objets constituent le milieu extérieur.

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} = \sum_i \vec{F}_{\mathcal{E}_i \rightarrow M}$$

Commentaires :

- $\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$ et $\vec{a}(M/\mathcal{R}_g)$ sont exprimées dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .
- Le principe fondamental de la dynamique traduit une relation de cause à effet dite de causalité :

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g).$$

cause = inertie \times effet.

- (i) La cause du mouvement est la résultante des forces appliquées à M .
- (ii) L'effet est la modification du vecteur vitesse et donc l'accélération de M .
- (iii) Le point matériel oppose au mouvement une inertie par sa masse m .

- L'intensité d'une force s'exprime en newton (N).

3.2.3. Principe fondamental de la statique

Lorsque le point M est à l'équilibre dans \mathcal{R}_g , alors $\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$ et $\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$.

Par conséquent :

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} = \vec{0}$$

3.3. Principe des actions réciproques : troisième loi de Newton

Deux particules ponctuelles M_1 et M_2 sont en interaction.

Les forces d'interaction $\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1}$ et $\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2}$ sont portées par la droite $(M_1 M_2)$, elles ont même intensité et des sens opposés. Ceci est vrai quel que soit le référentiel, que le système des deux particules soit en mouvement ou au repos.

Ce principe se traduit par :

$$\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1} + \vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = \vec{0}$$

4 Lois de force

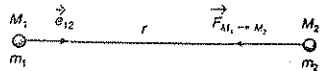
4.1. Actions à distance

Il existe quatre types d'interactions fondamentales dans l'Univers caractérisant les interactions à distance entre particules élémentaires.

4.1.1. Interaction gravitationnelle : quatrième loi de Newton

Il s'agit d'une interaction de portée infinie agissant sur toute particule possédant une « masse gravitationnelle ».

$$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$



$G = 6,672 \cdot 10^{-11}$ (S.I.) est une constante universelle, la **constante de gravitation universelle**. La « masse gravitationnelle » et la « masse inerte » qui intervient dans la relation fondamentale de la dynamique sont proportionnelles. Par un choix d'unité, nous les considérerons égales.

Au voisinage de la surface de la Terre, un objet de masse m est soumis à son poids :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

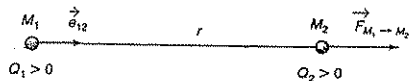
En première approximation, le poids est égal à la force de gravitation exercée par la Terre. En un lieu donné, la verticale est la direction de \vec{g} . Le module de \vec{g} vaut environ $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

4.1.2. Interaction électromagnétique

Il s'agit d'une interaction de portée infinie agissant sur toute particule chargée possédant une « charge électrique ».

Quand les charges sont immobiles dans le référentiel d'étude, cette théorie donne la loi d'interaction électrostatique ou loi de Coulomb (1785) qui fournit la force s'exerçant entre deux objets ponctuels M_1 et M_2 de charges électriques algébriques respectives Q_1 et Q_2 .

$$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$



Cette force est beaucoup plus intense que la force gravitationnelle. La constante ϵ_0 est appelée **permittivité** du vide ; on a : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ (SI).

4.1.3. Interactions microscopiques : interaction forte et interaction faible

L'interaction responsable de la cohésion des protons et des neutrons à l'intérieur des noyaux est l'interaction forte qui agit entre deux nucléons. À distance égale son intensité est 100 fois plus forte que l'interaction électromagnétique, mais sa portée n'est que de 10^{-15} m (dimension du noyau).

L'étude expérimentale des noyaux a conduit à l'existence d'un autre type d'interaction : l'interaction faible, responsable de l'instabilité de nombreux noyaux et de particules. Sa portée est de l'ordre de 10^{-17} m et son intensité est inférieure à celle de l'interaction électromagnétique.

Ces deux forces sont à très courte portée, leur domaine d'action est celui des nucléons dans les noyaux des atomes. Il n'en sera pas tenu compte dans le cadre de la mécanique newtonienne.

Remarque
point d'application du poids d'un ps est son centre gravité.

4.2. Actions macroscopiques de contact

Lorsqu'un point matériel n'est soumis qu'à des actions à distance, ce point matériel est dit **libre**, sa trajectoire également. Lorsque ce point matériel est en contact avec un solide ou un fluide, il existe, en plus des actions à distance, des actions de contact.

Les interactions macroscopiques de contact ne sont actuellement pas calculables à partir des interactions microscopiques électromagnétiques dont elles découlent ; l'expression qu'on en donne est alors **phénoménologique**, tirée de l'expérience et seulement valable dans un certain contexte expérimental. Ces actions de contact comprennent les forces de liaison et de frottement qui sont directement appliquées sur le point matériel.

Lorsqu'un point matériel glisse sur un solide, il est soumis à une force de contact \vec{R} qui a deux composantes : une composante normale R_n qui assure le maintien du contact et une composante tangentielle R_t qui s'oppose à la vitesse du mobile. Ces composantes sont reliées, lors du glissement, par la loi de Coulomb : $\|R_t\| = f \|R_n\|$.

Le coefficient positif f est appelé **coefficient de frottement de glissement**.

En l'absence de frottement, ce coefficient est nul et implique la nullité de la composante R_t : la force de contact \vec{R} est, dans ce cas, normale au support.

Cette force résulte de la somme de toutes les forces exercées en chaque point de contact entre l'objet et le support, mais elle peut se résumer à une force unique dont le point d'application est exactement sous le barycentre de l'objet.

Lorsqu'un point matériel se déplace dans un fluide, il est soumis à une force de frottement opposée à sa vitesse. Aux faibles vitesses, cette force est proportionnelle à la vitesse du mobile.

Pour des vitesses plus élevées, elle est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile.

La troisième étape consiste à recenser les objets extérieurs agissant sur le système en effectuant le bilan des forces appliquées au point M . Les représenter sur un schéma.

Avant la colle

Tester ses connaissances

> Corrigés p. 58

- 1 Quelles sont les limites de la mécanique newtonienne ?
- 2 Dans le Système International d'unités, l'intensité de la force s'exprime en newton (N). De quelles unités fondamentales le newton se déduit-il ?
- 3 Comment réaliser un système pseudo-isolé ?
- 4 Newton énonça en 1687 la première loi de la dynamique :
« Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans

lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état ».

Mais c'est Galilée qui, un demi-siècle auparavant, eut le premier l'intuition du principe d'inertie.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un point matériel M de masse m dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , montrer que le principe d'inertie peut apparaître comme une conséquence de la deuxième loi de Newton.

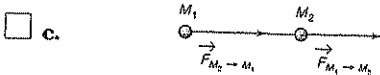
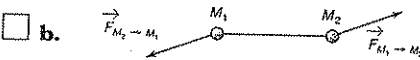
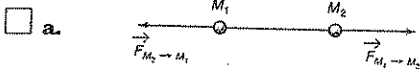
5 Réciproque du principe fondamental de la statique : si $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} = \vec{0}$, alors le point matériel M est à l'équilibre dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

- a. Vrai. b. Faux.

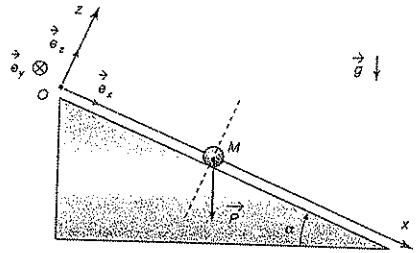
6 Un point matériel animé d'un mouvement circulaire uniforme est isolé.

- a. Vrai. b. Faux.

7 Deux particules ponctuelles M_1 et M_2 sont en interaction, les forces $\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1}$ et $\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2}$ obéissent au principe des actions réciproques. Elles sont telles que :



8 Un point matériel M de masse m glisse sur un plan incliné.



Les composantes de son poids \vec{P} dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont :

- a. $\begin{pmatrix} mg \cos \alpha \\ 0 \\ -mg \sin \alpha \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} mg \cos \alpha \\ 0 \\ mg \sin \alpha \end{pmatrix}$
- c. $\begin{pmatrix} mg \sin \alpha \\ 0 \\ -mg \cos \alpha \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -mg \sin \alpha \\ 0 \\ mg \cos \alpha \end{pmatrix}$

Savoir appliquer le cours

> Corrigés p. 59

1 La Terre est supposée à symétrie sphérique, de centre T , de rayon R_T et de masse m_T . La force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}_{T \rightarrow M}$ exercée par la Terre sur un point M de masse m distant de r de son centre est :

$$\vec{F}_{T \rightarrow M} = -G \frac{m_T m}{r^2} \vec{e}_{TM} = m \vec{g}$$

$$\vec{g} = -G \frac{m_T}{r^2} \vec{e}_{TM} \text{ est le champ de gravitation.}$$

En effectuant une application numérique, montrer que considérer le référentiel terrestre galiléen revient à confondre le champ de gravitation avec le champ de pesanteur \vec{g} à la surface de la Terre.

Données :

$$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ (S.I.) ;}$$

$$m_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg ; } R_T = 6380 \text{ km.}$$

2 En prenant l'exemple d'un proton et d'un électron en interaction dans le vide, justifier que l'on peut totalement négliger l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électrostatique pour décrire la structure atomique.

$$\text{Données : } G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ (S.I.) ;}$$

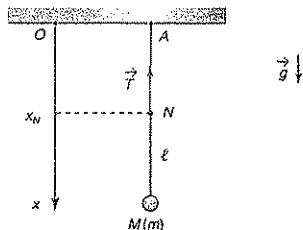
$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ (S.I.) ;}$$

$$m_p \approx 2000 m_e = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg ;}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

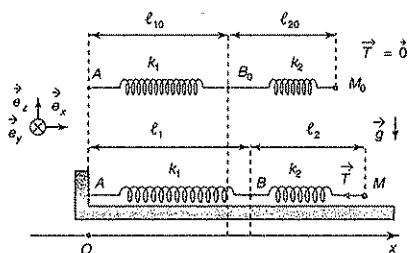
3 Expliquer pourquoi l'interaction électrostatique ne joue pas de rôle à l'échelle macroscopique.

4 À l'extrémité d'une corde de masse m_0 régulièrement répartie sur sa longueur ℓ est accroché un objet ponctuel M de masse m .



Exprimer la tension $T(x)$ en un point N distant de x_N du point d'attache A . Que dire de la tension si la masse de la corde est négligeable devant m ? Définir un fil idéal.

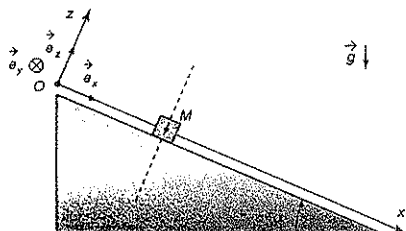
- 5 Deux ressorts horizontaux idéaux de constantes de raideur k_1 et k_2 , de longueurs à vide ℓ_{10} et ℓ_{20} sont attachés par leur extrémité B .



- Définir le ressort idéal.
- Déterminer la raideur k du ressort équivalent à cette association en fonction de k_1 et k_2 .

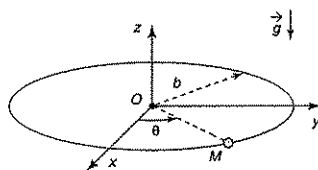
- 6 Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur uniforme. Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur la ligne de plus

grande pente ($O; \vec{e}_x$) d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.



Déterminer les composantes R_x, R_y et R_z de la réaction \vec{R} du support de M dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et établir l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de M .

- 7 Un anneau ponctuel M de masse m est enfilé sur un cercle fixe de centre O et de rayon b placé horizontalement dans le plan (Oxy) .



À l'instant $t = 0$, une vitesse initiale \vec{v}_0 tangente au cercle est communiquée à l'anneau qui glisse alors sans frottement le long du guide. Déterminer les composantes de la réaction \vec{R} du guide circulaire.

1 – Interprétation du mouvement d'un anneau sur une tige en rotation

Une tige rectiligne horizontale (OX) tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\theta}$ en restant dans le plan (Oxy). Un anneau M de masse m est enfilé sur cette tige et peut y glisser sans frottement.

À un instant t quelconque, la rotation de la tige est repérée par l'angle polaire $\theta(t)$ et la position de l'anneau sur la tige par $\|\vec{OM}\| = OM = r(t)$.

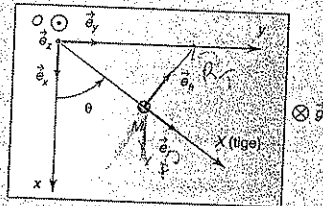
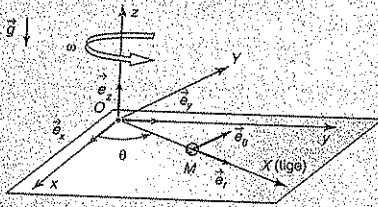
À l'instant $t = 0$, l'anneau démarre sans vitesse initiale par rapport à la tige du point M_0 repéré par les coordonnées polaires :

$$\theta(t=0) = 0 \text{ et } r(t=0) = r_0.$$

Le mouvement de M peut être étudié soit dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen, soit dans le référentiel de la tige $\mathcal{R}'(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

La résistance au mouvement de l'air est négligeable et le champ de pesanteur uniforme :

$$\vec{g} = -g\vec{e}_z, \text{ avec } g = \|\vec{g}\| > 0.$$



- 1 Peut-on appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel de la tige ?
- 2 Quelle est, dans le référentiel d'étude adopté pour interpréter le mouvement de M , la base adaptée à la trajectoire de M ?
- 3 Effectuer le bilan des forces appliquées au point M par le milieu extérieur.
- 4 Établir les équations horaires $r(t)$ et $\theta(t)$. En déduire l'équation et l'allure de la trajectoire.
- 5 Déterminer la réaction de la tige sur l'anneau en fonction de t .
- 6 L'anneau est soumis à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k , de masse négligeable et de longueur à vide r_0 . Le ressort est enfilé sur la tige, une extrémité est fixée en O et l'autre est attachée au point mobile M . Établir l'équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de la rotation de la tige et discuter la nature de celui-ci. Les conditions initiales sont inchangées.

Données : $\text{ch}(\omega t) = \frac{\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)}{2}$ et $\text{sh}(\omega t) = \frac{\exp(\omega t) - \exp(-\omega t)}{2}$.

résolution méthodique

• **Position du problème** : la connaissance de la résultante des forces et la donnée des conditions initiales permettent de définir complètement l'état mécanique du point M à chaque instant t .

Pour aborder un problème de dynamique, il est conseillé d'adopter systématiquement le plan d'étude suivant :

• **Première analyse** : avant de mettre le problème en équation, il est très utile, dans le cadre de la mécanique newtonienne, d'effectuer une première analyse qualitative et intuitive sur le mouvement probable du point matériel M , en faisant appel à votre simple bon sens.

[1] **Définir le système étudié** : en général, il s'agit du point matériel M .

[2] **Choisir le référentiel d'étude galiléen** : \mathcal{R}_g

(i) Le principe fondamental de la dynamique y est applicable.

(ii) $\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$ et $\vec{a}(M/\mathcal{R}_g)$ seront exprimées dans ce référentiel.

[3] **Effectuer le bilan des forces appliquées au système**

⇒ Recenser pour cela les corps extérieurs agissant sur le système et distinguer :

(i) les forces à distance ;

(ii) les forces de contact.

⇒ Représenter ces forces sur un schéma clair.

[4] **Exprimer vectoriellement le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel d'étude galiléen.**

[5] **Projeter les vecteurs dans la base orthonormée directe adaptée à la trajectoire.**

(i) Dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

(ii) Dans la base mobile cylindro-polaire $(O ; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

[6] **Résoudre les équations différentielles**

Les constantes d'intégration sont déterminées en injectant les conditions initiales sur la vitesse et la position du point M dans les solutions générales de ces équations.

[7] **Interpréter physiquement les résultats obtenus**

La conclusion de votre raisonnement ne doit pas se réduire à une équation, il est essentiel d'en dégager le sens physique. Le regard critique que vous porterez sur votre résultat, l'évaluation de sa pertinence et de son réalisme doit vous permettre de corriger une éventuelle erreur.

» 1

L'anneau est entraîné par la rotation de la tige, il va s'éloigner progressivement de l'origine O pour quitter la barre à son extrémité. Le problème change ensuite de nature, il s'agit d'une chute libre.

Il faut se poser ici la question du caractère galiléen ou non du référentiel de la tige. Rappelons qu'un référentiel est galiléen, s'il est au repos ou en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen.

Le référentiel de la tige est en rotation par rapport au référentiel terrestre. Ce n'est donc pas un référentiel galiléen et le principe fondamental de la dynamique n'y est pas applicable.

» 2

Nous sommes à la recherche d'un référentiel galiléen.

Pour interpréter le mouvement en terme de forces par application de la seconde loi de Newton, il faut se placer dans le référentiel terrestre car il est galiléen.

Le point M décrivant une rotation autour de O dans le plan (Oxy) , la base de projection permettant une description simple du mouvement est la B.O.N.D. $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

» 3

Un point matériel a trois degrés de liberté : sa position, lorsqu'il est libre de se déplacer dans l'espace, est fonction de trois coordonnées indépendantes entre elles. Il est ici astreint à se déplacer sur une courbe, on dit qu'il est soumis à une liaison destinée à le maintenir sur une courbe et il n'a plus qu'un degré de liberté. La réaction du support sur M se décompose en deux vecteurs :

$$\vec{R} = \vec{R}_{||} + \vec{R}_\perp$$

(i) $\vec{R}_{||}$ est tangentiel à la trajectoire et s'oppose au déplacement lorsque le mouvement s'effectue avec frottements. Si le support n'exerce aucun frottement sur le mobile :

$$\vec{R}_{||} = 0 \text{ (cas de l'exercice)}$$

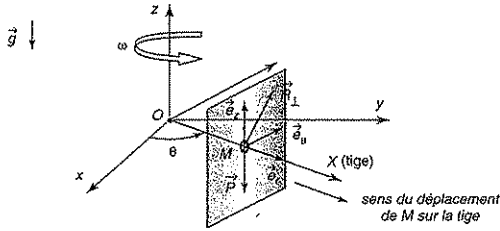
(ii) \vec{R}_\perp contraint le mobile à rester lié à la courbe, il est contenu dans le plan perpendiculaire à $\vec{R}_{||}$.

Les objets extérieurs agissant sur le système sont :

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids du point matériel M ;

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{tige} \rightarrow M} = \vec{R}_\perp$ la réaction du support sur M .

Le point matériel se déplaçant sur une courbe (un degré de liberté) et sans frottement, la réaction du support \vec{R}_\perp est contenue dans le plan perpendiculaire à la tige.



4

Le principe fondamental de la dynamique projeté dans la base $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, permet d'obtenir trois équations. L'équation suivant \vec{e}_r est l'équation différentielle du mouvement de M , sa résolution permet d'accéder à l'équation horaire du mouvement de M . Cette équation différentielle étant du second ordre, elle nécessite la connaissance de deux conditions initiales.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au point M dans \mathcal{R}_g .
Son expression vectorielle est :

$$\vec{P} + \vec{R}_\perp = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g).$$

Pour écrire l'accélération de M , partons de son expression générale dans la base cylindro-polaire $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, en considérant que :

- (i) la rotation de la tige est uniforme : $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = 0$;
- (ii) son mouvement reste dans le plan (Oxy) à tout instant : $\dot{z} = 0$ et $\ddot{z} = 0$.

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\omega^2 \\ 2\dot{r}\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les composantes des forces appliquées à M sont $\vec{P} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ et $\vec{R}_\perp = \begin{pmatrix} R_\theta \\ R_z \end{pmatrix}$.

La projection du principe fondamental dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ donne :

$$m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_\theta \\ R_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\omega^2 \\ 2\dot{r}\omega \\ 0 \end{pmatrix},$$

et conduit à un système de trois équations :

- projection sur \vec{e}_r : $\ddot{r} - \omega^2 r = 0$ (1)
- projection sur \vec{e}_θ : $R_\theta = 2m\dot{r}\omega$ (2)
- projection sur \vec{e}_z : $R_z = mg$ (3)

La résolution de l'équation différentielle (1) donne la solution générale :

$$r(t) = A_1 \text{ch}(\omega t) + A_2 \text{sh}(\omega t).$$

Pour accéder à la solution du problème, considérons les conditions initiales :

$$r(t=0) = r_0 \quad \text{et} \quad \dot{r}(t=0) = 0.$$

La vitesse de M dans le référentiel de la tige est $\vec{v}(M|_{\mathcal{R}'}) = \dot{r}\vec{e}_r$. Cette vitesse est nulle à l'instant $t=0$, d'où la condition initiale : $\dot{r}(t=0) = 0$. Par suite :

$$\dot{r}(t) = \omega[A_1 \text{sh}(\omega t) + A_2 \text{ch}(\omega t)].$$

A_1 et A_2 sont déduites des conditions initiales :

$$\dot{r}(t=0) = \omega A_2 = 0 \quad \text{et} \quad r(t=0) = A_1 = r_0.$$

$$r(t) = r_0 \text{ch}(\omega t)$$

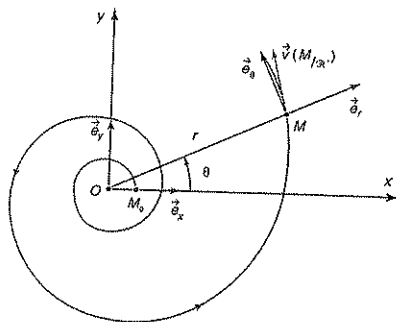
Ce résultat confirme l'analyse préliminaire, la solution obtenue est divergente.

D'autre part, $\dot{\theta} = \omega$. L'intégration donne $\theta(t) = \omega t + \theta(t=0)$ avec $\theta(t=0) = 0$, d'où :

$$\theta(t) = \omega t$$

La trajectoire est une spirale, son équation en coordonnées polaires est :

$$r(\theta) = r_0 \text{ch}(\theta)$$



5

Connaissant l'équation horaire du mouvement, les deux autres équations obtenues à partir de la projection du principe fondamental de la dynamique suivant $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ permettent de déterminer les composantes de la réaction du support.

La réaction de la tige sur l'anneau est :

$$\vec{R} = \vec{R}_1 = R_\theta \vec{e}_\theta + R_z \vec{e}_z = 2m\dot{r} \omega \vec{e}_\theta + mg \vec{e}_z$$

$$\vec{R} = 2m\omega^2 r_0 \text{sh}(\omega t) \vec{e}_\theta + mg \vec{e}_z$$

La composante orthoradiale de la réaction du support est une fonction croissante du temps. Plus l'anneau s'éloigne de O et plus la tige doit fournir d'effort pour maintenir la rotation.

Le tableau suivant récapitule les solutions de l'équation différentielle du mouvement obtenue par adjonction de la tension du ressort au principe fondamental :

Tableau récapitulatif

Équation	Solution	
$\ddot{r} + \omega^2 r = 0$	solution sinusoïdale	$r(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)$
$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$	solution « divergente »	$r(t) = A \operatorname{ch}(\omega t + \varphi) = B \operatorname{ch}(\omega t) + C \operatorname{sh}(\omega t)$

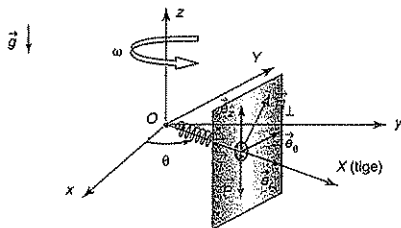
Deux cas sont envisageables : soit la raideur du ressort est très faible et celui-ci ne peut pas s'opposer au mouvement divergent du point M qui s'échappe le long de la tige, soit la raideur du ressort est suffisamment élevée pour le retenir dans un mouvement sinusoïdal.

Le problème n'impose pas de condition limite sur la longueur de la tige et rappelons que l'expression linéaire de la tension du ressort n'est valable que pour de faibles allongements.

Reprenons le problème en ajoutant une nouvelle force de contact radiale, la *tension du ressort*. Son expression est :

$$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{T} = -k(\vec{OM} - \vec{OM}_0) = -k(r - r_0)\vec{e}_r.$$

Le point d'application de la tension du ressort est le point d'attache au ressort de la particule M .



L'expression du principe fondamental devient : $\vec{P} + \vec{R}_x + \vec{T} = m \vec{a}(M)_{\mathcal{R}_0}$.

Exprimons sa projection dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$: $m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_\theta \\ R_z \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} r - r_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{r} - r \omega^2 \\ 2\dot{r} \omega \\ 0 \end{pmatrix}$.

- projection sur \vec{e}_θ : $R_\theta = 2m\dot{r}\omega$;
- projection sur \vec{e}_z : $R_z = mg$.
- Suivant \vec{e}_r , l'équation différentielle du mouvement est : $\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)r = \frac{k}{m}r_0$.

• Discussion sur le mouvement

- Si $\frac{k}{m} > \omega^2$, posons $\Omega^2 = \frac{k}{m} - \omega^2$; alors : $\ddot{r} + \Omega^2 r = \frac{k}{m}r_0$.

La solution de cette équation différentielle est sinusoïdale, à la solution de l'équation homogène sans second membre, il faut ajouter la solution particulière constante :

$$r(t) = \frac{kr_0}{m\Omega^2} + B_1 \cos(\Omega t) + B_2 \sin(\Omega t).$$

Les conditions initiales imposent :

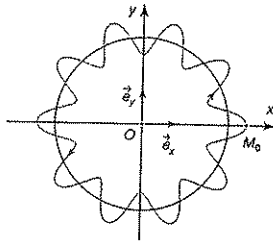
$$r(t=0) = \frac{kr_0}{m\Omega^2} + B_1 = r_0 \Rightarrow B_1 = r_0 \left(1 - \frac{k}{m\Omega^2}\right)$$

$$\dot{r}(t=0) = \Omega B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = 0$$

$$r(t) = \frac{kr_0}{m\Omega^2} + r_0 \left(1 - \frac{k}{m\Omega^2}\right) \cos(\Omega t)$$

Comme $\theta(t) = \omega t$, l'équation de la trajectoire est :

$$r(\theta) = \frac{kr_0}{m\Omega^2} + r_0 \left(1 - \frac{k}{m\Omega^2}\right) \cos\left(\frac{\Omega}{\omega}\theta\right).$$



• Si $\frac{k}{m} < \omega^2$, posons $\Omega^2 = \omega^2 - \frac{k}{m}$; alors : $\ddot{r} - \Omega^2 r = \frac{k}{m} r_0$.

La constante de raideur du ressort est insuffisante pour ramener M vers O ; la solution de cette équation différentielle est divergente :

$$r(t) = -\frac{kr_0}{m\Omega^2} + C_1 \text{sh}(\Omega t) + C_2 \text{ch}(\Omega t).$$

Les conditions initiales imposent :

$$r(t=0) = -\frac{kr_0}{m\Omega^2} + C_2 = r_0 \Rightarrow C_2 = r_0 \left(1 + \frac{k}{m\Omega^2}\right)$$

$$\dot{r}(t=0) = \Omega C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$r(t) = -\frac{kr_0}{m\Omega^2} + r_0 \left(1 + \frac{k}{m\Omega^2}\right) \text{ch}(\Omega t).$$

Comme $\theta(t) = \omega t$, l'équation de la trajectoire est :

$$r(t) = -\frac{kr_0}{m\Omega^2} + r_0 \left(1 + \frac{k}{m\Omega^2}\right) \text{ch}\left(\frac{\Omega}{\omega}\theta\right).$$

Son allure est une spirale dont l'allure est représentée dans la question 4.

en conclusion

Le problème traite de la situation d'une liaison bilatérale, le point matériel est guidé et astreint à se déplacer sur la tige. Deux types de mouvement ont été analysés en fonction de la raideur du ressort, l'un est sinusoïdal, l'autre est divergent. Il est important de retenir et ne pas confondre les solutions de leurs équations différentielles ; une analyse physique du résultat final permet de valider vos calculs en même temps qu'elle valorise votre sens physique.

2 – Projectile soumis à un frottement visqueux

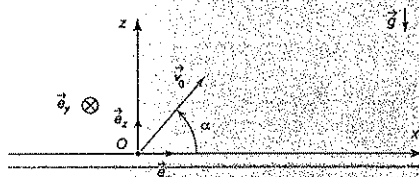
Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

À l'instant $t = 0$ un projectile ponctuel M est lancé du point origine O à la surface de la Terre avec une vitesse initiale \vec{v}_0 située dans le plan (Oxy) et faisant un angle $\alpha > 0$ avec l'horizontale.

L'air atmosphérique exerce sur la particule une force de frottement de type fluide, proportionnelle à la vitesse et de coefficient de frottement h positif :

$$\vec{F}_f = -h\vec{v}.$$

Le champ de pesanteur est supposé uniforme : $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ avec $g = \|\vec{g}\| > 0$.



Il sera introduit dans les expressions obtenues la grandeur $\tau = \frac{m}{h}$.

- 1 Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M_{/S_0})$ à l'instant t . Quelle est la dimension de τ ? Montrer que cette vitesse tend vers une vitesse limite \vec{v}_{lim} .
- 2 Déterminer les équations horaires de la trajectoire.
- 3 À quel instant t_S l'altitude maximale z_S est-elle atteinte? Préciser la position du sommet S de la trajectoire.
- 4 Montrer que la trajectoire a une asymptote verticale à l'abscisse x_{lim} . Représenter l'allure de la trajectoire du projectile.

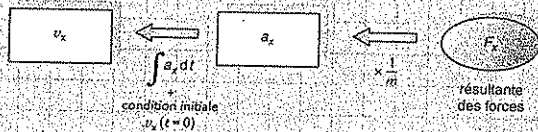
résolution méthodique

• *Position du problème* : de quelles données dispose-t-on pour étudier le mouvement? La loi de force est ici connue, elle permet de déterminer le mouvement du point matériel. Les étapes [1] à [5] de la méthode sont décrites dans l'exercice 1 ; reprenons à l'étape [6] :

[6] Résoudre des équations différentielles

L'écriture du principe fondamental de la dynamique permet d'accéder au vecteur accélération. Le vecteur vitesse est obtenu par intégration compte tenu des conditions initiales sur la vitesse.

Suivant \vec{e}_x , vecteur unitaire fixe dans \mathcal{R}_g :



1 Le mouvement du point matériel M est étudié dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_g galiléen. Les objets extérieurs agissant sur le système M sont :

- (i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids du point matériel M ;
- (ii) de contact : $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow M} = \vec{F}_f = -h\vec{v}$, la force de frottement due à l'air.

Il n'est pas nécessaire de représenter ces forces sur un schéma car l'orientation du vecteur vitesse est pour l'instant inconnue.

$$\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} + \vec{F}_{\text{air} \rightarrow M} = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_g).$$

Pour ce mouvement quelconque, la base adaptée est la base orthonormée directe cartésienne suggérée par l'énoncé, c'est-à-dire $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}; \quad \vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix};$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}; \quad \vec{F}_f = -h \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

L'expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique appliqué au point matériel M , dans le référentiel terrestre supposé galiléen est :

$$\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} + \vec{F}_{\text{air} \rightarrow M} = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_g), \text{ soit } m\vec{g} - h\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_g).$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $\frac{1}{m}$, il vient :

$$\vec{g} - \frac{1}{\tau}\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{a}(M/\mathcal{R}_g).$$

Effectuons une analyse dimensionnelle de cette équation :

$$[a] = [g] = \frac{[v]}{[\tau]}$$

$$\text{Or } [a] = \frac{[v]}{T} \Rightarrow [\tau] = T$$

τ a la dimension d'un temps.

Explicitons maintenant l'équation dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}.$$

Pour répondre à la question posée, faisons apparaître les composantes du vecteur vitesse :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix}.$$

Le principe fondamental conduit ainsi à un système de trois équations différentielles :

• projection sur \vec{e}_x : $\dot{v}_x + \frac{1}{\tau} v_x = 0$ (1)

• projection sur \vec{e}_y : $\dot{v}_y + \frac{1}{\tau} v_y = 0$ (2)

• projection sur \vec{e}_z : $\dot{v}_z + \frac{1}{\tau} v_z = -g$ (3)

La résolution des deux équations (1) et (2) donne les solutions générales exponentielles dont les constantes d'intégration A_1 et A_2 sont fixées par les conditions initiales :

• projection sur \vec{e}_x : $v_x = A_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, avec $v_x(t=0) = A_1 = v_0 \cos \alpha$;

• projection sur \vec{e}_y : $v_y = A_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, avec $v_y(t=0) = A_2 = 0$.

La résolution de l'équation (3) donne une solution générale exponentielle de l'équation différentielle homogène sans second membre complétée par une solution particulière constante imposée par le second membre. La constante d'intégration A_3 est fixée par la condition initiale $v_z(t=0) = v_0 \sin \alpha$.

• Projection sur \vec{e}_z : $v_z = A_3 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau g$ avec $v_z(t=0) = A_3 - \tau g = v_0 \sin \alpha$.

Les composantes du vecteur vitesse sont :

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ v_y = 0 \\ v_z = (v_0 \sin \alpha + \tau g) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau g \end{cases}$$

Pour déterminer la vitesse limite, faisons tendre t vers l'infini :

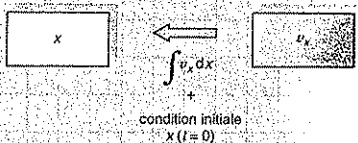
$$\begin{cases} v_{x \text{ lim}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_{z \text{ lim}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_z = -\tau g \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{\text{lim}} = -\tau g \vec{e}_z = \tau \vec{g}}$$

Le mouvement limite correspond à une chute verticale de vitesse constante.

2

Le vecteur position est obtenu par intégration du vecteur vitesse compte tenu des conditions initiales sur la position.

Suivant \vec{e}_x , vecteur unitaire fixe dans \mathcal{R}_g :



Les composantes du vecteur vitesse peuvent aussi s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = (v_0 \sin \alpha + \tau g) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau g \end{cases}$$

Leur intégration permet d'accéder à x , y et z , sachant qu'à l'instant $t=0$, le projectile est en O :

$$\begin{cases} x = -\tau v_0 \cos \alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + B_1, & \text{avec } x(t=0) = -\tau v_0 \cos \alpha + B_1 = 0 \\ y = B_2, & \text{avec } y(t=0) = B_0 = 0 \\ z = -\tau g t - \tau(v_0 \sin \alpha + \tau g) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + B_3, & \text{avec } z(t=0) = -\tau(v_0 \sin \alpha + \tau g) + B_3 = 0. \end{cases}$$

Récapitulons :

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ v_y = 0 \\ v_z = (v_0 \sin \alpha + \tau g) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau g \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = \tau v_0 \cos \alpha \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \\ y = 0 \\ z = -\tau g t + \tau(v_0 \sin \alpha + \tau g) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \end{cases}$$

Le mouvement du projectile est plan. À tout instant $y = 0$, la trajectoire de M reste dans le plan (Oxz) imposé par la vitesse initiale.

3

En organisant correctement votre rédaction, vous aurez sous les yeux les composantes côte à côte, des vecteurs position, vitesse et accélération. Vous pourrez ainsi puiser dans ces données pour écrire le raisonnement le plus rapide. Ici, c'est v_x que vous allez utiliser car cette composante s'annule lorsque la particule arrive au sommet de sa trajectoire.

Cet instant est atteint lorsque $v_z = 0$, soit :

$$v_z(t = t_S) = (v_0 \sin \alpha + g \tau) \exp\left(-\frac{t_S}{\tau}\right) - g = 0$$

$$t_S = \tau \ln\left(1 + \frac{v_0 \sin \alpha}{g \tau}\right)$$

En remplaçant dans les équations horaires du mouvement :

$$\exp\left(-\frac{t_S}{\tau}\right) = \frac{g \tau}{v_0 \sin \alpha + g \tau} \Rightarrow \left[1 - \exp\left(-\frac{t_S}{\tau}\right)\right] = \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \sin \alpha + g \tau}$$

on obtient les coordonnées de S :

$$\begin{aligned} \bullet x_S &= \frac{\tau v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{v_0 \sin \alpha + g \tau} \\ \bullet y_S &= 0 \\ \bullet z_S &= -g \tau^2 \ln\left(1 + \frac{v_0 \sin \alpha}{g \tau}\right) + \tau v_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

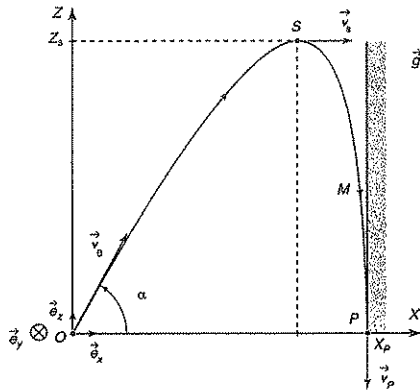
4

Pour étudier un comportement asymptotique, il faut passer à la limite et faire tendre t vers l'infini.

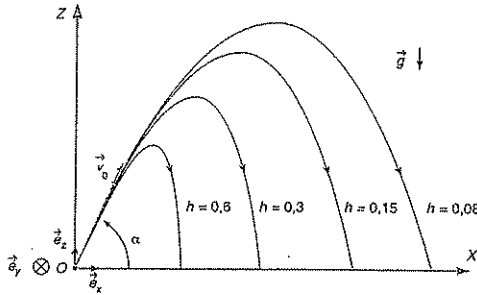
Calculons la position limite du projectile en faisant tendre t vers l'infini :

$$\begin{cases} x_{\text{lim}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} x = \tau v_0 \cos \alpha \\ y = 0 \\ z = \lim_{t \rightarrow +\infty} z = -\tau g t \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow x_{\text{lim}} = \tau v_0 \cos \alpha$$

La trajectoire admet une asymptote verticale lorsque t tend vers l'infini. Le sol interrompt la trajectoire du mobile pour $z = 0$.



La courbe qui suit permet d'évaluer l'influence du coefficient de frottement h (exprimé en $\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$) sur la trajectoire.



en conclusion

Que ce soit au tableau pour un oral ou lors d'une épreuve écrite, il est nécessaire de soigner et de structurer votre rédaction : il faut numérotter les questions, souligner les termes importants de votre analyse, encadrer les résultats. Il vous sera ainsi facile de revenir en arrière pour utiliser les résultats nécessaires à la poursuite du raisonnement et corriger d'éventuelles erreurs.

Pour finir, ayons une pensée pour la solitude du joueur de rugby qui doit tirer une pénalité : s'il peut contrôler la première partie de la trajectoire du ballon en imposant la vitesse initiale, il doit aussi anticiper la seconde partie de la courbe pour franchir la barre.

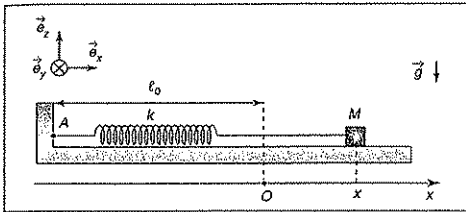


> Corrigé p. 62

Oscillations d'un point matériel relié à un ressort horizontal

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Un point matériel M de masse m est lié à un ressort horizontal, l'autre extrémité du ressort étant fixe en A . Dans son domaine d'élasticité, le ressort non tendu est caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0 .



Le point M glisse sans frottement le long de l'axe $(O; \vec{e}_x)$ à partir de sa position d'équilibre située en O . Il est repéré sur cet axe par son abscisse $x = \overline{OM}$ (grandeur algébrique).

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de M . En déduire la pulsation propre ω_0 des oscillations.
2. À l'instant $t = 0$, le point matériel est abandonné sans vitesse initiale du point M_0 d'abscisse x_0 . Déterminer l'équation horaire du mouvement $x(t)$.
3. En déduire l'expression de la tension \vec{T} du ressort. Justifier son qualificatif de « force de rappel élastique ».

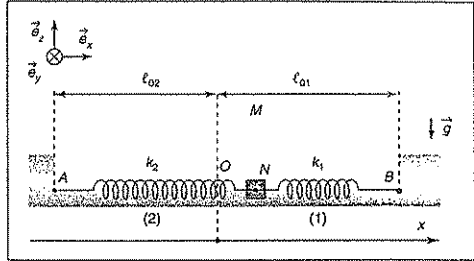


> Corrigé p. 63

Oscillations d'un point matériel relié à deux ressorts horizontaux

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Un point matériel M de masse m est attaché à deux ressorts (1) et (2) horizontaux de raideurs k_1 et k_2 , et de longueurs à vide ℓ_{01} et ℓ_{02} reliés à deux points fixes A et B distants de $(\ell_{01} + \ell_{02})$.



Le point M glisse sans frottement le long de l'axe $(O; \vec{e}_x)$ à partir de sa position d'équilibre. Il est repéré sur cet axe par son abscisse $x = \overline{OM}$ (grandeur algébrique).

1. Justifier la position d'équilibre en O du point M .
2. Établir l'équation différentielle du mouvement de M . En déduire la période T des oscillations et la raideur k du ressort équivalent à cette association.
3. À l'instant $t = 0$, le point matériel est abandonné sans vitesse initiale du point M_0 d'abscisse x_0 . Déterminer l'équation horaire du mouvement $x(t)$.

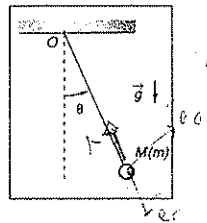


> Corrigé p. 64

Oscillations d'un pendule simple

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Un pendule simple est constitué d'un objet ponctuel de masse m , suspendu à un fil tendu, inextensible et sans masse, de longueur ℓ . Le champ de pesanteur terrestre est supposé uniforme et la résistance de l'air négligeable. L'extrémité O du fil est fixe.



1. Faire le bilan des forces appliquées à l'objet M .
2. Établir l'équation différentielle du mouvement de M étudié dans le plan de la figure en précisant la base de projection.
3. Dans quelle condition le pendule est-il un oscillateur harmonique ? Déterminer alors la pulsation propre ω_0 des oscillations en fonction de g et ℓ .

- À l'instant $t = 0$, l'objet M est abandonné sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle θ_0 . Déterminer l'équation horaire du mouvement $\theta(t)$.
- Exprimer la valeur maximale v_{\max} de la vitesse de M au cours du mouvement en fonction de θ_0 , l et g .



> Corrigé p. 65

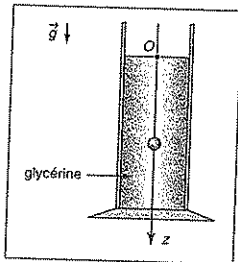
Mouvement d'une bille dans un liquide

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur uniforme :

$$\vec{g} = g\vec{e}_z, \text{ avec } g = \|\vec{g}\| = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Une petite bille d'acier M de rayon r et de masse m est lâchée en O et sans vitesse initiale dans la glycérine de viscosité η . Ce liquide visqueux exerce sur la bille en translation :

- la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$;
- des actions de frottement modélisées par une force $\vec{F}_f = -6\pi\eta r\vec{v}$ où \vec{v} est le vecteur vitesse de la bille dans \mathcal{R}_g .



Données :

- masse volumique de l'acier : $\rho = 7\,800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- masse volumique de la glycérine : $\rho = 1\,260 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- masse volumique de l'air : $\rho_a = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

- Donner les caractéristiques de la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$ exercée par le fluide sur la bille. Comparer à la poussée d'Archimède qui serait exercée par l'air sur la bille. Conclure.
- Effectuer le bilan des forces exercées sur M en précisant le référentiel d'étude.

- Établir l'équation différentielle que vérifie la valeur de la vitesse \vec{v} de la bille.

- Montrer que la vitesse de la bille tend vers une valeur limite v_{lim} . Donner son expression en fonction de ρ , ρ_0 , g , r et η . Quelle est la constante de temps τ du mouvement ?

- Pour une bille de rayon $r = 1,50 \text{ mm}$, la vitesse limite atteinte est de $5,2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

En déduire la viscosité η en précisant son unité et la constante de temps τ .

Conclure sur le caractère observable du phénomène.



> Corrigé p. 66

Projectile soumis à des frottements quadratiques

Reprenons le tir balistique de l'exercice 2 de *Savoir résoudre les exercices*. Il adoptait un frottement de type visqueux correspondant à un mobile M en translation à faible vitesse. Lorsque les vitesses atteintes sont plus importantes il faut avoir recours, pour modéliser la résistance de l'air, à une loi de force proportionnelle au carré de la vitesse (dite quadratique par rapport à la vitesse de M) :

$$\vec{F}_f = -KS\|\vec{v}\|\vec{v}.$$

K est une constante dépendant de la forme du mobile et de la nature du fluide (ici l'air).

S est le maître couple, section du cylindre engendré par le mobile en translation.

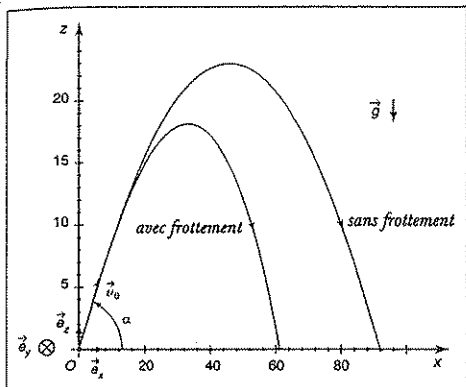
Le mouvement de M est étudié dans le référentiel terrestre galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et a lieu dans le plan (Oxz) .

- Écrire les équations différentielles du mouvement suivant les axes $(O; \vec{e}_x)$ et $(O; \vec{e}_z)$.

- La résolution de ces équations différentielles nécessite un logiciel d'intégration numérique.

Avec $v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,

$m = 0,1 \text{ kg}$ et $KS = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$, la courbe obtenue est ici comparée à la trajectoire libre du projectile :



Déterminer graphiquement et dans les deux cas la portée et l'altitude maximale de la trajectoire.

3. Existe-t-il une vitesse limite ? La trajectoire avec frottement admet-elle une asymptote ?



> Corrigé p. 67

Freinage d'un véhicule

Les vitesses du véhicule sont exprimées par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le champ de pesanteur est uniforme :

$$\vec{g} = -g\vec{e}_z, \text{ avec } g = \|\vec{g}\| = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Une voiture de masse m se déplace sur une route horizontale le long de l'axe $(O; \vec{e}_x)$ avec une vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$.

À l'instant $t = 0$, le véhicule est en O et le conducteur arrête son moteur.

La voiture est soumise :

- à une force modélisant les frottements solides dus aux contacts entre les roues et la route :

$$\vec{F}_S = -m\alpha\vec{e}_x;$$

- à une force modélisant les frottements visqueux dus au contact entre la voiture et l'air :

$$\vec{F}_V = -m\beta\|\vec{v}\|\vec{v}.$$

Les paramètres α et β sont des constantes positives :

$$\alpha = fg \text{ et } \beta = \frac{1}{2} \frac{\rho_a S C_X}{m}.$$

1. Déterminer l'instant t correspondant à une vitesse v du véhicule. À quel instant τ le véhicule s'arrête-t-il ?

2. Exprimer la distance $x(t)$ parcourue par le véhicule. En déduire la distance ℓ parcourue par la voiture pendant la durée τ .

3. Que deviennent τ et ℓ lorsque le frottement solide n'est pas pris en compte ? Commenter.

Données :

- coefficient de frottement de glissement :

$$f = 0,02;$$

- masse volumique de l'air :

$$\rho_a = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3};$$

- maître couple ou section du cylindre engendré par le mobile en translation :

$$S = 3 \text{ m}^2;$$

- coefficient sans dimension reflétant l'aérodynamisme de la voiture :

$$C_X = 0,3;$$

- masse et vitesse initiale du véhicule :

$$m = 600 \text{ kg et } v_0 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1};$$

- $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + \text{cte.}$

Tester ses connaissances

1 La mécanique newtonienne ou mécanique classique est le domaine de la physique qui décrit les mouvements des corps macroscopiques à de faibles vitesses devant celle de la lumière ($c = 300\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le vide).

Ses hypothèses :

- possibilité de connaître avec une précision illimitée la position et la vitesse d'une particule ;
- possibilité de définir une même chronologie dans tous les référentiels (hypothèse de l'existence du temps absolu introduite par Newton).

Ses hypothèses furent révisées :

- dans le cadre de la mécanique quantique qui abandonne la notion de trajectoire au profit de la probabilité de présence de la particule ;
- dans le cadre de la mécanique relativiste qui revoit les notions d'espace et de temps.

2 Décomposons la force F par une analyse dimensionnelle en partant du principe fondamental :

$$F = ma \Rightarrow [F] = M[a] = \text{MLT}^{-2}.$$

Le newton se déduit donc des unités fondamentales : le kilogramme, le mètre et la seconde.

$$N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

3 Un système est pseudo-isolé lorsque les actions mécaniques se compensent exactement.

Un palet en déplacement sur une table à

coussin d'air réalise un système pseudo-isolé et le principe de l'inertie lui est applicable. Sur un déplacement suffisamment bref et à la précision exigible près, on pourra vérifier le caractère constant du vecteur vitesse. Le coussin d'air entre le palet et la table rend les forces de frottement négligeables, la réaction du support est normale au support et équilibre exactement le poids.

$$m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}.$$

L'expérience est suffisamment brève pour supposer le référentiel terrestre galiléen.

4 Appliquons le principe fondamental de la dynamique à M dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g :

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_g).$$

Le point M isolé n'est soumis à aucune action extérieure :

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \left(\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right) / \mathcal{R}_g = \vec{0}.$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$ est un vecteur constant, le point M est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme en accord avec le principe de l'inertie.

5 Réponse b. Le principe fondamental de la statique n'est pas réciproque : si $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} = \vec{0}$, le point matériel M n'est pas forcément à l'équilibre dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

Le point matériel est isolé, son vecteur vitesse est constant et garde sa valeur initiale :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0.$$

M sera à l'équilibre si sa vitesse initiale est nulle. Si elle est non nulle, le point M sera animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

6 Réponse b. Un point matériel M animé d'un mouvement circulaire uniforme est accéléré, il ne peut donc pas être isolé.

Sa trajectoire est un cercle de rayon R décrit avec une vitesse v , son accélération est radiale :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$

La résultante des actions mécaniques qui lui est appliquée est non nulle et centripète, c'est-à-dire dirigée vers le centre de la trajectoire :

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = -m\frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$

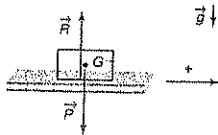
7 Réponse a. Les forces d'interaction $\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1}$ et

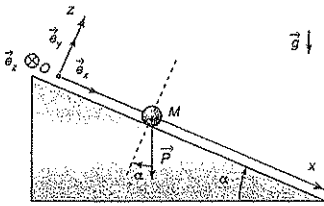
$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2}$ sont portées par la droite (M_1, M_2) : cette proposition exclue la réponse b) ;

• elles ont même intensité : c'est le cas des trois réponses ;

• et des sens opposés : ce qui exclue la réponse c).

8 Réponse c. Le poids \vec{P} fait un angle α avec la normale au support :





Les composantes de son poids \vec{P} dans la base

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \text{ sont : } \begin{pmatrix} mgsin\alpha \\ 0 \\ -mgcos\alpha \end{pmatrix}$$

Conseil : il faut prendre soin de toujours orienter les angles dans le sens positif adopté et de les choisir inférieurs à $\frac{\pi}{2}$.

Savoir appliquer le cours

1 Un point matériel M , de masse m , est en chute libre à la surface de la Terre ($r = R_T$) et soumis à la seule force gravitationnelle $\vec{F}_{T \rightarrow M}$. En supposant le référentiel terrestre galiléen, le principe fondamental de la dynamique appliqué à M donne l'accélération de son mouvement :

$$\vec{F}_{T \rightarrow M} = -G \frac{m_T m}{r^2} \vec{e}_{TM} = m \vec{g} = m \vec{a}(M_{/S_R}).$$

Donc : $\vec{a}(M_{/S_R}) = \vec{g} = -G \frac{m_T}{R_T^2} \vec{e}_{TM}$.

A.N. : $a = g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

On retrouve l'intensité du champ de pesanteur \vec{g} . Le point M est soumis à son poids et le principe fondamental qui lui est appliqué donne :

$$\vec{P} = m \vec{g} = m \vec{a}(M_{/S_R}) \Rightarrow \vec{a}(M_{/S_R}) = \vec{g}.$$

En première approximation, le poids d'un corps est égal à la force de gravitation exercée sur lui par la Terre et :

$$\vec{g} = -G \frac{m_T}{R_T^2} \vec{e}_{TM}.$$

2 Comparons les intensités des forces d'interactions électrostatique et gravitationnelle :

$$F_{\text{elec}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad \text{et} \quad F_{\text{grav}} = G \frac{m_p m_e}{r^2}$$

$$\frac{F_{\text{elec}}}{F_{\text{grav}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{G m_p m_e} = 2 \cdot 10^{39}.$$

Ainsi on peut totalement négliger l'interaction gravitationnelle pour décrire la structure atomique.

3 Dans la nature les deux forces qui agissent sur de grandes distances sont la force gravitationnelle et la

force électrostatique (les particules sont supposées ici fixes dans le référentiel d'étude). Les charges électriques sont disposées de façon à créer des ensembles électriquement neutres et, à l'échelle macroscopique, le champ électrostatique produit par une charge est compensé par celui d'une charge voisine, de signe opposé. La force gravitationnelle est donc prépondérante à notre échelle.

4 Le point matériel M est soumis à une liaison car, s'il est soumis à une impulsion horizontale, il est alors astreint à décrire une courbe ayant la forme d'un arc de cercle. Sa trajectoire est imposée par la tension \vec{T} du fil. Le système S est constitué par le point $M(m)$ et la partie de corde inférieure à N .

$T(x)$ est la tension exercée sur S par la partie de corde supérieure à N et $P(x)$ le poids du système :

• $\vec{T} = -T(x)\vec{e}_x$, $T(x)$ est l'intensité (positive) de la tension ;

$$\vec{P} = P(x)\vec{e}_x = \left[m + m_0 \left(\frac{\ell - x}{\ell} \right) \right] g \vec{e}_x$$

$$= mg \left[1 + \frac{m_0}{m} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) \right] \vec{e}_x.$$

Le principe fondamental de la statique appliqué à S dans le référentiel terrestre galiléen est :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

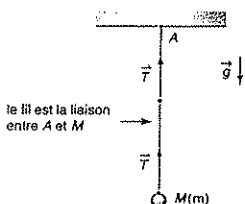
$$\Rightarrow T(x) = P(x) = mg \left[1 + \frac{m_0}{m} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) \right]$$

Remarquons deux points particuliers du fil tendu :

$$T(0) = (m + m_0)g \quad \text{et} \quad T(\ell) = mg.$$

La tension est une grandeur définie en chaque point du fil, son intensité décroît régulièrement du point d'attache A au point matériel M .

Un fil idéal est un fil parfaitement souple et sans masse, dans ce cas $m_0 = 0$ et $T = mg$: la tension est uniforme, elle a la même valeur en tout point du fil.



Remarque : un fil inextensible parfaitement flexible prend une forme rectiligne dès qu'il est tendu entre deux points d'une liaison. La valeur de la tension appliquée en M reste indéterminée car elle est fonction des autres forces. Lorsque le fil n'est pas tendu, le mouvement de M est indépendant de la corde, la liaison disparaît et la tension s'annule.

$$\vec{F}_{\text{fil} \rightarrow M} = \vec{T}$$

5 a. Un ressort est idéal s'il est de masse négligeable et s'il est linéaire, sa tension est dans ce cas proportionnelle à l'allongement relatif du ressort par rapport à sa longueur à vide ℓ_0 . La longueur à vide est sa longueur à tension nulle, le ressort n'est alors ni comprimé, ni tendu.

b. La grandeur k est appelée raideur du ressort et s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$.

$$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{T} = -k(\vec{\ell} - \vec{\ell}_0) = -k\Delta \vec{\ell}$$

Plus précisément :

$$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{T} = -k(\vec{AM} - \vec{A_0M_0})$$

A peut être mobile dans \mathcal{R}

Commentaires

• M est le point d'application de la tension \vec{T} et A l'extrémité opposée du ressort ;

• $\vec{A_0M_0} = \vec{\ell}_0$ est la longueur du ressort à vide ;

• $\vec{AM} = \vec{\ell}$ est longueur du ressort à l'instant t ;

• si A est fixe, A_0 est confondu avec A :

$$\vec{T} = -k(\vec{AM} - \vec{AM_0}) \quad A \text{ fixe dans } \mathcal{R}$$

Le point matériel M est soumis à une liaison par le ressort. La tension qui lui est appliquée par le ressort (2) est :

$$\vec{T} = -k_2(\vec{BM} - \vec{B_0M_0})$$

Écrivons le principe fondamental de la dynamique au point B de masse m' dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_g galiléen :

$$\vec{F}_{\text{ressort (1)} \rightarrow B} + \vec{F}_{\text{ressort (2)} \rightarrow B} + \vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow B} + \vec{F}_{\text{support} \rightarrow B} = m' \vec{a}(B/\mathcal{R}_g)$$

$$\vec{F}_{\text{ressort (1)} \rightarrow B} + \vec{F}_{\text{ressort (2)} \rightarrow B} + \vec{P} + \vec{R} = m' \vec{a}(B/\mathcal{R}_g)$$

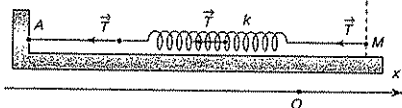
Les ressorts ayant des masses négligeables, il en sera de même pour le point particulier B commun aux deux.

$$m' = 0; \quad \vec{P} = m'g = \vec{0}; \quad \vec{R} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{ressort (1)} \rightarrow B} + \vec{F}_{\text{ressort (2)} \rightarrow B} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{F}_{\text{ressort (1)} \rightarrow B} &= -\vec{F}_{\text{ressort (2)} \rightarrow B} \\ &= k_2(\vec{MB} - \vec{M_0B_0}) \\ &= -k_2(\vec{BM} - \vec{B_0M_0}) = \vec{T} \cdot w \end{aligned}$$

Le ressort étant idéal, la tension \vec{T} est uniforme et tout point du ressort subit la même force élastique \vec{T} .



La tension \vec{T} étant identique pour chaque point de la liaison, exprimons-la successivement pour le ressort équivalent, pour le ressort (1) et pour le ressort (2) en observant que A est fixe :

$$\begin{aligned} \vec{T} &= -k(\vec{AM} - \vec{AM_0}) = -k_1(\vec{AB} - \vec{AB_0}) \\ &= -k_2(\vec{BM} - \vec{B_0M_0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{T}}{k} &= (\vec{AM} - \vec{AM_0}) = \vec{AB} + \vec{BM} - \vec{AB_0} - \vec{B_0M_0} \\ &= (\vec{AB} - \vec{AB_0}) + (\vec{BM} - \vec{B_0M_0}) \end{aligned}$$

$$= \frac{\vec{T}}{k_1} + \frac{\vec{T}}{k_2}$$

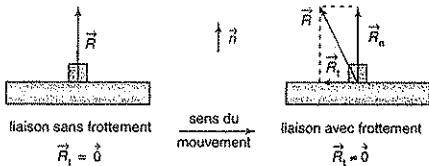
\Rightarrow

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

6 *Remarque* : le point matériel M est soumis à une liaison lorsqu'il est astreint à rester sur une courbe ou sur une surface. Sa trajectoire lui est imposée par une force \vec{R} appelée réaction du support.

• Si le point matériel se déplace sur une surface (mouvement à deux degrés de liberté) la normale \vec{n} au support est définie sans ambiguïté. La réaction se décompose en deux composantes : une réaction normale au support \vec{R}_n qui s'oppose à la pénétration du mobile dans le support et une réaction tangentielle au support \vec{R}_t appelée force de frottement de glissement qui s'oppose au déplacement du point.

$$\vec{P}_{\text{support} \rightarrow M} = \vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$$



Le point matériel pouvant éventuellement quitter son support, la liaison est dite unilatérale. Le mobile perd contact avec le support dès que la réaction normale s'annule $R_n = 0$, la condition nécessaire du contact est : $R_n = \vec{R} \cdot \vec{n} \geq 0$.

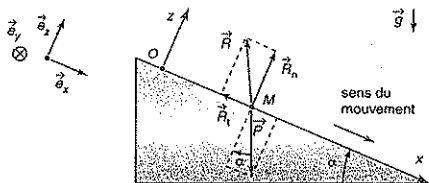
Le système considéré est le point matériel M . L'étude est effectuée dans le référentiel terrestre

$\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ galiléen.

• *Bilan des forces appliquées au système*

$$\vec{P}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$$

$$\vec{P}_{\text{support} \rightarrow M} = \vec{R}$$



• *Expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique*

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_g)$$

Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$m \begin{pmatrix} g \sin \alpha \\ 0 \\ -g \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où le système d'équations :

• projection sur \vec{e}_x : $m g \sin \alpha + R_x = m \ddot{x}$ (1)

• projection sur \vec{e}_y : $R_y = 0$ (2)

• projection sur \vec{e}_z : $-m g \cos \alpha + R_z = 0$ (3)

et les composantes de la réaction du support :

$$\begin{cases} R_x = -f R_z = -f m g \cos \alpha \\ R_y = 0 \\ R_z = m g \cos \alpha \end{cases}$$

L'équation (1) donne l'expression de l'accélération du mobile :

$$\ddot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Le mouvement de M est uniformément accéléré.

Une première intégration effectuée sachant que la vitesse initiale de M est nulle permet d'accéder à la vitesse de M :

$$\dot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t$$

Une seconde considérant que M est en O à l'instant $t = 0$ permet d'écrire l'équation horaire :

$$x = \frac{1}{2} g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t^2$$

• Si le mouvement s'effectue sans frottement :

$$f = 0; \quad \ddot{x} = g \sin \alpha; \quad \dot{x} = g \sin \alpha t; \quad x = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$$

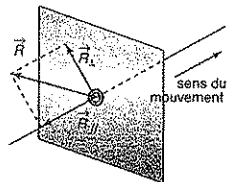
• Si $f = \tan \alpha$, ce qui équivaut à $(\sin \alpha - f \cos \alpha) = 0$:

$$\ddot{x} = 0, \quad \dot{x} = 0 \quad \text{et} \quad x = 0$$

Le point M déposé en O reste à l'équilibre.

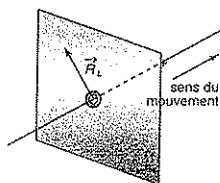
7 *Remarque* : la trajectoire du point matériel est imposée par un guide (mouvement à un degré de liberté), la liaison est bilatérale et le mobile ne peut pas quitter son support.

Si le mouvement s'effectue avec frottements, \vec{R} se décompose en une composante \vec{R}_t tangentielle à la trajectoire qui s'oppose au déplacement et une composante \vec{R}_n normale à la trajectoire contenue dans le plan perpendiculaire à la courbe.



Si le mouvement s'effectue sans frottement, \vec{R} est contenu dans le plan perpendiculaire à la courbe en M :

$$\vec{R} = \vec{R}_L \text{ et } \vec{R}_N = \vec{0}.$$



Le système considéré est le point matériel M . L'étude est effectuée dans le référentiel terrestre

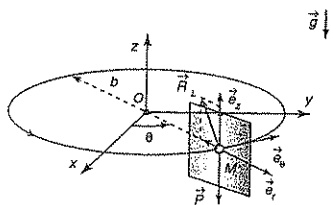
$\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ galiléen.

• **Bilan des forces appliquées au système**

$$\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$$

$$\vec{F}_{\text{support} \rightarrow M} = \vec{R} = \vec{R}_L.$$

Le mouvement s'effectue sans frottement, \vec{R} est contenu dans le plan perpendiculaire au support circulaire en M .



• **Expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique**

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}(M, \mathcal{R}_g).$$

• Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

$$m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_r \\ 0 \\ R_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -\frac{v^2}{b} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où le système d'équations :

$$\bullet \text{ projection sur } \vec{e}_r : R_r = -m\frac{v^2}{b} \quad (1)$$

$$\bullet \text{ projection sur } \vec{e}_\theta : \frac{dv}{dt} = 0 \quad (2)$$

$$\bullet \text{ projection sur } \vec{e}_z : R_z = mg \quad (3)$$

L'équation (2) indique que le mouvement du point M est circulaire uniforme : la vitesse v est constante et égale à la vitesse imposée par la condition initiale v_0 .

$$\Rightarrow R_r = -m\frac{v_0^2}{b}; \quad R_\theta = 0; \quad R_z = mg.$$

$$\vec{R} = -m\frac{v_0^2}{b}\vec{e}_r + mg\vec{e}_z$$

S'entraîner

1. Le système est le point M , son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• **Bilan des forces appliquées au point M**

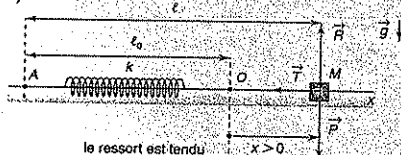
(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids du point matériel M ;

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{support} \rightarrow M} = \vec{R}$, la réaction du support ;

$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du ressort.

• **Expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique**

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}(M, \mathcal{R}_g).$$



• **Projection dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$**

• le poids \vec{P} :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z \quad (g = \|\vec{g}\| > 0);$$

• la réaction \vec{R} est normale au support car le mouvement s'effectue sans frottement :

$$\vec{R} = R \vec{e}_x \quad (R = \|\vec{R}\| > 0);$$

R est l'intensité de la réaction \vec{R} .

la réaction \vec{T} s'écrit :

$$\vec{T} = -k(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{A_0M_0}) = -k(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM_0}),$$

car A est fixe dans \mathcal{R}_g

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x = -k(\ell_0 + x - \ell_0) \vec{e}_x = -kx \vec{e}_x;$$

l'accélération est : $\vec{a}(M, \mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le mouvement ayant lieu selon l'axe $(O; \vec{e}_x)$, les composantes a_x et a_y de l'accélération sont nulles.

Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où les équations :

• projection sur \vec{e}_x : $m\ddot{x} + kx = 0$ (1)

• projection sur \vec{e}_z : $R = mg$ (2)

(2) La réaction du support équilibre le poids et s'oppose à la pénétration de M dans le support.

(1) L'équation différentielle du mouvement de M qui a lieu selon \vec{e}_x est :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, soit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

La période propre est indépendante des conditions initiales :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Les oscillations sont purement sinusoïdales. La solution générale de l'équation est :

$$x(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t.$$

2. Les conditions initiales permettent de définir les constantes d'intégration A_1 et A_2 et d'accéder ainsi à la solution du problème. La position et la vitesse de M à l'instant t sont :

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t; \\ \dot{x}(t) = \omega_0 (-A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \end{cases}$$

Et à l'instant $t = 0$:

$$\begin{cases} x(t=0) = A_1 = x_0 \Rightarrow A_1 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \omega_0 A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 0 \end{cases}$$

D'où l'équation horaire du mouvement :

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$$

3. L'expression de la tension du ressort est définie de la façon suivante :

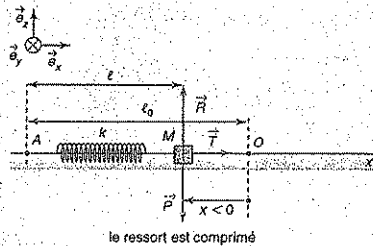
$$\vec{T} = -kx \vec{e}_x = -kx_0 \cos \omega_0 t \vec{e}_x = T_x \vec{e}_x.$$

La position d'équilibre du ressort correspond à la solution de l'équation fondamentale de la statique appliquée au point M :

$$\frac{P + \vec{R} + \vec{T}}{\vec{0}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = -kx_{\text{éq}} \vec{e}_x = \vec{0}.$$

Ainsi $x_{\text{éq}} = 0$.

La composante T_x est positive si $x < 0$, elle est négative si $x > 0$. Il s'agit d'une force de rappel élastique qui tend à ramener le point M à sa position d'équilibre en O . La tension \vec{T} du ressort a la même expression, que le ressort soit comprimé ou tendu.



2. 1. Le système est le point M , son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• Bilan des forces appliquées au point M

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m \vec{g}$, le poids du point matériel M ;

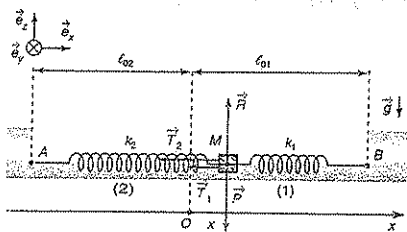
(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{support} \rightarrow M} = \vec{R}$, la réaction du support ;

$\vec{F}_{\text{ressort (1)} \rightarrow M} = \vec{T}_1$, la tension du ressort. (1)

$\vec{F}_{\text{ressort (2)} \rightarrow M} = \vec{T}_2$, la tension du ressort. (2)

• Expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m \vec{a}(M, \mathcal{R}_g)$$



• Projection dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

• le poids \vec{P} :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z \quad (g = \|\vec{g}\| > 0) ;$$

• la réaction \vec{R} est normale au support car le mouvement s'effectue sans frottement :

$$\vec{R} = R\vec{e}_z \quad (R = \|\vec{R}\| > 0) ;$$

• la tension \vec{T}_1 :

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= -k_1(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{A_0M_0}) = -k_1(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM_0}) \\ &= -k_1\overrightarrow{M_0M}. \end{aligned}$$

A étant fixe dans \mathcal{R}_g , A est confondu avec A_0 ;

• la tension \vec{T}_2 :

$$\begin{aligned} \vec{T}_2 &= -k_2(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{B_0M_0}) = -k_2(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BM_0}) \\ &= -k_2\overrightarrow{M_0M}. \end{aligned}$$

B étant fixe dans \mathcal{R}_g , B est confondu avec B_0 .

La réaction du support équilibre le poids :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_g}.$$

Or :

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -k_1\overrightarrow{M_0M} - k_2\overrightarrow{M_0M} = -(k_1 + k_2)\overrightarrow{M_0M}.$$

M_0 étant confondu avec O :

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 + \vec{T}_2 &= -(k_1 + k_2)\overrightarrow{OM} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_g} \\ &= m \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}_g}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle du mouvement de M écrite sous forme vectorielle est :

$$\left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}_g} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m} \right) \overrightarrow{OM} = \vec{0}.$$

Selon \vec{e}_x : $\ddot{x} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m} \right) x = 0.$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Les oscillations sinusoïdales sont de pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

et de période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

L'association de deux ressorts est équivalente à un ressort unique de raideur $k = k_1 + k_2$.

La solution générale de l'équation différentielle est :

$$x(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t.$$

2. Les conditions initiales permettent de définir les constantes d'intégration A_1 et A_2 et d'accéder ainsi à la solution du problème. La position et la vitesse de M à l'instant t sont :

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t \\ \dot{x}(t) = \omega_0 (-A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t) \end{cases}$$

Et à l'instant $t = 0$:

$$\begin{cases} x(0) = A_1 = x_0 \Rightarrow A_1 = x_0 \\ \dot{x}(0) = \omega_0 A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 0 \end{cases}$$

D'où l'équation horaire du mouvement :

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$$

3 Le système étudié est le point matériel M dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_g (O ; $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) supposé galiléen.

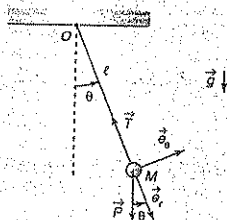
1. • Bilan des forces appliquées au point M

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids du point matériel M ;

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{fil} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du fil.

• Expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_g}.$$



2. Le point matériel M est soumis à une liaison et est astreint à décrire une trajectoire imposée par la tension \vec{T} du fil. La courbe décrite étant un arc de cercle, la base de projection polaire s'impose pour une telle description :

• **Projection dans la base orthonormée** ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$)

• le poids \vec{P} :

$$\vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \end{pmatrix} \quad (g = \|\vec{g}\| > 0);$$

• la tension \vec{T} :

$$\vec{T} = -T\vec{e}_r = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} \quad (T = \|\vec{T}\| > 0);$$

Puisque c'est la variable θ qui nous intéresse, l'accélération de M sera exprimée par :

$$\vec{a}(M, \mathcal{R}_g) = -\ell \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + \ell \ddot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

La projection du principe fondamental dans la base ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) donne :

$$m \begin{pmatrix} g \cos \theta \\ -g \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -\ell \dot{\theta}^2 \\ \ell \ddot{\theta} \end{pmatrix}.$$

Elle conduit à un système de deux équations :

- projection sur \vec{e}_r : $\begin{cases} mg \cos \theta - T = -m\ell \dot{\theta}^2 \end{cases}$ (1)
- projection sur \vec{e}_θ : $\begin{cases} -mg \sin \theta = m\ell \ddot{\theta} \end{cases}$ (2)

L'équation du mouvement est contenue dans l'équation (2), la première équation nous permet d'accéder à T , mais cette question n'est pas abordée dans le problème. L'équation (1) donne l'équation différentielle non linéaire :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

3. Le pendule est un oscillateur harmonique si l'angle polaire θ est suffisamment faible pour que $\sin \theta \approx \theta$. L'équation différentielle est alors linéarisée :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

4. Les oscillations sont sinusoïdales et la solution générale de l'équation est :

$$\theta(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t.$$

Les conditions initiales permettent de définir les constantes d'intégration A_1 et A_2 et d'accéder ainsi à la solution du problème. La position et la vitesse de M à l'instant t sont :

$$\theta(t) = \omega_0(-A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t).$$

Et à l'instant $t = 0$:

$$\theta(t=0) = A_1 = \theta_0 \Rightarrow A_1 = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(t=0) = \omega_0 A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 0.$$

D'où l'équation horaire du mouvement :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t$$

5. La vitesse de M est orthoradiale :

$$\vec{v}(M, \mathcal{R}_g) = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta = -\ell \omega_0 \theta_0 \sin \omega_0 t \vec{e}_\theta.$$

La valeur maximale v_{\max} de sa valeur est obtenue pour

$$\text{les instants } t_p \text{ vérifiant } \omega_0 t_p = (2p+1)\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, en $\theta = 0$:

$$v_{\max} = \ell \omega_0 \theta_0 \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\ell g} \theta_0$$



4 Le système est la bille d'acier, son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

1. L'action exercée par les forces de pression sur un corps immergé est représentée par une force unique $\vec{\pi}$ appelée poussée d'Archimède. Cette force est dirigée selon la verticale ascendante et est égale, en norme, au poids du fluide de masse m_0 déplacé :

$$\vec{\pi} = -m_0 \vec{g} = -\rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 \vec{g} = -\rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{e}_z.$$

Comparons cette force au poids de la bille :

$$\vec{P} = m\vec{g} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{e}_z.$$

$$\frac{\pi}{P} = \frac{\rho_0}{\rho} = 0,16.$$

L'intensité de la poussée d'Archimède représente 16 % du poids de la bille.

Si l'on considère le problème de la chute verticale de la bille dans l'air :

$$\frac{\pi}{P} = \frac{\rho_a}{\rho} = 1,6 \cdot 10^{-4}.$$

L'intensité de la poussée d'Archimède ne représente que 1,6 · 10⁻² % du poids de la bille.

Il est donc légitime de négliger la poussée d'Archimède dans le cas d'un projectile en mouvement dans l'air. Par contre pour le cas présent d'une chute dans la glycérine, elle doit être prise en compte.

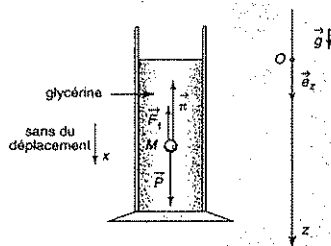
Remarque : le point d'application de la poussée d'Archimède est le centre d'inertie C du fluide déplacé, appelé centre de poussée. Il est confondu avec le centre d'inertie G de la bille sur lequel s'applique le poids si la répartition des masses, pour le fluide et pour la bille, est homogène.

2. • **Bilan des forces appliquées au point M**

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids de la bille ;

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow M} = \vec{\pi}$ la poussée d'Archimède ;

$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow M} = \vec{F}_f$ la force de frottement.



3. Expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique

$$\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{F}_f = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_e),$$

soit :

$$m\vec{g} - m_0\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v}(M/\mathcal{R}_e) = m\left(\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R}_e)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_e}.$$

Pour simplifier l'écriture :

$$m\vec{g} - m_0\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$\rho\frac{4}{3}\pi r^3\vec{g} - \rho_0\frac{4}{3}\pi r^3\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v} = \rho\frac{4}{3}\pi r^3\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$(\rho - \rho_0)\vec{g} - \frac{9}{2}r^2\vec{v} = \rho\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{9}{2\rho r^2}\vec{v} = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\vec{g}$$

Le mouvement s'effectue suivant \vec{z}_z car la résultante des forces est orientée selon \vec{z}_z et la vitesse initiale est nulle : $\vec{v} = v_z\vec{z}_z$.

L'équation différentielle que vérifie v_z est :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{9}{2\rho r^2}v_z = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)g$$

4. La vitesse limite atteinte par la bille est la solution particulière de cette équation différentielle obtenue lorsque la vitesse de la bille est indépendante du temps.

$$v_{z\text{lim}} = \frac{2}{9}(\rho - \rho_0)\frac{r^2g}{\eta} \Rightarrow \vec{v}_{\text{lim}} = \frac{2}{9}(\rho - \rho_0)\frac{r^2\vec{g}}{\eta}$$

La constante du mouvement est obtenue à partir de l'analyse dimensionnelle de l'équation différentielle :

$$\tau = \frac{2\rho r^2}{9\eta}$$

Remarque : la solution complète de l'équation différentielle donne :

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

5. La dimension de la viscosité est obtenue en considérant, par exemple, la force de frottement :

$$\vec{F}_f = -6\pi\eta r\vec{v} \Rightarrow [\eta] = \frac{[F]}{L[v]} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L \cdot L \cdot T^{-1}} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$$

La viscosité η s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le Système International des unités ; pour calculer sa valeur :

$$\eta = \frac{2}{9}(\rho - \rho_0)\frac{r^2g}{v_{z\text{lim}}}$$

A.N. : $\eta = 0,61 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

La constante de temps est obtenue par :

$$\tau = \frac{2\rho r^2}{9\eta}$$

A.N. : $\tau = 6,3 \text{ ms}$.

La bille prend instantanément sa vitesse de croisière. Le phénomène est inobservable.

5 Le système étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen est le projectile ponctuel M .

1. Les objets extérieurs agissant sur le système M sont :

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$ le poids du point matériel M ;

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow M} = \vec{F}_f = -KS\|\vec{v}\|\vec{v}$, la force de frottement due à l'air.

L'expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique est :

$$\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} + \vec{F}_{\text{air} \rightarrow M} = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_e)$$

$$m\vec{g} - KS\|\vec{v}\|\vec{v}(M/\mathcal{R}_e) = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_e)$$

La base adaptée au mouvement est la B.O.N.D. cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

Le texte précisant que le mouvement reste dans le plan (Oxz) ; à tout instant $\dot{y} = 0$ et $\ddot{y} = 0$, d'où :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}_e) = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ \ddot{z} \end{pmatrix}; \quad \vec{v}(M/\mathcal{R}_e) = m \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix};$$

$$\vec{P} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}; \quad \vec{F}_f = -KS\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

La projection du principe fondamental dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ donne :

$$m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - KS\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Elle permet d'exprimer les équations différentielles du mouvement :

• projection sur \vec{e}_x : $m\ddot{x} = -KS\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\dot{x}$;

• projection sur \vec{e}_z : $m\ddot{z} = -mg - KS\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\dot{z}$.

2. La lecture graphique donne :

	Mouvement sans frottement	Mouvement avec frottement
Portée	$x_p = 92 \text{ m}$	$x_p = 33,3 \text{ m}$
Altitude maximale ou flèche	$z_s = 23 \text{ m}$	$z_s = 18,2 \text{ m}$

3. La vitesse limite est atteinte lorsque

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}_e) = \vec{0} \Rightarrow m\vec{g} - KS\|\vec{v}\|\vec{v}(M/\mathcal{R}_e) = \vec{0}$$

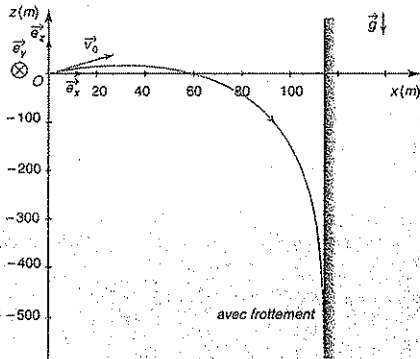
$$\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{m}{KSv_{\text{lim}}} \vec{g} \text{ est orienté suivant } (-\vec{z}_z)$$

$$\vec{v}_{\text{lim}} = -\sqrt{\frac{mg}{K_S}} \vec{e}_x$$

A.N. : $v_{\text{lim}} = 36,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

La composante horizontale de la vitesse finit ainsi par s'annuler, la trajectoire avec frottement admet une asymptote verticale.

Le schéma suivant permet d'évaluer sa position à $x = 114,5 \text{ m}$.



• Expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_v = m \vec{a}(M_{\mathcal{R}_0})$$

$$\vec{P} + \vec{R}_n + \vec{F}_s + \vec{F}_v = m \vec{a}(M_{\mathcal{R}_0})$$

• Projection dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_z)

$$m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_n \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -\beta v^2 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \frac{dv}{dt} \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où les équations :

• projection sur \vec{e}_x : $-(\alpha + \beta v^2) = \frac{dv}{dt}$ (1)

• projection sur \vec{e}_z : $R_n = mg$ (2)

1. Séparons les variables vitesse et temps de l'équation (1) pour pouvoir intégrer membre à membre :

$$\frac{dv}{\alpha + \beta v^2} = -dt \Rightarrow \frac{dv}{1 + \frac{\beta}{\alpha} v^2} = -\alpha dt$$

Pour nous ramener à une intégrale du type $\int \frac{du}{1+u^2}$, effectuons le changement de variable :

$$u = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} v \text{ avec } dv = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} du$$

$$\Rightarrow \int_{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} v_0}^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} v} \frac{du}{1+u^2} = -\sqrt{\beta \alpha} \int_0^t dt$$

La solution de cette intégrale est :

$$\arctan \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} v - \arctan \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} v_0 = -\sqrt{\beta \alpha} t$$

L'instant t correspondant à une vitesse v est donc :

$$t = \frac{1}{\sqrt{\beta \alpha}} \left(\arctan \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} v_0 - \arctan \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} v \right)$$

Le véhicule s'arrête pour $v = 0$:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\beta \alpha}} \arctan \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} v_0$$

A.N. : $\tau = 76,3 \text{ s}$.

2. Pour faire apparaître la position du mobile dans l'équation (1), décomposons :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \times \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

• Projection sur \vec{e}_x : $-(\alpha + \beta v^2) = v \frac{dv}{dx}$

Séparons les variables d'espace et de temps :

$$dx = -\frac{v dv}{\alpha + \beta v^2} = -\frac{1}{2\beta} \frac{d(\alpha + \beta v^2)}{\alpha + \beta v^2} = -\frac{1}{2\beta} \ln(\alpha + \beta v^2)$$

6 Le système est la voiture de masse m , le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le champ de pesanteur est uniforme.

• Bilan des forces appliquées au système

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids du point matériel M ;

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{support} \rightarrow M} = \vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$, la réaction du support ;

$$\vec{F}_{\text{air} \rightarrow M} = \vec{F}_v, \text{ l'action de l'air.}$$

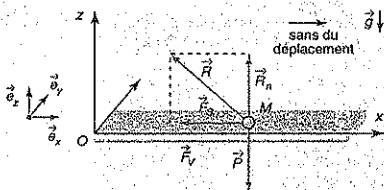
Remarque : la composante tangentielle de la réaction du support est la force de frottement :

$$\vec{R}_t = \vec{F}_s = -m\alpha \vec{e}_x$$

En remplaçant α par sa valeur :

$$\vec{R}_t = \vec{F}_s = -m\alpha \vec{e}_x = -fmg \vec{e}_x = -f\vec{R}_n \vec{e}_x$$

Ainsi $\|R_t\| = f \|R_n\|$, f est le coefficient de glissement.



Intégrons membre à membre :

$$\int_0^x dx = -\frac{1}{2\beta} \int_{v_0}^v d \ln(\alpha + \beta v^2).$$

$$x = -\frac{1}{2\beta} \ln\left(\frac{\alpha + \beta v^2}{\alpha + \beta v_0^2}\right)$$

La voiture s'arrête lorsque $v = 0$, elle a alors parcouru la longueur :

$$\ell = \frac{1}{2\beta} \ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} v_0^2\right)$$

A.N. : $\ell = 725$ m.

3. Lorsque le frottement solide n'est pas pris en compte : $\alpha = 0$ et les frottements de l'air sont prédominants. Dans ce cas, ℓ et τ tendent vers l'infini : il faudrait ainsi une longueur et une durée infinies pour arrêter la voiture. Ce résultat irréaliste s'explique par le fait qu'à faible vitesse, alors que la voiture est ralentie, ce sont au contraire les frottements solides qui deviennent prédominants.

Énergétique

1 Puissance et travail d'une force dans un référentiel

1.1. Puissance d'une force

Une force \vec{F} est appliquée à un point matériel M de masse m animé par rapport au référentiel \mathcal{R} du vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$. La **puissance instantanée** $\mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R})$ fournie par cette force est définie relativement à ce référentiel par :

$$\mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R})$$

L'unité de puissance dans le Système International d'unités est le watt (W).

1.2. Travail d'une force

1.2.1. Sur un déplacement élémentaire

Dans le référentiel \mathcal{R} , le **travail élémentaire** algébriquement fourni par la force \vec{F} au point matériel M pendant l'intervalle de temps infinitésimal dt est, par définition :

$$\delta\mathcal{T}(\vec{F}/\mathcal{R}) = \mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R})dt = \vec{F} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R})dt$$

L'unité de travail dans le Système International d'unités est le joule (J).

En considérant que $d\vec{OM} = \vec{v}(M/\mathcal{R})dt$, nous obtenons une autre formulation du travail élémentaire $\delta\mathcal{T}$ fourni par la force \vec{F} :

$$\delta\mathcal{T}(\vec{F}/\mathcal{R}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Remarque

- $\mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R}) > 0$:
 \vec{F} est motrice.
- $\mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R}) < 0$:
 \vec{F} est résistante.
- $\mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R}) = 0$:
 \vec{F} ne travaille pas.

Remarque

- $\delta\mathcal{T}(\vec{F}/\mathcal{R}) > 0$:
 \vec{F} est motrice.
- $\delta\mathcal{T}(\vec{F}/\mathcal{R}) < 0$:
 \vec{F} est résistante.
- $\delta\mathcal{T}(\vec{F}/\mathcal{R}) = 0$:
 \vec{F} ne travaille pas
(cas où \vec{F} est perpendiculaire à $\vec{v}(M/\mathcal{R})$).

Commentaires :

- $d\vec{OM}$ est le vecteur déplacement élémentaire du point M entre les instants t et $t + dt$, il est colinéaire au vecteur vitesse et tangent à la trajectoire en M .
- Il s'écrit indifféremment $d\vec{OM} = d\vec{\ell}(M) = d\vec{M}$ (O est l'origine du référentiel \mathcal{R}).
- $\delta\mathcal{T}$ est la circulation élémentaire de la force \vec{F} .

1.2.2. Sur un déplacement fini

Sur un déplacement fini allant d'un point A à l'instant t_1 au point B à l'instant t_2 , en suivant la courbe \mathcal{C} , le travail fourni par la force \vec{F} est :

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow B}(\vec{F}/\mathcal{R}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R}) dt = \int_{A(\mathcal{C})}^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}.$$

Cette circulation représente le travail, il dépend *a priori* du chemin suivi et donc du contour (\mathcal{C}) pour aller de A vers B .

2 Théorème de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique

2.1. Énergie cinétique d'un point matériel dans un référentiel

Par définition, l'énergie cinétique, mesurée dans un référentiel \mathcal{R} , du point matériel M de masse m animé par rapport à ce référentiel du vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ est une grandeur scalaire positive d'expression :

$$\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m v^2(M/\mathcal{R}).$$

L'unité d'énergie dans le Système International d'unités est le joule (J).

2.2. Théorème de la puissance cinétique

Dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , dérivons par rapport à t l'expression de l'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} m [\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)]^2$$

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = m \vec{v}(M/\mathcal{R}_g) \cdot \left(\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$$

La résultante de toutes les forces appliquées au point M est notée \vec{F} .

Comme le référentiel \mathcal{R}_g est galiléen, on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique au point M :

$$\vec{F} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) \Rightarrow \boxed{\left(\frac{d\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}_g)}$$

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du point matériel M est égale à la somme des puissances de toutes les forces agissant sur ce point.

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R}_g)$$

2.3. Théorème de l'énergie cinétique

Calculons la variation élémentaire de l'énergie cinétique du point M pendant la durée dt :

$$d\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g) = \mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R}_g)dt = \delta\mathcal{T}(\vec{F}/\mathcal{R}_g).$$

L'intégration de cette équation entre deux instants t_1 et t_2 donne :

$$\mathcal{E}_C(t_2/\mathcal{R}_g) - \mathcal{E}_C(t_1/\mathcal{R}_g) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R}_g)dt$$

Et entre deux positions :

$$\mathcal{E}_C(B/\mathcal{R}_g) - \mathcal{E}_C(A/\mathcal{R}_g) = \int_{A(\mathcal{E})}^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \mathcal{T}_{A \rightarrow B}(\vec{F}/\mathcal{R}_g)$$

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel M entre deux instants t_1 et t_2 ou deux positions A et B est égale à la somme des travaux appliqués à ce point entre ces deux instants ou ces deux positions.

3 Théorème de l'énergie mécanique

3.1. Énergie potentielle d'un point matériel - Forces conservatives

Lorsque le travail élémentaire fourni par la force \vec{F} s'exerçant sur le point M se met sous la forme de la différentielle totale d'une fonction scalaire \mathcal{E}_p , cette force est dite **conservative** :

$$\delta\mathcal{T}(\vec{F}/\mathcal{R}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -d\mathcal{E}_p(M).$$

$\mathcal{E}_p(M)$ est l'énergie potentielle du point M dans le champ de force \vec{F} ; on dit que le champ de force \vec{F} dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(M)$. Lorsque le champ de force est indépendant du temps, l'énergie potentielle n'est fonction que de la position du point M .

L'énergie potentielle est définie à une constante additive près, celle-ci est précisée arbitrairement en choisissant une position d'origine des énergies potentielles.

Calculons la variation de l'énergie potentielle du point M pour un déplacement fini de M allant de la position initiale A à la position finale B :

$$\Delta\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(B) - \mathcal{E}_p(A) = \int_A^B d\mathcal{E}_p(M) = -\mathcal{T}_{A \rightarrow B}(\vec{F}/\mathcal{R})$$

Remarque

Le travail d'une force conservative sur un contour fermé est nul :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{A \rightarrow A}(\vec{F}_{/R}) &= \mathcal{E}_P(A) - \mathcal{E}_P(A) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Commentaires :

Le travail fourni par une force conservative est indépendant de la trajectoire réellement parcourue par la particule M , il ne dépend que de la position initiale et de la position finale de M .

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{/R}) = -[\underbrace{\mathcal{E}_P(B)}_{\text{position finale}}] - \underbrace{\mathcal{E}_P(A)}_{\text{position initiale}}]$$

3.2. Énergie mécanique d'un point matériel dans un référentiel

La particule M est soumise dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g à deux types de forces :

- \vec{F}^c est la résultante des forces *conservatives* qui dérive d'une énergie potentielle ;
- \vec{F}^{nc} est la résultante des forces *non conservatives* ou *transformatives* qui ne dérive pas d'une énergie potentielle.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$d\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g) = \delta\mathcal{T}(\vec{F}_{/R_g}^c) + \delta\mathcal{T}(\vec{F}_{/R_g}^{nc}) = -d\mathcal{E}_P(M) + \delta\mathcal{T}(\vec{F}_{/R_g}^{nc})$$

$$d[\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g) + \mathcal{E}_P(M)] = \delta\mathcal{T}(\vec{F}_{/R_g}^{nc}) = \mathcal{P}(\vec{F}_{/R_g}^{nc}) dt.$$

En définissant l'énergie mécanique de la particule dans \mathcal{R}_g par :

$$\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g) = \mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g) + \mathcal{E}_P(M)$$

▶ L'énergie mécanique de la particule M est la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles des forces conservatives qui lui sont appliquées.

L'équation précédente s'écrit :

$$d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g) = \delta\mathcal{T}(\vec{F}_{/R_g}^{nc}) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/R_g} = \mathcal{P}(\vec{F}_{/R_g}^{nc})$$

Cette dernière équation constitue le **théorème de la puissance mécanique**.

3.2.1. Conservation de l'énergie mécanique

Dans le cas où la particule n'est soumise qu'à des forces conservatives ou à des forces non conservatives qui ne travaillent pas, l'énergie mécanique de ce point se conserve au cours du mouvement. Les forces conservatives conservent l'énergie sous forme mécanique, le système est dit *conservatif*.

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/R_g} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g) = \text{constante}$$

Le problème possède un invariant scalaire dont la valeur est fixée par les conditions initiales sur la position et la vitesse de la particule.

3.2.2. Transformation de l'énergie mécanique

Lorsque la particule M est soumise à des forces non conservatives, son énergie mécanique ne se conserve pas au cours du temps :

- Si M est soumis à des forces de frottement dissipatives qui s'opposent à son déplacement :

$$d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g) = \delta\mathcal{T}(\vec{F}_{/g}^{nc}) < 0,$$

il y a diminution de l'énergie mécanique au cours du temps, le système perd son énergie mécanique qui se transforme en énergie d'agitation thermique en s'accompagnant d'une élévation de température.

- Si M est soumis à des forces non conservatives et non dissipatives (la force musculaire motrice exercée par un intervenant extérieur par exemple) :

$$d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g) = \delta\mathcal{T}(\vec{F}_{/g}^{nc}) > 0,$$

il y a augmentation de l'énergie mécanique du système au cours du temps, le travail positif fourni par ces forces est transformé en énergie mécanique. Un intervenant extérieur peut ainsi entretenir les oscillations d'une balançoire en réinjectant dans le système l'énergie mécanique perdue par frottement.

Les forces non conservatives sont ainsi dites **transformatives** car c'est par leur intermédiaire que l'énergie mécanique se transforme progressivement.

4 Mouvement à un degré de liberté

Si la connaissance d'un unique paramètre spatial indépendant permet de connaître sans ambiguïté la position de la particule M dans l'espace, le mouvement est à un degré de liberté.

4.1. Position du problème – Mouvement unidirectionnel

Considérons une particule M de masse m en mouvement sur l'axe $(O; \vec{e}_x)$ d'un référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

Les énergies ne dépendent que du paramètre de position x :

$$\mathcal{E}_p(M) = \mathcal{E}_p(x); \quad \mathcal{E}_c(M/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2; \quad \mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(x).$$

Les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération sont suivant \vec{e}_x :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x; \quad \vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \dot{x}\vec{e}_x; \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \ddot{x}\vec{e}_x.$$

L'application du principe fondamental de la dynamique au point M soumis à la seule résultante \vec{F}^c des forces conservatives impose :

$$\vec{F}^c = m\ddot{x}\vec{e}_x = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z \Rightarrow F_y = F_z = 0$$

$$\vec{F}^c = F_x\vec{e}_x$$

Le vecteur déplacement élémentaire du point M selon la trajectoire est :

$$d\vec{OM} = dx \vec{e}_x.$$

Le travail élémentaire fourni par \vec{F}^c est :

$$\delta \mathcal{T}(\vec{F}_{\mathcal{R}_g}^c) = \vec{F}^c \cdot d\vec{OM} = F_x \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x = F_x dx = -d\mathcal{E}_p(x).$$

D'où l'identification :

$$F_x = -\mathcal{E}'_p(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx}.$$

Comme l'énergie potentielle ne dépend que de x , il en est de même pour F_x et :

$$\vec{F}^c = F_x(x) \vec{e}_x = -\frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx} \vec{e}_x$$

4.2. Intégrale première de l'énergie

Si la particule M est en évolution conservative dans \mathcal{R}_g , elle ne peut être soumise qu'à des forces conservatives et les forces non conservatives ne travaillent pas. Son énergie mécanique se conserve au cours du temps :

$$\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(x)}_{\text{instant } t} = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 + \mathcal{E}_p(x_0)}_{\text{instant } t = 0} = \mathcal{E}_m.$$

Le problème possède un invariant scalaire, l'énergie mécanique \mathcal{E}_m de la particule, et l'équation différentielle du premier ordre qui suit constitue l'intégrale première de l'énergie :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_m.$$

Il suffit de dériver cette équation une fois par rapport au temps pour accéder à l'équation du mouvement de la particule.

4.3. Équilibre d'un point matériel et condition de stabilité

Le système constitué par la particule M est conservatif et la particule est à l'équilibre en $x_{\text{éq}}$ dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

4.3.1. Recherche des positions d'équilibre

Son accélération et sa vitesse sont nulles à tout instant. Le principe fondamental de la statique permet d'écrire que la résultante des forces conservatives auquel il est soumis est nulle :

$$F_x(x_{\text{éq}}) = -\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\right)_{x_{\text{éq}}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\right)_{x_{\text{éq}}} = 0.$$

La position d'équilibre correspond à un extremum de la fonction énergie potentielle.

4.3.2. Étude de la stabilité de l'équilibre

• Une position d'équilibre est **stable** si, la particule étant abandonnée sans vitesse initiale au voisinage de cette position, la force \vec{F}^c a tendance à l'y ramener.

Attention

$F_x(x)$ est la composante (grandeur algébrique) du vecteur \vec{F}^c .

- Une position d'équilibre est **instable** si, la particule étant abandonnée sans vitesse initiale au voisinage de cette position, la force \vec{F}^c a tendance à l'en éloigner définitivement.
 - Une position d'équilibre est **indifférente** s'il n'apparaît aucune force lorsqu'on abandonne la particule sans vitesse initiale au voisinage de cette position.
- Le problème est à un degré de liberté et il est conservatif ; la résultante des forces conservatives agissant sur M est :

$$\vec{F}^c = F_x(x)\vec{e}_x.$$

Pour analyser la stabilité de l'équilibre, effectuons un développement limité à l'ordre 1 de la fonction $F_x(x)$ au voisinage de la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ en notant que $\varepsilon = x - x_{\text{éq}}$:

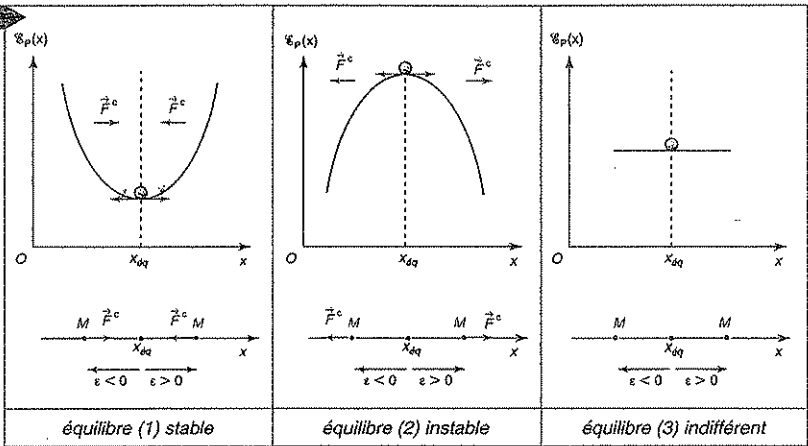
$$F_x(x) = \underbrace{F_x(x_{\text{éq}})}_{= 0 \text{ (équilibre)}} + \underbrace{(x - x_{\text{éq}})}_{\varepsilon} \left(\frac{dF_x}{dx} \right)_{x_{\text{éq}}} + \dots$$

$F_x(x_{\text{éq}}) = 0$, car $x_{\text{éq}}$ est position d'équilibre.

Ainsi :

$$F_x(x) = \varepsilon \left(\frac{dF_x}{dx} \right)_{x_{\text{éq}}}.$$

Observons la figure qui suit :



• **L'équilibre (1) est stable** : \vec{F}^c est une force de rappel.

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad \varepsilon > 0 \text{ et } F_x(x) < 0 &\Rightarrow \left(\frac{dF_x}{dx} \right)_{x_{\text{éq}}} = - \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2} \right)_{x_{\text{éq}}} < 0 \\ (ii) \quad \varepsilon < 0 \text{ et } F_x(x) > 0 &\Rightarrow \left(\frac{dF_x}{dx} \right)_{x_{\text{éq}}} = - \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2} \right)_{x_{\text{éq}}} < 0 \end{aligned} \right\} \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2} \right)_{x_{\text{éq}}} > 0.$$

Une position d'équilibre est stable si elle correspond à un minimum de la fonction énergie potentielle.

• **L'équilibre (2) est instable** : \vec{F}^c éloigne la particule de sa position d'équilibre.

$$\left. \begin{array}{l} (i) \quad \varepsilon > 0 \text{ et } F_x(x) > 0 \Rightarrow \left(\frac{dF_x}{dx}\right)_{x_{\text{eq}}} = -\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} > 0 \\ (ii) \quad \varepsilon < 0 \text{ et } F_x(x) < 0 \Rightarrow \left(\frac{dF_x}{dx}\right)_{x_{\text{eq}}} = -\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} > 0 \end{array} \right\} \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} < 0.$$

➤ Une position d'équilibre est instable si elle correspond à un maximum de la fonction énergie potentielle.

• **L'équilibre (3) est indifférent** :

$$\varepsilon = 0 \text{ et } F_x(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{dF_x}{dx}\right)_{x_{\text{eq}}} = -\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} = 0$$

$$\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} = 0.$$

Commentaires :

- Le repérage des positions d'équilibre stable ou instable est aisé :
 - Imaginez que vous placez une bille sur une bosse d'énergie potentielle. Si vous l'écartez de cette position, vers la droite ou vers la gauche, elle s'éloignera en roulant vers le bas : équilibre instable.
 - Placez maintenant la bille dans une cuvette d'énergie potentielle. Si vous l'écartez de cette position, elle reviendra inmanquablement à l'équilibre en effectuant des oscillations.
- L'orientation de la force \vec{F}^c qui apparaît lors du déplacement de la particule est obtenue simplement : elle est orientée dans le sens des énergies potentielles décroissantes.

	Analyse dynamique	Analyse énergétique
Equilibre	$F_x(x_{\text{eq}}) = 0$	$\left(\frac{dE_P}{dx}\right)_{x_{\text{eq}}} = 0$
Equilibre stable	$\left(\frac{dF_x}{dx}\right)_{x_{\text{eq}}} < 0$	$\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} > 0$
Equilibre instable	$\left(\frac{dF_x}{dx}\right)_{x_{\text{eq}}} > 0$	$\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} < 0$
Equilibre indifférent	$\left(\frac{dF_x}{dx}\right)_{x_{\text{eq}}} = 0$	$\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} = 0$

4.3.3. Petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable

Une situation très générale en physique : une particule matérielle éloignée très légèrement d'une position d'équilibre stable y revient en effectuant des petites oscillations. Supposons la particule soumise seulement à des forces conservatives, elle n'est donc pas soumise à des forces de frottement de sorte qu'elle est animée d'un mouvement oscillatoire perpétuel. Effectuons un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\mathcal{E}_P(x)$ au voisinage de la position d'équilibre x_{eq} en notant que $X = x - x_{\text{eq}}$:

$$\mathcal{E}_P(x) = \mathcal{E}_P(x_{\text{eq}}) + (x - x_{\text{eq}}) \left(\frac{d\mathcal{E}_P}{dx}\right)_{x_{\text{eq}}} + \frac{1}{2}(x - x_{\text{eq}})^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} = \mathcal{E}_P(x_{\text{eq}}) + \frac{1}{2}X^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}}.$$

Remarque

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_P}{dx}\right)_{x_{\text{eq}}} = 0$$

car x_{eq} est position d'équilibre.

En remarquant que $\dot{x} = \dot{X}$, l'énergie cinétique de la particule $M(m)$ dans \mathcal{R}_g est :

$$\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{X}^2.$$

Et son énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \mathcal{E}_P(x) = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \mathcal{E}_P(x_{\text{eq}}) + \frac{1}{2} X^2 \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P}{dx^2} \right)_{x_{\text{eq}}}.$$

Notons $k = \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P}{dx^2} \right)_{x_{\text{eq}}} = - \left(\frac{dF_x}{dx} \right)_{x_{\text{eq}}} > 0$, car la position d'équilibre est stable.

$$\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \mathcal{E}_P(x) = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \mathcal{E}_P(x_{\text{eq}}) + \frac{1}{2} k X^2.$$

Commentaire :

En introduisant k dans le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $F_x(x)$ au voisinage de la position d'équilibre x_{eq} :

$$F_x(x) = \underbrace{F_x(x_{\text{eq}})}_{=0 \text{ (équilibre)}} + (x - x_{\text{eq}}) \left(\frac{dF_x}{dx} \right)_{x_{\text{eq}}} \quad F_x(x) = X \left(\frac{dF_x}{dx} \right)_{x_{\text{eq}}} = -kX.$$

$F_x(x)$ est une force de rappel et X l'écart par rapport à la position d'équilibre stable de la particule : tout se passe comme si la particule était soumise à une force de rappel de raideur k . Le système étant conservatif, l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = 0 \Rightarrow m\dot{X} \left(\ddot{X} + \frac{k}{m} X \right) = 0.$$

Cette équation est vérifiée à tout instant et le système est en mouvement :

$$\ddot{X} + \frac{k}{m} X = 0$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P}{dx^2} \right)_{x_{\text{eq}}}$$

Cette technique de linéarisation de l'énergie potentielle valable pour les petites oscillations constitue l'approximation harmonique si $\left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P}{dx^2} \right)_{x_{\text{eq}}}$ est strictement positif.

4.4. Diagramme d'énergie potentielle : barrière de potentiel et puits de potentiel

La particule évolue dans un champ de forces conservatif. Son énergie mécanique est une constante du mouvement et l'on assiste à un transfert d'énergie cinétique en énergie potentielle et inversement.

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \mathcal{E}_P(x) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_P(x).$$

Sur la représentation graphique de l'énergie potentielle en fonction de x , les positions d'équilibre et leur stabilité sont facilement observables : x_1 et x_3 sont des positions d'équilibre instable car elles correspondent à un maximum de l'énergie potentielle, x_2 est une position d'équilibre stable car elle correspond à un minimum de l'énergie potentielle.

Plaçons une droite horizontale représentant l'énergie mécanique constante. L'évolution de l'énergie cinétique de la particule est aussi visualisée :

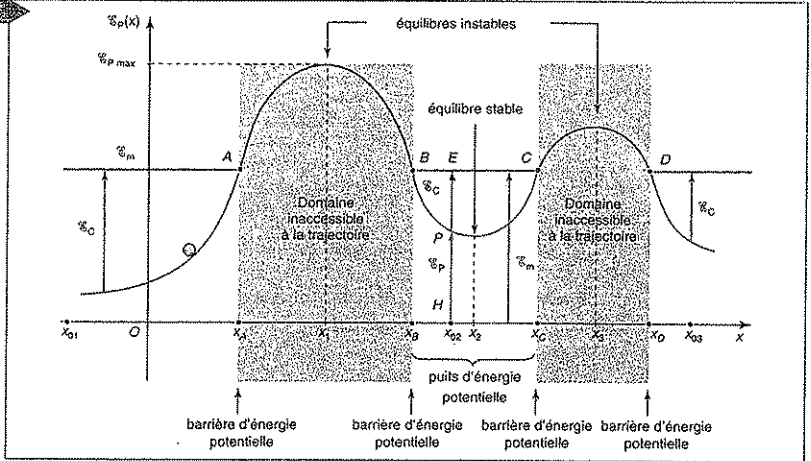
$$\mathcal{E}_m \equiv \overline{HE}; \quad \mathcal{E}_p(x) \equiv \overline{HP}; \quad \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(x) = \overline{HE} - \overline{HP} = \overline{PE}.$$

Cette énergie cinétique étant positive ou nulle, les domaines accessibles à la trajectoire de la particule correspondent à :

$$\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_p(x).$$

Lorsque l'égalité est réalisée, c'est-à-dire lorsque la courbe $\mathcal{E}_p(x)$ coupe la droite horizontale \mathcal{E}_m , la vitesse de la particule s'annule : ce sont les points A, B, C et D correspondants aux abscisses x_A, x_B, x_C et x_D .

Fig.



Remarque

Tous les cas de figure sont visualisables par l'image d'une bille roulant de long de la courbe d'énergie potentielle. Par exemple : si vous la faites rouler à partir de x_{01} dans le sens des $x > 0$ avec une vitesse initiale telle que vous lui transmettez une énergie mécanique $\mathcal{E}_m > \mathcal{E}_{p \max}$, elle franchira les deux bosses d'énergie potentielle pour aller à $x \rightarrow +\infty$. Toutes les valeurs de x sont alors permises.

Certains domaines sont inaccessibles à la particule car ils correspondent à une énergie cinétique négative. Le domaine de variation de x est :

$$]-\infty, x_A[\cup]x_B, x_C[\cup]x_D, +\infty[.$$

Les intervalles $]x_A, x_B[$ et $]x_C, x_D[$ correspondent à des valeurs interdites pour la variable x , ils sont limités par des *barrières d'énergie potentielle*.

La trajectoire de la particule en mouvement dépend des *conditions initiales*.

- À l'instant $t = 0$, la particule est en x_{01} dans le domaine $]-\infty, x_A[$, et sa vitesse initiale est $\dot{x}_{01} > 0$. L'énergie mécanique \mathcal{E}_m est fixée par (x_{01}, \dot{x}_{01}) . La particule se déplace vers la droite et sa vitesse décroît progressivement pour s'annuler en A . Elle ne peut franchir la barrière d'énergie potentielle et repart vers la gauche en direction de l'infini. Elle ne revient plus en A : c'est un *état de diffusion*.

- À l'instant $t = 0$, la particule est en x_{02} dans le domaine $]x_B, x_C[$ et sa vitesse initiale est \dot{x}_{02} . L'énergie mécanique \mathcal{E}_m est inchangée. La particule ne peut pas franchir les deux barrières d'énergie potentielle. Elle est piégée dans l'intervalle $]x_B, x_C[$ entourant la position d'équilibre stable x_2 . Cet intervalle constitue une *cuvette (ou un puits) d'énergie potentielle* : c'est un *état lié* de la particule. Le mouvement de la particule est borné et périodique entre x_B et x_C .

- À l'instant $t = 0$, la particule est en x_{03} dans le domaine $]x_D, +\infty[$ et sa vitesse initiale est $\dot{x}_{03} > 0$. L'énergie mécanique \mathcal{E}_m est inchangée. La particule va directement à l'infini vers la droite sans rencontrer de barrière de potentielle : c'est un *état de diffusion*.

Avant la colle

Tester ses connaissances

> Corrigés p. 98

- Définir la puissance instantanée $\mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R})$ fournie par la force \vec{F} dans le référentiel \mathcal{R} .
- Déterminer le travail élémentaire fourni par la force \vec{F} au point matériel M pendant l'intervalle de temps infinitésimal dt .
- Deux machines M_1 et M_2 fournissent le même travail et pourtant vous préférerez utiliser la machine M_1 qui est plus puissante que la machine M_2 . Pourquoi ?
- Le travail fourni par une force \vec{F} dépend-il du chemin suivi pour aller de la position initiale à la position finale ?
- Le travail fourni par une force \vec{F} sur un déplacement fini allant du point A au point B est :

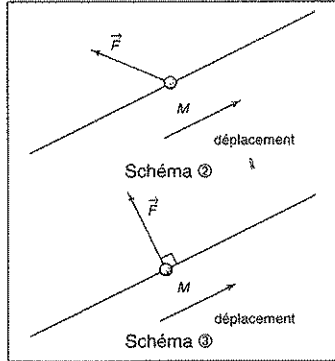
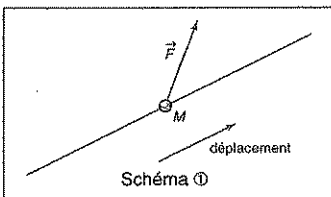
$$\Delta\mathcal{W}(\vec{F}_{/R}) = \int_{A(0)}^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

- a. Écriture correcte.
 b. Écriture incorrecte.

- Le vecteur déplacement élémentaire exprimé en coordonnées cylindro-polaires dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ s'écrit :

- a. $d\vec{OM} = dr\vec{e}_r + d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$;
 b. $d\vec{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$;
 c. $d\vec{OM} = \theta dr\vec{e}_r + d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$.

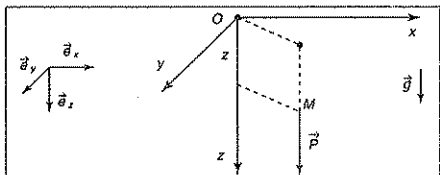
- Le sens du déplacement de M est précisé sur le schéma.



Associer deux à deux un schéma et une proposition :

- a. La force \vec{F} est résistive.
 b. La force \vec{F} ne travaille pas.
 c. La force \vec{F} est motrice.

- Une force \vec{F}^c est conservative. Quel est le lien entre le travail élémentaire $\delta\mathcal{W}(\vec{F}_{/R})$ fourni par cette force et l'énergie potentielle \mathcal{E}_p dont elle dérive ?
- Dans quelle situation pouvons nous écrire la conservation de l'énergie mécanique du système ?
- Un point matériel M de masse m est à la profondeur z . L'axe $(O; \vec{z}_z)$ est orienté selon la verticale descendante. L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p^{\text{pes}}$ est fixée à $z = 0$.



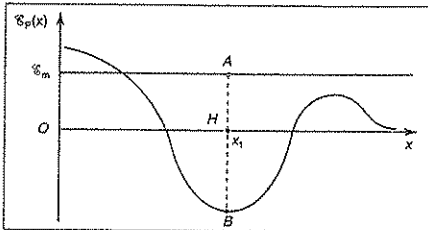
- a. $\mathcal{E}_p^{\text{pes}} = -mgz$; b. $\mathcal{E}_p^{\text{pes}} = mgz$;
 c. L'énergie potentielle de pesanteur augmente avec l'altitude.

11 Le point matériel M d'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$ est à l'équilibre stable en $x = x_{\text{eq}}$ si :

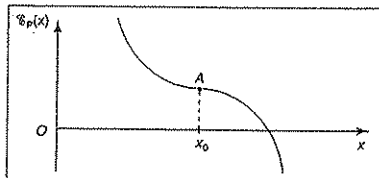
- a. $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} < 0$; b. $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} > 0$;
 c. $\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\right)_{x_{\text{eq}}} < 0$; d. $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x_{\text{eq}}} = 0$.

12 Sur la représentation graphique de l'énergie potentielle en fonction de x , les énergies potentielle, mécanique et cinétique sont visualisées en x_1 , par les longueurs algébriques :

- a. $\mathcal{E}_m = \overline{HA}$; $\mathcal{E}_p = \overline{AB}$; $\mathcal{E}_C = \overline{HB}$.
 b. $\mathcal{E}_m = \overline{HA}$; $\mathcal{E}_p = \overline{HB}$; $\mathcal{E}_C = \overline{BA}$.
 c. $\mathcal{E}_m = \overline{AH}$; $\mathcal{E}_p = \overline{HB}$; $\mathcal{E}_C = \overline{BA}$.
 d. $\mathcal{E}_m = \overline{BA}$; $\mathcal{E}_p = \overline{BH}$; $\mathcal{E}_C = \overline{HA}$.



13 Sur la représentation graphique de l'énergie potentielle :



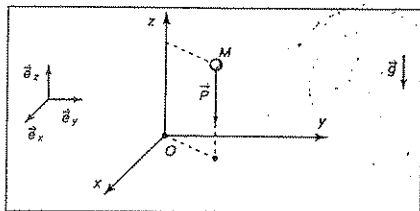
- a. x_0 est une position d'équilibre stable ;
 b. x_0 est une position d'équilibre instable ;
 c. x_0 est une position d'équilibre indifférent ;
 d. x_0 n'est pas une position d'équilibre.

Savoir appliquer le cours

> Corrigés p. 99

Le référentiel terrestre \mathcal{R}_g est supposé galiléen et le champ de pesanteur uniforme.

1 Un point matériel M de masse m est à l'altitude z . L'axe $(O; \vec{z}_2)$ est orienté selon la verticale ascendante.



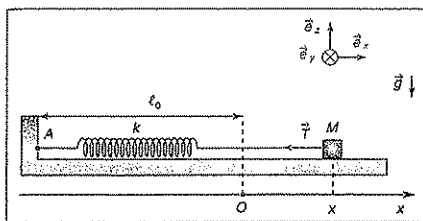
- a. Déterminer l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p^{\text{pes}}$ dont dérive le poids \vec{P} du point M .
b. Un opérateur extérieur déplace le point M du point A d'altitude nulle au point B d'altitude

z . Relier l'énergie potentielle de pesanteur au travail $\mathcal{T}_{A \rightarrow B}^{\text{op}}$ fourni par l'opérateur pour amener la particule M de la position initiale A à la position finale B . Quelle est l'interprétation physique de l'énergie potentielle ?

c. La particule M de masse m est lâchée d'une altitude H sans vitesse initiale. Quelle énergie est-elle susceptible de libérer à son arrivée au sol ?

Donnée : $g = \|\vec{g}\| = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $m = 100 \text{ g}$ et $H = 1 \text{ m}$.

2 Un point matériel M de masse m est lié à un ressort horizontal, l'autre extrémité du ressort étant fixe en A . Dans son domaine d'élasticité, le ressort à vide est caractérisé par une constante de raideur k et une longueur ℓ_0 .



Le point M glisse sans frottement le long de l'axe $(O; \vec{e}_x)$ à partir de sa position d'équilibre située en O . Il est repéré sur cet axe par son abscisse $x = \overline{OM}$ (grandeur algébrique).

a. Exprimer la force de rappel élastique \vec{T} exercée par le ressort sur le point M .

b. Déterminer l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_p^{\text{élast}}$ dont dérive cette force pour un allongement x du ressort à partir de sa longueur à vide l_0 .

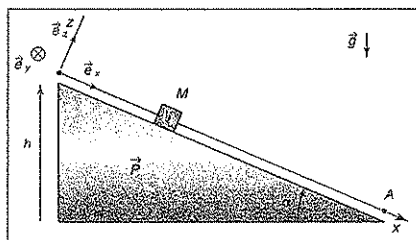
c. Par une analyse énergétique, établir l'équation différentielle du mouvement de M . En déduire la pulsation propre ω_0 des oscillations.

3 Le mouvement du point M est à un degré de liberté. La position de M est repérée uniquement à l'aide du paramètre θ des coordon-

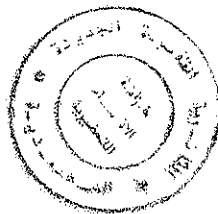
nées cylindro-polaires. L'énergie potentielle de M ne dépend que des coordonnées de position de ce point, ici elle ne dépend que de θ . Montrer que la force \vec{F}^c qui dérive de cette énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\theta)$ est :

$$\vec{F}^c = F_\theta(\theta)\vec{e}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{d\mathcal{E}_p(\theta)}{d\theta} \vec{e}_\theta.$$

4 Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur la ligne de plus grande pente $(O; \vec{e}_x)$ d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.



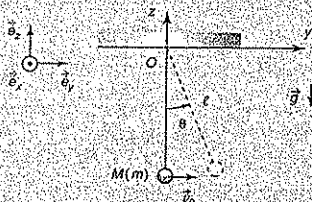
Établir, par une étude énergétique, l'équation du mouvement de M .



1 – Mouvements d'un pendule simple

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Un pendule simple est constitué d'un objet ponctuel M de masse m , suspendu à un fil sans raideur et sans masse, de longueur ℓ . Le champ de pesanteur terrestre est supposé uniforme et la résistance de l'air négligeable. L'extrémité O du fil est fixe. À l'instant initial un expérimentateur lance M fil tendu à partir de la position d'équilibre stable avec une vitesse initiale horizontale v_0 .



- 1 **Étude cinématique** : établir les expressions de $\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$ et $\vec{a}(M/\mathcal{R}_g)$ en précisant la base de projection adaptée au problème.
- 2 Par une **étude énergétique**, établir l'équation différentielle du mouvement de M étudié dans le plan de la figure.
- 3 **Étude dynamique** : établir l'expression de l'intensité T de la tension exercée par le fil sur M en fonction de m , g , ℓ , θ et v_0 .
- 4 Le fil reste tendu. Quelle valeur minimale v_{02} doit-on donner à v_0 pour que le mouvement du pendule soit révolatif ? M tourne, dans ce cas, indéfiniment en décrivant des cercles de centre O et de rayon ℓ dans le plan (Oyz) .
- 5 Le fil reste tendu et $v_0 < v_{02}$. Pour quelle valeur θ_0 de l'angle θ la vitesse de M s'annule-t-elle ? Quelle est alors l'expression de la tension du fil $T(\theta = \theta_0)$? En déduire la valeur maximale v_{01} que l'on doit donner à v_0 pour que le mouvement du pendule soit oscillatoire ?
- 6 Une tige est fixée perpendiculairement au plan de la figure en un point C de l'axe (Oz) distant de d de l'origine O ($d < \ell$). Le fil tendu, lâché sans vitesse initiale d'une position faisant un angle α avec la verticale, heurte la tige lorsqu'il passe par sa position d'équilibre. Montrer que la vitesse de la particule M se conserve au cours du choc.
- 7 Le point M part de l'horizontale : $\alpha(t=0) = -\frac{\pi}{2}$. Pourquoi l'angle α est-il compté négativement ? Quelle est la condition sur le rapport $\frac{\ell}{d}$ qui permet au fil de s'enrouler autour de la tige en restant tendu. Calculer la valeur de T juste avant et juste après le choc. Commenter le résultat.

résolution méthodique

Méthode générale

• **Position du problème** : si le système a un seul degré de liberté et si le bilan des forces appliquées au système fait apparaître des forces conservatives dérivant d'une énergie potentielle et des forces non conservatives de puissance nulle, alors la conservation de l'énergie mécanique suffit pour connaître le mouvement.

Nous allons compléter le plan d'étude systématique d'un problème de mécanique par une analyse énergétique.

• **Première analyse** : avant de mettre le problème en équation, il est nécessaire de le présenter et d'en effectuer une première analyse qualitative et intuitive.

[1] **Définir le système étudié**

[2] **Choisir le référentiel d'étude galiléen**

[3] **Effectuer le bilan des forces appliquées au système. Le système est-il conservatif ?**

⇒ Recenser pour cela les objets extérieurs agissant sur le système et distinguer :

(i) les forces à distance

(ii) les forces de contact

⇒ Représenter ces forces sur un schéma clair

⇒ Compléter ce bilan en observant :

(i) les forces conservatives → exprimer les énergies potentielles associées

(ii) les forces non conservatives → ces forces sont-elles de puissance nulle ?

[4] **Préciser le nombre de degrés de liberté du problème**

Déterminer le nombre de paramètres nécessaires pour connaître la position de la particule M dans l'espace.

[5] **Déterminer les équations du mouvement**

(i) Si le système est à un degré de liberté et conservatif, l'écriture de la conservation de l'énergie mécanique (intégrale première de l'énergie) suffit :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{cte}$$

⇒ L'équation du mouvement est obtenue en dérivant \mathcal{E}_m par rapport à t :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$$

(ii) Pour accéder aux expressions des forces appliquées au système, il est nécessaire d'exploiter le caractère vectoriel du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel d'étude galiléen. Projeter alors les vecteurs dans la base orthonormée directe adaptée à la trajectoire.

[6] **Résolution des équations différentielles**

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions initiales sur la vitesse et la position du point M appliquées aux solutions générales de ces équations.

[7] **Interprétation physique des résultats obtenus**

Dégager le sens physique du résultat obtenu et en vérifier la pertinence.

- 1 Le système est le point M , son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le fil étant tendu dans sa position initiale, le point M amorce un mouvement circulaire de centre O et de rayon ℓ . Le mouvement a lieu dans un plan. La base de projection adaptée au problème est la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, sachant que $r = \ell$, $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$, les vecteurs vitesse et accélération sont :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell\dot{\theta} \end{pmatrix} \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell\dot{\theta}^2 \\ \ell\ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = -\ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

La vitesse est orthoradiale.

2

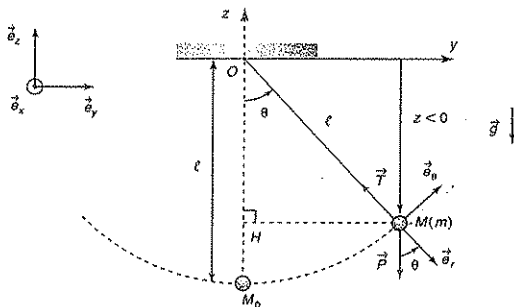
Les deux forces à prendre en compte sont le poids de la particule (force conservative) et la tension du fil qui ne travaille pas, tant que le fil reste tendu. Le problème étant à un degré de liberté, l'étude énergétique suffit pour établir l'équation du mouvement de M .

• Bilan des forces appliquées au point M

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = m\vec{g}$ le poids de M : force conservative

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{fil} \rightarrow M} = \vec{T}$ la tension du fil : ne travaille pas

⇒ Le système est conservatif, il conserve son énergie mécanique au cours du temps.



• Calcul de la puissance de la tension \vec{T} du fil :

$$P(\vec{T}/\mathcal{R}_g) = \vec{T} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = -T\vec{e}_r \cdot \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta = 0 \quad (\text{avec } T = \|\vec{T}\|).$$

Lorsque le fil est tendu, sa tension \vec{T} est, à tout instant, perpendiculaire à la trajectoire de M et donc à son vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$. La tension ne travaille pas, sa puissance est nulle.

• Calcul de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$\delta \mathcal{F}(\vec{P}_{/M_i}) = \vec{P} \cdot d\vec{OM} = -mg\vec{e}_z \cdot (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) = -mgdz = -d(mgz) = -d\mathcal{E}_P^{\text{pes}}(z)$$

$$\mathcal{E}_P^{\text{pes}}(z) = mgz + A.$$

En choisissant la cote $z = -\ell$ comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$\mathcal{E}_P^{\text{pes}}(z = -\ell) = -mg\ell + A = 0 \Rightarrow A = mg\ell.$$

$$z = \overline{OH} = -\ell \cos\theta \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_P^{\text{pes}}(\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta)}$$

La cote du point M est négative car le vecteur unitaire \vec{e}_z est orienté selon la verticale ascendante et le point M est en dessous de l'origine O .

• Détermination du nombre de degrés de liberté

(i) le mouvement s'effectue dans un plan et la trajectoire est un arc de cercle, les coordonnées adaptées au problème sont les coordonnées polaires r et θ

(ii) or $r = \ell$ (rayon de la trajectoire circulaire) tant que le fil est tendu.

Le problème est à un degré de liberté : le paramètre permettant de préciser la position de M est θ .

• Intégrale première de l'énergie

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C(M_{/M_i}) + \mathcal{E}_P^{\text{pes}}(M) = \frac{1}{2}m v^2(M_{/M_i}) + \mathcal{E}_P^{\text{pes}}(M) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos\theta) = \text{cte}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = m\ell^2\dot{\theta}(\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta) = 0$$

En décomposant la fonction $u = \dot{\theta}$:

$$\frac{d(u^2)}{dt} = \frac{d(u^2)}{du} \times \frac{du}{dt} = 2u \frac{du}{dt} = \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = 2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

En décomposant la fonction $\cos\theta$:

$$\frac{d\cos\theta}{dt} = \frac{d\cos\theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta\dot{\theta}$$

Le système est en mouvement et $\dot{\theta} \neq 0$, d'où l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0.$$

L'énergie mécanique de M est une constante du mouvement. Intégrale première de l'énergie, la nullité de sa dérivée par rapport au temps permet d'obtenir simplement l'équation du mouvement de M .

3

La tension du fil ne travaillant pas, elle n'apparaît pas dans le bilan énergétique. Pour accéder à \vec{T} , il faut écrire le principe fondamental de la dynamique.

- Expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_0)$$

- Projection dans la base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

- le poids \vec{P} :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \end{pmatrix} \quad (g = \|\vec{g}\| > 0)$$

- la tension \vec{T} :

$$\vec{T} = -T \vec{e}_r = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} \quad (T = \|\vec{T}\| > 0).$$

La projection du principe fondamental dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ donne :

$$\begin{pmatrix} m g \cos \theta \\ -m g \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -\ell \dot{\theta}^2 \\ \ell \ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

elle conduit à un système de deux équations :

- projection sur \vec{e}_r : $mg \cos \theta - T = -m\ell \dot{\theta}^2$ (1)

- projection sur \vec{e}_θ : $-mg \sin \theta = m\ell \ddot{\theta}$ (2)

L'équation (2) est l'équation du mouvement de M déjà établie de manière énergétique.

L'équation (1) permet de déterminer T :

Le terme $\ell \dot{\theta}^2$ peut se décomposer de la façon suivante : $\ell \dot{\theta}^2 = \frac{1}{\ell} (\ell \dot{\theta})^2 = \frac{v^2}{\ell}$.

$$\Rightarrow T = m \left(g \cos \theta + \frac{v^2}{\ell} \right).$$

Or la conservation de l'énergie mécanique permet d'établir l'expression de v^2 :

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + \mathcal{E}_p^{\text{pes}}(\theta)}_{\text{instant } t} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2 + \mathcal{E}_p(\theta = 0)}_{\text{instant } t = 0} = \mathcal{E}_m$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + mg\ell(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m v_0^2 = \mathcal{E}_m$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g\ell(1 - \cos \theta)$$

En remplaçant v^2 par cette valeur dans l'expression de T :

$$T = mg \left[\frac{v_0^2}{\ell g} - (2 - 3 \cos \theta) \right]$$

Cette expression a été obtenue en faisant l'hypothèse du fil tendu tout au long du mouvement de M .



Pour que le mouvement soit révolutif, il faut que le fil reste tendu lorsque θ varie de 0 à 2π . T doit donc rester positif tout au long de ce mouvement : sa valeur minimale est positive.

$$T = mg \left[\frac{v_0^2}{\ell g} - (2 - 3 \cos \theta) \right] \Rightarrow \frac{dT}{d\theta} = -3mg \sin \theta \leq 0 \quad \text{si } \theta \in [0, \pi]$$

T est ainsi une fonction strictement décroissante de θ lorsque θ varie de 0 à π , puis T croît avec θ lorsque θ varie π à 2π :

Si le pendule fait un tour complet : $T_{\min} = T(\theta = \pi) = mg\left(\frac{v_0^2}{\ell g} - 5\right) \geq 0$.

Le mouvement est révolutif et le pendule effectue un tour complet dès que $v_0 > \sqrt{5g\ell}$

\Rightarrow

$$v_{02} = \sqrt{5g\ell}$$

5

Lorsque $v_0 < v_{02}$, la tension T va s'annuler avant d'atteindre le sommet de la trajectoire : $\theta = \pi$. Si la vitesse de M s'annule lorsque $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le pendule va osciller mais si la vitesse de M s'annule lorsque $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, le point M va « décrocher » de sa trajectoire. Le problème change alors de nature, il s'agit d'une chute libre et il faut écrire de nouvelles équations.

La vitesse s'annule en $\theta = \theta_0$: $v^2 = v_0^2 - 2g\ell(1 - \cos\theta_0) = 0$

$$\cos\theta_0 = 1 - \frac{v_0^2}{2\ell g}$$

L'expression de la tension du fil $T(\theta = \theta_0)$ est alors :

$$T(\theta = \theta_0) = mg\left[\frac{v_0^2}{\ell g} - (2 - 3\cos\theta_0)\right] = mg[2(1 - \cos\theta_0) - (2 - 3\cos\theta_0)]$$

$$T(\theta = \theta_0) = mg\cos\theta_0 = mg\left(1 - \frac{v_0^2}{2\ell g}\right)$$

Le domaine de variation de θ est $[0, \pi[$ et le point M abandonne la trajectoire circulaire en θ_0 :

$$T(\theta = \theta_0) = mg\cos\theta_0 = mg\left(1 - \frac{v_0^2}{2\ell g}\right) < 0 \Rightarrow v_0 > \sqrt{2g\ell}$$

$$v_{01} = \sqrt{2g\ell}$$

Le décrochage de M a lieu lorsque $\cos\theta_0 < 0$: $\pi > \theta_0 > \frac{\pi}{2}$.

La condition de décrochage sur v_0 est : $\sqrt{2g\ell} < v_0 < \sqrt{5g\ell}$.

Tableau récapitulatif

v_0	$\sqrt{2g\ell}$	$\sqrt{5g\ell}$
	oscillations	décrochage
		révolution

6

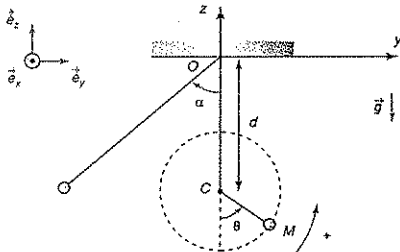
C'est la variation de l'énergie cinétique de M qui nous intéresse. Elle apparaît évidemment en faisant intervenir le théorème de l'énergie cinétique.

Écrivons le théorème de l'énergie cinétique pour un déplacement élémentaire de M alors qu'il passe à la verticale :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_z) &= \delta\mathcal{T}(\vec{F}/\mathcal{R}_z) \\ &= \delta\mathcal{T}(\vec{T}/\mathcal{R}_z) + \delta T(\vec{P}/\mathcal{R}_z) \\ &= \vec{P} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}_z) dt = 0, \end{aligned}$$

car la tension \vec{T} ne travaille pas et le poids de M est normal au déplacement de ce point à la verticale.

Il y a conservation de l'énergie cinétique du point M au cours du choc à la verticale.



7

Cette question est une application directe de la question 5. Rappelons qu'un pendule de longueur ℓ fixé en O effectue un mouvement révolutif si la vitesse de M au passage à la verticale est telle que :

$$v_0^2 > 5g\ell.$$

L'angle α est compté négativement car il est orienté dans le sens contraire du sens positif choisi.

Calculons la vitesse de la particule M alors qu'elle passe par sa position d'équilibre stable.

Écrivons pour cela la conservation de l'énergie mécanique de M :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_p^{\text{pes}}(\theta) = 0 + mgl = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0.$$

$\alpha = -\frac{\pi}{2}$ $\alpha = 0$

La vitesse de M à son arrivée à la verticale (juste avant le choc) est telle que :

$$v_0^2 = 2g\ell.$$

La particule garde cette vitesse au cours du choc par conservation de son énergie cinétique.

Pour la suite du mouvement, le pendule a une longueur $(\ell - d)$ et tourne autour de C .

Son mouvement est révolutif si :

$$v_0^2 > 5g(\ell - d).$$

Or juste après le choc : $v_0^2 = 2g\ell \Rightarrow 2g\ell > 5g(\ell - d)$

$$d > \frac{3}{5}\ell$$

Dans la question 3. nous avons vu que la tension de fil s'écrivait en fonction de la vitesse de M par :

$$T = m \left(g \cos \theta + \frac{1}{\ell} v^2 \right).$$

Juste avant le choc : $\theta = 0^-$ et $(v^-)^2 = v_0^2 = 2g\ell$.

$$T_1 = 3mg$$

Juste après le choc : $\theta = 0^+$, $(v^+)^2 = v_0^2 = 2g\ell$, mais il faut remplacer ℓ par $\ell - d$,

$$T_2 = m \left(g + \frac{1}{\ell - d} v_0^2 \right) = mg \left(1 + \frac{2\ell}{\ell - d} \right),$$

or $d > \frac{3}{5}\ell \Rightarrow \ell - d < \frac{2}{5}\ell$ et $\frac{2\ell}{\ell - d} > 5$.

$$T_2 > 6mg$$

Alors que la longueur du fil passe brutalement de ℓ à $\ell - d$, la particule M conserve sa vitesse et la tension du fil subit une discontinuité au moins égale à $3mg$.

en conclusion

L'étude énergétique de ce système conservatif à un degré de liberté est intéressante pour obtenir de façon élégante l'équation du mouvement de la particule M . Sa résolution nous est accessible si l'équation différentielle obtenue est linéaire. Pour étudier les différents mouvements possibles de M , il est nécessaire de connaître l'expression de la tension T du fil en fonction de θ . Cette force n'a pas d'expression propre et n'apparaît pas dans le bilan énergétique car elle ne travaille pas, il est donc nécessaire de compléter notre étude par le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M dans le référentiel d'étude galiléen.

2 – L'inversion de la molécule d'ammoniac

Dans un modèle simplifié de la molécule d'ammoniac NH_3 , les trois atomes d'hydrogène H forment la base d'une pyramide dont l'azote N de masse m occupe le sommet.

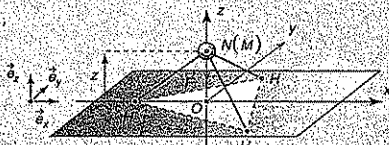
• Les trois atomes d'hydrogène sont fixes dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et définissent le plan (Oxy) .

• L'atome d'azote est en mouvement suivant l'axe $(O; \vec{e}_z)$ perpendiculaire au plan des atomes d'hydrogène. Il peut passer de part et d'autre de ce plan et sa cote est notée z .

Le champ de pesanteur est négligeable pour décrire cette structure atomique et la résultante des forces électromagnétiques qui s'exercent sur l'atome d'azote N supposé ponctuel est :

$$\vec{F} = -\alpha z(z^2 - a^2)\vec{e}_z$$

Les constantes α et a sont positives.



1 L'origine de l'énergie potentielle est choisie en $z = 0$. De quelle énergie potentielle \mathcal{E}_p la force \vec{F} dérive-t-elle ? Représenter graphiquement \mathcal{E}_p lorsque z varie de $-\infty$ à $+\infty$.

2 Définir la condition générale de stabilité d'un équilibre et déterminer les positions d'équilibres stables et instables de l'atome d'azote.

3 Une énergie $\Delta\mathcal{E} \leq \frac{1}{4}\alpha a^4$ est cédée au système au moment où l'atome d'azote est dans une position d'équilibre stable. Montrer graphiquement que l'atome d'azote va osciller entre deux valeurs limites z_1 et z_2 . Déterminer la fréquence des petites oscillations.

4 Que se passe-t-il si l'énergie cédée $\Delta\mathcal{E}$ est supérieure à $\frac{1}{4}\alpha a^4$?

résolution méthodique

Méthode générale

Vous êtes invités à reprendre au préalable le plan d'étude systématique présenté en introduction de la résolution de l'exercice précédent.

1

La force \vec{F} est conservative. La position de l'atome d'azote est définie par la donnée du seul paramètre z : le problème est à un degré de liberté. Ces conditions réalisées permettent une résolution énergétique.

Le système adopté est l'atome d'azote N. Le référentiel d'étude est \mathcal{R}_g , c'est un référentiel galiléen.

La seule force appliquée au point N est : $\vec{F} = -\alpha z(z^2 - a^2)\vec{e}_z$.

Pour démontrer son caractère conservatif, montrons que le travail élémentaire est la différentielle totale d'une fonction ($-\mathcal{E}_p$) : $\delta\mathcal{T}(\vec{F})_{\mathcal{R}_g} = -d\mathcal{E}_p$

$$\delta\mathcal{T}(\vec{F})_{\mathcal{R}_g} = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -\alpha z(z^2 - a^2)\vec{e}_z \cdot dz\vec{e}_z = -\alpha z(z^2 - a^2)dz = -d\mathcal{E}_p.$$

En intégrant : $\mathcal{E}_p(z) - \mathcal{E}_p(0) = \alpha \int_0^z z^3 dz - \alpha a^2 \int_0^z z dz = \frac{1}{4}\alpha z^4 - \frac{1}{2}\alpha a^2 z^2$.

En choisissant pour origine de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p(0) = 0$, il vient :

$$\mathcal{E}_p(z) = \frac{1}{4}\alpha z^2(z^2 - 2a^2)$$

Effectuons une étude succincte de la fonction $\mathcal{E}_p(z)$.

• $\mathcal{E}_p(z) = \mathcal{E}_p(-z)$: fonction paire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oz).

• Cette énergie peut aussi s'écrire : $\mathcal{E}_p(z) = \frac{1}{4}\alpha z^2(z + \sqrt{2}a)(z - \sqrt{2}a)$.

L'énergie potentielle s'annule en $z = 0$, $z = -\sqrt{2}a$ et $z = \sqrt{2}a$.

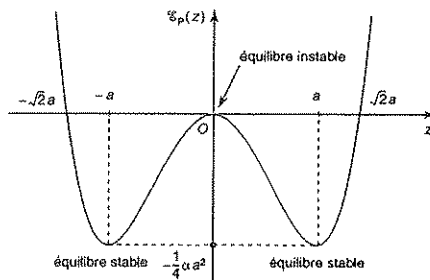
• Détermination des positions correspondant à une énergie potentielle extrême :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dz} = \alpha z(z^2 - a^2) = \alpha z(z-a)(z+a) = 0 \Rightarrow z = 0, z = a \text{ et } z = -a.$$

• Tableau de variation pour $z \in [0 ; +\infty[$.

z	0	a	$+\infty$
$\frac{d\mathcal{E}_p}{dz}$	0	-	+
$\mathcal{E}_p(z)$	0	$\frac{1}{4}\alpha a^2$	$+\infty$

• Diagramme d'énergie potentielle



» 2

L'observation du diagramme d'énergie potentielle permet de localiser les positions d'équilibres stables (minimum de l'énergie potentielle) et instables (maximum de l'énergie potentielle) de l'atome d'azote.

L'énergie potentielle est extrémale en $z = 0$, $z = a$ et $z = -a$.

Ces positions sont les positions d'équilibre de l'atome d'azote.

L'étude du signe de $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dz^2}\right)_{z_{\text{éq}}}$ permet d'en considérer la stabilité :

$$\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dz^2} = \alpha(3z^2 - a^2).$$

$$\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dz^2}\right)_{z_{\text{éq}}=0} = -\alpha a^2 < 0 \Rightarrow z_{\text{éq}} = 0 \text{ est position d'équilibre instable.}$$

$$\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dz^2}\right)_{z_{\text{éq}}=a} = \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dz^2}\right)_{z_{\text{éq}}=-a} = 2\alpha a^2 > 0 \Rightarrow z_{\text{éq}} = -a \text{ et } z_{\text{éq}} = a \text{ sont positions d'équilibre stable.}$$

• Autre solution

Une analyse dynamique peut aussi être faite : $F_z = -\alpha z(z^2 - a^2) = 0$ lorsque $z = z_{\text{éq}}$.

Les positions $z = 0$, $z = a$ et $z = -a$ sont les positions d'équilibre de l'atome d'azote.

L'équilibre est stable si F_z est une force de rappel :

$$\frac{dF_z}{dz} = -\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dz^2} = -\alpha(3z^2 - a^2).$$

$$\left(\frac{dF_z}{dz}\right)_{z_{\text{éq}}=0} = -\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dz^2}\right)_{z_{\text{éq}}=0} = \alpha a^2 > 0 \Rightarrow z_{\text{éq}} = 0 \text{ est position d'équilibre instable.}$$

$$\left(\frac{dF_z}{dz}\right)_{z_{\text{éq}}=a} = \left(\frac{dF_z}{dz}\right)_{z_{\text{éq}}=-a} = -2\alpha a^2 < 0 \Rightarrow z_{\text{éq}} = -a \text{ et } z_{\text{éq}} = a \text{ sont positions d'équilibre stable.}$$

» 3

L'atome d'azote oscille s'il est piégé dans un puits de potentiel. Ses oscillations sont sinusoïdales si la première approximation de la fonction $\mathcal{E}_P(z)$ au voisinage de la position d'équilibre stable est une représentation parabolique.

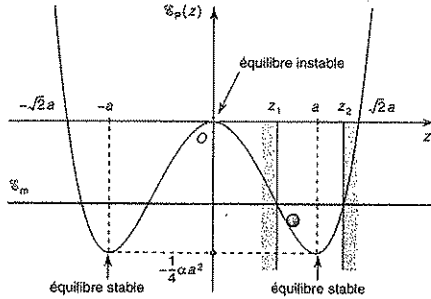
Supposons que l'atome d'azote est en position d'équilibre stable dans l'espace $z > 0$:

$$z_{\text{éq}} = a.$$

Sa vitesse est nulle et son énergie mécanique est réduite à l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{z}_{(z_{\text{éq}}=a)}^2 + \mathcal{E}_P(a) = \mathcal{E}_P(a) = -\frac{1}{4}\alpha a^4.$$

Une élévation d'énergie de $\Delta\mathcal{E} \ll \frac{1}{4}\alpha a^4$ augmente l'énergie mécanique de l'atome d'azote qui reste négative. Il s'agit d'un état lié de l'atome qui se trouve piégé dans une cuvette de potentielle. Il y a un transfert permanent d'énergie potentielle en énergie cinétique, celle-ci s'annulant pour les valeurs z_1 et z_2 de z : l'atome oscille entre ces deux valeurs limites.



• **Méthode de linéarisation** (valable pour les petites oscillations) :

Effectuons un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\mathcal{E}_p(z)$ au voisinage de la position d'équilibre $z_{\text{éq}} = a$ en notant l'écart de la position de l'atome d'azote par rapport à sa position d'équilibre : $\varepsilon = z - a$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p(z) &= \mathcal{E}_p(z_{\text{éq}}) + (z - z_{\text{éq}}) \underbrace{\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dz}\right)_{z_{\text{éq}}}}_{= 0 \text{ (équilibre)}} + \frac{1}{2}(z - z_{\text{éq}})^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dz^2}\right)_{z_{\text{éq}}} \\ \Rightarrow \mathcal{E}_p(\varepsilon) &= \mathcal{E}_p(z_{\text{éq}}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dz^2}\right)_{z_{\text{éq}}} \end{aligned}$$

La fonction $\mathcal{E}_p(\varepsilon)$ est une représentation parabolique, les oscillations sont sinusoïdales.

En remarquant que $\dot{z} = \dot{\varepsilon}$, l'énergie cinétique de la particule $N(m)$ dans \mathcal{R}_g est :

$$\mathcal{E}_C(M, \mathcal{R}_g) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2.$$

et son énergie mécanique est :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2 + \mathcal{E}_p(z) = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2 + \mathcal{E}_p(z_{\text{éq}}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dz^2}\right)_{z_{\text{éq}}}$$

On a vu : $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dz^2}\right)_{z_{\text{éq}}} = 2\alpha a^2.$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2 + \mathcal{E}_p(z) = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2 + \mathcal{E}_p(z_{\text{éq}}) + \alpha a^2 \varepsilon^2.$$

Le système étant conservatif, l'énergie mécanique est constante :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\dot{\varepsilon} \left(\ddot{\varepsilon} + \frac{2\alpha a^2}{m}\varepsilon \right) = 0.$$

Cette équation est vérifiée à tout instant et le système est en mouvement :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{2\alpha a^2}{m}\varepsilon = \ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = 0.$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\alpha a^2}{m}}$

La fréquence de ces petites oscillations est donc :

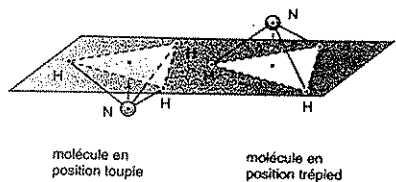
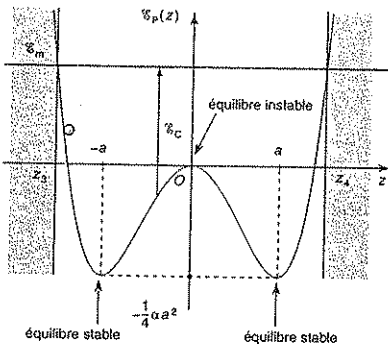
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\alpha a^2}{m}}$$

Pour de petites oscillations, l'énergie fournie étant faible devant la profondeur du puits de potentielle, la position de N reste comprise entre z_1 et z_2 . Le mouvement de l'atome d'azote est sinusoïdal au voisinage de la position d'équilibre. En fonction de sa position initiale, la particule est localisée soit dans le puits de gauche, soit dans le puits de droite.

» 4

L'énergie mécanique est maintenant positive, l'atome d'azote est maintenant confiné dans un double puits de potentiel symétrique. C'est encore un état lié, mais les oscillations ne sont plus sinusoïdales.

L'observation du diagramme d'énergie potentielle permet de conclure que la particule N est en mouvement et oscille dans ce double puits de potentielle entre les positions limites z_3 et z_4 .



L'énergie apportée est suffisante pour franchir le col d'énergie potentielle en $z = 0$. La particule passe alternativement des deux côtés du plan des molécules d'hydrogène et vibre suivant l'axe (Oz). L'édifice moléculaire subit un renversement en « parapluie ». Les oscillations ne sont pas sinusoïdales.

en conclusion

Nous avons vu ici l'intérêt du diagramme d'énergie potentielle qui permet d'envisager aisément les mouvements d'une particule. La linéarisation de l'énergie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre z_{eq} permet de préciser la nature du mouvement au voisinage de cette position.

Si $\left(\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dz^2}\right)_{z_{eq}} > 0$, la linéarisation conduit à l'équation du mouvement linéaire d'un oscillateur harmonique. Cette approximation harmonique conduit à des oscillations sinusoïdales de la particule au voisinage de la position d'équilibre stable.

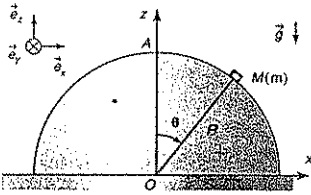
1 >>> 30 min

> Corrigé p. 101

Chute d'un glaçon le long d'une sphère

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur d'intensité g est uniforme.

Un glaçon est abandonné sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ au sommet A d'une sphère métallique fixe (S) de centre O et de rayon R . Dans une première phase, il glisse sans frottement sur le profil circulaire en restant dans le plan (Oxz) . Le glaçon se comporte comme un point matériel M de masse m et, tant qu'il est en contact avec la sphère, sa position est repérée par l'angle θ .



Le glaçon est en contact avec la sphère.

- Donner les expressions des vecteurs vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$ et accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R}_g)$ du point M en précisant la base de projection adaptée au problème.
- Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point M dans le référentiel terrestre. En déduire l'équation différentielle du mouvement de M .
- Exprimer la réaction du support sur le glaçon en fonction de m , g et θ .
- Montrer que l'intensité de cette force est une fonction décroissante de θ . En déduire l'angle θ_0 à partir duquel le glaçon quitte le profil circulaire. Quel est le mouvement ultérieur du glaçon ?

2 >>> 45 min

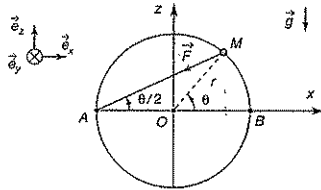
> Corrigé p. 102

Équilibre d'un point matériel

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Un anneau ponctuel M de masse m est enfilé sur un cercle fixe de centre O et de rayon r placé verticalement dans le plan (Oxz) . Il est susceptible de glisser sans frottement le long de ce guide circulaire et est soumis au champ de pesanteur terrestre supposé uniforme. La résistance de l'air est négligeable.

Une force $\vec{T} = k\vec{MA}$ tend à attirer l'anneau M vers le point A . Elle se comporte comme une force de rappel élastique due à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle, dont l'autre extrémité serait fixée en A .



- Représenter les trois forces appliquées au point M .
- Projeter ces forces dans la base de projection adaptée au mouvement de M .
- Étude dynamique : déterminer les positions d'équilibre de l'anneau et préciser leur stabilité.
- Étude énergétique : exprimer l'énergie potentielle \mathcal{E}_p de l'anneau en fonction de θ .
- En déduire les positions d'équilibre de l'anneau. Étudier leur stabilité.
- Déterminer la pulsation Ω des petites oscillations par rapport à la position d'équilibre stable.

$$\text{Données : } \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta);$$

$$\sin\theta = 2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}; \quad \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta.$$

3 >>> 30 min

> Corrigé p. 104

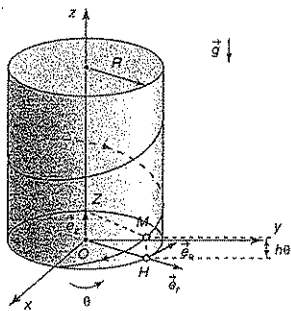
Mouvement d'une perle le long d'une hélice

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur d'intensité g est uniforme.

Les équations en coordonnées cylindro-polaires d'une hélice, droite, d'axe vertical (Oz) et de pas constant h sont :

$$r = R \quad \text{et} \quad z = \frac{h}{2\pi} \theta.$$

Une perle de petite dimension est enfilé sur ce fil rigide de forme hélicoïdale et abandonné sans vitesse initiale au point A d'altitude H .



Cette perle M , de masse m , assimilée à une particule ponctuelle, est mobile sans frottement le long de l'hélice.

1. Étude cinématique : exprimer le vecteur position \vec{OM} et le vecteur vitesse $\vec{v}(M, \mathcal{R}_0)$. En déduire v^2 en fonction de h , R et z .
2. Étude énergétique : déterminer l'équation différentielle du mouvement de M dont est solution la cote verticale z de M .
3. En déduire l'équation horaire $z(t)$ du mouvement de M et le temps τ que met la perle pour atteindre sous l'action de son poids le plan horizontal à la base de l'hélice en $z = 0$.

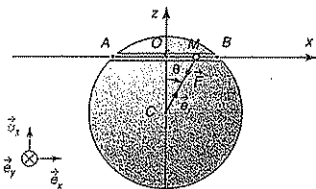
4 30 min

> Corrigé p. 105

Voyage au centre de la Terre

La Terre est un astre supposé sphérique, de centre C et de rayon R .

Le référentiel $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié à la Terre est supposé galiléen (la rotation de la Terre n'est pas prise en compte) et le champ de pesanteur, uniforme à la surface de la Terre, est noté g_0 .



Pour relier deux villes A et B , un tunnel est foré au travers du globe terrestre. Un mobile assimilable à un point matériel M de masse m part sans vitesse initiale du point A et glisse dans le tunnel sans frottement, selon l'axe $(O; \vec{e}_x)$, pour rejoindre le point B . Sa position est repérée par l'abscisse $x(t) = \overline{OM}$. La force gravitationnelle exercée par la Terre sur M est :

$$\vec{F} = -m g_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r, \text{ avec } \|\vec{CM}\| = CM = r(t).$$

La distance $\|\vec{CO}\|$ du tunnel au centre de la Terre est notée d .

1. Quelle est l'énergie potentielle de gravitation $\mathcal{E}_p^{\text{grav}}$ associée au point M en choisissant l'origine de cette énergie en O . En déduire la vitesse maximale v_{max} du mobile. Le point M possède-t-il une position d'équilibre stable ?
2. Déterminer la nature et l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de M . Retrouver l'expression de v_{max} .
3. Calculer numériquement le temps T nécessaire au mobile pour revenir en A .

Données : $R = 6\,400$ km et $g_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

5 30 min

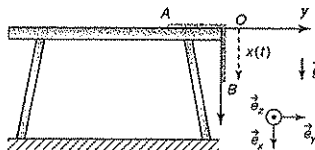
> Corrigé p. 106

Chute d'une chaîne

La notion de point matériel est utilisable pour le centre d'inertie d'un système et permet l'étude d'un système solide quelconque en décomposant celui-ci « par la pensée » en éléments matériels considérés comme quasi-ponctuels.

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur d'intensité g est uniforme.

Une chaîne de longueur ℓ repose en partie sur une table horizontale. Sa masse m est uniformément répartie sur toute la longueur ℓ . La chaîne est lâchée sans vitesse initiale quand son extrémité B est située en $x(0) = x_0$. Le contact entre la chaîne et la table est supposé sans frottement.



1. On pose $\tau^2 = \frac{\ell}{g}$. En quelle unité le paramètre τ s'exprime-t-il ?

2. Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_C(\dot{x})$ de la chaîne, en fonction de m et de \dot{x} , en la décomposant en éléments matériels ponctuels constitués par chacun de ses maillons.

3. Considérons la partie pendante OB de la chaîne. Exprimer son poids en fonction de m , ℓ , g et de sa longueur x . Quel est le point d'application de cette force ? Donner l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_P^{\text{pes}}(x)$ de ce fragment de chaîne.

4. En écrivant la conservation de l'énergie mécanique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par x .

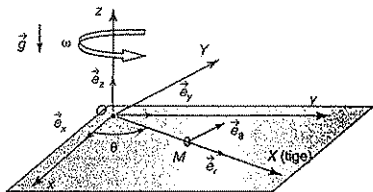
5. En déduire l'expression de $x(t)$ en fonction de x_0 , τ et t .



» Corrigé p. 107

Glissement sans frottement d'un anneau sur une tige en rotation

Une tige rectiligne horizontale OX tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω en restant dans le plan (Oxy) . Un anneau M de masse m est enfilé sur cette tige et peut y glisser sans frottement.



À un instant t quelconque, la rotation de la tige est repérée par l'angle polaire $\theta = \omega t$ et la position

de l'anneau sur la tige par $\|\overrightarrow{OM}\| = OM = r(t)$. Le mouvement de M peut être étudié soit dans le référentiel terrestre galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, soit dans le référentiel de la tige $\mathcal{R}'(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

L'équation de la trajectoire de M dans le référentiel terrestre est :

$$r(t) = r_0 \operatorname{ch}(\omega t).$$

1. Donner les vecteurs vitesse et accélération du point M successivement dans le référentiel \mathcal{R}_g et dans le référentiel \mathcal{R}' .

2. Effectuer le bilan des forces appliquées au point M . En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel galiléen, exprimer les composantes de la réaction \vec{R} de la tige sur M en fonction de m , g , r , \dot{r} et ω , dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

3. Calculer la puissance de cette force dans le référentiel \mathcal{R}' de la tige.

4. Déterminer la puissance de \vec{R} dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_g . Commenter.

5. Établir l'équation différentielle du mouvement de M par une méthode énergétique.

Tester ses connaissances

1 La puissance instantanée $\mathcal{P}(\vec{F}_{/R})$ fournie par la force \vec{F} dans le référentiel R est le produit scalaire :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{/R}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M_{/R})$$

2 Le travail élémentaire fourni par la force \vec{F} au point matériel M pendant l'intervalle de temps infinitésimal dt

$$\delta\mathcal{W}(\vec{F}_{/R}) = \mathcal{P}(\vec{F}_{/R})dt = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

3 Les deux machines fournissent le même travail :

$$\delta\mathcal{W}(\vec{F}_{/R}) = \mathcal{P}_1(\vec{F}_{/R})dt_1 = \mathcal{P}_2(\vec{F}_{/R})dt_2.$$

Si la machine M_1 est plus puissante que la machine M_2 , alors $\mathcal{P}_1 > \mathcal{P}_2$ et $dt_1 < dt_2$.
À travail égal, la machine M_1 est plus rapide que la machine M_2 .

4 Le travail fourni par une force \vec{F} quelconque dépend du chemin suivi pour aller de la position initiale à la position finale.

5 Réponse b. Le travail fourni par la force \vec{F} dépend du chemin suivi ; il faut écrire :

$$\mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{/R}) = \int_{A(C)}^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}.$$

$\delta\mathcal{W}$ est une forme différentielle.

Inversement, la variation de l'énergie potentielle associée à un point matériel M ne dépend que de la position initiale et de la position finale de M :

$$\int_A^B d\mathcal{E}_p(M) = \underbrace{\mathcal{E}_p(B)}_{\text{position finale}} - \underbrace{\mathcal{E}_p(A)}_{\text{position initiale}} = \Delta\mathcal{E}_p.$$

$d\mathcal{E}_p$ est une différentielle totale.

La notation $\Delta\mathcal{W}$ est totalement à proscrire car le travail dépend du chemin adopté par M .

6 Réponse b. Le vecteur déplacement élémentaire exprimé en coordonnées cylindro-polaires dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ s'écrit : $d\vec{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$.

a. et c. Réponses fausses et inhomogènes, chaque composante du vecteur déplacement a la dimension d'une longueur.

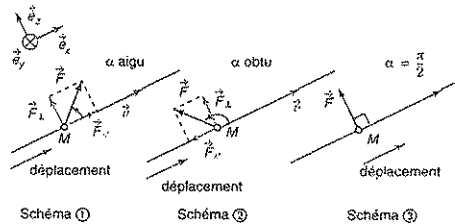
7 Le travail fourni par une force est :

$$\delta\mathcal{W}(\vec{F}_{/R}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M_{/R})dt$$

$$= \|\vec{F}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha dt, \text{ avec } \alpha = (\vec{F}, \vec{v})$$

\Rightarrow signe ($\delta\mathcal{W}$) = signe ($\cos\alpha$).

Le sens du déplacement de M est précisé sur le schéma.



a. La force \vec{F} est résistive : schéma ②.

b. La force \vec{F} ne travaille pas : schéma ③.

c. La force \vec{F} est motrice : schéma ①.

Remarque :

La force \vec{F} se décompose en une force qui exerce un travail \vec{F}_\parallel parallèle au vecteur vitesse (et tangentielle à la trajectoire) et une force \vec{F}_\perp normale à la trajectoire qui n'exerce aucun travail.

$$\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp.$$

$$\delta\mathcal{W}(\vec{F}_{/R}) = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = (\vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp) \cdot \vec{v}dt = \vec{F}_\parallel \cdot \vec{v}dt$$

Seule la composante \vec{F}_\parallel intervient dans le travail $\delta\mathcal{W}(\vec{F}_{/R})$ et la puissance $\mathcal{P}(\vec{F}_{/R})$.

8 Une force \vec{F}_c est conservative si :

$$\delta\mathcal{W}(\vec{F}_{/R}) = -d\mathcal{E}_p.$$

9 Lorsque le système est conservatif : il est soumis à des forces conservatives et les forces non conservatives ne travaillent pas.

10 Réponses a. et c. L'énergie potentielle augmente avec l'altitude. Dans le cas de la figure, cette énergie est forcément négative.

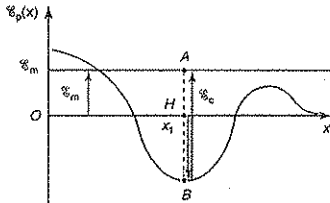
$\mathcal{E}_p^{\text{pes}} = -mgz$: bonne réponse car $z > 0$.

11 Réponse b. Le point matériel M d'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$ est à l'équilibre stable en $x = x_{eq}$

$$\text{si : } \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}} > 0,$$

12 Réponse b. $\mathcal{E}_m = \overline{HA}$; $\mathcal{E}_p(x) = \overline{HB}$;

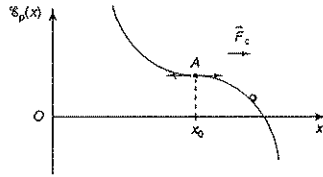
$$\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(x) = \overline{HA} - \overline{HB} = \overline{BA}.$$



13 Réponses b. et d. Sur la représentation graphique de l'énergie potentielle, A est un point d'inflexion.

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \right)_{x_0} = 0 : A \text{ est une position d'équilibre.}$$

Imaginez que vous placez une bille au voisinage de A : elle s'éloignera définitivement de ce point en roulant vers les bas : équilibre instable.



Savoir appliquer le cours

1 a. Calculons le travail élémentaire fourni par \vec{P} :

$$\delta \mathcal{T}(\vec{P}_{/g_2}) = \vec{P} \cdot d\vec{OM} = -mg\vec{z}_z \cdot (dx\vec{z}_x + dy\vec{z}_y + dz\vec{z}_z) \\ = -mgdz = -d(mgz) = -d\mathcal{E}_p^{\text{pes}}$$

$$\mathcal{E}_p^{\text{pes}}(z) = mgz + \text{cte.}$$

En choisissant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p^{\text{pes}}(0) = 0$:

$$\mathcal{E}_p^{\text{pes}}(z) = mgz$$

b. Le théorème de la puissance mécanique permet d'écrire :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(M/g_2)}{dt} \right)_{/g_2} = \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{op}/g_2}) + \mathcal{P}(\vec{P}_{/g_2}) \\ \Rightarrow d\mathcal{E}_m(M/g_2) = d[\mathcal{E}_C(M/g_2) + \mathcal{E}_p^{\text{pes}}(M)] = \delta \mathcal{T}^{\text{op.}}$$

Pour un déplacement allant de l'équilibre A à l'équilibre B :

$$\Delta \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m(B) - \mathcal{E}_m(A) = \Delta E_C + \Delta \mathcal{E}_p = \mathcal{T}_{A \rightarrow B}^{\text{op.}}$$

Le point M est au repos en A et en B :

$$\mathcal{E}_C(B) = \mathcal{E}_C(A) = 0 \text{ et } \Delta \mathcal{E}_C = \mathcal{E}_C(B) - \mathcal{E}_C(A) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta E_p = \mathcal{E}_p^{\text{pes}}(B) - \mathcal{E}_p^{\text{pes}}(A) = mgz = \mathcal{T}_{A \rightarrow B}^{\text{op.}}$$

L'énergie potentielle mgz est ainsi accumulée par le système et restera masquée tant que l'opérateur maintiendra sa contrainte en lui imposant l'altitude z . Dès que l'expérimentateur lâche l'objet, celui-ci restitue cette énergie potentielle en se mettant en mouve-

ment pour revenir à l'état initial. L'énergie potentielle se révèle alors par son transfert en énergie cinétique. L'énergie potentielle est donc l'énergie accumulée par le système et restituée dès que celui-ci a la possibilité de revenir à l'état initial.

c. Le système est conservatif, son énergie mécanique est constante :

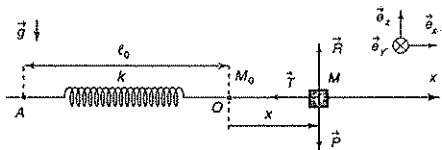
- état initial : $\mathcal{E}_m = mgH$;

- état final : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2$.

L'énergie $mgH = \frac{1}{2}mv^2$, libérée à l'arrivée de la particule sur le sol, vaut 1 J.

Pour évaluer ce que représente le joule, retenons que c'est l'énergie recueillie si on lâche un objet de 100 g d'une altitude d'un mètre.

2



a. La force de rappel élastique est :

$$\vec{T} = -k(\vec{AM} - \vec{AM}_0) = -k\vec{M}_0M = -k\vec{OM} = -kx\vec{z}_x$$

M_0 est la position du point M alors que le ressort est au repos, il est confondu avec l'origine O .

b. Pour déterminer l'énergie potentielle élastique exprimons le travail élémentaire de la tension du ressort :

$$\delta \mathcal{T}(\vec{T}_{/R_g}) = \vec{T} \cdot d\vec{OM} = -kx\vec{e}_x \cdot d\vec{x} = -kx dx$$

$$= -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -d\mathcal{E}_P^{\text{elas}}$$

L'énergie potentielle élastique est donc :

$$\mathcal{E}_P^{\text{elas}}(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cte.}$$

En choisissant O comme origine de l'énergie potentielle élastique : cte = 0, d'où :

$$\mathcal{E}_P^{\text{elas}}(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

c. Le système est le point matériel M , son mouvement est étudié dans le référentiel R_g supposé galiléen.

• **Bilan des forces appliquées au point M**

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids de M : force conservative ;

(ii) de contact :

• $\vec{F}_{\text{fil} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du ressort : force conservative ;

• $\vec{F}_{\text{support} \rightarrow M} = \vec{R}$, la réaction du support : ne travaille pas.

Le mouvement s'effectuant sans frottement :

$$\mathcal{D}(\vec{R}_{/R_g}) = \vec{R} \cdot \vec{v}(M_{/R_g}) = 0.$$

Remarque : le système est conservatif, il conserve son énergie mécanique au cours du temps.

• **Détermination du nombre de degrés de liberté**

Remarque : le mouvement est à un degré de liberté, la seule abscisse x permet de repérer M .

Ces deux conditions permettent d'écrire l'intégrale première du mouvement :

$$\mathcal{E}_m(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_C(M_{/R_g}) + \mathcal{E}_P^{\text{elas}}(M) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \mathcal{E}_m$$

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = m\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x\right) = 0.$$

Le système est en mouvement, l'équation différentielle du mouvement est :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3 L'énergie potentielle ne dépend que du paramètre θ : $\mathcal{E}_P(\theta)$

Le vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cylindro-polaires est :

$$d\vec{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz.$$

Écrivons la force conservative sous la forme :

$$\vec{F}_c = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_z\vec{e}_z.$$

Cette force vérifie :

$$\delta \mathcal{T}(\vec{F}_{c/R_g}) = \vec{F}_c \cdot d\vec{OM} = -d\mathcal{E}_P(\theta).$$

En effectuant le produit scalaire :

$$F_r dr + F_\theta r d\theta + F_z dz = -d\mathcal{E}_P(\theta) = -\frac{d\mathcal{E}_P(\theta)}{d\theta} d\theta.$$

Cette égalité vérifiée pour toute variation élémentaire ($dr, d\theta, dz$) permet les identifications :

$$F_r = 0 \quad F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{d\mathcal{E}_P(\theta)}{d\theta} \quad F_z = 0$$

Comme l'énergie potentielle ne dépend que de θ , il en est de même pour F_θ et :

$$\vec{F}_c = F_\theta(\theta)\vec{e}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{d\mathcal{E}_P(\theta)}{d\theta} \vec{e}_\theta$$

4 Le système est le point matériel M .

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen

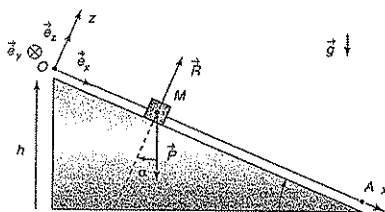
• **Bilan des forces appliquées au point M**

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids de M : force conservative ;

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{support} \rightarrow M} = \vec{R}$, la réaction du support : ne travaille pas.

• **Détermination du nombre de degrés de liberté**

Le mouvement est à un degré de liberté, la seule abscisse x permet de repérer M .



Écrivons la conservation de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m(x, \dot{x}) &= \mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g) + \mathcal{E}_P^{pes}(M) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \mathcal{E}_P^{pes}(x) = \mathcal{E}_m. \end{aligned}$$

Pour accéder à l'énergie potentielle de pesanteur développons le travail élémentaire fourni par cette force, les vecteurs étant projetés dans la base (\vec{z}_x, \vec{z}_z) :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{T}(\vec{P}/\mathcal{R}_g) &= \vec{P} \cdot d\vec{OM} = \begin{pmatrix} mg \sin \alpha \\ -mg \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= mg \sin \alpha dx = d(mg \sin \alpha x) = -d\mathcal{E}_P^{pes} \\ \mathcal{E}_P^{pes}(x) &= -mg \sin \alpha x + cte. \end{aligned}$$

En choisissant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_P^{pes}(0) = 0$:

$$\mathcal{E}_P^{pes}(x) = -mg \sin \alpha x$$

L'énergie mécanique est ainsi :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mg \sin \alpha x = \mathcal{E}_m$$

Pour établir l'équation différentielle du mouvement, dérivons cette équation par rapport à t :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = m\dot{x}(\dot{x} - g \sin \alpha) = 0.$$

Le système est en mouvement, l'équation différentielle du mouvement est :

$$\ddot{x} = g \sin \alpha$$

Le mouvement de M est rectiligne et uniformément accéléré.

S'entraîner

1. • Position du problème : le système du glaçon, soumis au champ de pesanteur et à la réaction du support, est conservatif et à un degré de liberté. Ces deux conditions inspirent une résolution énergétique, mais celle-ci s'avère incomplète car la liaison entre le glaçon et le support est unilatérale et il faut envisager le décollage du glaçon à lieu des l'annulation de la réaction du support. Or la réaction n'apparaît pas dans le bilan énergétique.

Le système est le point M , son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\mathcal{R}_g(O; \vec{z}_x, \vec{z}_y, \vec{z}_z).$$

Le mouvement du point M a lieu dans le plan (Oxz) et sa trajectoire est circulaire tant qu'il y a liaison entre le sol et le glaçon. La base de projection adaptée au problème est la base polaire $(\vec{z}_r, \vec{z}_\theta)$.

La liaison impose une valeur constante à r : $r = R$. Le paramètre θ suffit pour décrire le mouvement. Le problème est à un degré de liberté.

Dans la base $(\vec{z}_r, \vec{z}_\theta)$, les vecteurs position, vitesse et accélération font apparaître :

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) &= \begin{pmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v^2}{R} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

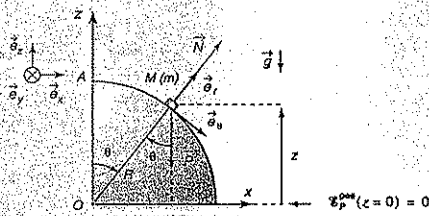
2. • Bilan des forces appliquées au point M

(i) à distance : $\vec{P}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids de M : force conservative ;

(ii) de contact : $\vec{P}_{\text{sphère} \rightarrow M} = \vec{N}$, la réaction du sol : ne travaille pas.

La sphère n'exerce aucune force de frottement sur le glaçon, sa réaction \vec{N} exercée par le support sur M ne travaille pas.

⇒ Le système est conservatif, il conserve son énergie mécanique au cours du temps.



Appliquons le principe fondamental de la dynamique au point M :

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_g).$$

Sa projection dans la base $(\vec{z}_r, \vec{z}_\theta)$ donne :

$$mg \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \end{pmatrix}.$$

D'où le système de deux équations :

• projection sur \vec{z}_r : $-mg \cos \theta + N = -mR\dot{\theta}^2$ (1)

• projection sur \vec{z}_θ : $mg \sin \theta = mR\ddot{\theta}$ (2)

L'équation (2) est l'équation différentielle du mouvement de M :

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$

3. L'équation (1) permet d'accéder à une expression de N :

$$N = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - m \frac{v^2}{R}$$

Dans l'expression de N apparaît un terme en v^2 qui apparaît dans l'énergie cinétique du point M . Appliquons la conservation de l'énergie mécanique pour le déterminer, le système étant conservatif et à un degré de liberté.

• Calcul de l'énergie potentielle de pesanteur en choisissant pour origine de l'énergie potentielle de pesanteur : $\mathcal{E}_P^{\text{pes}}(z=0) = 0$.

$$\mathcal{E}_P^{\text{pes}}(z) = mgz \Rightarrow \mathcal{E}_P^{\text{pes}}(\theta) = mgR \cos \theta.$$

• Énergie cinétique du point M :

$$\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m v^2 (M/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m v^2.$$

L'énergie mécanique du point M est une constante du mouvement :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_0) + \mathcal{E}_P^{\text{pes}}(M) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + mgR \cos \theta}_{\text{instant } t} = \underbrace{0 + mgR}_{\text{instant } t=0} \end{aligned}$$

D'où $v^2 = 2gR(1 - \cos \theta)$

En remplaçant dans l'expression de N :

$$N = mg(3 \cos \theta - 2)$$

Dérivons l'expression de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m par rapport à t :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = mR^2 \dot{\theta} \left(\ddot{\theta} - \frac{g}{R} \sin \theta \right) = 0.$$

On retrouve l'équation différentielle du mouvement de M :

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$

Cette équation différentielle est non linéaire à cause du terme $\sin \theta$, nous ne savons pas la résoudre analytiquement.

Si θ n'est pas accessible, l'intégration de l'équation du mouvement permet d'obtenir l'expression de v^2 :

$$g \sin \theta = R\dot{\theta}.$$

Pour la résoudre, multiplions les deux membres de l'équation par $\dot{\theta}$:

$$g \sin \theta \dot{\theta} = R\dot{\theta}^2.$$

En décomposant :

$$\dot{\theta} = u = \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = \frac{du^2}{dt} = \frac{du^2}{du} \times \frac{du}{dt} = 2u \times \frac{du}{dt} = 2\dot{\theta}\dot{\theta}$$

$$\frac{d \cos \theta}{dt} = \frac{d \cos \theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\sin \theta \dot{\theta}.$$

En remplaçant dans l'équation (2) :

$$\dot{\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} \quad \text{et} \quad \sin \theta \dot{\theta} = -\frac{d \cos \theta}{dt}$$

$$\text{Ainsi} \quad -g \frac{d \cos \theta}{dt} = \frac{R d \dot{\theta}^2}{2 dt}$$

L'intégration donne :

$$-g \cos \theta = \frac{R}{2} \dot{\theta}^2 + cte = \frac{v^2}{2R} + cte.$$

Or à l'instant $t = 0$:

$$\theta(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad v(t=0) = 0 \Rightarrow cte = -g$$

$$v^2 = 2gR(1 - \cos \theta).$$

L'étude énergétique pouvait être évitée. Mais l'intégration précédente ne s'obtient pas aisément, alors que l'écriture de la conservation de l'énergie mécanique est ici simple à appliquer.

4. Dérivons la fonction $N(\theta) = mg(3 \cos \theta - 2)$:

$$\frac{dN}{d\theta} = -3mg \sin \theta.$$

Lorsque la particule est en A : $N(\theta=0) = mg$. En considérant le signe de la dérivée : N est décroissante alors que θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ ($-\sin \theta < 0$).

Lorsque $N = 0$, le contact est rompu :

$$\cos \theta_0 = \frac{2}{3}$$

$$\theta_0 = 48,2^\circ$$

Quand le mobile a quitté la sphère, sa trajectoire est une parabole (à la condition de négliger la résistance de l'air). On retrouve alors la situation d'une courbe balistique.

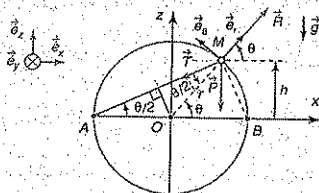
2.1. Le système est le point M , son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Bilan des forces appliquées au point M :

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = m\vec{g}$, le poids de M : force conservative ;

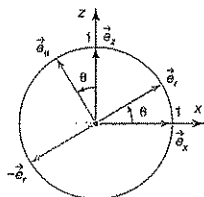
(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{cercle} \rightarrow M} = \vec{R}$, la réaction du guide ;

$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du ressort.



2.2. Le mouvement s'effectue dans le plan vertical selon le guide circulaire la base adaptée au problème est la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

Le schéma ci-dessous permet de décomposer \vec{z}_c dans la base polaire :



$$\vec{P} = -mg\vec{z}_c$$

$$\vec{z}_c = \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta$$

$$\vec{P} = -mg(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta)$$

Déterminons la longueur AM sachant que le triangle AMB est rectangle en M : $AM = 2r \cos \frac{\theta}{2}$.

$$\begin{aligned} \vec{T} &= k\vec{MA} = 2kr \cos \frac{\theta}{2} \left(-\cos \frac{\theta}{2} \vec{e}_r + \sin \frac{\theta}{2} \vec{e}_\theta \right) \\ &= -2kr \cos^2 \frac{\theta}{2} \vec{e}_r + 2kr \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

Les relations trigonométriques permettent de conclure :

$$\vec{T} = kr[-(1 + \cos\theta)\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta]$$

Les forces \vec{P} et \vec{T} sont dans le plan (Oxz) du mouvement de M : la réaction \vec{R} est donc nécessairement dans ce plan car elle vérifie d'après le principe fondamental de la dynamique : $\vec{R} = \underbrace{m\vec{a}(M)_{/g_0}}_{\text{dans le plan } (Oxz)} - \vec{P} - \vec{T}$

D'autre part, puisqu'il n'y a pas de frottement, la réaction est normale à la trajectoire et ne travaille pas :

$$\vec{R} = R\vec{e}_\theta \quad \text{avec } R = \|\vec{R}\|$$

3. Appliquons dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}(M)_{/g_0}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -mg \sin\theta \\ -mg \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + kr \begin{pmatrix} -(1 + \cos\theta) \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} -r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\vec{F} est la résultante des forces appliquées au point M .

Lorsque le point M est à l'équilibre, le principe fondamental de la statique donne :

$$-mg \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + kr \begin{pmatrix} -(1 + \cos\theta) \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et conduit à un système de deux équations :

$$\vec{e}_r : R = mg \sin\theta + kr(1 + \cos\theta) \quad (1)$$

$$\vec{e}_\theta : mg \cos\theta = kr \sin\theta \quad (2)$$

La première équation exprime la réaction du support, la seconde permet de trouver la condition d'équilibre :

$$\tan\theta_{eq} = \frac{mg}{kr}$$

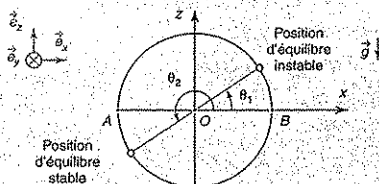
L'angle polaire θ varie de 0 à 2π et $\tan\theta = \tan(\theta + \pi)$,

il y a donc deux positions d'équilibre :

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{mg}{kr}\right) \quad \text{et} \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi = \pi + \arctan\left(\frac{mg}{kr}\right)$$

La tangente étant positive :

$$\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad \theta_2 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$



Pour étudier leur stabilité, écartons légèrement de point M de sa position d'équilibre pour le mettre en mouvement : il apparaît une force F_θ suivant \vec{e}_θ . Est-ce une force de rappel ?

$$F_\theta(\theta) = -mg \cos\theta + kr \sin\theta$$

$$\frac{dF_\theta}{d\theta} = mg \sin\theta + kr \cos\theta = kr \cos\theta \left(1 + \frac{mg}{kr} \tan\theta\right)$$

$$\text{À l'équilibre : } \left(\frac{dF_\theta}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_{eq}} = kr \cos\theta(1 + \tan^2\theta)$$

Le signe de $\left(\frac{dF_\theta}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_{eq}}$ dépend du signe de $\cos\theta$:

$\cos\theta_1 > 0 \Rightarrow \left(\frac{dF_\theta}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_1} > 0$: θ_1 est une position d'équilibre instable

$\cos\theta_2 < 0 \Rightarrow \left(\frac{dF_\theta}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_2} < 0$: θ_2 est une position d'équilibre stable.

4. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit rapidement :

$$\mathcal{E}_P^{\text{pes}}(\theta) = mgh = mgr \sin\theta.$$

L'énergie potentielle élastique est :

$$\mathcal{E}_P^{\text{elas}}(\theta) = \frac{1}{2}k(AM)^2 = kr^2(1 + \cos\theta).$$

L'additivité des énergies permet d'écrire l'énergie potentielle de l'anneau :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_P(\theta) &= \mathcal{E}_P^{\text{pes}}(\theta) + \mathcal{E}_P^{\text{elas}}(\theta) \\ &= mgr \sin\theta + kr^2(1 + \cos\theta). \end{aligned}$$

5. Les positions d'équilibre de l'anneau sont obtenues pour :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_P}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_{eq}} = r(mg \cos \theta_{eq} - kr \sin \theta_{eq}) = 0.$$

Les positions d'équilibre sont :

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{mg}{kr}\right) \quad \text{et} \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi = \pi + \arctan\left(\frac{mg}{kr}\right)$$

Dérivons une fois encore par rapport à θ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_{eq}} &= -r(mg \sin \theta + kr \cos \theta) \\ &= -kr^2 \cos \theta (1 + \tan^2 \theta). \end{aligned}$$

Le signe de $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_{eq}}$ dépend du signe de $-\cos \theta$

$\cos \theta_1 > 0 \Rightarrow \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_1} < 0$: θ_1 est une position d'équilibre instable

$\cos \theta_2 < 0 \Rightarrow \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_2} > 0$: θ_2 est une position d'équilibre stable

Remarque : l'étude énergétique est plus facile que l'étude dynamique. Les forces n'ont pas été exprimées, nous ne les avons pas décomposées sur la base de projection. Néanmoins dans certains problèmes, la connaissance de ces forces est nécessaire et il faut revenir au principe fondamental de la dynamique.

6. Effectuons un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\mathcal{E}_P(\theta)$ au voisinage de la position d'équilibre θ_2 en notant : $\varepsilon = \theta - \theta_2$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_P(\theta) &= \mathcal{E}_P(\theta_2) + (\theta - \theta_2) \left(\frac{d\mathcal{E}_P}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_2} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\theta - \theta_2)^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_P(\varepsilon) = \mathcal{E}_P(\theta_2) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_2}$$

La fonction $\mathcal{E}_P(\varepsilon)$ est une représentation parabolique, les oscillations sont sinusoïdales.

En remarquant que $\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}$, l'énergie cinétique de l'anneau $M(m)$ dans \mathcal{R}_g est :

$$\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varepsilon}^2$$

et son énergie mécanique :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\varepsilon}^2 + \mathcal{E}_P(\varepsilon) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varepsilon}^2 + \mathcal{E}_P(\theta_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_2} \end{aligned}$$

$\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_2} > 0$ car la position d'équilibre est stable.

Le système étant conservatif, l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\dot{\varepsilon}r^2 \left(\ddot{\varepsilon} + \frac{1}{mr^2} \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_2} \varepsilon\right) = 0.$$

Cette équation est vérifiée à tout instant et le système est en mouvement :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{1}{mr^2} \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_2} \varepsilon = 0$$

$$\text{avec } \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_2} = -kr^2 \cos \theta_2 (1 + \tan^2 \theta_2)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta_2} = 1 + \tan^2 \theta_2 \Rightarrow \cos \theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_2}}$$

(car $\cos \theta_2 < 0$)

$$\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_2} = kr^2 \sqrt{1 + \tan^2 \theta_2} = kr^2 \sqrt{1 + \left(\frac{mg}{kr}\right)^2}$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} \sqrt{1 + \left(\frac{mg}{kr}\right)^2} \varepsilon = \ddot{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{g}{r}\right)^2} \varepsilon = 0.$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique dont la pulsation vérifie :

$$\Omega^2 = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{g}{r}\right)^2}$$

3. 1. Le système étudié dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_g est le point M . Celui-ci est repéré en coordonnées cylindro-polaires dans la base cylindrique mobile $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ bien adaptée car Oz est axe de rotation.

Le vecteur position est $\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = R\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = R \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$= R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z = 2\pi \frac{R}{h} z\dot{\theta}_0 + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = 2\pi \frac{R}{h} z\dot{\theta}_0 + \dot{z}\vec{e}_z$$

Le carré de la norme de ce vecteur s'écrit :

$$v^2 = \left(\frac{4\pi^2 R^2}{h^2} z^2 + \dot{z}^2\right)$$

2. • Bilan des forces appliquées au point M

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = mg$, le poids de M : force conservative.

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{hélice} \rightarrow M} = \vec{N}$, la réaction de l'hélice.

La réaction de l'hélice sur M est à tout instant normale à la trajectoire guidée de M . Elle ne travaille pas.

Le système est conservatif.

• Détermination du nombre de degrés de liberté

La position du point M dans l'espace nécessite, en coordonnées cylindro-polaires, la donnée des trois paramètres : r , θ et z . Ceux-ci ne sont pas indépendants car le mouvement est guidé par l'hélice et impose deux relations :

$$r = R \text{ et } z = \frac{h}{2\pi} \theta.$$

Trois paramètres - deux relations

= un paramètre indépendant.

Le problème est à un degré de liberté et, pour définir la position de M , un paramètre suffit : la cote z ou l'angle θ . L'angle θ prend ici en compte le nombre de tours effectués : la cote $z = 5h$ correspond à l'angle $\theta = 5 \times 2\pi$. Pour la suite, nous adopterons le paramètre de position z de façon à raisonner sur l'altitude de point M . Le système est conservatif et à un degré de liberté, écrivons la conservation de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g) + \mathcal{E}_P^{grav}(M) = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{4\pi^2 R^2 + h^2}{h^2}\right) \dot{z}^2 + mgz = mgH. \\ \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} &= m\dot{z}\left(\frac{4\pi^2 R^2 + h^2}{h^2}\right) \dot{z} + g = 0. \end{aligned}$$

D'où l'équation différentielle du mouvement de M :

$$\left(\frac{4\pi^2 R^2 + h^2}{h^2}\right) \ddot{z} + g = 0$$

L'accélération verticale est constante :

$$\ddot{z} = -\left(\frac{h^2}{4\pi^2 R^2 + h^2}\right) g.$$

3. Par intégration, en prenant en compte les conditions initiales $\dot{z}(t=0) = 0$ et $z(t=0) = H$:

$$\dot{z}(t) = -\left(\frac{h^2}{4\pi^2 R^2 + h^2}\right) g t$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4\pi^2 R^2 + h^2}\right) g t^2 + H$$

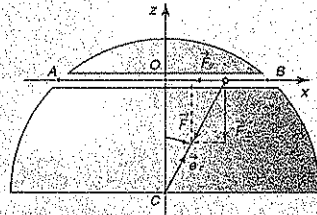
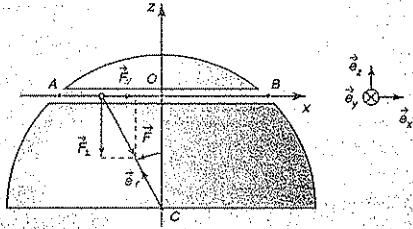
Lorsque $z = 0$, l'hélice arrive au sol : $z(t) = 0$

$$\tau = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2H(4\pi^2 R^2 + h^2)}{g}}$$

Les forces de frottement ayant été négligées, le mouvement de la perle est indépendant de sa masse.

4 1. • Première analyse : la force gravitationnelle qui agit sur

M , se décompose en deux forces : une force \vec{F}_1 qui est toujours perpendiculaire à la trajectoire et qui ne travaille pas et une force \vec{F}_2 qui est une force de rappel comme l'indique la figure ci-dessous. Celle-ci s'annule en O , cette position est une position d'équilibre stable et le mouvement de M est oscillatoire.



Le système est le point M , son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

La seule force appliquée au point M est la force gravitationnelle $\vec{F} = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r$.

Calcul du travail élémentaire de cette force :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}(\vec{F}/\mathcal{R}_g) &= \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r \cdot dx \vec{e}_x \\ &= -mg_0 \frac{1}{R} \vec{CM} \cdot dx \vec{e}_x \\ &= -mg_0 \frac{1}{R} (\vec{CO} + \vec{OM}) \cdot dx \vec{e}_x \\ &= -mg_0 \frac{1}{R} (d\vec{z}_x + x \vec{e}_x) \cdot dx \vec{e}_x = -mg_0 \frac{x}{R} dx. \end{aligned}$$

La force est conservative car elle s'exprime sous la forme d'une différentielle totale :

$$\delta \mathcal{W}(\vec{F}/\mathcal{R}_g) = -d\left(\frac{1}{2} mg_0 \frac{x^2}{R}\right) = -d(\mathcal{E}_P^{grav})$$

L'intégration donne :

$$\mathcal{E}_P^{grav}(x) - \mathcal{E}_P^{grav}(0) = \int_0^x d\left(\frac{1}{2} mg_0 \frac{x^2}{R}\right) = \frac{1}{2} mg_0 \frac{x^2}{R}$$

L'origine de cette énergie est fixée en O : $\mathcal{E}_P^{grav}(0) = 0$.

$$\mathcal{E}_P^{grav}(x) = \frac{1}{2} mg_0 \frac{x^2}{R}$$

Le système est conservatif et à un degré de liberté car la position de M est définie sans ambiguïté par la donnée de x . Le mouvement de M est entièrement déterminé par l'énergie mécanique de M . Cette énergie est une constante du mouvement imposée par les conditions initiales sur la vitesse et la position du mobile. Avec $x_0 = \|\vec{OA}\|$

$$\mathcal{E}_m = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\text{instant } t} + \underbrace{\mathcal{E}_P^{\text{grav}}(x)}_{\text{instant } t=0} = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + \mathcal{E}_P^{\text{grav}}(x_0) = \frac{1}{2}mg_0 \frac{x_0^2}{R}$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AOC : $x_0^2 = R^2 - d^2$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_P^{\text{grav}}(x) = \frac{1}{2}mg_0 \frac{R^2 - d^2}{R}$$

La vitesse est maximale lorsque l'énergie potentielle est minimale. Or celle-ci est positive : sa valeur minimale est nulle et le mobile est à cet instant situé en O .

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}_{\text{max}}^2 + 0 = \frac{1}{2}mg_0 \frac{R^2 - d^2}{R}$$

$$\Rightarrow v_{\text{max}} = \sqrt{g_0 \left(R - \frac{d^2}{R} \right)}$$

La position d'équilibre stable correspond à une vitesse maximale du mobile et une énergie potentielle minimale : la position d'équilibre stable est en O .

Dérivons l'énergie potentielle par rapport à x :

$$\frac{d\mathcal{E}_P}{dx} = mg_0 \frac{x}{R} = 0 \Rightarrow \text{la position d'équilibre est en } x = 0 ;$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dx^2} = \frac{mg_0}{R} > 0 \Rightarrow \text{la position d'équilibre est stable.}$$

2. L'équation du mouvement est obtenue en dérivant par rapport au temps l'énergie mécanique, intégrale première du mouvement :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_P^{\text{grav}}(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mg_0 \frac{x^2}{R}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = m\dot{x} \left(\ddot{x} + \frac{g_0}{R}x \right) = 0$$

Le système est en mouvement et $\dot{x} \neq 0$, d'où l'équation du mouvement de M :

$$\ddot{x} + \frac{g_0}{R}x = 0$$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, le mouvement de M est oscillatoire et purement sinusoïdal. Les pulsation et période propres respectives sont :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}$$

Pour déterminer l'équation horaire, il faut résoudre l'équation différentielle. L'équation générale est :

$$x(t) = D \cos \omega_0 t + E \sin \omega_0 t$$

Les conditions initiales permettent de définir les constantes d'intégration D et E pour accéder ainsi à la solution du problème. La position et la vitesse de M à l'instant t sont :

$$\dot{x}(t) = \omega_0 (-D \sin \omega_0 t + E \cos \omega_0 t)$$

Et à l'instant $t = 0$:

$$x(t=0) = D = x_0 \Rightarrow D = \sqrt{R^2 - d^2} \quad (R > d)$$

$$\dot{x}(t=0) = \omega_0 E = 0 \Rightarrow E = 0$$

D'où l'équation horaire du mouvement :

$$x(t) = (\sqrt{R^2 - d^2}) \cos \omega_0 t$$

La vitesse de M est $\dot{x}(t) = -\omega_0 (\sqrt{R^2 - d^2}) \sin \omega_0 t$

$$\Rightarrow v_{\text{max}} = \omega_0 (\sqrt{R^2 - d^2}) = \sqrt{g_0 \left(R - \frac{d^2}{R} \right)}$$

3. La période T_0 du mouvement est le temps T nécessaire au mobile pour revenir à son point de départ en A .

$$\text{A.N. : } T = T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}} \Rightarrow$$

$$T = 5 \, 026,5 \text{ s} = 1 \text{ h } 24 \text{ min.}$$

5 • Position du problème : ce problème dépasse le cadre de la mécanique du point pour étudier des systèmes plus complexes en les décomposant en éléments matériels ponctuels ou en sous-systèmes animés de mouvements simples.

• *Première analyse :* la corde est abandonnée sur la table horizontale et va glisser le long de cette table tant qu'elle ne rencontrera pas d'obstacle. La solution attendue pour $x(t)$ est divergente.

1. Effectuons une analyse dimensionnelle :

$$[\tau]^2 = \frac{L}{[g]} = \frac{L}{LT^{-2}} = T^2 \Rightarrow \tau \text{ a la dimension d'un temps et s'exprime en secondes (s).}$$

2. Supposons que la chaîne soit constituée de N maillons de masses m_i ($i = 1, \dots, N$). Tous les maillons sont animés de la même vitesse v . L'énergie cinétique totale est la somme des énergies cinétiques associées à chaque maillon :

$$\mathcal{E}_C = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) v^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

Or la vitesse du B qui est la vitesse de n'importe quel point de la chaîne est notée \dot{x} , d'où :

$$v = \dot{x}$$

L'énergie totale de la chaîne est :

$$\dot{\mathcal{E}}_C = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

3. La masse étant uniformément répartie, la masse par unité de longueur (ou masse linéique) est $\lambda = \frac{m}{\ell}$ et la masse de la longueur x de corde s'écrit :

$$m(x) = \frac{x}{\ell} m$$

Le poids de la partie OB est donc :

$$\vec{P}(x) = \frac{x}{\ell} m \vec{g}$$

Le point d'application de cette force est le centre de gravité de la partie homogène OB , il est donc tel que :

$$\vec{OG} = \frac{x}{2} \vec{e}_x$$

L'énergie potentielle de pesanteur de la partie OB est $\mathcal{E}_P^{\text{pes}} = -\frac{1}{2} m(x) g x$ en choisissant l'origine de cette énergie potentielle en $x = 0$.

L'altitude à prendre en compte est celle du point d'application de la force de pesanteur, c'est-à-dire G .

En remplaçant $m(x) = \frac{x}{\ell} m$:

$$\mathcal{E}_P^{\text{pes}}(x) = -\frac{1}{2} m \frac{x^2}{\ell} g$$

4. Le système S considéré est la chaîne, son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

• **Bilan des forces appliquées à la chaîne.**

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow S} = \vec{P} = m \vec{g}$, le poids de M : force conservative ;

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{table} \rightarrow S} = \vec{N}$, la réaction de la table.

Le glissement s'effectuant sans frottement, la réaction de la table ne travaille pas. Le système est conservatif et à un degré de liberté car le paramètre x suffit à repérer la totalité de la chaîne.

La conservation de l'énergie mécanique permet de déterminer l'équation du mouvement de la chaîne :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_P^{\text{pes}}$$

L'énergie cinétique de la chaîne a déjà été calculée. Son énergie potentielle est la somme de l'énergie potentielle de la partie OB et de l'énergie potentielle de la partie AO . Or celle-ci est nulle car choisie comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur.

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \frac{x^2}{\ell} g = -\frac{1}{2} m \frac{x^2}{\ell} g$$

instant t \qquad \qquad \qquad instant $t=0$

Dérivons l'énergie mécanique par rapport à t :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = m \dot{x} \left(\dot{x} - \frac{g}{\ell} x \right) = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est :

$$\ddot{x} - \frac{g}{\ell} x = 0$$

En posant $\tau^2 = \frac{\ell}{g}$, cette équation devient :

$$\ddot{x} - \frac{1}{\tau^2} x = 0$$

5. La générale solution de cette équation différentielle est :

$$x = A_1 \text{ch}\left(\frac{t}{\tau}\right) + A_2 \text{sh}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\dot{x} = \frac{1}{\tau} \left[A_1 \text{sh}\left(\frac{t}{\tau}\right) + A_2 \text{ch}\left(\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

Avec les conditions initiales :

$$\dot{x}(t=0) = 0 = \left(\frac{1}{\tau}\right) A_2 \Rightarrow A_2 = 0$$

$$x(t=0) = x_0 = A_1 \Rightarrow A_1 = x_0$$

Ainsi :

$$x(t) = x_0 \text{ch}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

La solution est divergente et l'extrémité B de la chaîne s'éloigne indéfiniment de O .

6. Le système est l'anneau M . Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, les vecteurs vitesses et accélérations de M sont :

(i) par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R}_g :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\omega} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\omega}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\omega} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) par rapport au référentiel de la tige \mathcal{R}' :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. • **Bilan des forces appliquées à M**

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m \vec{g}$, le poids du point matériel M ;

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{tige} \rightarrow M} = \vec{R}$, la réaction de la tige sur M .

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à M dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g :

$$\vec{P} + \vec{R} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g)$$

Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

$$m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_r \\ R_\theta \\ R_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\omega}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\omega} \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où le système de trois équations :

$$\bullet \text{ projection sur } \vec{e}_r : \begin{cases} R_r = m(\ddot{r} - \omega^2 r) \end{cases} \quad (1)$$

$$\bullet \text{ projection sur } \vec{e}_\theta : \begin{cases} R_\theta = 2m\dot{r}\dot{\omega} \end{cases} \quad (2)$$

$$\bullet \text{ projection sur } \vec{e}_z : \begin{cases} R_z = mg \end{cases} \quad (3)$$

L'équation de la trajectoire $r(t) = r_0 \text{ch}(\omega t)$ dérivée deux fois par rapport à t montre que :

$$\ddot{r} = \omega^2 r$$

La composante R_x est donc nulle et la réaction du support est :

$$\vec{R} = 2m\dot{r}\omega\vec{e}_\theta + mg\vec{e}_z$$

La réaction du support est perpendiculaire à la tige : il n'y a de frottements.

3. La puissance de \vec{R} dans \mathcal{R}' s'exprime par :

$$\mathcal{P}(\vec{R}_{/\mathcal{R}'}) = \vec{R} \cdot \vec{v}(M_{/\mathcal{R}'}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2m\dot{r}\omega \\ mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\vec{R}_{/\mathcal{R}'}) = 0$$

La réaction du support ne travaille pas dans le référentiel de la tige, car elle est à tout instant normale à la tige et donc à la trajectoire du point M dans le référentiel \mathcal{R}' .

4. La puissance de \vec{R} dans \mathcal{R}_g est :

$$\mathcal{P}(\vec{R}_{/\mathcal{R}_g}) = \vec{R} \cdot \vec{v}(M_{/\mathcal{R}_g}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2m\dot{r}\omega \\ mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\omega \\ 0 \end{pmatrix} = 2m\dot{r}\omega^2 r$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\vec{R}_{/\mathcal{R}_g}) = 2m\dot{r}r\omega^2$$

Malgré l'absence de frottement, la puissance de la force de réaction n'est pas nulle. Si la force, qui est invariante par changement de référentiel, est bien perpendiculaire à la tige, elle n'est pas normale à un déplacement élémentaire le long de la trajectoire de M (la tige n'est

confondue avec la trajectoire de M que dans le référentiel de la tige).

Vous remarquerez que le travail d'une force dépend du référentiel.

5. Le problème est à un degré de liberté car r et θ sont liés par la relation $r(t) = r_0 \text{ch}(\theta)$. L'analyse énergétique demande quelques précautions car le système n'est pas conservatif dans \mathcal{R}_g alors qu'il l'est dans \mathcal{R}' :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(M_{/\mathcal{R}'})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'_g} = \mathcal{P}(\vec{R}_{/\mathcal{R}'}) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m(M_{/\mathcal{R}'}) &= \mathcal{E}_c(M_{/\mathcal{R}'}) + \mathcal{E}_p^{\text{pes}}(M) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + 0 = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\omega)^2] \end{aligned}$$

L'énergie potentielle de pesanteur de M est choisie nulle à l'altitude constante tout au long du mouvement de M . Dérivons \mathcal{E}_m par rapport à t :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(M_{/\mathcal{R}'})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'_g} = m\dot{r}(\dot{r} + \omega^2 r)$$

Identifions cette dérivée à la puissance de la force \vec{R} :

$$m\dot{r}(\dot{r} + \omega^2 r) = 2m\dot{r}r\omega^2 \Rightarrow m\dot{r}(\dot{r} - \omega^2 r) = 0$$

On retrouve l'équation du mouvement de M :

$$\dot{r} - \omega^2 r = 0$$

La solution de cette équation différentielle est divergente le point M s'éloigne indéfiniment de \mathcal{O} .

Mouvement libre d'un oscillateur harmonique

1 Une approche du portrait de phase

1.1. Déterminisme mécanique

Dans les problèmes à un degré de liberté, l'état mécanique du point matériel M , à un instant donné t , est complètement déterminé par la connaissance de sa position et de sa vitesse. Pour toutes les lois d'interaction connues, ces variables d'état indépendantes sont une solution *unique* de l'équation différentielle du mouvement à condition que l'état mécanique du système soit précisé à l'instant $t = 0$ par la donnée des conditions initiales sur la position et la vitesse de M .

Les systèmes mécaniques soumis aux mêmes lois de forces ont une évolution unique pour les mêmes conditions initiales, le temps ne fait que dérouler une réalité déjà déterminée : c'est le **déterminisme mécanique**.

1.2. Portrait de phase

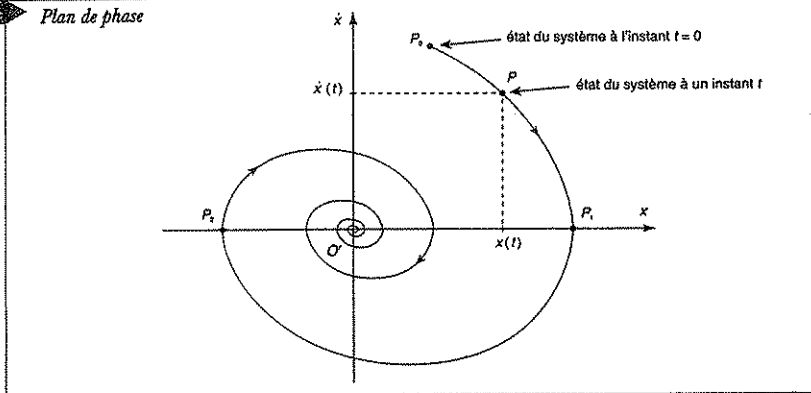
Le système mécanique M est à un degré de liberté, de variable x (paramètre linéaire ou angulaire de position).

Le **plan de phase** est le plan $(O' ; x, \dot{x})$ dans lequel l'état mécanique de M est représenté, à un instant t donné, par le *point de phase* P de coordonnées $(x(t), \dot{x}(t))$.

La **trajectoire de phase** est la courbe décrite par l'évolution du point P au cours du temps pour des conditions initiales données. Elle part du point de phase $P_0(x(0) ; \dot{x}(0))$.

Le **portrait de phase** est l'ensemble des trajectoires de phase obtenues pour diverses conditions initiales.

Fig. 1 Plan de phase



1.3. Propriétés des trajectoires de phase

- **Sens de parcours d'une trajectoire de phase** : toutes les trajectoires de phases sont parcourues dans le même sens ; il s'agit du sens horaire si le point matériel est soumis à un champ de force attractif.
- **Deux trajectoires de phase d'un système libre ne peuvent pas se couper** : il ne peut y avoir deux évolutions différentes du système en partant du point d'intersection comme état initial. Il y a unicité de la solution de l'équation du mouvement de M pour des conditions initiales données.
- **Les trajectoires de phase fermées** correspondent à des mouvements périodiques de M .
- **Les positions d'équilibre** du système sont situées sur l'axe des espaces ($O'x$) car, pour ces points, la vitesse de M est nulle.
- **Les points de rebroussement** de la trajectoire du point matériel sont les points où la vitesse change de signe. Sur la trajectoire de phase, ce sont les points P_1, P_2, \dots
- **L'évolution du système est réversible** si la trajectoire de phase est symétrique par rapport à l'axe des espaces ($O'x$) : à la suite d'un renversement du temps, le système repasse par les mêmes positions avec des vitesses opposées.



2 L'oscillateur harmonique non amorti

2.1. Petites oscillations d'un point au voisinage d'une position d'équilibre stable

2.1.1. Oscillateur harmonique à une dimension

Par définition, un oscillateur harmonique non amorti à une dimension est un point matériel dont l' mouvement est décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

Ce modèle intervient dans de nombreux domaines de la physique (mécanique, électricité, acoustique, thermodynamique, ...) pour l'étude des petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable.

2.1.2. L'approximation harmonique

Nous allons voir qu'il s'agit du mouvement d'un point matériel de masse m soumis à une force de rappel qui, en première approximation, est proportionnelle à l'élongation.

Un point matériel M de masse m , en mouvement sur l'axe $(O; \vec{e}_x)$ d'un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , est soumis à la force conservative :

$$\vec{F}^c = \vec{F}_x(x)\vec{e}_x = -\frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx}\vec{e}_x.$$

Si la position x_0 est une position d'équilibre stable :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\right)_{x=x_0} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0.$$

Posons :

$$k = \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0$$

Appliquer l'approximation harmonique au système mécanique M consiste à assimiler son énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$, au voisinage de la position d'équilibre x_0 , à son développement limité d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p(x) &= \mathcal{E}_p(x_0) + (x-x_0)\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\right)_{x=x_0} + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} \\ \mathcal{E}_p(x) &= \mathcal{E}_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Appliquons maintenant le principe fondamental de la dynamique au point matériel M dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g :

$$\vec{F}^c = F_x(x)\vec{e}_x = m\ddot{x}\vec{e}_x \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx}.$$

En effectuant la dérivée de la fonction $\mathcal{E}_p(x)$ définie en (1), il vient :

$$\frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx} = k(x-x_0) \quad \text{et ainsi :} \quad m\ddot{x} = -k(x-x_0).$$

L'écart à la position d'équilibre est noté X , ce qui revient à prendre la position d'équilibre stable comme origine. Son expression et sa dérivée seconde par rapport au temps sont :

$$X = x - x_0 \quad \text{et} \quad \ddot{x} = \ddot{X}.$$

L'équation du mouvement du point matériel M obtenue est l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0,$$

avec :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x=x_0}$$

Pour un système unidimensionnel, l'approximation harmonique, appliquée à l'énergie potentielle, a ainsi conduit à une équation linéaire du mouvement ; elle est une linéarisation du mouvement.

En première approximation, la force agissant sur le point matériel est une force de rappel proportionnelle à l'élongation (ou écart à l'équilibre) ; le système subit ainsi la force de *rappel élastique linéaire* :

$$\vec{F}^c = -\frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx} \vec{e}_x = -k(x-x_0) \vec{e}_x$$

ou $\vec{F}^c = -kX \vec{e}_x$

Cette expression n'est valable que pour des petits mouvements autour de la position d'équilibre stable.

Commentaires :

- L'oscillateur harmonique est un modèle d'oscillateur linéaire dont le mouvement est décrit par une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
- Le régime est *libre* car l'équation différentielle a un second membre nul : il n'y a pas de terme d'excitation.

2.1.3. Réponse de l'oscillateur harmonique

La solution générale de l'équation différentielle du mouvement de M est :

$$X(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

L'équation différentielle étant du second ordre, sa solution générale est définie à deux constantes d'intégration près : l'amplitude de l'oscillation X_m et la phase à l'origine φ . Ces constantes dépendent des conditions initiales sur la position et la vitesse de M : $X(0) = X_0$ et $\dot{X}(0) = v_0$.

Ces conditions initiales permettent d'obtenir :

$$X_m = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 X_0}$$

L'oscillation d'un oscillateur harmonique est purement sinusoïdale, de pulsation propre ω_0 (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et de période propre T_0 (en s) :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Point maths. La solution générale de l'équation différentielle est une combinaison linéaire de deux solutions particulières linéairement indépendantes et peut se mettre sous la forme :

$$X(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t).$$

2.1.4. Diagramme d'énergie potentielle

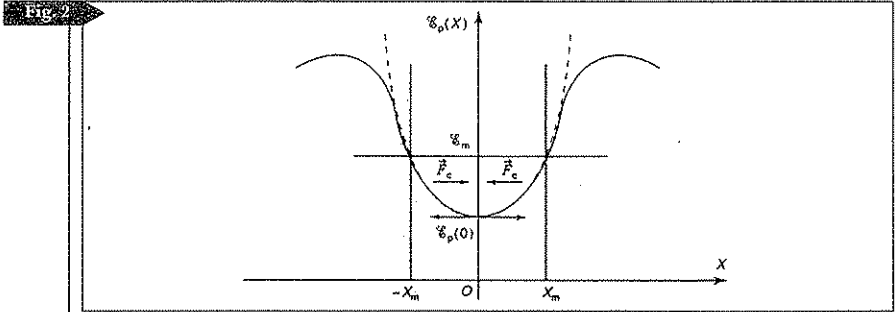
Reprenons l'expression de l'énergie potentielle de la particule M :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2.$$

En notant $X = x - x_0$ l'écart à la position d'équilibre stable x_0 , l'énergie potentielle s'écrit :

$$\mathcal{E}_p(X) = \mathcal{E}_p(0) + \frac{1}{2}kX^2.$$

L'oscillateur harmonique évolue dans un puits de potentiel parabolisable (à cause du premier terme significatif non nul en X^2) au voisinage de la position d'équilibre stable.



La particule ne peut pas sortir de l'intervalle $[-X_m, X_m]$, son mouvement est borné et périodique entre ces deux positions.

2.1.5. Portrait de phase

Le système est conservatif, la conservation de son énergie mécanique s'écrit :

$$\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_I) = \mathcal{E}_c(M/\mathcal{R}_I) + \mathcal{E}_p(M),$$

soit

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \mathcal{E}_p(0) + \frac{1}{2}kX^2.$$

En choisissant comme origine de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(0) = 0$, il vient :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}k\left[\left(\frac{\dot{X}}{\omega_0}\right)^2 + X^2\right] \Rightarrow \left[\left(\frac{\dot{X}}{\omega_0}\right)^2 + X^2\right] = 2\frac{\mathcal{E}_m}{k}$$

Déterminons la valeur de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m imposée par les conditions initiales :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}m[-\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}k[X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 = \frac{1}{2}kX_m^2.$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{\dot{X}}{X_m \omega_0}\right)^2 + \left(\frac{X}{X_m}\right)^2\right] = 1 \quad \text{avec} \quad X_m = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{k}}.$$

Cette équation constitue l'équation des trajectoires de phase de l'oscillateur harmonique non amorti. Dans le plan de phase ($O' ; X, \dot{X}$), ces trajectoires de phase sont des ellipses.

Point maths. L'équation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes avec origine au centre est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Pour des raisons d'homogénéité et de manière à disposer de grandeurs de même dimension (une longueur) sur les deux axes, il est avantageux de tracer le portrait de phase de l'oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 dans le plan ($O' ; X, \frac{\dot{X}}{\omega_0}$). Le portrait de phase est ainsi constitué d'une famille de cercles concentriques de centre O' , orientés dans

le sens horaire et de rayons $X_m = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{k}}$ imposés par les conditions initiales.

Point maths. L'équation d'un cercle de centre $C(x_C, y_C)$ et de rayon R en coordonnées cartésiennes est :

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2.$$

L'équation du cercle de centre O' et de rayon X_m est ici :

$$\left(\frac{\dot{X}}{\omega_0}\right)^2 + X^2 = X_m^2$$

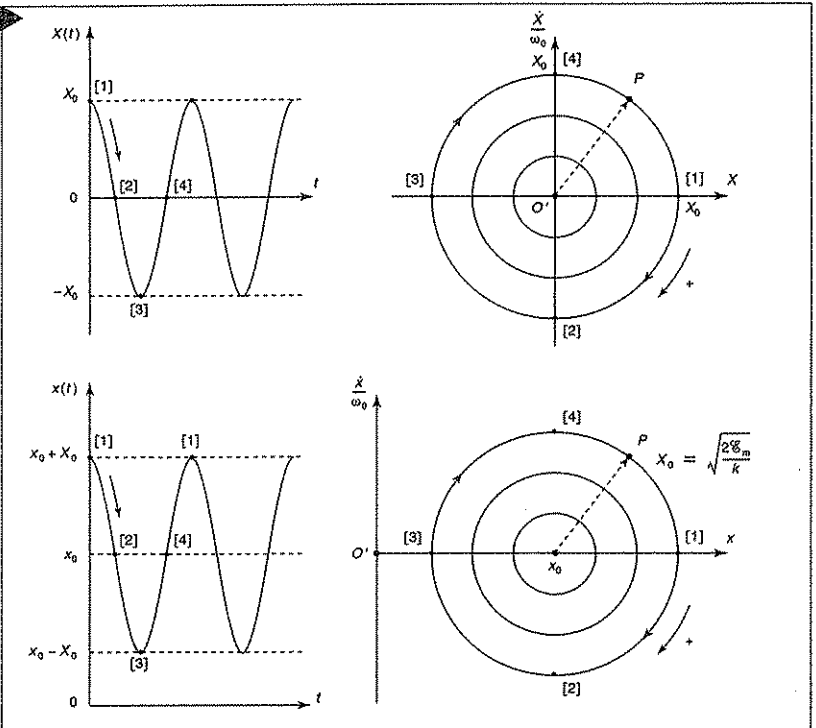
Les graphes suivants (figure 3) ont été obtenus avec les conditions initiales $X(0) = X_0$ et $\dot{X}(0) = 0$, les variations de $X(t) = x(t) - x_0$ et de $x(t)$ au cours du temps sont :

$$X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad x(t) = x_0 + X_0 \cos(\omega_0 t).$$

La trajectoire de phase est parcourue dans le sens [1], [2], [3], [4]... La position de M , associée à chacun de ces états, évolue corrélativement au cours du temps selon l'équation horaire associée suivant [1], [2], [3], [4].

Fig.

Attention
Les oscillations s'effectuent autour de la position d'équilibre stable de la particule.



Commentaires :

- La lecture du point P de l'espace des phases donne la vitesse et la position du mobile.
- Une trajectoire de phase circulaire est la « signature » d'un oscillateur harmonique (x varie sinusoidalement au cours du temps).

- Chaque trajectoire de phase est un cercle isoénergétique correspondant aux états de l'oscillateur de même énergie mécanique \mathcal{E}_m .
- Le mouvement de l'oscillateur est un processus réversible.

3 L'oscillateur harmonique amorti par frottement fluide

3.1. Mise en équation du problème

Prenons maintenant en compte l'influence des frottements sur l'oscillateur harmonique à un degré de liberté. Le point matériel $M(m)$ est en mouvement sur l'axe $(O; \vec{x})$ d'un référentiel galiléen \mathcal{R}_g au voisinage de la position d'équilibre stable x_0 .

L'écart à la position d'équilibre est noté $X = x - x_0$. Remarquons que $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$. Le point M est soumis :

- à la force conservative $\vec{F}^c = -kX\vec{e}_x$;
- à la force de frottement fluide $\vec{F}_f = -h\dot{X}\vec{e}_x$.

La relation fondamentale de la dynamique projetée sur l'axe (Ox) donne :

$$m\ddot{X} = -h\dot{X} - kX, \text{ d'où } \ddot{X} + \frac{h}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0.$$

Dans cette équation, on reconnaît la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur (pulsation des oscillations en l'absence de frottement) : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$$\ddot{X} + \frac{h}{m}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

Plusieurs formes normalisées sont envisageables :

$$(i) \quad \frac{1}{\tau_e} = \frac{h}{m} \Rightarrow \ddot{X} + \frac{1}{\tau_e}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

τ_e est homogène à un temps, nous verrons qu'il est la *durée de relaxation de l'énergie*, ce qui équivaut à la durée de vie de l'oscillateur.

$$(ii) \quad 2\alpha = \frac{h}{m} \Rightarrow \ddot{X} + 2\alpha\dot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

$2\alpha = \frac{1}{\tau_e}$ est le facteur d'amortissement de l'oscillateur.

$$(iii) \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \Rightarrow \ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

Q est le *facteur de qualité*, (sans dimension), de l'oscillateur. Il est relié à la durée de relaxation de l'énergie par la relation :

$$Q = \omega_0\tau_e.$$

L'oscillateur harmonique est ainsi successivement caractérisé par les couples $(\tau_e; \omega_0)$, $(\alpha; \omega_0)$ et $(Q; \omega_0)$.

Pour la suite, nous adopterons l'équation différentielle du mouvement de M sous la *forme canonique* :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad (1)$$

3.2. Résolution de l'équation différentielle du mouvement

Cette équation est une équation différentielle linéaire à coefficients constants et sans second membre : elle correspond à un régime libre.

Les solutions recherchées sont de la forme $X(t) = Ae^{rt}$ (r et A sont des constantes complexes). L'équation caractéristique est obtenue en reportant $X(t)$ dans l'équation (1) :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

De façon à utiliser pour sa résolution le discriminant réduit, nous l'écrivons sous la forme :

$$r^2 + 2\frac{\omega_0}{2Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant réduit s'écrit alors :

$$\Delta' = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$$

En fonction du signe du discriminant réduit, trois natures du mouvement sont envisagées, elles dépendent de l'importance de l'amortissement de l'oscillateur.

Le tableau suivant récapitule les solutions de l'équation différentielle :

Equation	Discriminant réduit	Solutions
$\ddot{X} + 2a\dot{X} + bX = 0$	$\Delta' = a^2 - b$	
	$\Delta' > 0$	$X(t) = e^{-at}(Ae^{\sqrt{\Delta'}t} + Be^{-\sqrt{\Delta'}t})$
	$\Delta' = 0$	$X(t) = (At + B)e^{-at}$
	$\Delta' < 0$	$X(t) = e^{-at}(A\cos\omega_p t + B\sin\omega_p t)$ ou $X(t) = Ce^{-at}\cos(\omega_p t + \varphi)$ avec $\omega_p = \sqrt{ \Delta' }$

La résolution de cette équation différentielle du second ordre fait apparaître à chaque fois deux constantes d'intégration. Elles seront fixées par les conditions initiales :

$$X(0) = X_0 \text{ et } \dot{X}(0) = v_0.$$

3.2.1. Oscillateur faiblement amorti : régime pseudo-périodique

Si $\Delta' < 0$, c'est-à-dire $Q > \frac{1}{2}$, la solution de l'équation différentielle est pseudo-périodique.

Le discriminant réduit étant négatif, posons : $\omega_p^2 = -\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$

Alors :

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q}}$$

ω_p est la pseudo-pulsation de ce régime pseudo-périodique.

La solution de l'équation du mouvement est :

$$X(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} (A \cos \omega_p t + B \sin \omega_p t) \text{ ou } X(t) = C e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega_p t + \varphi).$$

Compte tenu des conditions initiales, elle s'écrit :

$$X(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(X_0 \cos \omega_p t + \left(\frac{v_0 + \frac{\omega_0 X_0}{2Q}}{\omega_p} \right) \sin \omega_p t \right).$$

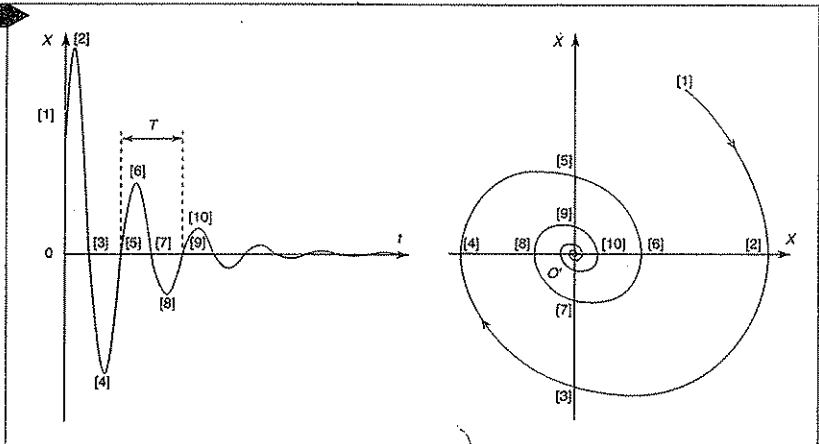
où $X(t) = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{v_0 + \frac{\omega_0 X_0}{2Q}}{\omega_p} \right)^2} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega_p t + \varphi)$, avec $\tan \varphi = - \left(\frac{v_0 + \frac{\omega_0 X_0}{2Q}}{\omega_p X_0} \right)$.

Cette solution peut encore s'écrire $X(t) = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{v_0 + \alpha X_0}{\omega_p} \right)^2} e^{-\frac{t}{\tau_a}} \cos(\omega_p t + \varphi)$ le temps

$\tau_a = \frac{2Q}{\omega_0}$ caractérise la décroissance de l'amplitude des oscillations.

L'évolution de l'élongation en fonction de t et la trajectoire de phase associée au mouvement sont représentées sur le graphe ci-dessous pour un facteur de qualité $Q = 3$. La numérotation permet de suivre corrélativement l'élongation et l'état de l'oscillateur au cours du temps.

Fig. 4



Remarque
La durée de relaxation de l'énergie est reliée à la durée de relaxation de l'amplitude par : $\tau_e = \frac{\tau_a}{2}$; elle décroît donc deux fois plus vite.

• Analyse du portrait de phase

- En présence de frottement, l'énergie mécanique diminue, la trajectoire converge inexorablement et se termine au point d'équilibre stable (état de vitesse nulle sur l'axe des abscisses). Ce point est appelé **point attracteur** du système.
- La trajectoire de phase s'enroule autour du point attracteur O' , le système effectue des oscillations avant d'atteindre sa position d'équilibre. Plus l'amortissement est fort, autrement dit plus l'énergie mécanique est rapidement dissipée, et moins la spirale fait de tours.
- Les forces de frottements sont sources d'irréversibilité pour le système, la trajectoire de phase n'est pas symétrique par rapport à l'axe ($O'X$).

- Analyse de l'évolution de l'élongation au cours du temps
- À cause de l'amortissement dû au frottement, le terme périodique de pulsation ω_p est enveloppé par deux exponentielles $\pm C e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ et tend vers zéro en oscillant.
- Le régime est oscillatoire sans être périodique ; c'est un régime pseudo-périodique, de pseudo-période :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

- La pseudo-période T_p (en présence de frottement) est supérieure à la période propre T_0 (en l'absence de frottement). La pseudo-période est, par définition, l'intervalle de temps qui sépare deux passages consécutifs dans le même sens par la position d'équilibre.
- Dans l'étude expérimentale, l'amortissement du régime pseudo-périodique est caractérisé par le décrement logarithmique :

$$\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(T+t)}\right) = \frac{T_p}{2\tau_c} = \frac{\pi\omega_0}{Q\omega_p} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}$$

La mesure de δ permet ainsi d'accéder au facteur de qualité Q . Plus l'amortissement est faible, plus le système oscille et plus le facteur de qualité est élevé.

- Cas de l'oscillateur très faiblement amorti
- C'est le cas courant des oscillateurs de facteurs de qualité $Q \gg \frac{1}{2}$ pour lesquels $\omega = \omega_0$.
- Le décrement logarithmique et le facteur de qualité peuvent alors s'écrire :

$$\delta = \frac{T_0}{2\tau_c} = \frac{\pi}{Q} \quad \text{et} \quad Q = 2\pi \frac{\tau_c}{T_0}$$

- L'interprétation énergétique du facteur de qualité est ainsi :

$$Q = 2\pi \frac{\tau_c}{T_0} = 2\pi \frac{\mathcal{E}_m(t)}{\mathcal{E}_m(t) + \mathcal{E}_m(t+T)} = 2\pi \frac{\text{énergie mécanique de l'oscillateur}}{\text{énergie perdue pendant une période}}$$

- Le facteur de qualité Q fournit un ordre de grandeur du nombre d'oscillations observables :

$$Q \sim \frac{\tau_c}{T_0} \sim \text{nombre d'oscillations observées.}$$

3.2.2. Oscillateur très amorti : régime aperiodique

Si $\Delta' > 0$, c'est-à-dire si $Q < \frac{1}{2}$, la solution de l'équation différentielle est aperiodique.

La solution de l'équation du mouvement est exponentielle :

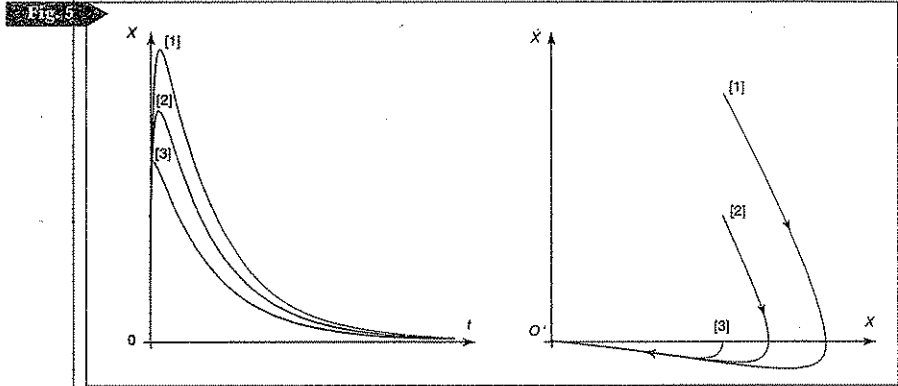
$$X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (Ae^{\sqrt{\Delta'}t} + Be^{-\sqrt{\Delta'}t}), \quad \text{avec} \quad \sqrt{\Delta'} = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}.$$

Remarque
Pour $Q = 5$, l'écart relatif entre les pulsations est de l'ordre de $\frac{1}{200}$ seulement.

Et compte tenu des conditions initiales, elle s'écrit :

$$X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[\frac{1}{\sqrt{\Delta'}} \left(v_0 + \frac{\omega_0}{Q} X_0 \right) \text{sh}(\sqrt{\Delta'} t) + X_0 \text{ch}(\sqrt{\Delta'} t) \right].$$

L'évolution de l'élongation au cours du temps est représentée sur le graphe ci-dessous ainsi que les trajectoires de phase associées.



Pour diverses valeurs de la vitesse initiale, l'élongation passe par un maximum ou tend uniformément vers 0. Il n'y a pas d'oscillations, le mouvement est apériodique et les trajectoires de phases ne s'enroulent pas autour du centre attracteur O' .

3.2.3. Cas limite : régime critique

Si $\Delta' = 0$, c'est-à-dire si $Q = \frac{1}{2}$, la solution de l'équation différentielle est critique.

Ce cas particulier intermédiaire entre le régime pseudo-périodique et le régime apériodique n'est jamais réalisé physiquement exactement.

La solution de l'équation du mouvement est :

$$X(t) = (At + B)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} = (At + B)e^{-\omega_0 t}.$$

Compte tenu des conditions initiales, elle s'écrit :

$$X(t) = [X_0 + (v_0 + \omega_0 X_0)t]e^{-\omega_0 t}.$$

La relaxation critique correspond au retour le plus rapide vers la position d'équilibre.

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigés p. 143

1 Choisir la bonne réponse. L'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique est :

a. $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$;

b. $\ddot{X} - \omega_0^2 X = 0$.

2 L'amplitude d'un oscillateur harmonique dépend-elle des conditions initiales ?

3 Pour un oscillateur harmonique, la période des oscillations dépend-elle de leurs amplitudes ?

4 La forme canonique de l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique amorti est :

a. $\ddot{X} - \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$;

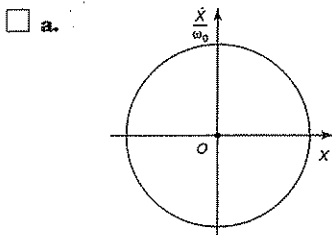
b. $\ddot{X} + \frac{Q}{\omega_0} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$;

c. $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$;

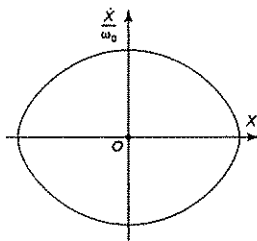
d. $\ddot{X} - \frac{Q}{\omega_0} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$.

5 Comment peut-on passer de l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique amorti à l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique non amorti ?

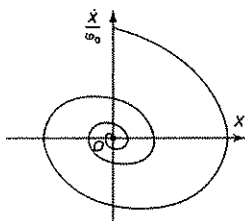
6 Reconnaître parmi ces portraits de phase : l'oscillateur harmonique non amorti, l'oscillateur harmonique amorti en régime pseudo-périodique, l'oscillateur non linéaire et non amorti.



b.



c.



7 Un oscillateur harmonique amorti est caractérisé par le couple (α, ω_0) . Son équation du mouvement normalisée est :

$$\ddot{X} + 2\alpha \dot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

Le caractère apériodique du mouvement implique :

a. $2\alpha > \omega_0$;

b. $\alpha > \omega_0$;

c. $\alpha < \omega_0$;

d. $2\alpha < \omega_0$.

8 Déterminer la pseudo pulsation ω_p des oscillations en fonction de la pulsation propre ω_0 et de α .

9 Un oscillateur harmonique peu amorti correspond à :

a. un facteur de qualité Q élevé ;

b. un facteur de qualité Q faible ;

c. un décrement logarithmique δ élevé ;

d. un décrement logarithmique δ faible.

10 Lorsque l'amplitude des oscillations d'un oscillateur harmonique est multipliée par 2, l'énergie mécanique de cet oscillateur est :

a. multipliée par 2 ;

b. multipliée par 4 ;

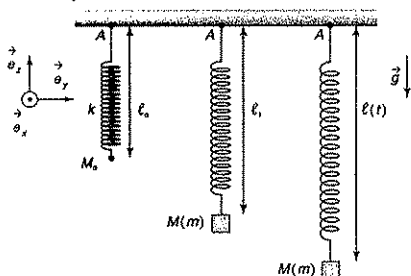
c. multipliée par 8 ;

d. non modifiée.

Savoir appliquer le cours

► Corrigés p. 143

1 Un point matériel M de masse m est attaché à un ressort vertical, l'autre extrémité du ressort étant fixe en A . Le ressort est caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0 . Sa longueur à l'équilibre est notée ℓ_1 .



Un opérateur extérieur impose une longueur ℓ au ressort. Déterminer la force de rappel \vec{T} exercée par le ressort sur M . Quelle est l'énergie potentielle élastique de M ?

2 Déterminer par une analyse dimensionnelle la période propre T_0 des petites oscillations d'un pendule simple non amorti. Cette analyse nécessite de considérer attentivement l'objet étudié pour en extraire les grandeurs caractéristiques : la masse m de la boule M supposée ponctuelle, la longueur ℓ du fil, son angle θ par rapport à la verticale et l'accélération de la pesanteur \vec{g} ; elle intervient dans la force de pesanteur \vec{P} qui traduit l'action de la Terre sur M .

3 Un oscillateur harmonique amorti est caractérisé par le couple $(\tau_e ; \omega_0)$. Son équation du mouvement normalisée est :

$$\ddot{X} + \frac{1}{\tau_e} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

Cet oscillateur représente le mouvement du pendule simple de la question précédente, dans le cas d'oscillations de faible amplitude. Les frottements que l'air exerce sur M sont décrits par la force de frottement fluide :

$$\vec{F}_f = -h\vec{v}.$$

Le coefficient de proportionnalité h est positif et \vec{v} est la vitesse du point M exprimée dans le référentiel d'étude galiléen \mathcal{R}_g . Identifier les coefficients τ_e et ω_0 .

4 Pour l'oscillateur de l'exercice précédent, caractériser les différents régimes d'amortissement en fonction des valeurs τ_e .

5 Écrire la solution générale de cette équation dans le cas d'un régime aperiodique puis dans le cas du régime critique.

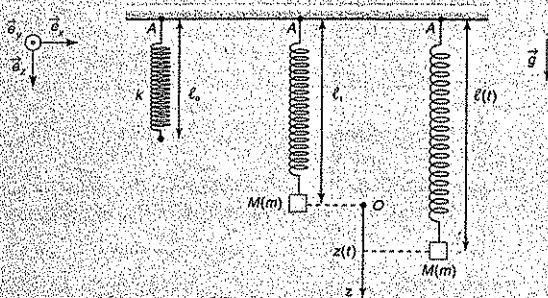
6 Retrouver et interpréter la définition énergétique du temps de relaxation τ_e dans le cas du mouvement pseudo-périodique d'un pendule faiblement amorti :

$$\tau_e = T_0 \frac{\mathcal{E}_m(t)}{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t + T_p)}$$

1 – Oscillateur harmonique non amorti : le ressort vertical

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Un point matériel M de masse m est attaché à un ressort vertical, l'autre extrémité du ressort étant fixe en A . La masse du ressort est négligeable et, dans son domaine d'élasticité, le ressort non tendu est caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0 .



L'ensemble se trouve dans le champ de pesanteur terrestre uniforme caractérisé par le vecteur $\vec{g} = g\vec{e}_z$, avec $g = \|\vec{g}\| > 0$.

La position de l'objet ponctuel M est repérée par son élongation z , sur l'axe du mouvement ($O; \vec{e}_z$), à partir de la position d'équilibre stable située en O .

Les frottements de l'air sont négligés.

1 Étude statique

Quelle est la longueur ℓ_1 du ressort à l'équilibre ?

2 Étude dynamique

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation du mouvement de M .

3 Étude énergétique

Exprimer l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du point M . L'origine de l'énergie potentielle correspond à la position d'équilibre de M , on aura ainsi $\mathcal{E}_p = 0$ pour $z = 0$. Retrouver l'équation du mouvement de M .

4 A l'instant $t = 0$, l'objet ponctuel M est déplacé de z_0 par rapport à O et lâché sans vitesse initiale. Exprimer l'allongement z du ressort (à partir de la position O) en fonction de t . En déduire la longueur ℓ du ressort et tracer son évolution en fonction de t .

5 L'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(z)$ et l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\dot{z})$ sont des fonctions périodiques du temps. Déterminer la période T_0' de ces fonctions en fonction de la période propre T_0 de l'oscillateur. Montrer que les valeurs moyennes temporelles de $\mathcal{E}_p(z)$ et $\mathcal{E}_c(\dot{z})$ sont égales. Commenter.

résolution méthodique

Reprenons l'étude systématique d'un problème de mécanique. Le système étudié est en régime libre, l'équation du mouvement auquel on accède est sans second membre. Nous allons nous intéresser ici à la résolution de cette équation.

[1] Définir le système étudié.

[2] Choisir le référentiel d'étude galiléen \mathcal{R}_g .

[3] Effectuer le bilan des forces appliquées au système. Le système est-il conservatif ?

[4] Préciser le nombre de degrés de liberté du problème.

[5] Mise en équation du problème : l'équation différentielle du mouvement du point matériel M est obtenue :

(i) soit par application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel d'étude galiléen ;

(ii) soit à partir de l'intégrale première de l'énergie si le système est conservatif et à un degré de liberté.

① L'équation différentielle vérifiée par l'écart à la position d'équilibre stable de M doit être mise sous une forme canonique (ou normalisée), par exemple :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

terme d'amortissement

X représente la position du point M par rapport à sa position d'équilibre.

② Identifier la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q aux paramètres de l'oscillateur.

[6] Résolution de l'équation différentielle.

[7] Interprétation physique des résultats obtenus.



° Première analyse : le ressort est ici placé verticalement, situation très souvent rencontrée. Nous allons voir qu'un bon choix de l'origine O permet d'éliminer le poids de l'objet M de l'équation du mouvement.

Le système est le point M , son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_g galiléen.

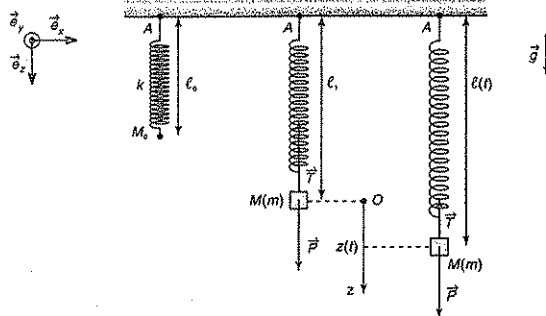
° Bilan des forces appliquées au point M :

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids de M , force conservative ;

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du ressort, force conservative.

⇒ Le système est conservatif, il conserve son énergie mécanique au cours du temps.





La projection des forces appliquées à M suivant \vec{e}_z est :

$$\bullet \vec{T} = -k(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM}_0) = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z;$$

$$\bullet \vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z.$$

Le mouvement est à un degré de liberté : la variable de position est z .

$$\bullet \text{Principe fondamental de la statique : } \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}.$$

$$\text{Suivant } \vec{e}_z, \text{ la condition d'équilibre est : } -k(\ell_1 - \ell_0) + mg = 0. \quad (1)$$

D'où l'allongement du ressort à l'équilibre :

$$\ell_1 = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

• *Interprétation physique du résultat* : il n'est pas inutile de constater que la longueur du ressort à l'équilibre est supérieure à sa longueur initiale.

» 2 Le point M est en mouvement, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{a}(M/\mathcal{R}_0).$$

Sa projection suivant \vec{e}_z est :

$$-k(\ell - \ell_0) + mg = m\ddot{z}.$$

$$\text{Or } \ell = \ell_1 + z$$

$$\Rightarrow -k(\ell_1 + z - \ell_0) + mg = \underbrace{-k(\ell_1 - \ell_0) + mg}_{0} - kz = m\ddot{z}.$$

Dans cette équation, se retrouve l'équation (1).

L'équation du mouvement de M est donc :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

Remarquez que le terme de pesanteur g n'apparaît pas dans cette équation.

Le point M est un oscillateur harmonique de pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3

Les forces appliquées au point M sont conservatives et le mouvement est à un seul degré de liberté. L'équation du mouvement est accessible par une étude énergétique. L'énergie potentielle est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle élastique, nous allons les exprimer successivement.

• L'énergie potentielle élastique est obtenue en calculant le travail élémentaire de la tension \vec{T} du ressort :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}(\vec{T}/\mathcal{M}_s) &= \vec{T} \cdot d\vec{OM} \\ &= -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_z \cdot dz \vec{e}_z = -k(\ell_1 + z - \ell_0) dz = -k(\ell_1 - \ell_0) dz - kz dz \\ \delta \mathcal{W}(\vec{T}/\mathcal{M}_s) &= -d \left[k(\ell_1 - \ell_0)z + \frac{1}{2} kz^2 \right] = -d \mathcal{E}_P^{\text{élas}}. \end{aligned}$$

L'énergie potentielle élastique est définie à une constante additive près :

$$\mathcal{E}_P^{\text{élas}} = k(\ell_1 - \ell_0)z + \frac{1}{2} kz^2 + A.$$

L'énergie potentielle de pesanteur s'obtient de la même façon :

$$\delta \mathcal{W}(\vec{P}/\mathcal{M}_s) = \vec{P} \cdot d\vec{OM} = mg \vec{e}_z \cdot dz \vec{e}_z = mg dz = -d(-mgz) = -d \mathcal{E}_P^{\text{pes}}.$$

Elle est définie à une constante près :

$$\mathcal{E}_P^{\text{pes}} = -mgz + B.$$

D'où l'énergie potentielle totale de la particule M :

$$\mathcal{E}_P(z) = \mathcal{E}_P^{\text{élas}} + \mathcal{E}_P^{\text{pes}} = k(\ell_1 - \ell_0)z + \frac{1}{2} kz^2 - mgz + C.$$

La condition $\mathcal{E}_P(0) = 0$ impose $C = 0$:

$$\mathcal{E}_P(z) = k(\ell_1 - \ell_0)z + \frac{1}{2} kz^2 - mgz, \text{ soit } \mathcal{E}_P(z) = \frac{(k(\ell_1 - \ell_0) - mg)z + \frac{1}{2} kz^2}{0}.$$

Dans l'expression de l'énergie potentielle se retrouve l'équation (1). En conséquence, l'énergie potentielle de M est :

$$\mathcal{E}_P(z) = \frac{1}{2} kz^2.$$

L'énergie potentielle de pesanteur est ainsi masquée et n'apparaît pas dans le bilan final.

• L'énergie cinétique de M est :

$$\mathcal{E}_C(M/\mathcal{M}_s) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2$$

et son énergie mécanique est :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C(M/\mathcal{M}_s) + \mathcal{E}_P(M) = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} kz^2}_t = \underbrace{\frac{1}{2} kz_0^2}_{t=0}$$

Le système étant conservatif, cette énergie mécanique est une constante du mouvement :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = m\dot{z}\left(\ddot{z} + \frac{k}{m}z\right) = 0.$$

On retrouve l'équation du mouvement associée à un oscillateur harmonique de pulsation

propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

4

Il faut reconnaître immédiatement l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique non amorti :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

Sa solution générale est purement sinusoïdale et définie à deux constantes d'intégration près : l'amplitude de l'oscillation X_m et la phase à l'origine φ :

$$X(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Ces constantes dépendent des conditions initiales sur la position et la vitesse de M .

On peut aussi écrire la solution générale sous la forme :

$$X(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t).$$

La solution générale de cette équation différentielle correspond à un mouvement de M purement sinusoïdal :

$$z(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t).$$

La vitesse de la particule est : $\dot{z} = \omega_0[-A_1 \sin(\omega_0 t) + A_2 \cos(\omega_0 t)]$.

Les conditions initiales permettent de définir A_1 et A_2 :

$$\dot{z}(0) = A_2 \omega_0 = 0 \Rightarrow A_2 = 0; \quad z(0) = A_1 = z_0 \Rightarrow A_1 = z_0.$$

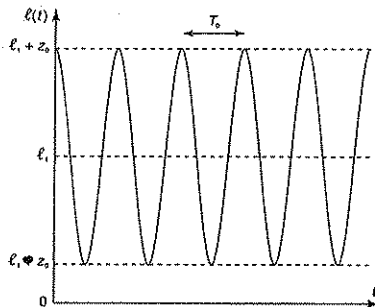
La solution du problème est :

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t)$$

Or $\ell = \ell_1 + z$, d'où :

$$\ell(t) = \ell_1 + z_0 \cos(\omega_0 t)$$

Le graphe suivant permet de visualiser l'évolution de la longueur du ressort au cours du temps.



Les oscillations s'effectuent autour de la position d'équilibre stable ℓ_1 avec une amplitude constante et égale à z_0 . La période des oscillations est :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

5

La valeur moyenne d'une fonction $f(t)$ sur une durée T est :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Il est utile de retenir les moyennes temporelles :

$$\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle = 0 \text{ et } \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$$

Connaissant $z(t)$, nous pouvons exprimer l'énergie potentielle de M :

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t), \text{ donc } \mathcal{E}_P(z) = \frac{1}{2} k z^2 = \frac{1}{2} k z_0^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Sa moyenne temporelle est :

$$\langle \mathcal{E}_P(t) \rangle = \frac{1}{2} k z_0^2 \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{4} k z_0^2 = \frac{\mathcal{E}_m}{2}$$

On obtient l'énergie cinétique ainsi :

$$\dot{z}(t) = -\omega_0 z_0 \sin(\omega_0 t), \text{ donc } \mathcal{E}_C(\dot{z}) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 z_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k z_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Sa moyenne temporelle est :

$$\langle \mathcal{E}_C(t) \rangle = \frac{1}{2} k z_0^2 \langle \sin^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{4} k z_0^2 = \frac{\mathcal{E}_m}{2}$$

Les fonctions $\mathcal{E}_P(t)$ et $\mathcal{E}_C(t)$ sont périodiques de période T'_0 :

En utilisant la formule trigonométrique $\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}(1 + \cos[2(\omega t + \varphi)])$, l'énergie potentielle s'écrit :

$$\mathcal{E}_P(z) = \frac{1}{4} k z_0^2 (1 + \cos(2\omega_0 t)) = \frac{1}{4} k z_0^2 (1 + \cos(\omega'_0 t)) \text{ avec } \omega'_0 = 2\omega_0$$

Ainsi : $\frac{2\pi}{\omega'_0} = \frac{2\pi}{2\omega_0} \Rightarrow$

$$T'_0 = \frac{T_0}{2}$$

• **Analyse des résultats**

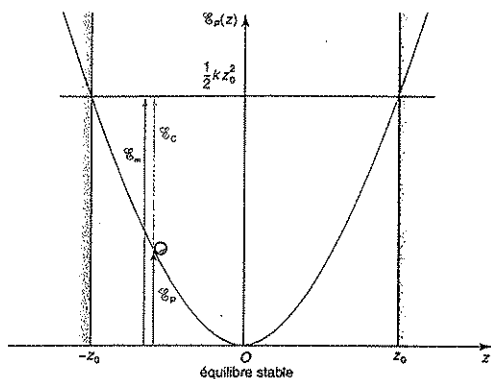
• L'énergie mécanique de l'oscillateur est constante, sa valeur est proportionnelle au carré de l'amplitude z_0 des oscillations :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} k z_0^2$$

• Il y a équipartition en moyenne de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique de M :

$$\langle \mathcal{E}_P(t) \rangle = \langle \mathcal{E}_C(t) \rangle = \frac{\mathcal{E}_m}{2}$$

- La particule est piégée dans une cuvette de potentiel. Il y a échange permanent des formes potentielle et cinétique au cours du mouvement de M . L'aspect spatial de cet échange est représenté par le diagramme d'énergie potentielle :



en conclusion

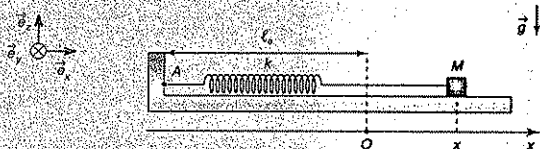
Le problème est traité dans le cadre de l'approximation harmonique réservée à des petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable. Si les amplitudes des oscillations sont importantes, notre modèle cesse d'être valable.

Un opérateur extérieur injecte de l'énergie dans l'oscillateur et le laisse évoluer librement. En l'absence de frottement, l'énergie est piégée dans l'oscillateur et passe réversiblement de sa forme potentielle à sa forme cinétique alors que l'oscillateur oscille indéfiniment avec la même amplitude. En pratique nous savons que ces oscillations vont diminuer progressivement jusqu'à ce qu'elles ne soient plus perceptibles, ces effets d'amortissement vont être pris en compte dans l'exercice qui suit.

**2 – Oscillateur harmonique amorti :
le ressort horizontal**

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Un point matériel M de masse m est lié à un ressort horizontal, l'autre extrémité du ressort étant fixe en A . Dans son domaine d'élasticité, le ressort non tendu est caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0 .



Le point M glisse le long de l'axe $(O; \vec{e}_x)$ à partir de sa position d'équilibre située en O et est repéré sur cet axe par son abscisse x .

Il existe entre le mobile et le support un frottement de type visqueux. La force de frottement est de la forme :

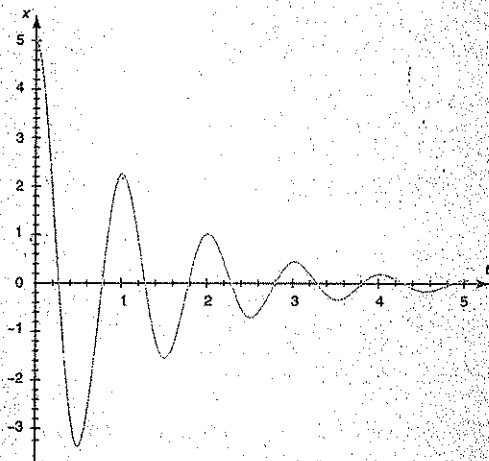
$$\vec{F}_f = -h \dot{x} \vec{e}_x, \text{ où la constante } h \text{ est positive.}$$

On posera : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$.

L'oscillateur harmonique est caractérisé par le couple (Q, ω_0) .

À l'instant $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0 (avec $x_0 \neq 0$).

- 1 Faire le bilan des forces appliquées au mobile lorsqu'il se trouve en un point d'abscisse x quelconque. Établir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.
- 2 Écrire l'énergie mécanique \mathcal{E}_m de M en fonction de x et \dot{x} . Le système est-il conservatif ? Que vaut $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt}$? Retrouver l'équation différentielle du mouvement de M .
- 3 La figure ci-dessous représente l'évolution de x au cours du temps (x est exprimé en cm et t en s) :



Le mouvement est oscillatoire amorti. Quelle condition sur Q , la nature de ce mouvement implique-t-elle ? Déterminer la pseudo-pulsation ω_p associée à ce mouvement en fonction du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0 . En déduire la pseudo-période T_p des oscillations en fonction de Q et T_0 .

- 4 Résoudre l'équation différentielle du mouvement en exprimant x en fonction de t , Q , x_0 , ω_0 et ω_p .

- 5 La décroissance des oscillations est caractérisée par le décrement logarithmique δ défini de la façon suivante :

$$\delta = \ln \left(\frac{x(t)}{x(T_p + t)} \right)$$

Exprimer δ en fonction de Q .

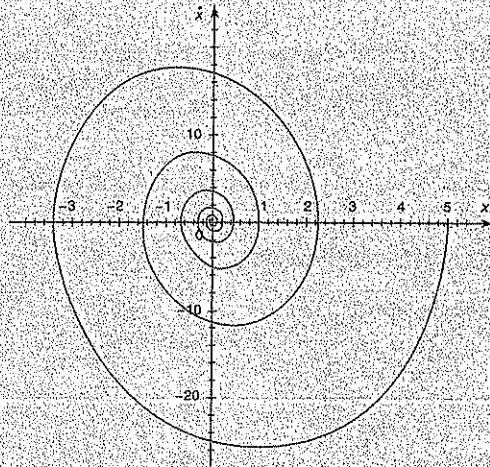
- 6 La masse m étant de 100 g, exploiter le graphe précédent et déterminer successivement par lecture graphique :

- l'élongation initiale x_0 ;
- la pseudo-période T_p ;
- le décrement logarithmique δ .

En déduire :

- le facteur de qualité Q ;
- la période propre T_0 ;
- le coefficient d'amortissement h ;
- la constante de raideur k du ressort.

- 7 Le portrait de phase de l'oscillateur harmonique amorti est représenté ci-dessous dans le plan de phase ($O ; x, \dot{x}$).



Déterminer successivement par lecture graphique :

- la nature du régime de l'oscillateur ;
- la vitesse initiale v_0 ;
- l'élongation initiale x_0 ;
- l'élongation finale x_F ;
- le décrement logarithmique δ .

Vos résultats sont-ils en accord avec l'analyse effectuée en 6. ?

- 8 En se plaçant dans le cas d'un oscillateur très peu amorti ($Q \gg \frac{1}{2}$), montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m(t)$ du système vérifie par approximation :

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(0)e^{-\frac{t}{\tau_e}}$$

Exprimer τ_e en fonction de Q et ω_0 .

- 9 En déduire l'énergie $\Delta\mathcal{E}_m$ perdue au cours d'une pseudo-période, c'est-à-dire entre les instants t et $t+T_p$. Exprimer Q en fonction de $\mathcal{E}_m(t)$ et $\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t+T_p)$. Proposer une interprétation énergétique du facteur de qualité Q dans le cas d'un amortissement très faible. Définir τ_e en fonction de T_0 , de $\mathcal{E}_m(t)$ et $\Delta\mathcal{E}_m$.

Donnée : le développement limité au premier ordre de e^ε au voisinage de 0 est :

$$e^\varepsilon = 1 + \varepsilon.$$

résolution méthodique

- 1
 • Première analyse : le ressort est placé horizontalement. Le problème précédent s'illustrait du diagramme d'énergie potentielle, celui-ci s'appuie sur l'équation horaire et le portrait de phase de l'oscillateur. Le système à un degré de liberté est soumis à une force de frottement fluide dissipatrice de l'énergie mécanique et n'est pas conservatif.

Le but de cette partie est d'arriver à la forme canonique de l'équation du mouvement de M . L'énoncé impose de caractériser l'oscillateur par le couple (Q, ω_0) . Nous allons reprendre l'étude systématique présente dans l'exercice précédent.

Le système est le mobile ponctuel M .

Le référentiel d'étude galiléen est le référentiel terrestre \mathcal{R}_g .

• Bilan des forces appliquées au point M

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids du point matériel M ;

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du ressort ;

$\vec{F}_{\text{support} \rightarrow M} = \vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_f$, la réaction du support.

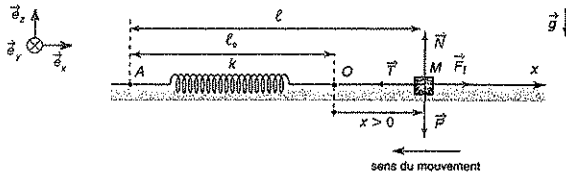
La réaction du support sur M se décompose en deux forces :

(i) la réaction normale \vec{N} qui équilibre le poids \vec{P} du mobile ;

(ii) la force de frottement \vec{F}_f tangentielle au support qui s'oppose au déplacement du mobile.

Expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{T} = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_g).$$



Attention : La tension du ressort est une force de rappel, elle est orientée de façon à ramener le mobile vers sa position d'équilibre stable.
La force de frottement s'oppose au mouvement de M .

Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - h \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où les équations :

• projection sur \vec{e}_x : $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0$ (1)

• projection sur \vec{e}_z : $N = mg$ (2)

(2) La réaction du support équilibre le poids et s'oppose à la pénétration de M dans le support.

(1) L'équation différentielle du mouvement de M qui a lieu selon \vec{e}_x est :

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

En adoptant le paramétrage indiqué, l'équation différentielle s'exprime sous sa forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

2

Pour arriver à l'équation du mouvement de M , l'énoncé suggère d'effectuer une analyse énergétique. Attention, le système n'est pas conservatif et nous allons voir ici l'intérêt du *théorème de la puissance mécanique*. Le résultat obtenu est bien évidemment le même que dans la question précédente.

Le poids \vec{P} est une force conservative, mais cette force ne travaille pas car elle est à tout instant perpendiculaire à la trajectoire du mobile. D'autre part, la cote z de M reste constante et nulle tout au long du mouvement. L'énergie potentielle de pesanteur est constante, nous la prendrons égale à 0 en choisissant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur à $z = 0$.

$$\mathcal{E}_P^{\text{pes}} = 0.$$

La tension \vec{T} du ressort est une force conservative. En choisissant O comme origine de l'énergie potentielle élastique :

$$\mathcal{E}_P^{\text{elas}}(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

La réaction \vec{R} du support n'est pas une force conservative.

L'énergie mécanique du point M s'écrit :

$$\mathcal{E}_m(x, \dot{x}) = \mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g) + \mathcal{E}_P^{\text{élas}}(M) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (3)$$

Le système n'étant pas conservatif, le théorème de la puissance mécanique donne :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}(\vec{F}_{\mathcal{R}_g}^{\text{nc}}) = \vec{R} \cdot \vec{v} = (\vec{N} + \vec{F}_f) \cdot \vec{v} = \vec{F}_f \cdot \vec{x}\vec{x} = -h\dot{x}^2 < 0.$$

La réaction normale au support ne travaille pas, la réaction tangentielle est dissipative de l'énergie mécanique.

Ainsi :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = -h\dot{x}^2 < 0$$

L'énergie mécanique est dissipée sous forme de chaleur par la force de frottement fluide.

Dérivons l'expression (3) de l'énergie mécanique :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = m\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x\right) = -h\dot{x}^2, \text{ soit } m\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x\right) = 0.$$

Le système est en mouvement et x vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

C'est bien l'équation du mouvement obtenue dans la question précédente.

3

Pour résoudre l'équation différentielle linéaire et du second ordre du mouvement de M , il n'est pas nécessaire de reprendre la totalité du raisonnement. Il est conseillé d'apprendre la forme des solutions générales à partir du signe du discriminant réduit.

[6] Résolution de l'équation différentielle

Les solutions recherchées sont de la forme $X(t) = Ae^{rt}$

① Écrire l'équation caractéristique en reportant $X(t)$ dans l'équation du mouvement :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

Pour la résoudre, il est avantageux de la mettre sous la forme :

$$r^2 + 2\frac{\omega_0}{2Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

② Calculer le discriminant réduit :

$$\Delta' = \omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right).$$

En fonction du signe du discriminant réduit, trois natures du mouvement sont envisagées :

(i) $\Delta' < 0$ et $Q > \frac{1}{2}$: régime pseudo-périodique ;

(ii) $\Delta' > 0$ et $Q < \frac{1}{2}$: régime aperiodique ;

(iii) $\Delta' = 0$ et $Q = \frac{1}{2}$: régime critique.

③ L'équation différentielle étant du second ordre, écrire sa solution générale en faisant apparaître deux constantes.

④ La solution du problème est obtenue en déterminant ces constantes à partir des conditions initiales.

Les solutions de l'équation différentielle du mouvement sont de la forme $x(t) = Ae^{rt}$ (où r et A sont des constantes complexes). L'équation caractéristique est obtenue en reportant cette solution dans l'équation du mouvement :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

De façon à utiliser, pour sa résolution, le *discriminant réduit* nous l'écrivons sous la forme :

$$r^2 + 2\frac{\omega_0}{2Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant réduit s'écrit alors :

$$\Delta' = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right).$$

Le mouvement observé est pseudo-périodique, dans ce cas : $\Delta' < 0$.

Cette condition nécessite $\frac{1}{4Q^2} - 1 < 0 \Rightarrow \boxed{Q > \frac{1}{2}}$

La pseudo-pulsation ω_p vérifie l'équation $\Delta' = -\omega_p^2$, d'où :

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

La pseudo-période est :

$$\boxed{T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \geq T_0}$$

• *Interprétation physique du résultat* : l'amortissement « allonge » la période des oscillations comparativement à la période propre du mouvement sans amortissement.

► 4 La solution générale de l'équation est :

$$x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \cos \omega_p t + B \sin \omega_p t) \quad \text{ou} \quad x(t) = C e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega_p t + \varphi).$$

Pour obtenir la solution du problème, il faut prendre en compte les conditions initiales sur la position et la vitesse de M .

Choisissons la première solution. La vitesse du mobile est :

$$\dot{x}(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[\left(B\omega_p - \frac{A\omega_0}{2Q} \right) \cos \omega_p t - \left(A\omega_p + \frac{B\omega_0}{2Q} \right) \sin \omega_p t \right].$$

À l'instant $t = 0$, $x(0) = x_0 = A$ et $\dot{x}(0) = B\omega_p - \frac{A\omega_0}{2Q} = 0$.

En conséquence :

$$\begin{cases} A = x_0 \\ B = \frac{x_0 \omega_0}{2Q\omega_p} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(\cos \omega_p t + \frac{1}{2Q\omega_p} \sin \omega_p t \right)}$$

• *Interprétation physique du résultat* : l'amplitude des oscillations de M décroît exponentiellement entre les deux courbes enveloppes $x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ et $(-x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t})$.

5

Pour caractériser la décroissance des oscillations, on introduit une grandeur facilement mesurable expérimentalement : le **décroissement logarithmique**. Pour simplifier les calculs, nous allons adopter, comme solution de l'équation du mouvement de M , la seconde solution proposée dans la question précédente sans chercher à préciser les constantes C et φ .

Adoptons la solution $x(t) = Ce^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega_p t + \varphi)$.

Après une pseudo-période, elle devient :

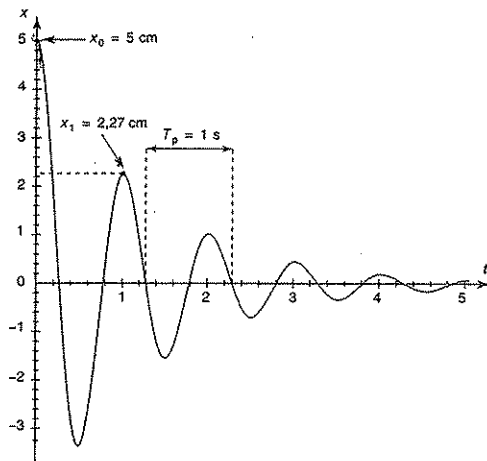
$$x(t + T_p) = Ce^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t + T_p)} \cos[\omega_p(t + T_p) + \varphi] = Ce^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T_p} \cos[\omega_p t + \varphi + 2\pi] = x(t) e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T_p}$$

Le rapport des élongations est $\frac{x(t)}{x(T_p + t)} = e^{\frac{\omega_0}{2Q}T_p}$, donc :

$$\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(T_p + t)}\right) = \frac{\omega_0}{2Q}T_p. \text{ Or } T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

• **Analyse du résultat** : la mesure du décroissement logarithmique permet d'accéder au facteur de qualité de l'oscillateur.

6



La lecture directe du graphique donne :

- l'élongation initiale $x_0 = 5 \text{ cm}$;
- la pseudo-période $T_p = 1 \text{ s}$;
- le décroissement logarithmique $\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(T_p + t)}\right) = \ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right)$

$$\text{A.N. : } \delta = \ln\left(\frac{5}{2,27}\right) = 0,79.$$

Revenons à quelques relations développées précédemment :

• le facteur de qualité Q s'obtient par la relation :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \Rightarrow Q = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 + 1}.$$

A.N. : $Q = 4$;

• la période propre T_0 est donnée par $T_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} T_p = 0,992 T_p$.

A.N. : $T_p = 992$ ms.

Analyse du résultat : l'écart relatif entre la période propre et la pseudo-période n'est que de 1,6 % pour un facteur de qualité de 4. Il est donc possible de mesurer avec une bonne précision la période propre d'un oscillateur en minimisant les frottements. Mais c'est en réalité une pseudo-période que nous mesurons.

• Le coefficient d'amortissement h répond à $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \Rightarrow h = \frac{2\pi m}{T_0 Q}$;

A.N. : $h = 0,16 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$.

• La constante de raideur k du ressort est : $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m\omega_0^2 = m \frac{4\pi^2}{T_0^2}$;

A.N. : $k = 4,01 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

➤ **7** La trajectoire de phase est une spirale correspondant à un régime pseudo-périodique de l'oscillateur. Elle converge et semble attirée par la position d'équilibre stable O ; en ce sens, ce point est appelé *attracteur*. Plus l'amortissement est fort, plus l'énergie mécanique se dissipe vite et moins la spirale fait de tours autour de O .

Tous les points de l'axe des x sont des états mécaniques de l'oscillateur correspondant à des vitesses nulles : la vitesse initiale du mobile est nulle $v_0 = 0$.

L'élongation initiale est $x_0 = 5$ cm.

L'état mécanique final de l'oscillateur est en O : point d'équilibre stable d'abscisse $x_f = 0$ et de vitesse nulle.

Au cours d'une pseudo-période, l'oscillateur passe de l'état mécanique $(x ; \dot{x})$: (5 cm ; 0) à (2,27 cm ; 0).

$$\Rightarrow \delta = \ln\left(\frac{5}{2,27}\right) = 0,79.$$

Ces résultats sont compatibles avec les résultats obtenus dans la question précédente.

➤ **8**

Le cas de faibles amortissements permet d'accéder à des expressions simples de l'élongation et de l'énergie de l'oscillateur. Avec un Q suffisamment grand, nous négligerons les termes en $\frac{1}{Q}$.

Revenons à l'expression de l'élongation $x(t)$:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(\cos \omega_p t + \frac{1}{2Q} \frac{\omega_0}{\omega_p} \sin \omega_p t \right).$$

Considérons d'abord l'effet de ce très faible amortissement sur la pseudo pulsation :

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0.$$

Ainsi pour un oscillateur peu amorti et donc de facteur de qualité élevé, nous pourrions confondre ω_p et ω_0 .

Si $Q = 5$, l'écart relatif entre la pseudo-pulsation et la pulsation propre n'est que de 0,5 %. Cette approximation est donc rapidement légitime.

L'élongation devient :

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{1}{2Q} \sin \omega_0 t \right) \quad (4)$$

En poursuivant les approximations, le terme en sinus est négligeable et

$$x(t) \approx \underbrace{x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}}_{\substack{\text{décroissance} \\ \text{exponentielle} \\ \text{de l'amplitude}}}$$

que l'on peut écrire encore :

$$x(t) \approx x_0 e^{-\frac{t}{\tau_a}} \cos \omega_0 t$$

• *Analyse du résultat* : le temps $\tau_a = \frac{2Q}{\omega_0}$ est la durée de relaxation relative à l'amplitude des oscillations, il caractérise leur décroissance.

Dérivons l'expression (4) de $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[-\frac{\omega_0}{2Q} \left(\cos \omega_0 t + \frac{1}{2Q} \sin \omega_0 t \right) + \omega_0 \left(-\sin \omega_0 t + \frac{1}{2Q} \cos \omega_0 t \right) \right]$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(1 + \frac{1}{4Q^2} \right) \sin \omega_0 t \text{ d'où par approximation :}$$

$$\dot{x}(t) \approx -\omega_0 x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \sin \omega_0 t$$

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique du point M :

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_P^{\text{élas}}(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2.$$

Exprimons d'abord l'énergie mécanique du système à l'instant $t = 0$, le mobile étant abandonné sans vitesse initiale, l'énergie mécanique est exclusivement constituée de l'énergie potentielle élastique :

$$\mathcal{E}_m(0) = \mathcal{E}_C(0) + \mathcal{E}_P^{\text{élas}}(0) = \frac{1}{2} k x_0^2.$$

Déterminons l'énergie mécanique à l'instant t :

$$\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t} \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t} \sin^2 \omega_0 t.$$

$$\mathcal{E}_p^{\text{elas}}(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \cos^2 \omega_0 t$$

$\mathcal{E}_m(t) = \frac{1}{2}kx_0^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}$; on reconnaît dans cette expression l'énergie mécanique initiale $\mathcal{E}_m(0)$:

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(0) e^{-\frac{t}{\tau_e}}$$

* **Analyse du résultat** : le temps $\tau_e = \frac{Q}{\omega_0}$ est la durée de relaxation relative à l'énergie, caractérise la durée de vie des oscillations.

Remarquons que :

$$\underbrace{\tau_a}_{\text{décoissance de l'amplitude}} = \underbrace{2\tau_e}_{\text{décoissance de l'énergie}}$$



Le cas des faibles amortissements permet une interprétation énergétique du facteur de qualité Q et du temps de relaxation de l'énergie τ_e .

L'énergie mécanique à l'instant $t + T_p$ est :

$$\mathcal{E}_m(t + T_p) = \mathcal{E}_m(0) e^{-\frac{(t+T_p)}{\tau_e}} = \mathcal{E}_m(0) e^{-\frac{t}{\tau_e}} e^{-\frac{T_p}{\tau_e}} = \mathcal{E}_m(t) e^{-\frac{T_p}{\tau_e}}$$

L'amortissement étant très faible ($T_p \approx T_0$), on peut confondre la pseudo-période T_p et la période propre T_0 ; ainsi :

$$\frac{T_p}{\tau_e} = \frac{T_0 \omega_0}{Q} = \frac{2\pi}{Q}$$

$$\mathcal{E}_m(t + T_p) = \mathcal{E}_m(t) e^{-\frac{2\pi}{Q}}$$

Comme $\frac{2\pi}{Q}$ est faible ($Q \gg 2\pi$), effectuons un développement limité de $e^{-\frac{2\pi}{Q}}$ au voisinage de 0 :

$$e^{-\frac{2\pi}{Q}} \approx 1 - \frac{2\pi}{Q}, \text{ d'où } \mathcal{E}_m(t + T_p) = \mathcal{E}_m(t) \left(1 - \frac{2\pi}{Q}\right)$$

Nous accédons ainsi à la définition énergétique du facteur de qualité :

$$Q = 2\pi \frac{\mathcal{E}_m(t)}{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t + T_p)} = 2\pi \frac{\text{énergie mécanique de l'oscillateur}}{\text{énergie perdue pendant une période}}$$

Comme $\tau_e = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{QT_0}{2\pi}$, la perte relative d'énergie mécanique peut être évaluée par :

$$\frac{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t + T_p)}{\mathcal{E}_m(t)} = \frac{2\pi}{Q} = \frac{T_0}{\tau_e}$$

La définition énergétique du temps de relaxation de l'énergie est :

$$\tau_e = T_0 \frac{\mathcal{E}_m(t)}{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t + T_p)}$$

Si $Q \gg 1$, l'expression $\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$ donne :

$$\delta = \frac{\pi}{Q}$$

Le décrement logarithmique intervient aussi dans ces expressions :

$$\frac{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t + T_p)}{\mathcal{E}_m(t)} = \frac{2\pi}{Q} = \frac{T_0}{\tau_e} = 2\delta.$$

Il est relié au temps de relaxation de l'amplitude par :

$$\delta = \frac{T_0}{2\tau_e} = \frac{T_0}{\tau_a}$$

en conclusion

On vient de voir que le régime transitoire est très riche en informations sur l'oscillateur. Il apparaît ici dans un régime libre : un opérateur extérieur injecte de l'énergie dans l'oscillateur et le laisse évoluer librement. L'amortissement va dissiper progressivement l'énergie mécanique sous la forme d'un transfert thermique.



30 min

> Corrigé p. 146

Mesure d'un coefficient de viscosité

Le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_g(O; \vec{\partial}_x, \vec{\partial}_y, \vec{\partial}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur terrestre uniforme.

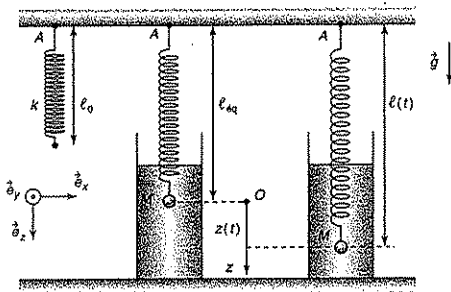
Une sphère M de rayon r et de masse m est attachée à un ressort vertical dont l'autre extrémité est fixe en A . La masse du ressort est négligeable et, dans son domaine d'élasticité, le ressort non tendu est caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0 .

La période d'oscillation de M dans l'air, où le frottement est négligeable, est T_0 .

La sphère plonge dans un liquide de coefficient de viscosité η et est ainsi soumise, au cours de son mouvement, à une force de frottement fluide qui, à faible vitesse, obéit à la loi de Stokes :

$$\vec{F}_f = -6\pi\eta r\vec{v}.$$

Le vecteur vitesse \vec{v} du point M est exprimé dans le référentiel \mathcal{R}_g . La pseudo-période des oscillations de M dans le fluide est T_p .



1. Déterminer la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre de M dans le fluide, en fonction de m , de la masse m^* du fluide déplacé par la présence de la sphère, de k , ℓ_0 et g .

2. Écrire l'expression de l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide. Montrer que le régime est pseudo-périodique si :

$$\eta < \frac{\sqrt{km}}{3\pi r}.$$

3. Donner l'expression de η en fonction de T_p , T_0 , m et r .



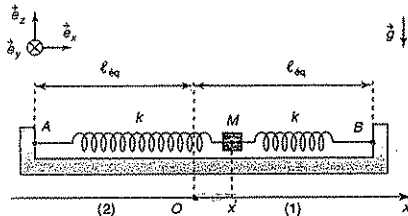
45 min

> Corrigé p. 146

Oscillations d'un point matériel relié à deux ressorts horizontaux

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{\partial}_x, \vec{\partial}_y, \vec{\partial}_z)$ est supposé galiléen.

Un point matériel M de masse m est attaché à deux ressorts (1) et (2) horizontaux identiques de constantes de raideur k et de longueurs à vide ℓ_0 reliés à deux points fixes A et B . Lorsque M est à l'équilibre, les longueurs des ressorts sont identiques et égales à ℓ_{eq} . La position d'équilibre de M est le point O , origine de l'axe des x .



Le point M glisse le long de l'axe $(O; \vec{\partial}_x)$ à partir de sa position d'équilibre et est repéré sur cet axe par son abscisse algébrique $x = \overline{OM}$. À l'instant $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0 .

On posera : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$.

1. Le mouvement a lieu sans frottement. Par une étude énergétique, établir l'équation différentielle du mouvement de M .

2. Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 en fonction de k et m . Déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent à cette association.

3. Dédire des conditions initiales l'équation horaire du mouvement $x(t)$.

4. Les frottements qui accompagnent le déplacement du mobile sur le support sont maintenant pris en compte. Ils sont modélisés par une force de frottement de type visqueux de la forme :

$$\vec{F}_f = -h\vec{v}.$$

Le coefficient de proportionnalité h est positif et $\dot{\vartheta}$ est la vitesse du point M exprimée dans le référentiel \mathcal{R}_g . Établir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.

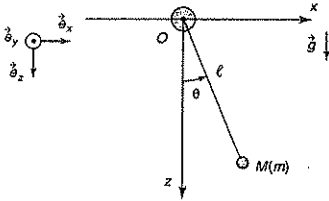
5. Montrer que lorsque $h < 2\sqrt[3]{\sqrt{km}}$, le mouvement est oscillatoire amorti. Déterminer dans ce cas la pseudo-période T_p des oscillations en fonction de Q et T_0 .



> Corrigé p. 148

Portraits de phase du pendule simple

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.



Un pendule simple est constitué d'un objet ponctuel M de masse m , lié à une tige métallique de masse négligeable et de longueur ℓ . Le champ de pesanteur terrestre est supposé uniforme. L'extrémité O de la tige est fixe.

Le dispositif se trouve dans le champ de pesanteur terrestre uniforme tel que :

$$\vec{g} = g\vec{e}_z, \text{ avec } g = \|\vec{g}\| > 0.$$

La position de M est repérée par l'angle θ que fait le fil avec la verticale. À l'instant initial, le pendule est lancé avec les conditions initiales :

$$\theta(0) = 0 \text{ et } \dot{\theta}(0) = \alpha \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \alpha \omega_0 \quad (\alpha > 0).$$

1. Le mouvement s'effectue sans frottement. Déterminer l'énergie potentielle du point M en choisissant son origine à la position d'équilibre stable du système. Tracer le diagramme d'énergie potentielle $\mathcal{E}_P^{\text{pes}}(\theta)$. En fonction des valeurs de α , distinguer trois types de mouvement :

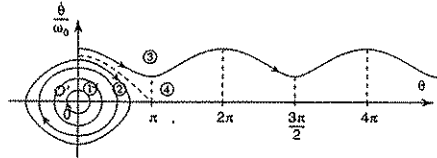
- ① Le point M est un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 .
- ② Le point M effectue des oscillations non sinusoidales.

③ Le mouvement du point M est révolutif : il effectue des tours complets, sa vitesse angulaire gardant un signe constant.

2. Exprimer l'intégrale première du mouvement de M . En déduire l'expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de α , ω_0 et θ .

3. Le portrait de phase de l'oscillateur harmonique amorti, obtenu pour différentes valeurs de α , est représenté ci-dessous dans le plan de phase

$$(O'; \theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}) :$$

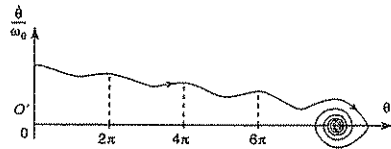


Justifier l'allure du portrait de phase en distinguant quatre cas :

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| a. $0 < \alpha \ll 2$; | b. $0 < \alpha < 2$; |
| c. $\alpha > 2$; | d. $\alpha = 2$. |

Que devient le portrait de phase lorsque $\alpha \gg 2$?

4. Le pendule est soumis à de faibles frottements et $\alpha > 2$. Commenter la nouvelle allure du portrait de phase :



Donnée :

Le développement limité de $\cos \theta$ au voisinage de 0 est :

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$



> Corrigé p. 151

Modèle simplifié d'une suspension automobile

La suspension d'un véhicule contribue principalement à assurer :

- la tenue de route et la stabilité du véhicule, notamment en maintenant permanent le contact entre les pneumatiques et la route ;

• le confort vibratoire des passagers, quelles que soient les conditions de circulation (état de la route, comportement du conducteur, charge du véhicule, etc.).

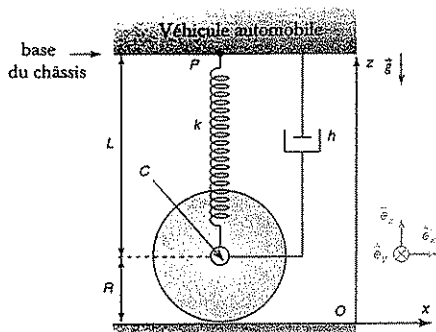
Son rôle consiste à isoler la caisse du véhicule en filtrant les sollicitations vibratoires de la route.

Dans le modèle adopté, la suspension est assurée par quatre systèmes identiques indépendants montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue.

Chaque système est de masse négligeable et se décompose de la façon suivante :

• un ressort de constante de raideur $k = 1,8 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et de longueur à vide L_0 qui permet d'absorber efficacement les irrégularités de la route,

• un amortisseur à ressort, exerçant une force de frottement de type visqueux et de coefficient d'amortissement $h = 1660 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$ qui assure le freinage des oscillations de la caisse.



L'étude s'effectue dans le référentiel \mathcal{R}_g lié au sol et supposé galiléen, l'espace étant rapporté à un système d'axes $\{(Ox), (Oy), (Oz)\}$ auquel est associée la base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le comportement du véhicule est étudié dans le cas où il contiendrait quatre passagers de même masse $m = 70 \text{ kg}$. La masse $M_0 = 1220 \text{ kg}$ du châssis et la masse des passagers sont également réparties sur les quatre systèmes ressort-amortisseur de sorte qu'ils ont des comportements identiques : le plan du châssis reste horizontal quel que soit le mouvement. Les pneus de rayon extérieur R et de centre C sont considérés comme entièrement rigides et n'interviennent jamais dans cette étude.

L'amortisseur placé entre C et un point quelconque P du châssis exerce sur P une force de frotte-

ment fluide proportionnelle à la vitesse relative de P par rapport à C :

$$\vec{F}_f = -h[\dot{z}(P)]\vec{e}_z,$$

où $z(P)$ est la composante suivant \vec{e}_z du vecteur vitesse associé à n'importe quel point P du châssis.

Pour obtenir des expressions simplifiées on posera :

$$M = M_0 + 4m, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2h}{M} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{4k}{M}.$$

Partie A -- Étude statique

Le véhicule est immobile sur un sol horizontal. Exprimer la longueur L_e des ressorts à l'équilibre et la garde au sol z_0 du véhicule (distance entre la base du châssis et le sol).

Partie B -- Étude dynamique

Dans la suite du problème z_0 sera pris égal à 20 cm. Le véhicule est à l'arrêt.

Lors d'un essai dynamique à vide, le châssis est abaissé d'une hauteur $H = 5 \text{ cm}$, puis brusquement libéré sans vitesse initiale. La voiture est animée d'un mouvement de translation vertical.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position verticale $z(t)$ du châssis par rapport au sol.
2. La pesanteur n'intervient pas dans l'équation. Expliquer pourquoi.
3. Quelle est la nature du mouvement du châssis ? Préciser le sens physique et les valeurs numériques des grandeurs qui caractérisent ce mouvement. Déterminer la solution $z(t)$ avec les conditions initiales proposées et donner graphiquement son allure générale.

4. Le corps humain est organisé pour tolérer des oscillations verticales à la fréquence de la marche, soit un pas par seconde. Comment se comporte-t-il soumis au mouvement décrit dans la question précédente ?

5. Quel est l'intérêt pratique de la présence des amortisseurs ?

6. Certains systèmes de suspension sont conçus de telle sorte que la valeur du coefficient d'amortissement vérifie la relation $h_0 = \sqrt{kM}$.

Quelle est la nature du mouvement correspondant à cette condition lorsque le véhicule est sans passager ? Quel est son avantage ? Déterminer dans ce cas la solution $z(t)$ avec les mêmes conditions initiales et tracer son allure générale.

Tester ses connaissances

1 Réponse a. Elle correspond à une solution sinusoidale. La seconde correspond à une solution divergente.

• $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ a pour solution générale :

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t).$$

• $\ddot{X} - \omega_0^2 X = 0$ a pour solution générale :

$$x(t) = A \cosh(\omega_0 t + \varphi) = B \cosh(\omega_0 t) + C \sinh(\omega_0 t).$$

2 L'amplitude d'un oscillateur harmonique dépend des conditions initiales, la solution générale d'un oscillateur harmonique est de la forme :

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Les constantes fixées par les conditions initiales sont l'amplitude A des oscillations et la phase à l'origine φ .

3 La période des oscillations ne dépend pas de l'amplitude, on dit qu'il y a *isochronisme* des oscillations.

4 Réponse c. La forme canonique de l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique amorti est :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

5 Pour passer de l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique amorti à l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique non amorti, il faut faire disparaître le terme d'amortissement :

$$\ddot{X} + \underbrace{\frac{\omega_0}{Q} \dot{X}}_{\text{terme d'amortissement}} + \omega_0^2 X = 0.$$

Pour cela, il faut faire tendre le facteur de qualité Q vers $+\infty$.

6 La signature d'un oscillateur harmonique non amorti est une trajectoire de phase circulaire : réponse a.

L'amplitude de l'oscillateur harmonique amorti en régime pseudo-périodique décroît au cours du temps. La trajectoire de phase converge en spirale vers le point attracteur O , position d'équilibre stable : réponse c.

Le mouvement de l'oscillateur non linéaire est périodique, sa trajectoire de phase est fermée mais non circulaire réponse b.

7 Calculons le discriminant réduit :

$$\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2.$$

Dans le cas d'un régime apériodique :

$$\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2 > 0,$$

ce qui implique $\alpha > \omega_0$. La bonne réponse est la réponse b. qui correspond à un coefficient d'amortissement α élevé.

8 Si le régime est pseudo-périodique :

$$\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2 = -\omega_p^2 < 0.$$

La pseudo-période des oscillations est donc :

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2}$$

9 Réponses a. et d. Un oscillateur harmonique peu amorti correspond à un facteur de qualité Q élevé et un décrement logarithmique δ faible associé à une faible modification de l'amplitude.

10 Réponse b. L'énergie mécanique de l'oscillateur est proportionnelle au carré de l'amplitude, si celle-ci est doublée, l'énergie mécanique est multipliée par 4.

Savoir appliquer le cours

1 La tension \vec{T} du ressort s'exprime par :

$$\vec{T} = -k(\vec{AM} - \vec{AM}_0) = k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z$$

Pour calculer l'énergie potentielle élastique, passons par le travail élémentaire fourni par \vec{T} :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}(\vec{T}/\mathcal{R}_e) &= \vec{T} \cdot d\vec{AM} = k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z \cdot (-d\ell)\vec{e}_z \\ &= -k(\ell - \ell_0)d(\ell - \ell_0) = -d\left[\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2\right] \end{aligned}$$

$$\delta \mathcal{E}(\vec{T}/\mathcal{R}_e) = -d\mathcal{E}_p^{\text{élas}} = -d\left[\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2\right].$$

L'énergie potentielle élastique est définie à une constante additive près :

$$\mathcal{E}_p^{\text{élas}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + C.$$

En choisissant M_0 comme origine de l'énergie potentielle élastique, il vient :

$$\mathcal{E}_p^{\text{élas}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

Remarque : noter que pour l'expression de la force de rappel, comme pour l'expression de l'énergie potentielle élastique, c'est l'écart à la longueur à vide du ressort ni tendu, ni comprimé qui intervient.

2 Les frottements sont négligeables et le pendule oscille à sa période propre T_0 . Les grandeurs caractéristiques du problème sont m , ℓ , g et α . La tension du fil ne travaille pas et n'apparaît pas dans notre raisonnement.

La période propre T_0 peut être exprimée sous la forme :

$$T_0 = m^\alpha \ell^\gamma g^\epsilon f(\theta).$$

$f(\theta)$ est fonction de l'angle θ , grandeur sans dimension.

L'analyse dimensionnelle donne :

$$[T_0] = T = [m]^\alpha [\ell]^\gamma [g]^\epsilon = M^\alpha L^\gamma (L T^{-2})^\epsilon.$$

On obtient ainsi l'équation aux dimensions :

$$T = M^\alpha L^\gamma \epsilon T^{-2\epsilon}.$$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma + \epsilon = 0 \\ -2\epsilon = 1 \end{cases}$$

Sa solution est : $\alpha = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\epsilon = -\frac{1}{2}$.

$$T_0 = f(\theta) \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

La fonction $f(\theta)$ est universelle et accessible seulement par l'expérience avec n'importe quel pendule.

Dans le cas de petites oscillations : $f(\theta) = 2\pi$.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Si l'équation aux dimensions permet, tout au long d'un raisonnement, de contrôler l'homogénéité des expressions physiques, elle est aussi une méthode de recherche des lois physiques lorsque, souvent, aucune autre méthode n'est envisageable.

3 Le système est le point matériel M .

Son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• Bilan des forces appliquées au point M

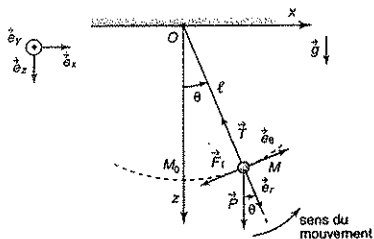
(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids de M , force conservative ;

(ii) de contact :

$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du fil, force conservative ;

$\vec{F}_{\text{air} \rightarrow M} = \vec{F}_f = -h\vec{v}$, force de frottement fluide du ressort.

Le système n'est pas conservatif, la force de frottement dissipe l'énergie mécanique. Le mouvement est à un degré de liberté car le paramètre θ suffit à repérer la position de l'anneau.



Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_f = m\vec{a}(M, \mathcal{R}_g).$$

Sa projection dans la base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ donne :

$$m \begin{pmatrix} g \cos \theta \\ -g \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} - h \begin{pmatrix} 0 \\ \ell \dot{\theta} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -\ell \ddot{\theta} \\ \dot{\theta}^2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui conduit à un système de deux équations :

$$\begin{cases} mg \cos \theta - T = -m\ell \ddot{\theta} & (1) \\ -mg \sin \theta - h\ell \dot{\theta} = m\ell \dot{\theta}^2 & (2) \end{cases}$$

L'équation du mouvement est contenue dans l'équation (2) :

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

Pour les oscillations de faible amplitude ($\sin \theta \approx \theta$), cette équation est linéarisée et devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

L'identification avec l'équation normalisée donne :

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{h}{m} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$$

4 L'équation caractéristique de cette équation différentielle linéaire du second ordre est :

$$r^2 + \frac{1}{\tau_c} r + \omega_0^2 = 0.$$

Pour utiliser le discriminant réduit nous l'écrivons sous la forme :

$$r^2 + 2\frac{1}{2\tau_c} r + \omega_0^2 = 0.$$

Ainsi le discriminant réduit Δ' s'écrit :

$$\Delta' = \left(\frac{1}{2\tau_c}\right)^2 - \omega_0^2$$

(i) régime aperiodique : $\Delta' > 0$ et $\tau_c \omega_0 < \frac{1}{2}$;

(ii) régime critique : $\Delta' = 0$ et $\tau_c \omega_0 = \frac{1}{2}$;

(iii) régime pseudo-périodique : $\Delta' < 0$ et $\tau_c \omega_0 > \frac{1}{2}$.

Le temps τ_c caractérise la durée de vie des oscillations. Il ne faut pas qu'il soit trop faible pour que l'oscillateur ait le temps d'osciller.

5 La solution générale de cette équation dans le cas d'un régime aperiodique est :

$$\theta(t) = e^{-\frac{t}{2\tau_c}} (Ae^{\sqrt{\Delta'}t} + Be^{-\sqrt{\Delta'}t}),$$

$$\text{avec } \sqrt{\Delta'} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau_c}\right)^2 - \omega_0^2} = \frac{1}{2\tau_c} \sqrt{1 - (2\tau_c \omega_0)^2}.$$

Dans le cas du régime critique :

$$\theta(t) = (At + B)e^{-\frac{t}{2\tau_c}} = (At + B)e^{-\omega_0 t}.$$

6 Le régime est pseudo-périodique, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$\theta(t) = Ce^{-\frac{t}{2\tau_c}} \cos(\omega t + \varphi) = Ce^{-\frac{t}{\tau_c}} \cos(\omega t + \varphi).$$

Le temps $\tau_s = 2\tau_c$ est la durée de relaxation relative à l'amplitude des oscillations qui caractérise leur décroissance.

La pseudo-pulsation ω_p vérifie :

$$\Delta' = -\omega_p^2 = \left(\frac{1}{2\tau_c}\right)^2 - \omega_0^2.$$

L'énergie potentielle du système est son énergie potentielle de pesanteur. En choisissant la position d'équilibre stable M_0 comme origine, elle s'écrit :

$$\mathcal{E}_p^{\text{pes}}(\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta).$$

Dans le cas des faibles oscillations, le développement limité de $\cos\theta$ au voisinage de 0 donne $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

$$\text{Ainsi } \mathcal{E}_p^{\text{pes}}(\theta) = mg\ell \frac{\theta^2}{2}.$$

L'énergie mécanique de l'oscillateur est :

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_p^{\text{pes}}(t).$$

Lorsqu'à l'instant t l'amplitude de l'oscillateur est maximale, la vitesse du point M s'annule et toute l'énergie de l'oscillateur est sous forme d'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_p^{\text{pes}}(t) = mg\ell \frac{\theta_{\text{max}}^2(t)}{2} = \frac{1}{2} mg\ell C^2 e^{-\frac{t}{\tau_c}}.$$

Après une pseudo-période, au maximum de l'amplitude suivant, l'énergie mécanique a diminué à cause des forces de frottement et s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m(t + T_p) &= mg\ell \frac{\theta_{\text{max}}^2(t + T_p)}{2} = \frac{1}{2} mg\ell C^2 e^{-\frac{(t+T_p)}{\tau_c}} \\ &= \mathcal{E}_m(t) e^{-\frac{T_p}{\tau_c}}. \end{aligned}$$

La variation relative d'énergie mécanique est donc :

$$\frac{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t + T_p)}{\mathcal{E}_m(t)} = 1 - e^{-\frac{T_p}{\tau_c}}.$$

Dans le cas des faibles amortissements, la durée de décroissance de l'énergie est élevée et :

$$\tau_c \gg T_p.$$

Il est alors possible d'effectuer un développement limité

de $e^{-\frac{T_p}{\tau_c}}$ au voisinage de 0 :

$$e^{-\frac{T_p}{\tau_c}} = 1 - \frac{T_p}{\tau_c}.$$

D'autre part aux faibles amortissements la pseudo-période T_p se confond avec la période propre T_0 de l'oscillateur.

$$\frac{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t + T_p)}{\mathcal{E}_m(t)} = \frac{T_0}{\tau_c}.$$

La définition énergétique du temps de relaxation de l'énergie est ainsi :

$$\tau_c = T_0 \frac{\mathcal{E}_m(t)}{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t + T_p)}$$

Le temps τ_c caractérise la durée de décroissance de l'énergie. Il est la durée de vie de l'oscillateur.

S'entraîner

- 1 Première analyse : le ressort est placé verticalement. Le choix de l'origine O permet d'éliminer le poids apparent de l'objet M de l'équation du mouvement. Ce poids apparent prend en compte l'action de la Terre sur M et l'action du fluide sur M représentée par la poussée d'Archimède. Le système étudié est la sphère M . Le référentiel d'étude est le référentiel du laboratoire galiléen \mathcal{R}_g .

Bilan des forces appliquées au système à l'équilibre :

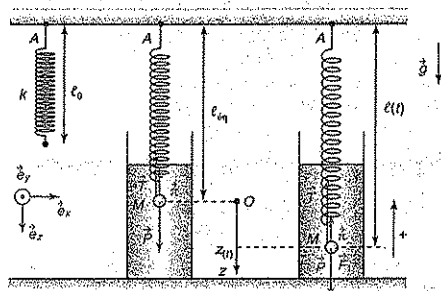
(i) à distance :

$$\vec{P}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}, \text{ le poids de } M;$$

(ii) de contact :

$$\vec{P}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{T}, \text{ la tension du ressort};$$

$$\vec{P}_{\text{fluide} \rightarrow M} = \vec{\pi}, \text{ la poussée d'Archimède.}$$



L'expression des forces est :

$$\bullet \vec{P} = mg\vec{e}_z;$$

$$\bullet \vec{\pi} = -m^*g\vec{e}_z;$$

$$\bullet \vec{T} = -k(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM_0}) = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z.$$

Expression vectorielle du principe fondamental de la statique :

$$\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{T} = \vec{0}.$$

Suivant \vec{e}_z , la condition d'équilibre s'écrit :

$$(m - m^*)g - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \left(\frac{m - m^*}{k}\right)g$$

2. Le système est en mouvement dans le fluide, il faut ajouter au bilan des forces la force de frottement :

$$\vec{F}_f = -6\pi\eta r\vec{v} = -6\pi\eta r\dot{z}\vec{e}_z.$$

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{T} + \vec{F}_f = m\vec{a}(M, \mathcal{R}_g) = m\ddot{z}\vec{e}_z.$$

Projection suivant \vec{e}_z :

$$(m - m^*)g - k(\ell - \ell_0) - 6\pi\eta r\dot{z} = m\ddot{z}.$$

À partir de l'équation (1), remarquons que $(m - m^*)g = k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)$, donc :

$$k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) - k(\ell - \ell_0) - 6\pi\eta r\dot{z} = m\ddot{z}, \\ -k(\ell - \ell_{\text{eq}}) - 6\pi\eta r\dot{z} = m\ddot{z}.$$

La position z de la sphère est considérée par rapport à la position d'équilibre stable :

$$z = \ell - \ell_{\text{eq}}.$$

On obtient ainsi l'équation du mouvement de M sous la forme canonique :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

en posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{6\pi\eta r}{m}$.

L'équation caractéristique est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

De façon à utiliser pour sa résolution le discriminant réduit nous l'écrivons sous la forme :

$$r^2 + 2\frac{\omega_0}{2Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant réduit s'écrit :

$$\Delta' = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right).$$

Pour que le mouvement observé soit pseudo-périodique, il faut $\Delta' < 0$, soit $Q > \frac{1}{2}$.

$$\text{Or } Q = \frac{m\omega_0}{6\pi\eta r} = \frac{m}{6\pi\eta r} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{km}}{6\pi\eta r} > \frac{1}{2}.$$

Le régime pseudo-périodique nécessite ainsi :

$$\eta < \frac{\sqrt{km}}{3\pi r}$$

3. La pseudo-pulsation ω_p vérifie l'équation $\Delta' = -\omega_p^2$, d'où :

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{3\pi\eta r}{m\omega_0}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{3\pi\eta r}{m}\right)^2} \\ \left(\frac{3\pi\eta r}{m}\right)^2 = \omega_0^2 - \omega_p^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{4\pi^2}{T_p^2}.$$

Ainsi :

$$\eta = \frac{2m}{3r} \sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T_p^2}}$$

- 2 1. Le système est le point M , son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

• Bilan des forces appliquées au point M

(i) à distance :

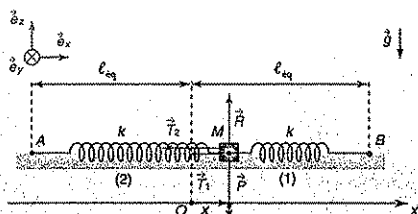
$$\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}, \text{ le poids du point matériel } M;$$

(ii) de contact :

$$\vec{F}_{\text{support} \rightarrow M} = \vec{R}, \text{ la réaction du support ;}$$

$$\vec{F}_{\text{ressort(1)} \rightarrow M} = \vec{T}_1, \text{ la tension du ressort} \quad (1);$$

$$\vec{F}_{\text{ressort(2)} \rightarrow M} = \vec{T}_2, \text{ la tension du ressort} \quad (2).$$



Les expressions de \vec{T}_1 et \vec{T}_2 sont :

$$\vec{T}_1 = -k(\vec{AM} - \vec{AM}_0) = -k(\ell_{e_1} + x - \ell_0)\vec{e}_x$$

$$\vec{T}_2 = -k(\vec{BM} - \vec{BM}_0) = k(\ell_{e_2} - x - \ell_0)\vec{e}_x$$

Le poids du mobile et les tensions des ressorts sont des forces conservatives. La réaction du support ne travaille pas car elle est à tout instant normale à la trajectoire du point M . Le système est *conservatif*.

Le mouvement est à un *degré de liberté* car l'abscisse x est suffisante pour repérer la position du mobile.

La conservation de l'énergie mécanique permet d'accéder à l'équation du mouvement de M .

L'énergie potentielle de pesanteur est ici constante car le point M garde une cote constante au cours de son déplacement. Choisissons l'origine de cette énergie à $z = 0$, de sorte que :

$$\mathcal{E}_p^{\text{pes}} = 0.$$

L'énergie potentielle élastique de M due au ressort (1) est :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{T}(\vec{T}_1/\mathcal{R}_0) &= \vec{T}_1 \cdot d\vec{OM} = -k(\ell_{e_1} + x - \ell_0)\vec{e}_x \cdot dx\vec{e}_x \\ &= -k(\ell_{e_1} + x - \ell_0)d(\ell_{e_1} + x - \ell_0) \end{aligned}$$

$$\delta\mathcal{T}(\vec{T}_2/\mathcal{R}_0) = -d\left[\frac{1}{2}k(\ell_{e_2} + x - \ell_0)^2\right] = -d\mathcal{E}_p^{\text{elas}} \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_p^{\text{elas}}(1) = \frac{1}{2}k(\ell_{e_1} + x - \ell_0)^2 + C_1.$$

Il n'est pas nécessaire de préciser la constante C_1 .

Elle disparaîtra dans la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique.

L'énergie potentielle élastique de M due au ressort (2) est :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{T}(\vec{T}_2/\mathcal{R}_0) &= \vec{T}_2 \cdot d\vec{OM} = k(\ell_{e_2} - x - \ell_0)\vec{e}_x \cdot dx\vec{e}_x \\ &= -k(\ell_{e_2} - x - \ell_0)d(\ell_{e_2} - x - \ell_0) \\ &= -d\left[\frac{1}{2}k(\ell_{e_2} - x - \ell_0)^2\right] = -d\mathcal{E}_p^{\text{elas}} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_p^{\text{elas}}(2) = \frac{1}{2}k(\ell_{e_2} - x - \ell_0)^2 + C_2$$

L'énergie potentielle de M est la somme de ces deux énergies potentielles élastiques :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(\ell_{e_1} + x - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(\ell_{e_2} - x - \ell_0)^2 + C.$$

Remarque : plus rapidement, il suffit d'écrire directement

pour chaque ressort : $\mathcal{E}_p^{\text{elas}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cte}$.

ℓ est la longueur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide.

D'où l'énergie mécanique constante de M :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_p \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(\ell_{e_1} + x - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(\ell_{e_2} - x - \ell_0)^2 + C. \end{aligned}$$

⇒ L'équation du mouvement du mobile M est obtenue en dérivant \mathcal{E}_m par rapport à t :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{2k}{m}x\right) = 0.$$

Le système est en mouvement, l'équation différentielle du mouvement est :

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

2. Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

et de période propre :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

L'association des deux ressorts est équivalente à un ressort unique de raideur $K = 2k$.

3. La solution générale de l'équation différentielle est :

$$x(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t.$$

Les conditions initiales permettent de définir les constantes d'intégration A_1 et A_2 et d'accéder ainsi à la solution du problème. La position et la vitesse de M à l'instant t sont :

$$\bullet x(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t;$$

$$\bullet \dot{x}(t) = \omega_0(-A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t).$$

Et à l'instant $t = 0$:

$$\bullet x(t=0) = A_1 = x_0 \Rightarrow A_1 = x_0;$$

$$\bullet \dot{x}(t=0) = \omega_0 A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 0.$$

4 - Mouvement libre d'un oscillateur harmonique

D'où l'équation horaire du mouvement :

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t.$$

4. Toujours par une étude énergétique, appliquons maintenant le théorème de la puissance mécanique au système M non conservatif :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}(\vec{F}_{i/\mathcal{R}_g}) = -h \dot{\theta} \cdot \dot{\theta}$$

$$m\dot{x}\ddot{x} + Kx\dot{x} = -h\dot{x}^2, \text{ soit } m\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x\right) = 0.$$

L'équation du mouvement de M est donc :

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0.$$

Avec $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$, on obtient la forme canonique de l'équation du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

5. Les solutions de l'équation différentielle du mouvement sont de la forme $x(t) = Ce^{rt}$ (où r et C sont des constantes complexes). L'équation caractéristique est obtenue en reportant cette solution dans l'équation du mouvement :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

De façon à utiliser pour sa résolution le discriminant réduit nous l'écrivons sous la forme :

$$r^2 + 2\frac{\omega_0}{2Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant réduit s'écrit alors :

$$\Delta' = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right).$$

Le mouvement observé est pseudo-périodique, dans ce cas, $\Delta' < 0$.

Cette condition nécessite $\frac{1}{4Q^2} - 1 < 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{2}$.

$$\text{Or } Q = \frac{m}{h}\omega_0 = \frac{m}{h}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{h}\sqrt{2km} > \frac{1}{2}.$$

Le régime pseudo-périodique a lieu lorsque :

$$h < 2\sqrt{\frac{3}{2}km}$$

La pseudo-pulsation ω_p vérifie l'équation $\Delta' = -\omega_p^2$, d'où :

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

La pseudo-période est :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

3 Première analyse : le mouvement du pendule simple amorti et non amorti est ici étudié à partir de son diagramme énergétique et de son portrait de phase.

1. Le système est le point matériel M . Son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• Bilan des forces appliquées au point M

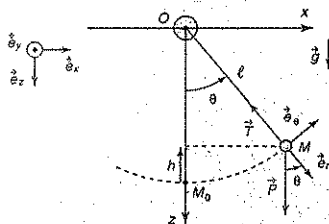
(i) à distance :

$\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids de M ; force conservative ;

(ii) de contact :

$\vec{F}_{\text{fil} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du fil.

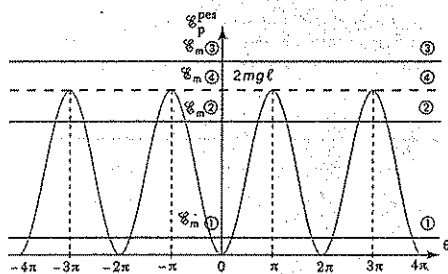
La tension du fil est une force qui ne travaille pas car elle est à tout instant perpendiculaire à la trajectoire de M . Le système est conservatif et le mouvement est à un degré de liberté, le paramètre θ suffit à repérer la position de M .



L'énergie potentielle du système est son énergie potentielle de pesanteur. En choisissant la position d'équilibre stable M_0 comme origine, elle s'écrit :

$$\mathcal{E}_p^{\text{pes}}(\theta) = mgh = mg\ell(1 - \cos\theta).$$

Le diagramme d'énergie potentielle est son tracé en fonction de θ :



La valeur maximale de l'énergie potentielle de M est :

$$\mathcal{E}_p^{\text{pes}}(\theta_A) = (2k+1)\pi = 2mg\ell.$$

L'énergie mécanique du système se conserve au cours du mouvement, elle est fixée par les conditions initiales :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C(t=0) + \mathcal{E}_p^{\text{pes}}(t=0) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2(0) = \frac{1}{2}mg\ell\alpha^2.$$

L'observation de ce diagramme permet de considérer deux types de mouvements :

- Le mouvement est borné si

$$\frac{1}{2} mgl\alpha^2 < 2mgl \Rightarrow 0 < \alpha < 2.$$

(i) Cas ① ($\alpha \ll 2$ ou $\alpha \rightarrow 0$) : les oscillations sont de faible amplitude autour de la position d'équilibre stable. Le puits de potentiel est parabolisable et on peut appliquer l'approximation harmonique. Les oscillations sont sinusoïdales et l'oscillateur est linéaire :

$$\mathcal{E}_P^{\text{ess}}(\theta) = mgl(1 - \cos\theta) \approx mgl\left(\frac{\theta^2}{2}\right)$$

(ii) Cas ② ($\alpha < 2$) : les oscillations sont d'amplitude élevée et ne sont pas sinusoïdales, l'oscillateur est non linéaire.

(iii) Cas ③ ($\alpha > 2$) : le mouvement du pendule s'effectue avec une vitesse angulaire de signe constant.

En effet, le mouvement n'est pas borné si :

$$\frac{1}{2} mgl\alpha^2 > 2mgl \Rightarrow \alpha > 2.$$

$\alpha = 2$ est une situation limite d'oscillations entre deux positions d'équilibre instable. Ces oscillations s'effectuent avec une amplitude de π rad. Un faible écart de la vitesse initiale fait basculer le système dans un mouvement non borné ou un mouvement oscillatoire borné.

2. L'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_C(\dot{\theta}(t)) + \mathcal{E}_P^{\text{ess}}(\theta(t)) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2}_{\text{instant } t} + \underbrace{mgl(1 - \cos\theta)}_{\text{instant } t=0} = \frac{1}{2} mgl\alpha^2. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \dot{\theta}^2 + 2\frac{g}{\ell}(1 - \cos\theta) = \frac{g}{\ell}\alpha^2.$$

D'où l'expression de $\dot{\theta}^2$:

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 \left[\cos\theta - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \right] \quad (1)$$

Le système étant conservatif, cette équation constitue une intégrale première du mouvement.

3. Quelles sont les valeurs de α (et donc de la vitesse initiale imposée à M) qui annulent la vitesse du mobile ?

$$\dot{\theta} = 0, \text{ lorsque } \cos\theta = 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Or $-1 < \cos\theta < 1$: ce cosinus est inférieur à 1, il faut observer dans quelle condition il est supérieur à (-1).

$$-1 < 1 - \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow 0 < \alpha < 2$$

Si $0 < \alpha < 2$, la vitesse de M peut s'annuler et le mouvement est borné et périodique.

Si $\alpha > 2$, le mouvement de M est révolutif.

Dérivons l'équation (1) pour déterminer l'équation du mouvement de M :

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -2\omega_0^2 \sin\theta \dot{\theta}.$$

D'où l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0.$$

① $0 < \alpha \ll 2$: l'angle θ reste faible et $\sin\theta \approx \theta$.

L'équation différentielle du mouvement est linéaire et s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

L'approximation harmonique conduit ainsi à une équation de mouvement linéaire.

Le point M constitue un oscillateur harmonique. Les oscillations sont sinusoïdales. L'énergie mécanique s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\approx \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2 + mgl\frac{\theta^2}{2}.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $\frac{2}{mgl}$, il vient :

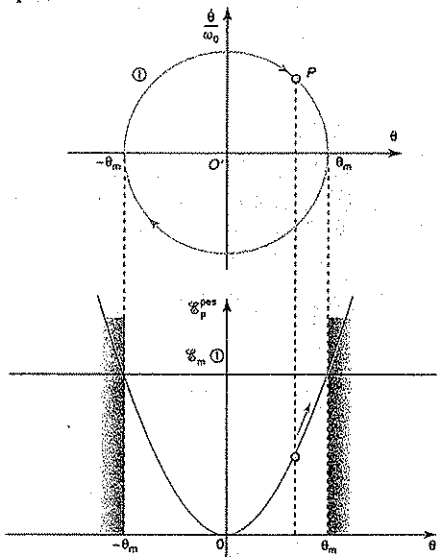
$$\frac{2\mathcal{E}_m}{mgl} = \frac{\ell}{g} \dot{\theta}^2 + \theta^2 = \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 + \theta^2.$$

Dans le plan de phase $(O' ; \theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0})$, l'équation

$\theta^2 + \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 = \frac{2\mathcal{E}_m}{mgl}$ est l'équation d'un cercle de centre

O' et de rayon $\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_m}{mgl}}$. Le point $P(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0})$ définissant

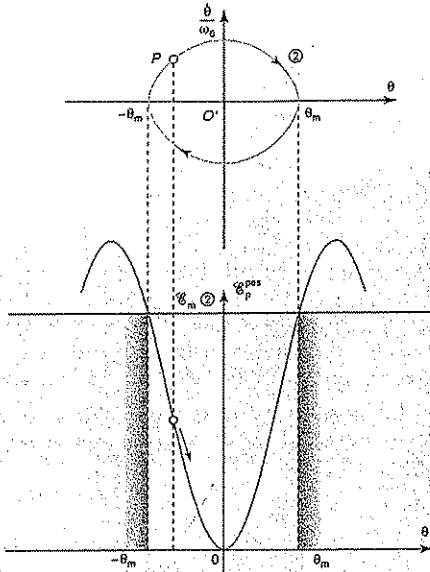
l'état mécanique du système décrit une trajectoire circulaire notée ① correspondant à une même énergie mécanique.



② $0 < \alpha < 2$: l'angle θ est suffisamment élevé pour ne pas pouvoir faire l'approximation $\sin \theta \approx \theta$. L'équation du mouvement est :

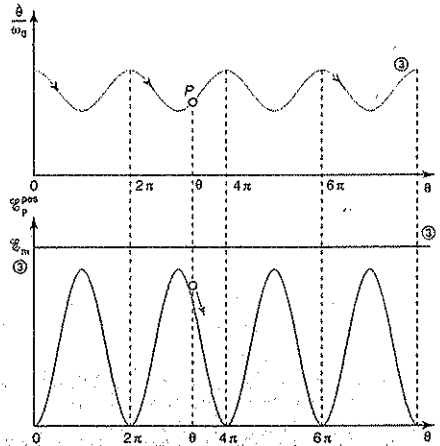
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0.$$

Cette équation différentielle, non linéaire à cause du terme en $\sin \theta$, n'a pas de solution qui s'exprime à l'aide des fonctions élémentaires. Le mouvement est borné, périodique et non sinusoïdal.



Dans le cas d'un mouvement oscillatoire du point M , les trajectoires de phase tourne autour de la position d'équilibre stable du point.

③ $\alpha > 2$: le mouvement de M est révolutif.



④ $\alpha = 2$: cette trajectoire limite entre le mouvement oscillatoire et le mouvement révolutif est appelée *separatrice*. Elle relie les points d'équilibre instables.

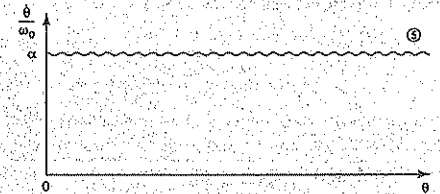
⑤ $\alpha \gg 2$: $\mathcal{E}_m \gg 2mgl = \mathcal{E}_{P_{\max}}$. L'énergie potentielle est négligeable devant l'énergie mécanique de M . Toute cette énergie est sous forme d'énergie cinétique.

$$\mathcal{E}_{\text{m}} = \frac{1}{2} m g l \alpha^2 = \mathcal{E}_C(\dot{\theta}) + \mathcal{E}_P^{\text{pot}}(\theta) \approx \mathcal{E}_C(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

⇒ La vitesse angulaire du point M dans son mouvement de fronde autour de O s'effectue à vitesse angulaire constante :

$$\dot{\theta} \approx \alpha \omega_0$$

Le portrait de phase devient une droite parallèle à l'axe des θ .



4. Les frottements dissipent progressivement l'énergie mécanique du point M qui diminue au cours du temps. La vitesse initiale donnée à M est suffisante pour qu'il puisse avoir un mouvement de révolution autour de O , il va réussir ainsi à effectuer quatre tours complets. Ensuite, il est capté par la cuvette de potentiel, et n'a plus l'énergie suffisante pour franchir la barrière de potentiel. Il est alors animé d'un mouvement oscillatoire dont l'amplitude décroît. Les oscillations sont d'abord non harmoniques, puis harmoniques pour les faibles amplitudes. L'oscillateur s'immobilise, pour finir, dans la position d'équilibre stable.

4 Première analyse : nous allons voir dans cet exemple tout l'intérêt du régime critique qui assure le retour à l'équilibre le plus rapide et sans oscillations.

Le système Pest l'automobile ; elle est en translation selon l'axe (Oz) et se comporte comme un point matériel.

L'étude s'effectue dans le référentiel \mathcal{R}_g lié au sol et supposé galiléen.

• Bilan des forces appliquées au point P

(i) à distance :

$$\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow P} = \vec{P} = m\vec{g}, \text{ le poids du point matériel } P;$$

(ii) de contact :

$$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow P} = \vec{T}, \text{ la tension du ressort} \quad (1);$$

$$\vec{F}_{\text{ressort}(2) \rightarrow P} = \vec{T}, \text{ la tension du ressort} \quad (2);$$

$$\vec{F}_{\text{ressort}(3) \rightarrow P} = \vec{T}, \text{ la tension du ressort} \quad (3);$$

$$\vec{F}_{\text{ressort}(4) \rightarrow P} = \vec{T}, \text{ la tension du ressort} \quad (4);$$

$$\vec{F}_{\text{amortisseurs} \rightarrow P} = \vec{F}_f, \text{ la force de frottement.}$$

A - Étude statique

Évaluons la tension exercée par un ressort sur le point P à l'équilibre :

$$\vec{T} = -k(\vec{CP} - \vec{CP}_0) = -k(L_e - L_0)\vec{e}_z.$$

Or quatre ressorts agissent sur P de la même façon, la force de tension résultante est :

$$4\vec{T} = -4k(L_e - L_0)\vec{e}_z.$$

Les constantes de raideur des 4 ressorts identiques en parallèle s'ajoutent. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'automobile en situation d'équilibre dans le référentiel terrestre galiléen :

$$-(M_0 + 4m)g\vec{e}_z - 4k(L_e - L_0)\vec{e}_z = -Mg\vec{e}_z - 4k(L_e - L_0)\vec{e}_z = \vec{0} \quad (1)$$

$$\Rightarrow L_e = L_0 - \frac{Mg}{4k} \quad \text{et} \quad z_0 = R + L_e = R + L_0 - \frac{Mg}{4k}$$

B - Étude dynamique

1. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'automobile en mouvement de translation verticale, il faut prendre en compte les 4 forces de frottement dont les effets s'additionnent :

$$-Mg\vec{e}_z - 4k(L - L_0)\vec{e}_z - 4h\dot{z}\vec{e}_z = M\ddot{z}\vec{e}_z \\ \Rightarrow \underbrace{-Mg + 4kL_0}_{(1) \quad 4kL_e} - 4kL - 4h\dot{z} = M\ddot{z}$$

avec $L = z - R$:

$$M\ddot{z} = 4k(L_e + R - z) - 4h\dot{z} = 4k(z_0 - z) - 4h\dot{z}.$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{4h}{M}\dot{z} + \frac{4k}{M}(z - z_0) = 0$$

Afin de repérer la position du châssis par rapport à sa garde au sol z_0 (analyse du mouvement autour de la position d'équilibre), on effectue le changement de variable :

$$z - z_0 = Z$$

avec $\dot{z} = \dot{Z}$ et $\ddot{z} = \ddot{Z}$, l'équation différentielle devient :

$$\ddot{Z} + \frac{4h}{M}\dot{Z} + \frac{4k}{M}Z = 0$$

$$\text{avec } \frac{1}{\tau} = \frac{2h}{M} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{4k}{M} : \quad \ddot{Z} + \frac{2}{\tau}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$$

A.N. : $\tau = 0,452 \text{ s}$ et $\omega_0 = 6,93 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. L'origine est prise à la position d'équilibre en charge : le poids disparaît dans l'équation du mouvement par l'équation (1).

3. L'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 + \frac{2}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$$

Discriminant réduit $\Delta' = \frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2$.

$\Delta' < 0$: le mouvement du châssis est pseudo-périodique (ou sinusoidal amorti).

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\tau^2 \omega_0^2}}$$

Ω et $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ sont la pseudo-pulsation et la pseudo-période des oscillations du châssis autour de sa position d'équilibre.

A.N. : $\Omega = 6,56 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $T = 0,96 \text{ s}$.

Solution générale :

$$Z(t) = z(t) - z_0 = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\Omega t + \varphi) \text{ et}$$

$$z(t) = z_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\Omega t + \varphi).$$

La constante de temps τ est caractéristique de la durée de l'amortissement.

A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales : $Z(0) = -5 \text{ cm}$ et $\dot{Z}(0) = 0$.

$$\text{Or } \dot{Z}(t) = -Ae^{-\frac{t}{\tau}} \left[\frac{1}{\tau} \cos(\Omega t + \varphi) + \Omega \sin(\Omega t + \varphi) \right]$$

$$\Rightarrow Z(0) = -5 \text{ cm} = A \cos \varphi \text{ et}$$

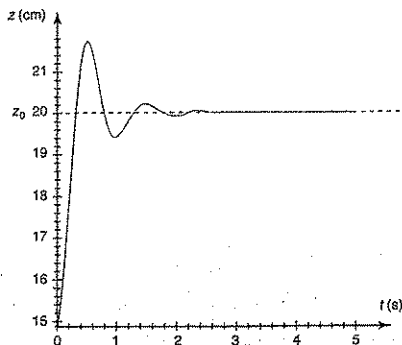
$$\dot{Z}(0) = 0 = -A \left[\frac{1}{\tau} \cos \varphi + \Omega \sin \varphi \right]$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = -\frac{1}{\Omega \tau} : \varphi = -0,325 \text{ rad et } A = -5,27 \text{ cm}$$

d'où la solution :

$$z(t) = 20 - 5,27 e^{-\frac{t}{0,452}} \cos(6,56 t - 0,325)$$

$z(t)$ étant exprimé en cm.



4. C'est à une fréquence de 1 Hz correspondant à une marche normale que le corps humain est le moins indisposé. La période des oscillations est de 0,96 s ce qui correspond à une fréquence de l'ordre de 1 Hz confortable pour les passagers du véhicule.

5. Les amortisseurs permettent au véhicule de revenir rapidement à sa position d'équilibre z_0 après une perturbation. Sans les amortisseurs la voiture oscillerait sans s'arrêter.

6. h_0 est la valeur critique du coefficient d'amortissement. Nous sommes ici dans le cas du régime critique des oscillations : $\frac{1}{\tau} = \omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{M}}$ et le discriminant réduit est nul.

Solution générale :

$$Z(t) = z(t) - z_0 = (At + B)e^{-\omega_0 t} \text{ et}$$

$$z(t) = z_0 + (At + B)e^{-\omega_0 t}.$$

La constante de temps $\tau = \frac{1}{\omega_0}$, caractéristique de la durée de l'amortissement, correspond au temps minimal de retour à l'équilibre.

A.N. : $\tau = 0,14$ s.

A et B sont déterminées à partir des conditions initiales :

$$Z(0) = -5 \text{ cm et } \dot{Z}(0) = 0.$$

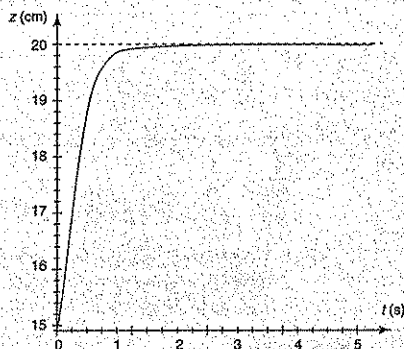
$$\dot{Z}(t) = [A - \omega_0(At + B)]e^{-\omega_0 t}$$

A.N. : $Z(0) = B = -5$ cm, $\dot{Z}(0) = 0 = A - \omega_0 B$ et $\omega_0 B = A = -34,6$ cm.

d'où la solution :

$$z(t) = 20 - (34,6t + 5)e^{-6,93t}$$

$z(t)$ est exprimé en cm.

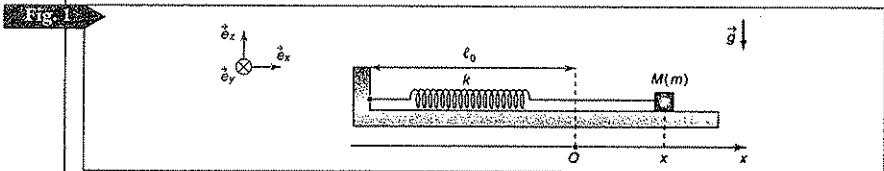


5 Oscillations forcées



1 Oscillations libres et oscillations forcées

L'oscillateur harmonique qui illustre ce chapitre est un système mécanique linéaire constitué d'un point matériel M de masse m lié à un ressort horizontal de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 (figure 1).



1.1. Oscillations libres d'un oscillateur harmonique non amorti

L'extrémité A du ressort est fixe. En situation idéale, le point M glisse sans frottement le long de l'axe $(O; \vec{e}_x)$ à partir de sa position d'équilibre en O et est repéré par son abscisse x .

À l'instant $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0 (avec $x_0 \neq 0$).

Cette perturbation initiale crée les oscillations. Celles-ci sont *libres* car aucune énergie n'est fournie à l'ensemble mécanique au cours de son évolution.

La projection sur l'axe (Ox) du principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans le référentiel terrestre galiléen permet d'accéder à l'équation du mouvement de M :

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

second membre nul
oscillations libres

Les oscillations sont sinusoïdales à la pulsation propre ω_0 ; l'équation horaire du mouvement de M est :

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t.$$

En l'absence de phénomènes dissipatifs, l'énergie mécanique \mathcal{E}_m et l'amplitude x_0 des oscillations sont constantes et fixées par les conditions initiales.

1.2. Oscillations libres d'un oscillateur harmonique amorti

L'extrémité A du ressort est fixe. La force de frottement adoptée pour décrire ce phénomène est de type visqueux :

$$\vec{F}_f = -h \dot{x} \vec{e}_x, \text{ avec } h > 0.$$

L'application du principe fondamental sur l'axe (Ox) donne :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{h}{m}\dot{x}}_{\text{terme d'amortissement}} + \frac{k}{m}x = 0.$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme canonique :

$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}}_{\text{terme d'amortissement}} + \omega_0^2 x = 0$ <p style="text-align: center; font-size: small;">second membre nul oscillations libres</p>
--

avec $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Les oscillations sont libres, ceci se traduit par un second membre nul dans l'équation du mouvement.

En fonction de la valeur du facteur de qualité Q et de l'importance de l'amortissement de l'oscillateur, trois natures du mouvement transitoire sont envisagées.

Si $Q > \frac{1}{2}$, le mouvement spontané et naturel de M est périodique amorti. Sa pseudo-pulsation ω_p est reliée à la pulsation propre ω_0 des oscillations non amorties par la relation :

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

À cause de l'amortissement, l'amplitude des oscillations décroît exponentiellement au cours du temps avec une constante de temps $\tau_a = \frac{2Q}{\omega_0}$:

$$x(t) = \underbrace{C e^{-\frac{t}{\tau_a}}}_{\substack{\text{décroissance} \\ \text{exponentielle} \\ \text{de l'amplitude}}} \cos(\omega_p t + \varphi).$$

L'énergie mécanique de l'oscillateur décroît au cours du temps et, dans le cas de faibles amortissements, son expression à l'instant t est :

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(0) e^{-\frac{t}{\tau_e}}.$$

Le temps $\tau_e = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{\tau_a}{2}$ caractéristique de la décroissance de l'énergie mécanique est la durée de vie des oscillations *transitoires*.

Remarque

- $Q > \frac{1}{2}$ régime pseudo-périodique ;
- $Q = \frac{1}{2}$ régime critique ;
- $Q < \frac{1}{2}$ régime a périodique.

1.3. Oscillations forcées d'un oscillateur harmonique amorti

Pour maintenir une amplitude finie et stable des oscillations, il faut en permanence fournir au système l'énergie dissipée par l'amortissement.

Pour cela, un intervenant extérieur agit sur le système et exerce une force extérieure excitatrice, fonction sinusoïdale du temps, de même direction que le mouvement :

$$\vec{F} = F(t) \vec{e}_x = F_{\text{ext}} \cos \omega t \vec{e}_x.$$

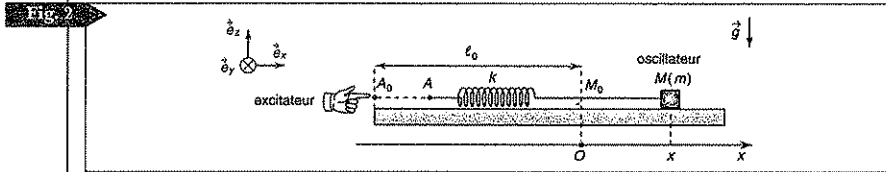
L'équation du mouvement suivant l'axe (Ox) est :

$$m\ddot{x} = -h\dot{x} - kx + F_{\text{ext}} \cos \omega t \Rightarrow m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = \underbrace{F_{\text{ext}} \cos \omega t}_{\substack{\text{second membre non nul} \\ \text{terme d'excitation}}}$$

• Réalisation pratique

L'extrémité A du ressort est mobile (figure 2) et contrôlée par un opérateur extérieur qui lui impose un mouvement sinusoïdal d'amplitude constante X_A et de pulsation ω :

$$\vec{A_0 A} = X_A \cos \omega t \vec{e}_x.$$



La tension du ressort s'écrit :

$$\vec{T} = -k(\vec{AM} - \vec{A_0 M_0}) = -k(\vec{A_0 M} - \vec{A_0 A} - \vec{A_0 M_0}) = -k(\vec{M_0 M} - \vec{A_0 A}) = -k(x - X_A \cos \omega t) \vec{e}_x$$

$$m\ddot{x} = -h\dot{x} - k(x - X_A \cos \omega t) \Rightarrow m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = \underbrace{kX_A \cos \omega t}_{\text{second membre non nul}}$$

Ainsi, tout se passe comme si était exercée une force sinusoïdale d'amplitude constante $F_{\text{ext}} = kX_A$ sur le point M :

$$F(t) = F_{\text{ext}} \cos \omega t = kX_A \cos \omega t.$$

Passons à la forme normalisée de l'équation du mouvement de M :

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos \omega t$$

⇒

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\omega_0}{Q}}_{\text{terme d'amortissement}} \dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{\frac{F_{\text{ext}}}{m}}_{\text{terme d'excitation}} \cos \omega t$$

oscillations forcées

Commentaires :

- Le mouvement de l'oscillateur est ainsi *excité* et l'excitation imposée par l'opérateur extérieur est sinusoïdale de pulsation ω : le régime est *sinusoïdal forcé*.
- Ceci se traduit par un second membre non nul dans l'équation du mouvement.

2 Régime transitoire et régime forcé

Considérons l'équation du mouvement normalisée de l'oscillateur harmonique amorti, à un degré de liberté x , soumis à une force extérieure fonction sinusoïdale du temps :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos \omega t, \text{ avec } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

À l'instant $t = 0$, l'oscillateur est soumis à la force excitatrice et démarre du point d'abscisse $x(0) = x_0$ avec une vitesse initiale $\dot{x}(0) = v_0$.

Le système mécanique est *linéaire* car il est régi par une équation différentielle *linéaire*, ici d'ordre deux, à coefficients constants et avec second membre. En conséquence, il y a superposition de ses solutions et la solution générale de cette équation est la somme d'une solution particulière $x_F(t)$ de l'équation complète avec second membre et de la solution générale $x_H(t)$ de l'équation sans second membre (ou homogène) :

(i) L'équation différentielle linéaire d'ordre deux sans second membre est :

$$\ddot{x}_H + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_H + \omega_0^2 x_H = 0.$$

Cette équation correspond à $F = 0$, c'est-à-dire à l'évolution du système en l'absence d'excitation extérieure : le régime est *libre*. Nous l'avons étudiée dans le chapitre précédent et, dans tous les cas, sa solution $x_H(t)$ tend vers zéro et disparaît au bout d'un temps τ_r , de l'ordre de quelques τ_c (temps de relaxation de l'énergie de l'oscillateur et durée de vie des oscillations).

(ii) La spécificité du second membre permet d'obtenir directement la solution particulière $x_F(t)$. Le second membre étant une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω , il en sera de même pour la solution particulière qui est de la forme :

$$x_F(t) = \underbrace{X_m}_{\text{amplitude}} \cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\text{phase}})$$

- X_m est l'amplitude des oscillations ($X_m > 0$).
- φ est la phase à l'instant origine de l'élongation.

Le déphasage φ représente *avance de phase* de la réponse $x_F(t)$ par rapport à l'excitation $F(t)$.

Commentaires :

• Le *régime transitoire* correspond au laps de temps τ_r , au cours duquel la solution $x_H(t)$ n'est pas négligeable devant $x_F(t)$:

$$t < \tau_r \quad x(t) = x_H(t) + x_F(t).$$

Cette solution constitue la solution générale de l'équation différentielle, elle comporte deux constantes venant de $x_H(t)$ que l'on détermine à partir des conditions initiales.

• En *régime forcé* ou *établi*, la solution $x_H(t)$ est négligeable devant $x_F(t)$:

$$t > \tau_r \quad x(t) = x_H(t) + x_F(t) \approx x_F(t).$$

Cette évolution ne fait pas intervenir les conditions initiales. L'oscillateur est obligé de vibrer à une pulsation qui n'est ni la pulsation propre ω_0 , ni la pseudo-pulsation ω_p qui dépendent des caractéristiques du système mais à la pulsation ω imposée par l'excitateur, le régime est *sinusoïdal forcé* :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi).$$

• La courbe qui suit (figure 3) présente l'évolution de la réponse $x(t)$ de l'oscillateur à une excitation sinusoïdale. Le régime transitoire précède l'établissement du régime sinusoïdal forcé est facilement observable. Le facteur de qualité de l'oscillateur est $Q = 3$.

Remarque

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants est de la forme :

$$c_n \frac{d^n x}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + c_1 \frac{dx}{dt} + c_0 x = f(t).$$

second membre

Les coefficients c_i sont constants.

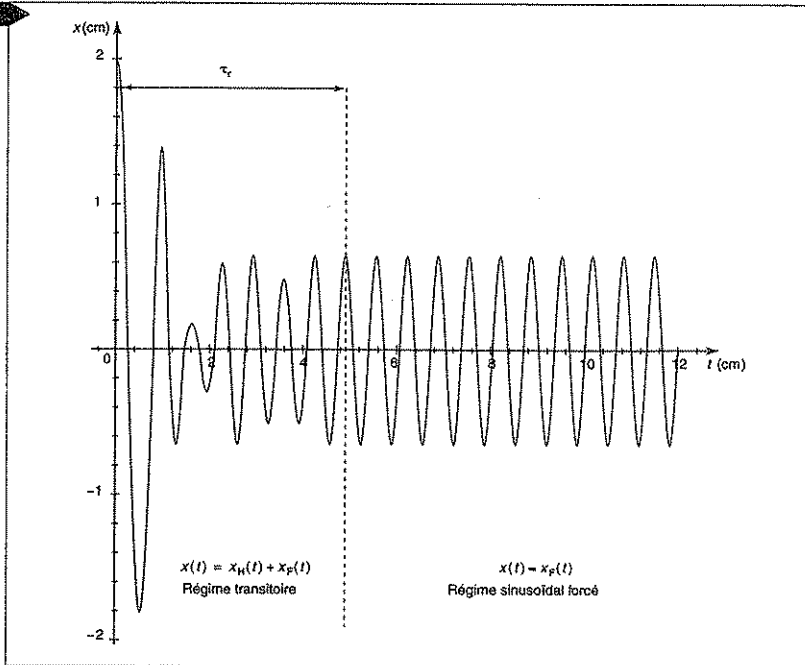
Attention

Si nous avons noté $x_F(t) = X_m \cos(\omega t - \varphi)$ le déphasage φ aurait représenté le retard de phase de la réponse $x_F(t)$ par rapport à l'excitation $F(t)$.

Fig. 3

Remarque

Conventionnellement, un régime transitoire en décroissance exponentielle de constante de temps caractéristique τ est considéré achevé au bout de 5τ .



• **Importance de l'étude du régime sinusoïdal forcé**

(i) Les oscillations forcées se rencontrent dans de nombreuses branches de la physique : l'oscillateur sert de modèle pour étudier la réponse en élévation et en vitesse d'un oscillateur mécanique soumis à une contrainte extérieure, permet d'analyser la réponse en courant ou en tension d'un circuit électrique connecté à une source de tension ou encore de « visualiser » les vibrations des atomes et des molécules excitées par des ondes électromagnétiques ...

(ii) Le choix du caractère sinusoïdal de l'excitation trouve sa justification dans le développement en série de Fourier de la fonction $F(t)$: si cette fonction est continue périodique du temps de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, on montre qu'elle peut se décomposer en une somme discrète et infinie de fonctions sinusoïdales du temps dont les pulsations sont des multiples entiers de la pulsation fondamentale ω :

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

La réponse du système à l'excitation $F(t)$ est la somme des réponses sinusoïdales forcées pour chaque harmonique du développement en série de Fourier de la fonction $F(t)$. Ceci est une conséquence de la linéarité de l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}.$$

3 Oscillations forcées d'un oscillateur linéaire amorti - Résonances

L'équation différentielle du mouvement de M est linéaire et à coefficients constants :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos \omega t.$$

La force extérieure excitatrice appliquée au point M est sinusoïdale de pulsation ω réglable et d'amplitude F_{ext} constante :

$$F(t) = F_{\text{ext}} \cos \omega t.$$

Nous ne nous intéresserons dans ce qui suit qu'au régime sinusoïdal forcé de l'oscillateur, c'est-à-dire à la solution particulière de l'équation différentielle du mouvement.

3.1. Introduction à la méthode de résolution complexe

Cette méthode est réservée à la recherche des solutions particulières *sinusoïdales* d'équations différentielles *linéaires*. Elle n'est donc pas applicable au régime transitoire.

La solution particulière de l'équation différentielle linéaire en régime sinusoïdal forcé est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Ajoutons à cette grandeur : $jX_m \sin(\omega t + \varphi)$, où $j^2 = -1$; nous obtenons :

$$\underline{x}(t) = \underbrace{X_m \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{partie réelle}} + j \underbrace{X_m \sin(\omega t + \varphi)}_{\text{partie imaginaire}} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{X_m e^{j\varphi}}_{\text{amplitude complexe}} e^{j\omega t} = \underline{X}_m e^{j\omega t}.$$

La grandeur analytique $\underline{x}(t)$ est la *représentation complexe* de l'élongation $x(t)$. Seule sa partie réelle a un sens physique et, à l'issue de nos calculs, il faudra revenir à la notation réelle et ne garder que la partie réelle de la grandeur complexe $\underline{x}(t)$.

$$x(t) = \text{Re}[\underline{x}(t)].$$

Le complexe $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ est appelé *amplitude complexe* de $x(t)$.

(i) Son module est l'amplitude de $x(t)$: $|\underline{X}_m| = X_m$.

(ii) Son argument est l'avance de phase φ : $\arg(\underline{X}_m) = \varphi$.

Ainsi, la connaissance de l'amplitude complexe permet de définir entièrement la réponse de l'oscillateur.

Procédons de la même manière pour $F(t)$:

$$\underline{F}(t) = F_{\text{ext}} e^{j\omega t}, \text{ avec } F(t) = \text{Re}[\underline{F}(t)].$$

- Intérêt de la méthode complexe
- Les opérations de dérivation par rapport au temps s'expriment de manière très simple :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{x} \text{ et } \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} = -\omega^2 \underline{x}.$$

Dériver $\underline{x}(t)$ par rapport à t revient à multiplier cette fonction par $j\omega$.

- La notation complexe permet de remplacer une équation différentielle par une équation algébrique sur le corps des complexes qui donne immédiatement accès à la réponse de l'oscillateur en régime sinusoïdal permanent établi.

3.2. Réponse harmonique en élongation

Appliquons la méthode à l'équation différentielle du mouvement de M :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos \omega t.$$

En notation complexe cette équation s'écrit sous la forme algébrique :

$$-\omega^2 \underline{x}(t) + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{x}(t) + \omega_0^2 \underline{x}(t) = \frac{F_{\text{ext}}}{m} e^{j\omega t}.$$

Comme $\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ et en simplifiant (le terme $e^{j\omega t}$ étant non réel), l'amplitude complexe du déplacement de l'oscillateur excité est :

$$\underline{X}_m = \frac{\frac{F_{\text{ext}}}{m}}{-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \times \frac{1}{\omega_0}.$$

Ainsi :

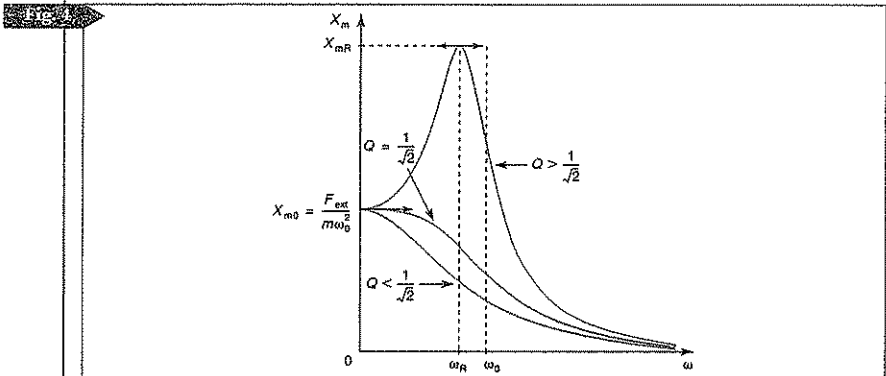
$$X_m e^{j\varphi} = \frac{\frac{F_{\text{ext}}}{m\omega_0^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

3.2.1. Amplitude de la réponse : résonance d'élongation

Le module de l'amplitude complexe est l'amplitude X_m de l'élongation :

$$X_m = |\underline{X}_m| = \frac{\frac{F_{\text{ext}}}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}$$

L'amplitude de la réponse harmonique en élongation dépend de la pulsation de la force d'excitation. Les courbes de réponse en amplitude qui suivent (figure 4), pour différentes valeurs du facteur de qualité, font apparaître un comportement global de *filtre passe-bas* de l'oscillateur : sa réponse à l'excitation est négligeable si la pulsation imposée par l'excitateur est trop élevée par rapport à la pulsation propre du système. L'oscillateur n'arrive plus à suivre la force d'excitation et tend à répondre à sa valeur moyenne qui est nulle.



Les courbes obtenues montrent un comportement différent de l'oscillateur pour diverses valeurs du facteur de qualité et donc de l'amortissement. Elles démarrent toutes à pulsation d'excitation nulle par une asymptote horizontale en un point correspondant à l'amplitude statique de l'oscillateur :

$$X_{m0} = \frac{F_{\text{ext}}}{m\omega_0^2}$$

• $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$: oscillateur fortement amorti

L'amplitude de l'élongation est strictement décroissante lorsque ω varie de 0 à l'infini.

• $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: oscillateur faiblement amorti

L'amplitude de l'élongation passe par un maximum, c'est le phénomène de *résonance* de l'élongation qui a lieu à la pulsation de résonance ω_R toujours inférieure à la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur :

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \leq \omega_0$$

L'oscillateur est un filtre passe-bas, mais privilégie les pulsations d'excitation proches de sa pulsation propre : il se comporte localement comme un *filtre passe-bande*.

À la résonance d'élongation, le maximum de l'amplitude est :

$$X_{mR} = \frac{QX_{m0}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > X_{m0}$$

X_{mR} est une fonction croissante de Q : la résonance est aiguë lorsque le facteur de qualité est élevé, c'est-à-dire lorsque l'oscillateur est très peu amorti.

L'*acuité de la résonance* est évaluée par le rapport :

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

La *bande passante* $\Delta\omega$ est l'intervalle séparant les deux *pulsations de coupure* ω_1 et ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$) telles que :

$$X_m(\omega_1) = X_m(\omega_2) = \frac{X_{mR}}{\sqrt{2}}$$

• $Q \gg \frac{1}{\sqrt{2}}$: oscillateur très faiblement amorti

Dans ce cas la pulsation de résonance se confond avec la pulsation propre de l'oscillateur :

$$\omega_R = \omega_0$$

Le maximum de l'amplitude est alors :

$$X_{mR} = QX_{m0}$$

Commentaire :

Il est possible d'atteindre des amplitudes extrêmes d'oscillations pouvant provoquer la destruction de l'oscillateur avec des effets spectaculaires comme la rupture de ponts.

Remarque

Un facteur de qualité $Q = 5$ correspond à un écart relatif de 1 % entre ω_R et ω_0 .

Le facteur de qualité Q est ainsi défini comme le rapport entre l'amplitude X_{mR} à la résonance et l'amplitude X_{m0} aux très basses fréquences :

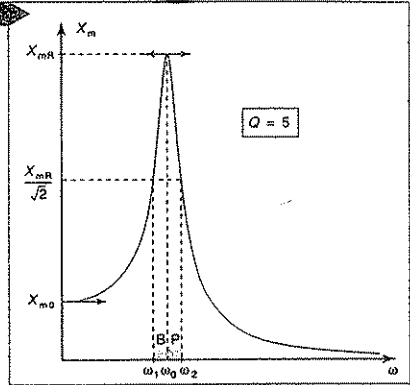
$$Q = \frac{X_{mR}}{X_{m0}}$$

L'acuité de la résonance se confond avec le facteur de qualité par la relation approchée :

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$$

À un facteur de qualité important correspond une bande passante étroite (figure 5), c'est bien le facteur de qualité qui mesure l'acuité de la résonance.

FIG. 5



3.2.2. Avance de phase de la réponse en élongation par rapport à l'excitation

Les courbes de réponse en phase de l'oscillateur en fonction de ω et pour diverses valeurs caractéristiques du facteur de qualité sont représentées ci-contre (figure 6) :

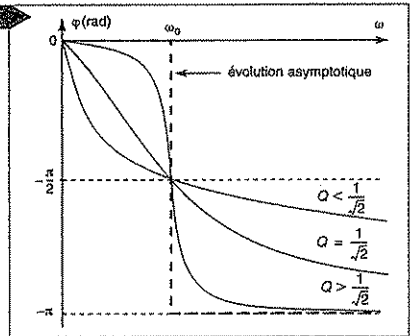
(i) Pour les faibles fréquences d'excitation, l'oscillateur et la force sont en phase.

(ii) Pour les hautes fréquences, l'oscillateur et la force sont en opposition de phase.

(iii) À la pulsation propre, excitation et élongation sont en quadrature ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad).

(iv) Plus le facteur de qualité est élevé et plus φ varie rapidement autour de la pulsation propre ω_0 des oscillations libres non amorties de l'oscillateur.

FIG. 6



3.3. Réponse en vitesse

La vitesse est représentée en notation complexe par :

$$v = \dot{x} = j\omega x.$$

En conséquence son amplitude complexe est :

$$-V_m = \frac{j\omega \frac{F_{\text{ext}}}{2}}{m\omega_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Remarque

Par abus de langage, de nombreux physiciens appelle fréquence la pulsation. Cela ne doit pas entraîner de confusion :

$$\omega = 2\pi N$$

pulsation (rad · s⁻¹) fréquence (Hz)

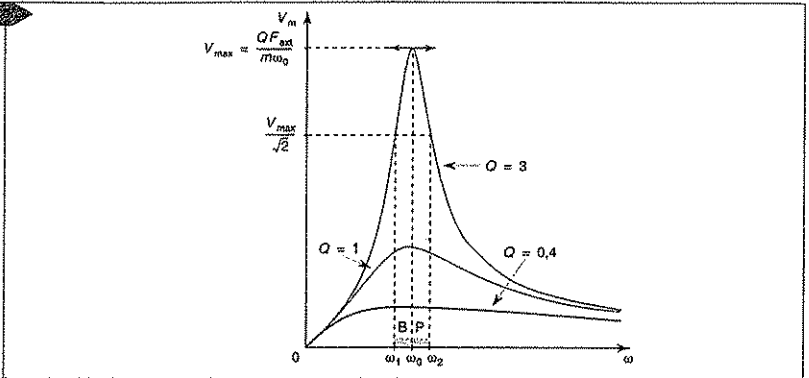
La fréquence peut être notée N , f ou ν pour une radiation électromagnétique.

L'amplitude réelle V_m de la vitesse est le module de l'amplitude complexe :

$$V_m = |V_m| = \frac{\frac{F_{\text{ext}}}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Elle passe par un maximum à une valeur de la fréquence égale à la fréquence propre de l'oscillateur : c'est la résonance de vitesse (figure 7). Le phénomène a lieu quelle que soit la valeur du facteur de qualité Q .

Fig. 7



L'acuité de la résonance de vitesse est définie par la relation stricte :

$$\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$$

Pour la réponse en vitesse, l'oscillateur effectue un filtrage passe-bande. La largeur $\Delta\omega$ de la bande passante est définie par :

$$V_m(\omega_1) = V_m(\omega_2) = \frac{V_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

3.4. Réponse en puissance

La puissance moyenne temporelle fournie par la force excitatrice à l'oscillateur est :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \frac{Q F_{\text{ext}}^2}{m\omega_0} \frac{\left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Cette puissance moyenne temporelle est entièrement dissipée par les phénomènes d'amortissement : c'est bien la puissance moyenne fournie par l'excitateur qui sert à compenser la puissance dissipée par les frottements.

Le comportement fréquentiel de la puissance moyenne fait apparaître une résonance à la pulsation propre de l'oscillateur. La résonance en puissance coïncide avec la résonance de vitesse. Un transfert maximum de puissance de l'excitateur à l'oscillateur se traduit par une amplitude maximale de la vitesse acquise par le système.

Pour la réponse en puissance (figure 8), l'oscillateur effectue un filtrage passe-bande. La largeur $\Delta\omega$ de la bande passante à mi-puissance est définie par :

$$\langle \mathcal{P} \rangle(\omega_1) = \langle \mathcal{P} \rangle(\omega_2) = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle_{\max}}{2}$$

L'acuité de la résonance de puissance vérifie la relation stricte déjà obtenue pour la résonance de vitesse :

$$\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$$

Ainsi s'explique le choix du $\frac{1}{\sqrt{2}}$

pour définir la largeur de bande passante du filtre de vitesse : il correspond à un transfert de l'excitateur à l'oscillateur d'au moins la moitié de la puissance moyenne maximale.

• Conséquence

L'amortissement étant faible, il correspond à un régime pseudo-périodique de l'oscillateur harmonique. La décroissance exponentielle de l'énergie mécanique de l'oscillateur est caractérisée par le temps de relaxation $\tau_e = \frac{Q}{\omega_0}$.

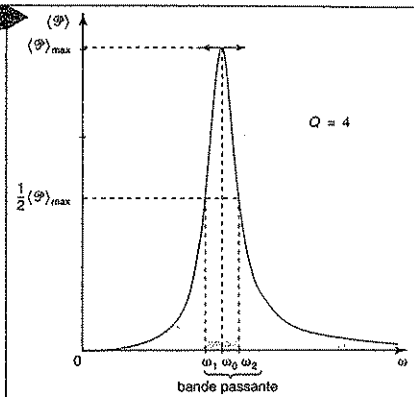
La réponse en puissance du régime sinusoïdal forcé est caractérisée par la largeur de bande passante $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

Il existe donc un lien entre le régime transitoire et le régime sinusoïdal forcé de l'oscillateur :

$$\Delta\omega \tau_e = 1$$

Un oscillateur à réponse rapide (τ_e faible) est un oscillateur à bande passante élevée et inversement.

Fig. 8



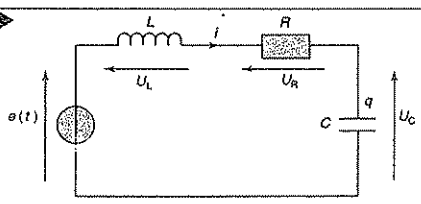
4 Analogies électromécaniques

4.1. L'oscillateur électrique amorti en régime sinusoïdal forcé

Soit la charge q du condensateur de capacité C d'un circuit électrique RLC série (figure 9) alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice :

$$e(t) = E_{\text{ext}} \cos(\omega t).$$

Fig. 9



L'équation différentielle vérifiée par q est :

$$\ddot{q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{\text{terme d'amortissement}} \dot{q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\text{terme d'excitation}} q = \underbrace{\frac{E_{\text{ext}}}{L}}_{\text{oscillations forcées}} \cos(\omega t).$$

Sous la forme canonique, elle devient :

$$\ddot{q} + \underbrace{\frac{\omega_0}{Q}}_{\text{terme d'amortissement}} \dot{q} + \underbrace{\omega_0^2}_{\text{oscillations forcées}} q = \frac{E_{\text{ext}}}{L} \cos(\omega t).$$

4.2. Similitudes de comportement entre grandeurs électriques et mécaniques

L'équation différentielle obtenue est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé.

Rappelons l'équation différentielle de l'oscillateur mécanique :

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\omega_0}{Q}}_{\text{terme d'amortissement}} \dot{x} + \underbrace{\omega_0^2}_{\text{oscillations forcées}} x = \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos \omega t.$$

En effectuant les analogies formelles électromécaniques par comparaison des équations différentielles, on peut en déduire des similitudes de comportements. Celles-ci sont réunies dans le tableau suivant :

Oscillateur mécanique		Oscillateur électrique	
masse (<i>inertie mécanique</i>)	m	inductance (<i>inertie électrique</i>)	L
coefficient d'amortissement	h	résistance	R
raideur du ressort	k	inverse de la capacité	$\frac{1}{C}$
pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
facteur de qualité	$Q = \frac{m\omega_0}{h}$	facteur de qualité	$Q = \frac{L\omega_0}{R}$
Excitateur mécanique		Excitateur électrique	
force	$F_{\text{ext}} \cos \omega t$	tension	$E_{\text{ext}} \cos \omega t$
Réponses mécaniques		Réponses électriques	
élongation	$x(t)$	charge électrique	$q(t)$
vitesse	$v(t)$	courant électrique	$i(t)$
Énergies		Énergies	
énergie cinétique	$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2$	énergie magnétique	$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L i^2$
énergie potentielle élastique	$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} k x^2$	énergie électrique	$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

4.3. Impédance mécanique

L'impédance électrique est définie comme le rapport des amplitudes complexes :

$$Z = \frac{U_m}{I_m} \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{excitation} \\ \leftarrow \text{réponse en courant} \end{array} \right.$$

Par analogie, on appelle **impédance complexe d'un système mécanique**, le rapport des amplitudes complexes :

$$\underline{Z} = \frac{F_m}{V_m} \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{excitation} \\ \leftarrow \text{réponse en vitesse} \end{array} \right.$$

(i) La force excitatrice $F(t) = F_{\text{ext}} \cos \omega t$ donne en notation complexe :

$$\underline{F}(t) = F_{\text{ext}} e^{j\omega t}, \text{ avec } \underline{F}_m = F_{\text{ext}}.$$

(ii) La vitesse $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$ donne en notation complexe :

$$v = \underline{V}_m e^{j\omega t}, \text{ avec } \underline{V}_m = V_m e^{j\varphi_v}.$$

Or $v = \dot{x} \Rightarrow \underline{v} = j\omega \underline{x}$ et $\underline{V}_m = j\omega \underline{X}_m$.

Revenons à l'équation différentielle du mouvement de M : $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_{\text{ext}} \cos \omega t$.

En amplitudes complexes :

$$(-m\omega^2 + j\omega h + k)\underline{X}_m = \underline{F}_m, \text{ d'où } \underline{j\omega \underline{X}_m} \left(h + j\omega m + \frac{k}{j\omega} \right) = \underline{F}_m.$$

D'où l'expression de l'impédance mécanique :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}_m}{\underline{V}_m} = h + j \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) = Z e^{-j\varphi_v} \text{ avec } Z = \frac{F_{\text{ext}}}{V_m}.$$

Revenons, par analogie formelle, à l'impédance électrique :

$$\underline{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

Se retrouve bien l'impédance électrique complexe du circuit électrique RLC série, nous aurions pu commencer par cela.

Avant la colle

Tester ses connaissances

> Corrigés p. 195

1 L'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique libre amorti est :

a. $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$;

b. $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$;

c. $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos \omega t$.

2 Le facteur de qualité d'un oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé a un facteur de qualité $Q = 0,6$:

a. Le régime transitoire est pseudo-périodique.

b. Le régime transitoire est apériodique.

c. Il y a résonance d'élongation.

3 La notation complexe permet d'accéder aux solutions particulières stables des équations différentielles :

- a. $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{ext}}}{m} e^{-\frac{t}{\tau}}$;
- b. $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \omega^2 \sin \theta \cos(\omega t)$;
- c. $\ddot{x} - \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos \omega t$;
- d. $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos \omega t$.

4 La pulsation de résonance d'élongation d'un oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé est :

- a. $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}}$;
- b. $\omega_R = \omega_0$;
- c. $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$;

d. $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

5 Que peut-on faire pour diminuer l'amplitude à la résonance ?

6 Peut-on utiliser la notation complexe pour représenter la puissance d'une force ?

7 La durée caractéristique de la décroissance de l'énergie de l'oscillateur mécanique est :

$$\tau_e = \frac{m}{h}$$

Dans le cas du circuit électrique *RLC* série, la décroissance de l'énergie électrique est caractérisée par la durée :

- a. $\tau_e = RC$;
- b. $\tau_e = \sqrt{LC}$;
- c. $\tau_e = \frac{L}{R}$.

Savoir appliquer le cours

➤ Corrigés p. 195

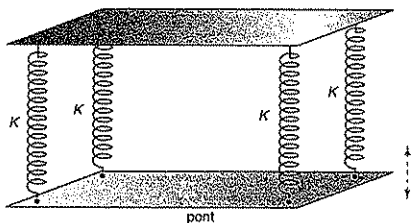
Un pont suspendu, dont le tablier est maintenu par des câbles, peut effectuer des oscillations verticales, transversales ou de torsion. À chacun de ces types d'oscillations correspond une fréquence propre. En 1850, une troupe traversant au pas cadencé le pont de Basse Chaîne, pont suspendu sur la Maine à Angers, provoqua la rupture du pont par résonance. En 1940, des bourrasques intermittentes provoquèrent des vibrations de torsion du pont de Tacoma Narrows (USA) d'une amplitude telle que le pont s'effondra. Plus récemment, le pont du Millénaire inauguré en juin 2000 fut fermé au public car il se mettait à osciller dangereusement : les études d'oscillation des ponts sont faites pour éviter les oscillations verticales, or il s'agissait ici d'oscillations horizontales...

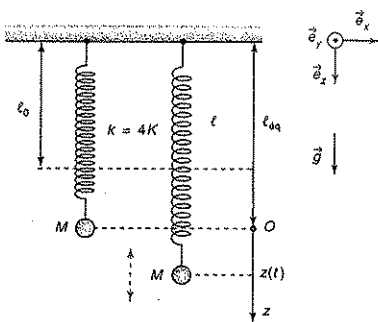
Les quatre exercices qui suivent ont en commun l'énoncé suivant.

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur uniforme.

Pour illustrer les phénomènes liés aux oscillations de structures, considérons un objet *M* ponctuel de masse *m* relié à l'extrémité mobile d'un ressort vertical, sans masse, de raideur *k* et de longueur à vide ℓ_0 . L'oscillateur ainsi réalisé a un facteur de qualité *Q* et une pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Il

modélise un pont de masse *m* maintenu par quatre ressorts verticaux identiques de raideur *K* qui oscille verticalement : $k = 4K$.





Le système est initialement à l'équilibre et la cote $z(t)$ est comptée à partir de cette position. À l'instant $t = 0$, l'objet est dans la position $z(0) = 0$ et sa vitesse initiale est nulle :

$$\dot{z}(0) = 0.$$

Le point M est soumis à une force extérieure sinusoïdale excitatrice :

$$\vec{F}(t) = F_0 \cos \omega t \vec{e}_z.$$

On s'intéresse à la réponse en élongation $z(t)$ de l'oscillateur. L'équation différentielle du mouvement de M est :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

1 L'oscillateur harmonique n'est pas amorti ($Q \rightarrow +\infty$). La solution particulière de l'équation complète est de la forme :

$$z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Déterminer la solution de cette équation.

2 Sachant que $\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin u}{u} \right) = 1$, quelle est la forme de la solution $z(t)$ lorsque ω est voisin de ω_0 et lorsqu'on se place au démarrage des oscillations ?

3 Les atomes d'un cristal vibrent avec une pulsation caractéristique ω_0 . Selon le personnage de la Castafiore d'Hergé (dans la bande dessinée *Les bijoux de la Castafiore*), un verre de cristal peut être brisé par la voix de la cantatrice. Doit-elle émettre une note bien particulière ? La durée pendant laquelle elle maintient cette note a-t-elle une importance ?

4 L'oscillateur est amorti mais il possède un facteur de qualité Q très élevé. Déterminer la nouvelle solution $z(t)$ lorsque ω est très proche de ω_0 et en supposant le régime sinusoïdal établi. La structure est-elle encore en danger ?

1 - Oscillations forcées : réponse en élongation, filtrage et sélectivité

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Un point matériel M de masse m , relié à un ressort horizontal de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , peut glisser sur l'axe $(O; \vec{e}_x)$ d'un plan horizontal. Sa position est repérée par l'abscisse x à partir de sa position d'équilibre située à l'origine O .

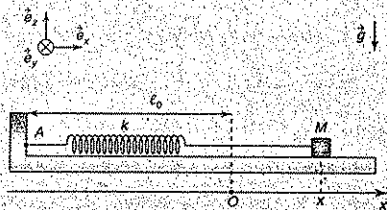
Le point M est soumis à :

(i) une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -h \dot{x} \vec{e}_x$ ($h > 0$);

(ii) une force excitatrice sinusoïdale $\vec{F} = F_0 \cos \omega t \vec{e}_x$.

Le mouvement a lieu comme si A était fixe dans \mathcal{R}_g et la force \vec{F} appliquée directement sur M .

On posera : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$.



1 Établir l'équation du mouvement de M dont $x(t)$ est solution. Cette équation différentielle est-elle linéaire ?

2 On cherche la réponse en élongation de l'oscillateur en régime sinusoïdal forcé. La solution particulière de l'équation complète est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Le déphasage φ de l'élongation représente-t-il l'avance de phase ou le retard de phase de la réponse de l'oscillateur par rapport à l'excitation ?

Donner l'équation vérifiée par l'amplitude complexe $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$.

3 Les résultats qui suivent sont fonctions de F_0 , m , de la pulsation ω de l'excitateur, de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q de l'oscillateur. Établir l'expression de l'amplitude X_m des oscillations. Pour déterminer complètement la phase φ de $x(t)$, donner les expressions de $\tan \varphi$ et de $\sin \varphi$. En déduire le domaine de variation de $\varphi(\omega)$. La phase φ est-elle une fonction croissante ou décroissante de ω ?

4 Pour quelles valeurs de Q y a-t-il résonance d'élongation ? Déterminer, dans ce cas la pulsation de résonance ω_R et l'amplitude X_{mR} des oscillations à cette pulsation.

5 Tracer l'allure de la courbe X_m en fonction de ω dans la situation de résonance puis en l'absence de résonance d'élongation. Commenter le comportement de filtre de l'oscillateur.

- 6 Dans le cas de l'oscillateur peu amorti où $Q \gg 1$, montrer que l'acuité de la résonance, définie par le rapport entre la pulsation propre de l'oscillateur et de la bande passante $\Delta\omega$ du filtre, vérifie la relation approchée :

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$$

Commenter la sélectivité du filtre.

- 7 Tracer l'allure de la réponse en phase φ de l'oscillateur en fonction de ω . Commenter.

résolution méthodique

1

Pour obtenir l'équation du mouvement, il faut reprendre l'étude systématique d'un problème de mécanique.

[1] Définir le système étudié.

[2] Choisir le référentiel d'étude galiléen \mathcal{R}_g .

[3] Effectuer le bilan des forces appliquées au système. Le système est-il conservatif ?

[4] Préciser le nombre de degrés de liberté du problème.

[5] Mise en équation du problème.

Le système étant non conservatif, l'équation différentielle du mouvement est de préférence obtenue par application du principe fondamental de la dynamique.

Pour que cette équation différentielle du second ordre à coefficients constants soit linéaire, il faut qu'elle ait la forme générale :

$$c_2 \frac{d^2x}{dt^2} + c_1 \frac{dx}{dt} + c_0 x = f(t)$$

Pour s'assurer de la stabilité de la solution particulière, il faut que c_0 , c_1 et c_2 soient de même signe.

Le système est le point M , son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• Bilan des forces appliquées au point M

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids du point matériel M ;

(ii) de contact :

$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du ressort ;

$\vec{F}_{\text{support} \rightarrow M} = \vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_f$, la réaction du support ;

$\vec{F}_{\text{excitateur} \rightarrow M} = \vec{F} = F_0 \cos \omega t \vec{e}_x$, force d'excitation sinusoïdale.

La modification de la longueur du ressort par rapport à sa longueur à vide est $\ell - \ell_0 = x$.

La tension \vec{T} du ressort est :

$$\vec{T} = -k(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM_0}) = -kx\vec{e}_x.$$

La réaction \vec{R} du support sur M se décompose en deux forces :

- (i) la réaction normale \vec{N} qui équilibre le poids \vec{P} du mobile ;
- (ii) la force de frottement \vec{F}_f tangentielle au support et qui s'oppose au déplacement du mobile.

Le système est **non conservatif** du fait de la présence de la force de frottement dissipative de l'énergie mécanique : l'équation différentielle du mouvement est obtenue par application du principe fondamental de la dynamique au point matériel M dans le référentiel terrestre galiléen.

La position de M est repérée par le seul paramètre x , le mouvement est à un degré de liberté. Une seule équation suffit pour décrire le mouvement de l'oscillateur.

• *Expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique*

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F}_f = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{T} + \vec{F}_f = m \vec{a}(M)_{\mathcal{R}_g}.$$

Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{pmatrix} - h \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_0 \cos \omega t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où les équations :

• projection sur \vec{e}_x : $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$ (1)

• projection sur \vec{e}_z : $N = mg$ (2)

(2) La réaction normale du support équilibre le poids, il n'y a pas de mouvement vertical de M .

(1) L'équation différentielle du mouvement de M qui a lieu selon \vec{e}_x est :

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

En adoptant le paramétrage indiqué, l'équation différentielle s'exprime sous la forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Cette équation différentielle est du second ordre et à coefficients constants. Elle est **linéaire** car de la forme générale :

$$c_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + c_1 \frac{dx}{dt} + c_0 x = f(t).$$

La solution particulière de cette équation est stable car c_0 , c_1 et c_2 sont positifs.

$\vec{F} = F_0 \cos \omega t \vec{e}_x$: la phase à l'origine de la force excitatrice est nulle.

$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$: le signe qui précède la phase à l'origine φ de $x(t)$ indique si elle est l'avancée ou le retard de phase de l'élongation x par rapport à l'excitation F :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad x(t) = X_m \cos(\omega t - \varphi).$$

\uparrow avance de phase \uparrow retard de phase

La recherche de la solution particulière sinusoïdale de cette équation différentielle linéaire est simplifiée par l'utilisation de la notation complexe qui a l'avantage de remplacer l'équation différentielle du mouvement par une équation algébrique sur le corps des nombres complexes.

On associe à l'élongation $x(t)$ sa représentation complexe :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \underbrace{X_m \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{partie réelle}} + j \underbrace{X_m \sin(\omega t + \varphi)}_{\text{partie imaginaire}} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} \\ &= \underbrace{X_m e^{j\varphi}}_{\text{amplitude complexe}} e^{j\omega t} = \underline{X}_m e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Procédons de la même façon avec la composante $F(t)$, sa représentation complexe est :

$$\underline{F}(t) = F_0 \cos \omega t + j F_0 \sin \omega t = F_0 e^{j\omega t}.$$

Rappelons que seules les parties réelles ont un sens physique.

Dériver $x(t)$ par rapport à t revient à multiplier cette fonction par $j\omega$ et dériver deux fois $x(t)$ par rapport à t revient à la multiplier par $(j\omega)(j\omega)$, c'est-à-dire par $(-\omega^2)$.

La solution particulière de l'équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi).$$

La phase à l'origine φ est l'avance de phase de l'élongation par rapport à la force excitatrice :

- si $\varphi > 0$, x est en avance de phase par rapport à F ;
- si $\varphi < 0$, x est en retard de phase par rapport à F .

Comme le système est **linéaire** et la réponse recherchée **sinusoïdale** de pulsation ω , nous pouvons utiliser la notation complexe :

$$\begin{aligned} \underline{F}(t) &= F_0 e^{j\omega t}, \\ \underline{x}(t) &= X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{X_m e^{j\varphi}}_{\text{amplitude complexe}} e^{j\omega t} = \underline{X}_m e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle devient l'équation complexe :

$$\begin{aligned} -\omega^2 \underline{x} + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} &= \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}, \\ \left(-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) \underbrace{X_m e^{j\varphi}}_{\text{amplitude complexe}} e^{j\omega t} &= \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

L'équation aux amplitudes complexes est obtenue en simplifiant par $e^{j\omega t}$:

$$\left(-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) \underline{X}_m = \frac{F_0}{m}.$$

On en déduit l'expression de l'amplitude complexe de l'élongation :

$$\underline{X}_m = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} \times \frac{1}{\omega_0^2} \times \frac{1}{\omega_0^2}$$

$$\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} = \frac{\frac{F_0}{m \omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

3

Pour déterminer le module $|\underline{X}_m|$ et l'argument φ de l'amplitude complexe \underline{X}_m , observons que \underline{X}_m est le rapport de deux nombres complexes :

$$\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} = \frac{N}{D}, \text{ avec } N = |N| e^{j\varphi_N} = \frac{F_0}{m \omega_0^2} \text{ et } D = |D| e^{j\varphi_D} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}.$$

Ainsi, $X_m e^{j\varphi} = \frac{|N| e^{j\varphi_N}}{|D| e^{j\varphi_D}} = \frac{|N|}{|D|} e^{j(\varphi_N - \varphi_D)}$. En conclusion :

$$X_m = \frac{|N|}{|D|} \text{ et } \varphi = \varphi_N - \varphi_D \text{ ou } \arg(\underline{X}_m) = \arg(N) - \arg(D).$$

Le quotient des deux nombres complexes N et D est le nombre complexe \underline{X}_m qui a pour module le quotient des modules et pour argument la différence des arguments.

On peut encore écrire :

$$\varphi = \arg(\underline{X}_m) = \arg(N) - \arg(D) = \arg(N) + \arg(D^*),$$

D^* est le nombre complexe conjugué de D : $D^* = |D| e^{-j\varphi_D} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - j \frac{\omega}{\omega_0 Q}$.

Remarques :

Soit le nombre complexe $C = a + jb = |C| e^{j\varphi_C} = |C| (\cos \varphi_C + j \sin \varphi_C)$.

(i) Le module de C est défini par : $|C| = \sqrt{a^2 + b^2}$

(ii) Pour déterminer l'argument φ_C :

$$\tan \varphi_C = \frac{b}{a}; \quad \sin \varphi_C = \frac{b}{|C|}; \quad \cos \varphi_C = \frac{a}{|C|}$$

Comme la fonction tangente est périodique de période π , il est nécessaire de considérer le signe (sgn) de $\sin \varphi_C$ ou le signe de $\cos \varphi_C$ pour déterminer complètement φ_C .

$$\begin{cases} \text{sgn}(\sin \varphi_C) = \text{sgn}(b) \\ \text{sgn}(\cos \varphi_C) = \text{sgn}(a) \end{cases}$$

Entre a et b , on choisira le terme indépendant de ω . L'argument de C est défini par :

$$\begin{cases} \tan \varphi_C = \frac{b}{a} \\ \text{sgn}(\cos \varphi_C) = \text{sgn}(a) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \tan \varphi_C = \frac{b}{a} \\ \text{sgn}(\sin \varphi_C) = \text{sgn}(b) \end{cases}$$

(i) L'amplitude complexe de l'élongation est le rapport de deux nombres complexes :

$$\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} = \frac{N}{D} = \frac{\frac{F_0}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

Le module de \underline{X}_m est le rapport des modules :

$$X_m = |\underline{X}_m| = \frac{\frac{F_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}$$

• **Analyse du résultat** : l'amplitude des oscillations dépend de la pulsation ω de la force d'excitation.

(ii) L'argument de \underline{X}_m est la différence des arguments :

$$\varphi = \arg(\underline{X}_m) = \underbrace{\arg\left(\frac{F_0}{m\omega_0^2}\right)}_0 - \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right) = \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - j\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)$$

$$\begin{cases} \tan \varphi = -\frac{\omega}{\omega_0 Q \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \\ \sin \varphi \leq 0 \end{cases}$$

• **Analyse du résultat** : l'avance de phase des oscillations dépend de la pulsation de la force d'excitation. Parce que $\sin \varphi < 0$, son domaine de variation est :

$$\varphi \in [-\pi, 0]$$

L'élongation présente toujours un retard de phase par rapport à la force excitatrice.

Calculons la dérivée de $\tan \varphi$ par rapport à ω :

$$\frac{d \tan \varphi}{d \omega} = -\frac{1}{\omega_0 Q} \frac{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2} < 0.$$

$\tan \varphi$ et donc φ sont des fonctions décroissantes de ω : il y a diminution de φ lors de l'augmentation de la pulsation excitatrice ω .

4

Pour qu'il y ait résonance d'élongation, il faut que l'amplitude des oscillations passe par un maximum pour une valeur particulière de la pulsation d'excitation appelée pulsation de résonance ω_R . Au lieu de dériver le module de l'amplitude complexe par rapport à ω , il est plus simple de dériver le carré de son dénominateur D :

$$\frac{dD^2}{d\omega} = 2D \frac{dD}{d\omega} = 0 \quad (D \neq 0).$$

Le maximum de l'amplitude est obtenu si son dénominateur D est minimum.

Exprimons le carré du dénominateur de l'amplitude des oscillations :

$$D^2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2 \quad (D \neq 0).$$

Dérivons cette expression par rapport à ω :

$$\frac{dD^2}{d\omega} = 2D \frac{dD}{d\omega} = \frac{2}{\omega_0^2} \omega \left[\frac{1}{Q^2} - 2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \right].$$

L'annulation de la dérivée est obtenue pour :

(i) $\omega = 0$, l'amplitude statique est alors $X_{m0} = \frac{F_0}{m \omega_0^2}$;

(ii) $1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{2Q^2} \Rightarrow \omega^2 = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) \omega_0^2$.

Cette seconde solution n'est acceptable que si $\omega^2 > 0$, ce qui implique la condition sur Q :

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dans ce cas, la pulsation de résonance en élongation est : $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \leq \omega_0$

L'amplitude à la résonance est obtenue en reportant ω_R dans l'expression du module de l'amplitude complexe :

$$X_{mR} = \frac{\frac{F_0}{m \omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_R^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_R}{\omega_0 Q}\right)^2}} = \frac{\frac{F_0}{m \omega_0^2}}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}}$$

$$X_{mR} = \frac{Q X_{m0}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > X_{m0}$$

◊ *Analyse physique* : la fréquence de résonance et l'amplitude maximale des oscillations dépendent du facteur de qualité et donc de l'amortissement.

5

La réponse de l'oscillateur dépend de l'amortissement, il faut étudier les deux cas :

$$Q < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Toutes les données nécessaires ont été établies dans la question précédente.
Remarquons que les conditions initiales n'interviennent pas dans le régime forcé.

La courbe débute par une tangente horizontale quel que soit le facteur de qualité Q et l'amplitude tend vers 0 lorsque ω tend vers l'infini :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} X_m = 0.$$

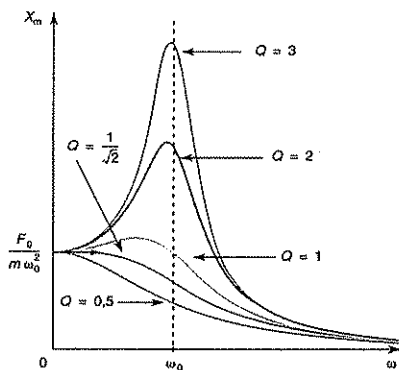
- Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, il n'y a pas d'autre extremum de la courbe, donc pas de résonance.
- Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, le point de départ à $\omega = 0$ de la courbe est un minimum, puis la courbe

présente un maximum à la pulsation $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ inférieure à la pulsation propre de l'oscillateur. Moins il y a d'amortissement, plus le facteur de qualité est grand et plus la pulsation de résonance se rapproche de la pulsation propre. Remarquons l'accroissement considérable de l'amplitude lorsque la force appliquée à une pulsation proche de la pulsation propre : c'est le phénomène de *résonance*.

La figure qui suit présente la réponse en élancement de l'oscillateur en fonction de la pulsation pour différentes valeurs du facteur de qualité.

Commentaires :

- $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$: le système effectue un filtrage passe-bas et, dans un large domaine de fréquence inférieur à la pulsation propre, reproduit les particularités de la force.
- $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: le système favorise dans sa réponse des fréquences particulières proches de sa pulsation propre, il effectue un filtrage passe-bande.



6

Dans le cas de l'oscillateur faiblement amorti, la courbe de résonance est fortement piquée. Comme en électricité, la bande passante est le domaine de fréquence pour lequel l'amplitude

est au moins égale à $\frac{X_{mR}}{\sqrt{2}}$

L'oscillateur est faiblement amorti et $Q \gg 1$. La résonance a pratiquement lieu pour $\omega = \omega_0$:

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx \omega_0.$$

L'amplitude maximale des oscillations est :

$$X_{mR} = \frac{Q X_{m0}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \approx Q X_{m0}, \text{ avec } X_{m0} = \frac{F_0}{m \omega_0^2}.$$

Pour déterminer la bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, il faut déterminer les deux pulsations ω_1 et ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$) pour lesquelles : $X_m = \frac{X_{mR}}{\sqrt{2}}$.

Résolvons l'équation suivante :

$$\frac{X_{m0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}} = \frac{Q X_{m0}}{\sqrt{2}}.$$

Pour alléger l'écriture, notons $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ et élevons au carré l'égalité précédente :

$$\frac{1}{(1 - u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2} = \frac{Q^2}{2} \Rightarrow (1 - u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2 = \frac{2}{Q^2}.$$

D'où l'équation :

$$u^4 - 2\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)u^2 + 1 - \frac{2}{Q^2} = 0.$$

Son discriminant réduit est :

$$\Delta' = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{2}{Q^2}\right) = \frac{1}{Q^2} \left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right) - \frac{1}{Q^2}.$$

Les deux racines de l'équation sont :

$$u_2^2 = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \frac{1}{Q} \approx 1 + \frac{1}{Q} \text{ et } u_1^2 = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) - \frac{1}{Q} \approx 1 - \frac{1}{Q}.$$

Ainsi :

$$u_2 = \left(1 + \frac{1}{Q}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2Q} \text{ et } u_1 = \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2Q}.$$

En revenant aux pulsations :

$$\omega_2 \approx \left(1 + \frac{1}{2Q}\right) \omega_0 \text{ et } \omega_1 \approx \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \omega_0$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q}$$

Dans le cas de l'oscillateur faiblement amorti, l'acuité de la résonance est le facteur de qualité. Une résonance aiguë correspond à un facteur de qualité élevé. Le filtre passe bande est d'autant plus sélectif autour de la pulsation propre ω_0 que le facteur de qualité est grand et que l'amortissement est faible.

Pour tracer l'allure de la réponse en phase φ de l'oscillateur en fonction de ω , nous allons considérer le comportement asymptotique de l'oscillateur en fonction de la pulsation.

Revenons à l'amplitude complexe des oscillations :

$$\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} = \frac{\frac{F_0}{m \omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0} Q}$$

• **Comportement asymptotique aux basses pulsations :** $\omega \ll \omega_0$

$$\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} \approx \frac{F_0}{m \omega_0^2} \Rightarrow \varphi = 0 \text{ (car } \underline{X}_m \text{ est réel).}$$

Comme φ est une fonction décroissante de ω , nous savons dès à présent qu'une augmentation de la pulsation ω s'accompagne d'une diminution de la phase φ .

• **À la pulsation intermédiaire :** $\omega = \omega_0$

$$\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} \approx -j Q \frac{F_0}{m \omega_0^2} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

• **Comportement asymptotique aux hautes pulsations :** $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} \approx -\frac{F_0}{m \omega^2} \rightarrow 0 \quad \varphi = -\pi \text{ rad.}$$

Réponse en phase de l'oscillateur en fonction de ω :

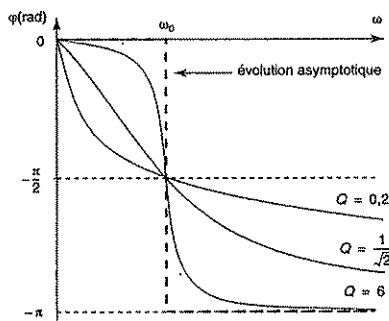
• **Analyse des courbes :**

(i) Pour les faibles fréquences d'excitation, l'oscillateur suit la force et épouse son mouvement.

(ii) Pour les hautes fréquences, le mouvement et la force sont en opposition de phase.

(iii) À la pulsation propre, excitation et élongation sont en quadrature ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad).

(iv) Plus le facteur de qualité est élevé et plus φ varie rapidement autour de la pulsation propre ω_0 des oscillations libres non amorties de l'oscillateur.



en conclusion

L'équation différentielle du mouvement de M est linéaire et du second ordre. L'oscillateur étudié est ainsi un filtre linéaire d'ordre 2 qui peut présenter ou non un phénomène de résonance.

Le phénomène pourra être recherché ou évité selon qu'il favorise une qualité ou un défaut du système.

2 - Vibrations d'une machine

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(0; \vec{z}_x, \vec{z}_y, \vec{z}_z)$ est supposé galiléen.

Une machine M est soumise, pendant son fonctionnement, à une force sinusoïdale excitatrice :

$$\vec{F}(t) = F_0 \cos \omega t \vec{z}_x$$

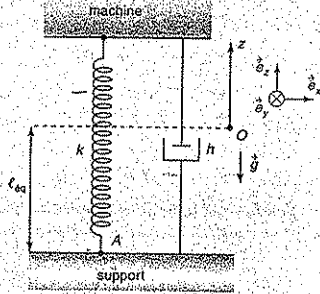
Il est donc nécessaire de placer entre elle et son support fixe dans le référentiel terrestre un système de suspension constitué d'un ressort idéal de raideur k et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement h qui exerce sur la machine la force de freinage :

$$\vec{F}_f = -h \dot{z} \vec{z}_x$$

La machine est assimilée à un point matériel M de masse m . Le ressort et l'amortisseur sont de masses négligeables.

Le paramètre z est le déplacement de la machine compté à partir de sa position d'équilibre en l'absence de la force \vec{F} . On pose :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$$



1 Lorsque la machine est immobile et ne fonctionne pas, déterminer la longueur ℓ_{eq} du ressort en fonction de sa longueur à vide ℓ_0 , de m , k et de l'intensité du champ de pesanteur g .

2 Établir l'équation différentielle du mouvement de M dont $z(t)$ est solution.

3 En régime sinusoïdal établi, la vitesse de l'oscillateur est de la forme :

$$v(t) = \dot{z} = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$$

Donner l'équation vérifiée par l'amplitude complexe $V_m = V_m e^{i\varphi_v}$.

4 En déduire les expressions de V_m et de l'avance de phase φ_v en fonction la pulsation ω de l'excitateur, de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q de l'oscillateur. Quel est le domaine de variation de φ_v ?

5 À quelle fréquence a lieu la résonance de vitesse et pour quelles valeurs du facteur de qualité Q ? Déterminer l'amplitude maximale V_{max} .

6 Étudier le comportement asymptotique de ces deux grandeurs en vous plaçant aux basses pulsations, aux hautes pulsations et à la pulsation intermédiaire $\omega = \omega_0$. Tracer l'allure de $V_m(\omega)$ et de la phase $\varphi_v(\omega)$.

7 Montrer que l'acuité de cette résonance est exactement égale à Q .

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$$

La bande passante du filtre de vitesse est notée $\Delta\omega$.

8 Déterminer la puissance instantanée \mathcal{P}_e fournie par la force excitatrice, puis sa valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{P}_e \rangle$ en fonction de F_0 , m , de la pulsation ω de l'excitateur, de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q de l'oscillateur. La comparer avec la puissance moyenne temporelle $\langle \mathcal{P}_h \rangle$ dissipée sous forme de chaleur dans l'amortisseur par la force de freinage \vec{F}_r . Commenter.

9 Pour quelle pulsation y a-t-il résonance de puissance ? Quelle est la valeur de la puissance maximale $\langle \mathcal{P}_e \rangle_{\max}$ transmise de l'excitateur à l'oscillateur ? Tracer la courbe représentant la variation de $\langle \mathcal{P}_e \rangle$ en fonction de ω .

10 Dans la pratique, on définit la *bande passante à mi-puissance* $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ comme l'intervalle de pulsation pour lequel au moins la moitié de la puissance moyenne maximale que peut fournir l'excitateur est transférée à l'oscillateur :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle \geq \frac{\langle \mathcal{P}_e \rangle_{\max}}{2}$$

Calculer et comparer la bande passante à mi-puissance avec la bande passante obtenue dans le cas du filtre de vitesse. Conclure.

11 On appelle *niveau de puissance* $L_{\mathcal{P}}$ la grandeur sans dimension exprimée en *décibel* (dB) :

$$L_{\mathcal{P}}(\text{dB}) = 10 \log \left(\frac{\langle \mathcal{P}_e \rangle}{\mathcal{P}_0} \right)$$

\mathcal{P}_0 est une valeur de référence de la puissance moyenne $\langle \mathcal{P}_e \rangle$ reçue par l'oscillateur. Montrer que la bande passante à mi-puissance correspond à un niveau de puissance égal au niveau de puissance maximal diminué de 3 dB : on parle de *bande passante à -3 dB*.

12 Pour la machine fonctionnant au voisinage de la résonance aiguë ($Q \gg 1$), montrer que, comme dans le cas du régime libre d'un oscillateur peu amorti, l'interprétation du facteur de qualité correspond à :

$$Q = 2\pi \times \frac{\text{énergie mécanique de l'oscillateur}}{\text{énergie dissipée pendant une période}}$$

résolution méthodique

Reprenons l'étude systématique d'un problème de mécanique :

- [1] Définir le système étudié.
- [2] Choisir le référentiel d'étude galiléen \mathcal{R}_e .
- [3] Effectuer le bilan des forces appliquées au système. Le système est-il conservatif ?
- [4] Préciser le nombre de degrés de liberté du problème.
- [5] Mise en équation du problème.

Le système est le point M , son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

◦ Bilan des forces appliquées au point M

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids du point matériel M ;

(ii) de contact :

$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du ressort ;

$\vec{F}_{\text{amortisseur} \rightarrow M} = \vec{F}_f$, la force de freinage de l'amortisseur ;

$\vec{F}_{\text{excitateur} \rightarrow M} = \vec{F}(t)$, force sinusoïdale.

La tension du ressort s'exprime de la façon suivante :

$$\vec{T} = -k(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM}_0) = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z.$$

Le système est **non conservatif** du fait de la présence de la force de freinage dissipative de l'énergie mécanique : la condition d'équilibre et l'équation différentielle du mouvement sont obtenues par application du principe fondamental de la dynamique au point matériel M dans le référentiel terrestre galiléen.

La position de M est repérée par le seul paramètre z , le mouvement est à un degré de liberté. Une seule équation suffit pour décrire le mouvement de l'oscillateur.

◦ Expression vectorielle du principe fondamental de la statique

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}.$$

La force $\vec{F}(t)$ n'intervient pas car la machine n'est pas en fonctionnement. M est à l'équilibre, son accélération et sa vitesse sont nulles, la force de freinage proportionnelle à la vitesse n'apparaît pas.

Projection suivant \vec{e}_z :

$$-mg - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \tag{1}$$

$$\ell_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$$

Il y a bien entendu un abaissement de la machine.

➤ 2

Le système est en mouvement, il faut réécrire le principe fondamental de la dynamique en considérant toutes les forces.

Rappelons que le choix de l'origine O à la position d'équilibre stable de M permet d'exclure le poids de la machine de l'équation du mouvement.

◦ Expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_f + \vec{F}(t) = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_0).$$

Projection suivant \vec{e}_z :

$$-mg - k(\ell - \ell_0) - h\dot{z} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{z}.$$

Or $\ell = \ell_{\text{eq}} + z$, d'où :

$$-mg - k(\ell_{\text{eq}} + z - \ell_0) - h\dot{z} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{z}.$$

On retrouve l'équation (1) dans cette expression :

$$\underbrace{-mg - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)}_0 - kz - h\dot{z} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{z}.$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

En adoptant le paramétrage indiqué, l'équation différentielle s'exprime sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Cette équation différentielle du second ordre et à coefficients constants est linéaire. La solution est stable.

3

Le système est linéaire et le régime sinusoïdal forcé. Nous pouvons utiliser la notation complexe : une équation algébrique se substitue alors à l'équation différentielle.

Les représentations complexes analytiques associées aux grandeurs utiles sont :

$$\begin{aligned} \bullet F(t) = F_0 \cos \omega t &\quad \rightarrow \quad \underline{F}(t) = F_0 e^{j\omega t} \\ \bullet z(t) &\quad \rightarrow \quad \underline{z}(t) \\ \bullet v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v) &\quad \rightarrow \quad \underline{v}(t) = V_m e^{j(\omega t + \varphi_v)} = \underbrace{V_m e^{j\varphi_v}}_{\text{amplitude complexe}} e^{j\omega t} = \underline{V}_m e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Dériver $\underline{z}(t)$ par rapport à t revient à multiplier cette fonction par $j\omega$:

$$\bullet \underline{v}(t) = \dot{z} \quad \rightarrow \quad \underline{v}(t) = j\omega \underline{z}(t)$$

La solution particulière de l'équation différentielle est de la forme :

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v).$$

La phase à l'origine φ_v est l'avance de phase de la vitesse de M par rapport à la force excitatrice.

Le système est linéaire et la réponse recherchée sinusoïdale, nous pouvons utiliser la notation complexe. L'équation différentielle du mouvement devient :

$$-\omega^2 \underline{z} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{z} + \omega_0^2 \underline{z} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t},$$

d'où :

$$\underline{z} = \frac{\frac{F_0}{m} e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{\frac{F_0}{m\omega_0^2} e^{j\omega t}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Comme $\underline{v}(t) = j\omega \underline{z}(t)$, alors :

$$\underline{v} = \underline{V}_m e^{j\omega t} = \frac{j\omega \frac{F_0}{m\omega_0^2} e^{j\omega t}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

L'expression de l'amplitude complexe de la vitesse est :

$$\underline{V}_m = V_m e^{j\varphi_v} = \frac{j\omega \frac{F_0}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

4

Pour déterminer le module $|\underline{V}_m|$ et l'argument φ_v de l'amplitude complexe \underline{V}_m , décomposons \underline{V}_m en un rapport de deux nombres complexes :

$$\underline{V}_m = \frac{\underline{N}}{\underline{D}}$$

\underline{V}_m a pour module le *quotient* des modules et pour déterminer l'*argument* nous allons effectuer le calcul :

$$V_m = \frac{N \cdot D^*}{D \cdot D^*} = \frac{N D^*}{|D|^2}$$

L'amplitude complexe de la vitesse est le rapport des deux nombres complexes :

$$\underline{N} = j\omega \frac{F_0}{m\omega_0^2} \quad \text{et} \quad \underline{D} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}$$

Le module de \underline{V}_m est le rapport des modules :

$$|\underline{V}_m| = V_m = \frac{\omega \frac{F_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Pour déterminer l'argument de \underline{V}_m , écrivons :

$$\underline{V}_m = V_m e^{j\varphi_v} = \frac{j\omega \frac{F_0}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{j\omega \frac{F_0}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} \times \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$= \frac{\omega F_0}{m \omega_0^2} \frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} + j \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \tan \varphi_v = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\frac{\omega}{Q \omega_0}} = Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \\ \cos \varphi_v > 0 \end{cases}$$

Cette dernière inégalité montre que : $\varphi_v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

5

La résonance de vitesse a lieu lorsque l'amplitude V_m est maximale pour une pulsation d'excitation particulière. La résolution qui suit permet d'éviter la dérivée de la fonction $V_m(\omega)$ par rapport à ω .

L'existence d'un maximum de la fonction $V_m(\omega)$ constitue la résonance de vitesse. En multipliant numérateur et dénominateur par $\frac{1}{\omega}$, son expression devient :

$$V_m = \frac{\omega \frac{F_0}{m \omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \times \frac{1}{\omega} = \frac{\frac{F_0}{m \omega_0^2}}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]}}$$

L'amplitude est maximale lorsque le dénominateur est minimal, or celui-ci est une somme de deux carrés dont un seul dépend de ω : $\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0^2}\right)^2 \geq 0$.

Le dénominateur est minimal si $\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0^2}\right)^2 = 0$. Autrement dit, pour $\omega = \omega_0$.

Aucune condition relative au facteur de qualité Q n'est intervenue dans ce calcul.

La résonance de vitesse a lieu quand la fréquence de l'excitateur est égale à la fréquence propre de l'oscillateur, quelle que soit la valeur du facteur de qualité et pour tout amortissement.

L'amplitude maximale $V_{\max} = V_m(\omega = \omega_0)$ s'écrit :

$$V_{\max} = \frac{Q F_0}{m \omega_0}$$

6

L'étude du comportement asymptotique de ce filtre de vitesse va permettre de déduire l'évolution réelle de l'avance de phase φ_v .

Le domaine de variation de φ_v est connu : $\varphi_v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Reprenons les expressions de V_m et $\tan \varphi_v$ obtenues à la question 4.

Calculons tout d'abord la dérivée de $\tan \varphi_v$ par rapport à ω :

$$\frac{d \tan \varphi_v}{d \omega} = -\frac{\omega_0 Q}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) < 0 \Rightarrow \varphi_v \text{ est une fonction décroissante de } \omega.$$

• *Comportement asymptotique aux basses pulsations* : $\omega \ll \omega_0$

• V_m tend vers 0 ;

• $\tan \varphi_v$ tend vers $+\infty$ et donc φ_v tend vers $+\frac{\pi}{2}$.

• *À la pulsation de résonance* : $\omega = \omega_0$

• V_m est maximale : $V_{m, \max} = \frac{Q F_0}{m \omega_0}$;

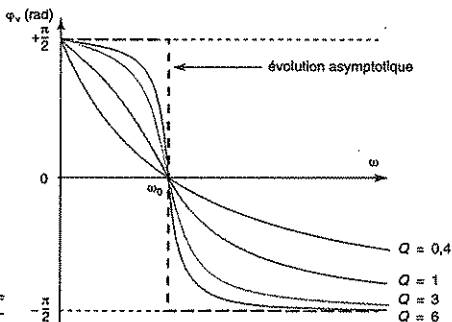
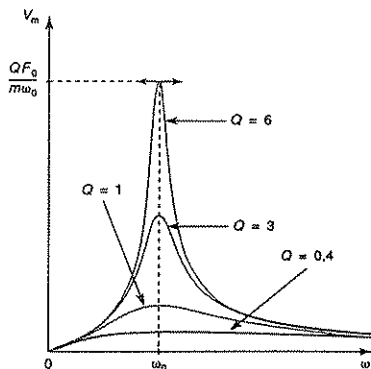
• $\tan \varphi_v = 0$ donc $\varphi_v = 0$.

• *Comportement asymptotique aux hautes pulsations* : $\omega \gg \omega_0$

• V_m tend vers 0 ;

• $\tan \varphi_v$ tend vers $-\infty$ et donc φ_v tend vers $-\frac{\pi}{2}$.

Comportement fréquentiel de la vitesse de l'oscillateur pour différentes valeurs du facteur de qualité :



La bande passante est le domaine de fréquence pour lequel l'amplitude de la vitesse est au moins égale à $\frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$. Nous serons amenés à résoudre une double équation du second degré dont nous ne conserverons que les racines positives.

Pour déterminer les pulsations ω_1 et ω_2 définissant la bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, résolvons l'égalité :

$$V_m = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{QF_0}{\sqrt{2}m\omega_0} \Rightarrow \frac{\omega \frac{F_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{QF_0}{\sqrt{2}m\omega_0}$$

Après simplification, $\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2$.

D'où la double équation du second degré :

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \pm \frac{\omega}{Q\omega_0} \Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \pm \frac{1}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 1 = 0.$$

Le discriminant est positif $\Delta = \left(\frac{1}{Q}\right)^2 + 4 = \frac{1}{Q^2}(1 + 4Q^2)$.

Les quatre racines sont $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2Q}(\mp 1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2})$.

Les seules racines positives sont :

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{2Q}(-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}) \quad \text{et} \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{2Q}(1 + \sqrt{1 + 4Q^2}).$$

On en déduit l'acuité de la résonance :

$$\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$$

La relation obtenue est identique à l'acuité de la résonance d'élongation. Il s'agit d'une relation stricte alors que, dans le cas de la résonance d'élongation, il s'agit d'une relation approchée limitée aux faibles amortissements ($Q \gg 1$).

8

Abordons maintenant le bilan de puissance du régime sinusoïdal forcé.

Rappelons que la puissance instantanée fournie par la force \vec{F} appliquée au matériel M animé par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 du vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R}_0)$ est définie relativement à ce référentiel par :

$$\mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R}_0) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}_0).$$

Le produit n'étant pas une opération linéaire, on ne peut effectuer une représentation complexe de la puissance de la force \vec{F} .

La puissance instantanée fournie par la force excitatrice et reçue par la machine M est :

$$\mathcal{P}_e = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_0 \cos \omega t \vec{e}_x \cdot v \vec{e}_x = F_0 v \cos(\omega t) = F_0 V_m \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi_v)$$

Connaissant la formule trigonométrique, $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$, la puissance instantanée peut encore s'écrire :

$$\mathcal{P}_e = \frac{1}{2} F_0 V_m [\cos \varphi_v + \cos(2\omega t + \varphi_v)]$$

La valeur moyenne de cette puissance est :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \frac{1}{2} F_0 V_m [\cos \varphi_v + \langle \cos(2\omega t + \varphi_v) \rangle] = \frac{1}{2} F_0 V_m \cos \varphi_v,$$

car la valeur moyenne temporelle $\langle \cos(2\omega t + \varphi) \rangle$ est nulle.

Pour déterminer $V_m \cos \varphi_v$, revenons à l'expression de l'amplitude complexe de la vitesse :

$$V_m = \frac{j\omega \frac{F_0}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} = \left(\frac{j\omega \frac{F_0}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} \right) \times \left(\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} \right) = \frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega^2 F_0}{m\omega_0^3} + j\omega \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Ainsi :

$$V_m = V_m e^{j\varphi_v} = V_m \cos \varphi_v + j V_m \sin \varphi_v = \frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega^2 F_0}{m\omega_0^3}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} + j \frac{\omega \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$V_m \cos \varphi_v = \frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega^2 F_0}{m\omega_0^3}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

D'où :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \frac{1}{2} \frac{Q F_0^2}{m \omega_0} \frac{\left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

La puissance instantanée fournie par la force de freinage \vec{F}_f et reçue par la machine M est :

$$\mathcal{P}_f = \vec{F}_f \cdot \vec{v} = -h v^2 = -h V_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_v).$$

Cette puissance est négative, sa valeur moyenne temporelle est :

$$\langle \mathcal{P}_f \rangle = -\frac{1}{2} h V_m^2,$$

car $\langle \cos^2(2\omega t + \varphi_v) \rangle = \frac{1}{2}$.

Or $h = \frac{m \omega_0}{Q}$, d'où $\langle \mathcal{P}_f \rangle = -\frac{1}{2} \frac{m \omega_0}{Q} V_m^2$.

En remplaçant V_m dans cette expression par :

$$V_m = \frac{\omega \frac{F_0}{m \omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}},$$

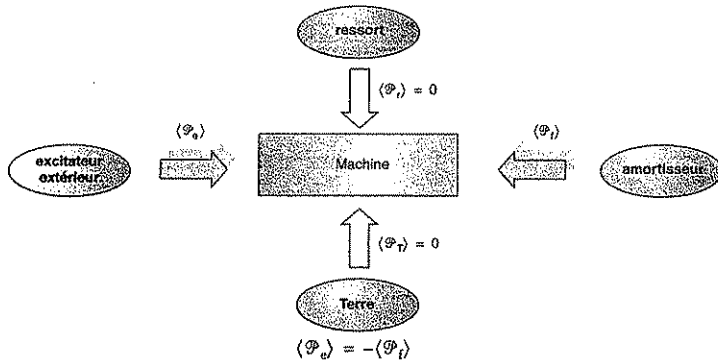
il vient :

$$\langle \mathcal{P}_f \rangle = -\frac{1}{2} \frac{Q F_0^2}{m \omega_0} \frac{\left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

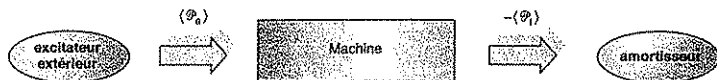
On constate que : $\langle \mathcal{P}_e \rangle + \langle \mathcal{P}_f \rangle = 0$.

Faisons un schéma pour bien comprendre les transferts de puissances sur une période. Le système adopté est la machine, la puissance qu'elle reçoit est comptée positivement et, inversement, la puissance qu'elle cède à l'extérieur est comptée négativement (nous adoptons ici la convention dite « égoïste » de la thermodynamique).

Le poids de M et la tension exercée par le ressort sur M sont des forces conservatives. Sur une période, la machine revient à son état initial et ne reçoit de la part de la Terre et du ressort aucune puissance : elle est reçue sur une demi-période puis restituée à la suivante.



La puissance moyenne transmise par l'oscillateur à la machine est entièrement dissipée sous forme de chaleur dans l'amortisseur.



L'énergie perdue par les frottements est ainsi compensée par la force d'entretien des oscillations exercées par l'excitateur.

9 La pulsation de résonance est ainsi la pulsation pour laquelle la puissance moyenne transmise par l'excitateur à l'oscillateur est maximale.

Écrivons $\langle \mathcal{P}_e \rangle$ autrement :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \frac{1}{2} \frac{Q F_0^2}{m \omega_0} \frac{\left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \times \frac{\left(\frac{Q \omega_0}{\omega}\right)^2}{\left(\frac{Q \omega_0}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{2} \frac{Q F_0^2}{m \omega_0} \frac{1}{\left[Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1\right]}$$

La puissance moyenne transmise est maximale lorsque le dénominateur de son expression est minimal, il faut pour cela que :

$$\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} = 0.$$

La pulsation de résonance de la puissance est la pulsation propre des oscillations libres non amorties de l'oscillateur.

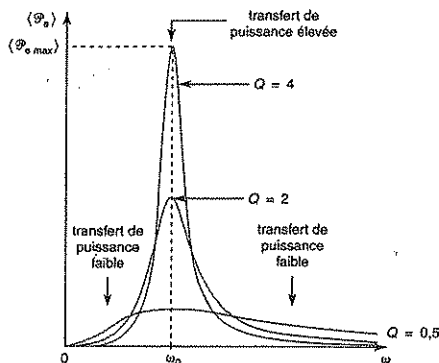
$$\boxed{\omega_R = \omega_0}$$

La résonance a lieu quel que soit le facteur de qualité de l'oscillateur.

La puissance maximale transmise de l'excitateur à l'oscillateur est obtenue en remplaçant ω par ω_0 dans $\langle \mathcal{P}_e \rangle$:

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_e \rangle_{\max} = \frac{1}{2} \frac{Q F_0^2}{m \omega_0}} \quad \text{d'où : } \langle \mathcal{P}_e \rangle = \frac{\langle \mathcal{P}_e \rangle_{\max}}{\left[Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1\right]}$$

En observant que $\lim_{\omega \rightarrow 0} \langle \mathcal{P}_e \rangle = 0$ et $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{P}_e \rangle = 0$, le tracé de la courbe de variation de $\langle \mathcal{P}_e \rangle$ en fonction de ω est le suivant :



Un oscillateur de facteur de qualité faible est très amorti, il capte l'énergie fournie par l'excitateur à n'importe quelle fréquence, mais l'énergie captée reste faible : les oscillations forcées sont de faible amplitude, la résonance est floue.

Un oscillateur de facteur de qualité élevé est peu amorti, il ne capte l'énergie fournie par l'oscillateur qu'à une fréquence égale à sa fréquence propre : le transfert d'énergie est alors très important et l'oscillateur entre en résonance aiguë.

► **10** Déterminons les pulsations à mi-puissance, elles seront obtenues par résolution d'une double équation du second degré :

$$\frac{\langle \mathcal{P}_e \rangle_{\max}}{\left[Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 1 \right]} = \frac{\langle \mathcal{P}_e \rangle_{\max}}{2} \Rightarrow \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} = \pm \frac{1}{Q} \text{ et } \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \pm \frac{1}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 1 = 0.$$

Cette double équation est identique à la double équation obtenue lors de l'étude de la résonance de la réponse en vitesse de l'oscillateur. Les solutions seront donc les mêmes :

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} \left(-1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right) \text{ et } \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} \left(1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right).$$

Acuité de la résonance :

$$\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$$

C'est une égalité stricte. La bande passante à mi-puissance est la bande passante du filtre de vitesse :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \frac{1}{2} h V_m^2 \text{ et } \langle \mathcal{P}_e \rangle_{\max} = \frac{1}{2} h V_{\max}^2.$$

À mi-puissance :

$$\frac{1}{2} = \frac{\langle \mathcal{P}_e \rangle}{\langle \mathcal{P}_e \rangle_{\max}} = \left(\frac{V_m}{V_{\max}} \right)^2.$$

La bande passante est définie pour :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle(\omega) = \frac{\langle \mathcal{P}_e \rangle_{\max}}{2} \text{ et } V_m(\omega) = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Ceci explique le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ qui intervient lors de la détermination des bandes passantes dans les cas de résonance d'élongation ou de vitesse, il correspond à un transfert de puissance au moins égal à la moitié de la puissance maximale transmissible.

► **11** Déterminons le niveau de puissance maximal :

$$L_{\mathcal{P}_{\max}}(\text{dB}) = 10 \log \left(\frac{\langle \mathcal{P}_e \rangle_{\max}}{\mathcal{P}_0} \right).$$

Le niveau de puissance à mi-puissance, c'est-à-dire aux pulsations ω_1 et ω_2 est :

$$\begin{aligned} L_{\varphi}(\text{dB}) &= 10 \log \left(\frac{\langle \mathcal{P}_e \rangle_{1/2}}{\mathcal{P}_0} \right) = 10 \log \left(\frac{\langle \mathcal{P}_e \rangle_{\max}}{2\mathcal{P}_0} \right) \\ &= 10 \log \left(\frac{\langle \mathcal{P}_e \rangle_{\max}}{\mathcal{P}_0} \right) - \underbrace{10 \log 2}_{\approx 0,3} = L_{\mathcal{P}_{\max}}(\text{dB}) - 3(\text{dB}). \end{aligned}$$

Il s'agit de la bande passante à -3 dB : $L_{\mathcal{P}}(\text{dB}) = L_{\mathcal{P}_{\max}}(\text{dB}) - 3(\text{dB})$

12 Lorsque l'oscillateur est peu amorti, son énergie mécanique au cours d'une période est quasi constante et égale à :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m V_m^2.$$

En effet :

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v).$$

Lorsque la vitesse est maximale ($\pm V_m$), l'énergie potentielle est nulle et l'énergie mécanique est sous forme d'énergie cinétique.

La puissance moyenne dissipée étant :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \frac{1}{2} h V_m^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_0 m}{Q} V_m^2,$$

l'énergie dissipée pendant la période T_0 est :

$$\Delta \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t + T_0) = T_0 \langle \mathcal{P}_e \rangle = \frac{1}{2} \frac{T_0 \omega_0 m}{Q} V_m^2 = \frac{\pi m}{Q} V_m^2.$$

En effectuant le rapport, on obtient :

$$\frac{\mathcal{E}_m}{\Delta \mathcal{E}_m} = \frac{Q}{2\pi} \Rightarrow \boxed{Q = 2\pi \frac{\mathcal{E}_m}{\Delta \mathcal{E}_m}}$$

en conclusion

En régime transitoire, le système est caractérisé par un temps de réponse de l'ordre de $\tau_c = \frac{Q}{\omega_0}$ correspondant à la durée de vie des oscillations et en régime sinusoïdal

forcé, le système est caractérisé par une bande passante égale à $\Delta \omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

Ces deux régimes sont intimement liés par la relation : $\tau_c \Delta \omega = 1$.

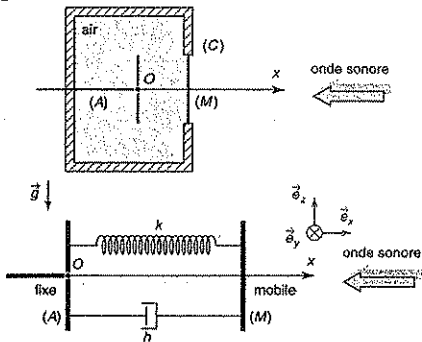
Plus le temps de réponse est élevé (réponse lente du système), plus la bande passante est étroite et plus le système est sélectif en fréquence.

1) 30 min

> Corrigés p. 197

Le microphone électrostatique

Un modèle simplifié du microphone électrostatique à pression est représenté sur le schéma ci-dessous :



Une capsule (C) contenant de l'air est refermée sur une membrane (M) de masse m et de surface S qui constitue l'armature d'un condensateur dont l'autre armature (A) est fixe. Le circuit électrique extérieur relié à ce condensateur ne figure pas sur le schéma. La membrane (M), assimilée à un point matériel, est susceptible de se translater le long de l'axe de symétrie ($O; \vec{e}_x$) du système. Sa position est repérée par la distance x qui la sépare de l'armature (A) choisie comme origine des abscisses.

Le microphone est au repos et la distance entre les armatures du condensateur est x_0 . Lorsque l'armature (M) est déplacée de cette position, elle est soumise à :

- (i) une force de rappel \vec{T} ; l'élasticité de la membrane et la compressibilité de l'air contenu dans la capsule sont modélisées par un ressort idéal de raideur k ;
- (ii) une force de frottement fluide \vec{F}_f modélisant le frottement de l'air :

$$\vec{F}_f = -h\dot{x}\vec{e}_x.$$

1. L'armature (M) n'est soumise à aucune onde sonore. On charge le condensateur en observant que (M) se rapproche de (A) et que la distance entre les armatures prend la valeur d'équilibre x_{eq} . Montrer que la membrane est nécessairement soumise à une force d'origine électrostatique :

$$\vec{F}_0 = F_0\vec{e}_x.$$

2. La membrane mobile est maintenant excitée par une onde sonore qui exerce sur elle une surpression $p(t) = P_m \cos(\omega t)$.

En supposant que la force électrostatique \vec{F}_0 conserve sa valeur statique, établir l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$.

3. En définissant l'écart X à la position d'équilibre x_{eq} par $X = x - x_{\text{eq}}$, montrer que $X(t)$ satisfait l'équation différentielle :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_m}{m}\cos\omega t.$$

Déterminer ω_0 , Q et F_m en fonction de m , k , h , S et P_m . Que représentent ces grandeurs ?

4. Le régime est sinusoïdal établi de pulsation ω . La solution recherchée est de la forme :

$$X(t) = X_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Déterminer l'amplitude complexe \underline{X}_m de X en fonction de ω , ω_0 , Q , F_m et m .

5. Données : Les paramètres mécaniques du microphone sont :

$$m = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg}; \quad h = 0,4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$k = 5 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Justifier la présence d'une résonance d'élongation pour la membrane du microphone. Pour quelle valeur ω_R de la pulsation d'excitation a-t-elle lieu ? Calculer numériquement la fréquence N_R de résonance et comparer au domaine de fréquence audible qui s'étend approximativement de 20 Hz à 20 000 Hz. Cet effet de résonance vous semble-t-il devoir être recherché ?

2) 45 min

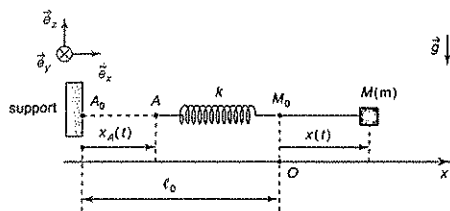
> Corrigés p. 198

Stabilisation d'une machine

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Une machine M de masse m est reliée à un support vertical par un ressort idéal, de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k . Au cours du fonctionnement de M , le support se met en vibration et transmet à l'extrémité A du ressort un mouvement sinusoïdal d'amplitude constante X_A et de pulsation ω :

$$\vec{A_0A} = X_A \sin\omega t \vec{e}_x = x_A(t)\vec{e}_x.$$

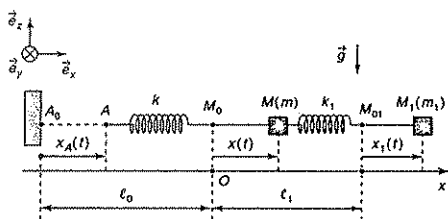


La machine M assimilée à un point matériel glisse sans frottement sur l'axe $(O; \vec{x})$, elle est repérée par l'abscisse x à partir de sa position d'équilibre située à l'origine O lorsque la machine ne fonctionne pas.

On posera $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et on supposera que $\omega \neq \omega_0$.

1. Déterminer la réponse en élongation $x(t)$ de l'oscillateur lorsque le régime est sinusoïdal établi. Tracer l'évolution de l'amplitude de $x(t)$ en fonction de ω . Que se passe-t-il lorsque la pulsation d'excitation est proche de ω_0 ? Commenter le réalisme de ce résultat.

2. Un second oscillateur de masse m_1 réglable est relié au premier oscillateur par un ressort idéal de longueur à vide ℓ_1 et de raideur k_1 conformément au schéma ci-dessous :



Montrer que lorsque la machine est en fonctionnement et pour un même déplacement sinusoïdal du support, un bon choix de la masse m_1 permet d'annuler les vibrations de M . La machine reste alors fixe dans le référentiel terrestre et $x=0$ à tout instant.



> Corrigés p. 199

La couleur bleue du ciel

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est supposé galiléen.

Le modèle de l'électron élastiquement lié proposé par Thomson présente les électrons de la couche

externe d'un atome comme des oscillateurs harmoniques excités par une onde lumineuse provenant du Soleil. Celle-ci est caractérisée par un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω de la forme :

$$\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{x} = \vec{E}_0 \cos(\omega t).$$

Chaque électron M , de masse m et de charge $q = -e$, est supposé élastiquement lié au noyau de l'atome situé à l'origine O . Il est ainsi soumis à une force de rappel comparable à celle d'un ressort de raideur k :

$$\vec{F}_e(t) = -k \overrightarrow{OM}(t)$$

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{x} + y \vec{y} + z \vec{z}.$$

Le noyau est supposé fixe dans le référentiel terrestre car beaucoup plus lourd que l'électron.

Lors de son mouvement, l'électron rayonne une énergie électromagnétique prélevée sur son énergie mécanique. Cet amortissement du déplacement de l'électron se traduit par une force de freinage de type visqueux :

$$\vec{F}_f(t) = -h \dot{\vec{v}}(M/p_e).$$

À l'échelle atomique, le poids de l'électron est négligeable devant la force électrique excitatrice :

$$\vec{F}(t) = q \vec{E}(t).$$

L'oscillateur harmonique est caractérisé par le couple $(Q; \omega_0)$. On pose :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}.$$

1. Montrer que lorsque le régime est sinusoïdal établi, le mouvement de l'électron, qui obéit aux lois de la mécanique classique, a lieu selon l'axe $(O; \vec{x})$.

2. Écrire l'équation différentielle du mouvement de M dont $x(t)$ est solution. La normaliser.

3. Établir l'expression de l'amplitude complexe de l'élongation : $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$. Déterminer son amplitude X_m et son avance de phase φ par rapport au champ électrique excitateur. Quel est le domaine de variation de φ ?

4. La lumière provenant du Soleil est composée de radiations dont le spectre visible s'étale dans un domaine de longueurs d'onde allant de $\lambda_{\text{bleu}} = 0,4 \mu\text{m}$ à $\lambda_{\text{rouge}} = 0,8 \mu\text{m}$.

Déterminer le domaine des pulsations ω du champ électrique $\vec{E}(t)$ supposé d'amplitude constante.

En déduire une expression simplifiée du vecteur position $\vec{OM}(t)$ de l'électron en fonction de \vec{E}_0 , e , m , ω_0 , ω et t .

5. Sachant qu'un électron accéléré rayonne dans toutes les directions une puissance lumineuse moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération, expliquer pourquoi la couleur du ciel est bleue.

Données :

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; \quad e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C};$$

$$h = 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}; \quad k = 500 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

• Célérité de la lumière dans le vide (ou dans l'air) : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

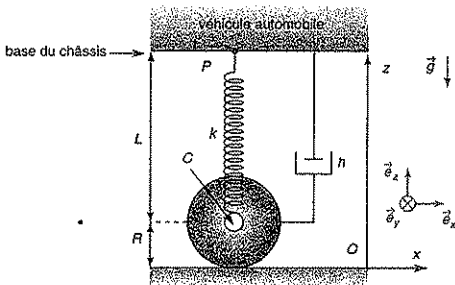


> Corrigés p. 201

Véhicule en mouvement sur un sol ondulé

La suspension d'un véhicule automobile est assurée par quatre systèmes identiques indépendants montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue. Chaque système est de masse négligeable et se décompose de la façon suivante :

- un ressort de constante de raideur $k = 1,8 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et de longueur à vide L_0 qui permet d'absorber efficacement les irrégularités de la route,
- un amortisseur à ressort, exerçant une force de frottement de type visqueux et de coefficient d'amortissement $h = 1\,660 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$ qui assure le freinage des oscillations et permet de contrôler les phénomènes de résonance dès leur apparition.



Le référentiel terrestre \mathcal{R}_g lié au sol est supposé galiléen, l'espace est rapporté à un système d'axes

$\{(Ox), (Oy), (Oz)\}$ auquel est associée la base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le comportement du véhicule est étudié dans le cas où il contiendrait quatre passagers de même masse $m = 70 \text{ kg}$. La masse $M_0 = 1\,220 \text{ kg}$ du châssis et la masse des passagers sont également réparties sur les quatre systèmes ressort-amortisseur de sorte qu'ils ont des comportements identiques : le plan du châssis reste horizontal quel que soit le mouvement. Les pneus de rayon extérieur R et de centre C sont considérés comme entièrement rigides et n'interviennent jamais dans cette étude.

Un amortisseur placé entre C et un point quelconque P du châssis exerce sur P une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de P par rapport à C :

$$\vec{F}_f(1) = -h[\dot{z}(P) - \dot{z}(C)]\vec{e}_z$$

où $\dot{z}(P)$ et $\dot{z}(C)$ sont les composantes respectives suivant \vec{e}_z des vecteurs vitesses associés à n'importe quel point P du châssis et au centre C de la roue.

Pour obtenir des expressions simplifiées on posera :

$$M = M_0 + 4m; \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2h}{M}; \quad \omega_0^2 = \frac{4k}{M}.$$

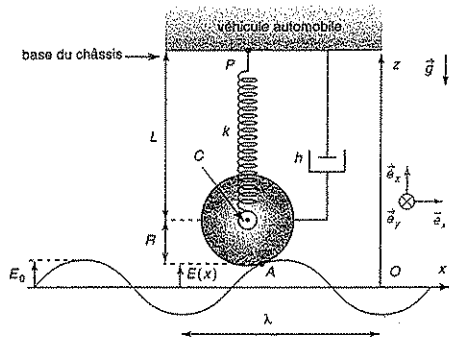
1. Le véhicule est immobile sur un sol horizontal. Exprimer la longueur L_e des ressorts à l'équilibre et la garde au sol z_0 du véhicule (distance entre la base du châssis et le sol choisie égale à 20 cm).

2. Le véhicule se déplace à vitesse constante V sur une route accidentée présentant une série de bosses régulièrement espacées. La distance entre deux bosses successives est de 8 m et leur hauteur de 5 cm .

L'étude s'effectue dans un référentiel \mathcal{R}' animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse \vec{V} par rapport au référentiel lié au sol \mathcal{R}_g . La base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est associée à \mathcal{R}' et, dans ce référentiel, le mouvement du châssis reste un mouvement de translation vertical.

Le déplacement du véhicule s'effectue en ligne droite suivant l'axe horizontal $(O; \vec{e}_x)$. L'ondulation de la route est assimilée à une sinusoïde de période spatiale $\lambda = 8 \text{ m}$ et d'amplitude $E_0 = 5 \text{ cm}$ décrite par la fonction :

$$E(x) = E_0 \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right).$$



La base du châssis et la position du centre C de la roue sont repérées par leurs cotes respectives $z(x)$ et $R + E(x)$ par rapport à la ligne moyenne de l'ondulation excitatrice $E(x)$ prise comme cote de référence horizontale nulle.

Afin de simplifier le raisonnement, le rayon R de la roue sera supposé suffisamment faible pour que son contact en A avec le sol soit considéré à l'altitude $E(x)$.

Exprimer l'évolution temporelle de l'excitation de la suspension $E(t)$ et déterminer sa pulsation ω en fonction de la vitesse V du véhicule et de la période spatiale λ .

3. En observant que le point de contact A est animé d'un mouvement de translation vertical dans le référentiel d'étude \mathcal{R}' , déterminer les forces exercées par les ressorts et les amortisseurs sur le châssis.

4. Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ en faisant apparaître dans un second membre les termes d'excitation $E(t)$ et $\dot{E}(t)$.

La fonction $Z(t) = z(t) - z_0$ décrit les oscillations de la base du châssis par rapport à sa position d'équilibre z_0 . Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$?

5. En régime permanent le mouvement de la base du châssis est sinusoïdal forcé et de même pulsa-

tion ω que l'excitation $E(t)$. On pourra utiliser la notation complexe ($j^2 = -1$):

- excitation due à l'ondulation $\underline{E}(t) = E_0 e^{j\omega t}$;
- réponse du châssis $\underline{Z}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)}$.

Donner l'expression de la fonction de transfert de

l'oscillateur $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}}{\underline{E}}$

6. Tracer la courbe de réponse en amplitude A de la caisse en fonction de ω . Montrer que cette courbe passe par un maximum pour une pulsation ω_R que vous préciserez. Quelle est l'amplitude des oscillations de la caisse à cette pulsation ? Quel est le comportement du véhicule dans les trois cas suivants : $\omega \ll \omega_R$, $\omega \gg \omega_R$ et $\omega = \omega_R$. À quelles vitesses ne faudrait-il surtout pas rouler sur ce sol ondulé ?

Pour illustrer votre réponse, voici un extrait de dialogue tiré du film « Le salaire de la peur » de Henri Georges Clouzot (1953). Deux hommes transportent à l'arrière de leur camion une grande quantité d'une substance très instable, la nitroglycérine et arrivent sur une portion de route accidentée constituée de « tôle ondulée » que l'on peut assimiler au modèle de profil de route adopté dans cette question.

- C'est de la mauvaise route, c'est le vent qui fait ça, il ride les chemins comme une vieille pomme, ça fait vibrer les châssis à tout démolir.

- La nitro, elle va sauter...

- Pas si tu fonces, à 40 miles tu voles sur les bosses, tu ne sens rien. Seulement, il faut garder la vitesse. Au-dessous de 30 miles, tu vibres et c'est fini...

- On peut faire ça au ralenti.

- Tu vibreras mon vieux, c'est de l'ondulation serrée, pour garder de la sécurité il ne faudrait pas dépasser 6 miles.

Il est sous entendu que les vitesses sont exprimées en mph (miles \cdot h⁻¹) ; précisons que 1 mile = 1 609 m.

Tester ses connaissances

1 Réponse b. car :

a. $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, régime libre d'un oscillateur harmonique non amorti ;

b. $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, régime libre d'un oscillateur harmonique amorti ;

c. $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos \omega t$, régime forcé d'un oscillateur harmonique amorti ;

2 Réponse a.

Faisons un tableau récapitulatif :

Q	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$	$+\infty$
Régime libre	régime aperiodique	régime pseudo-périodique		
Régime forcé	pas de résonance d'élongation		résonance d'élongation	

↑
0,6

Un facteur de qualité $Q = 0,6$ correspond à un régime transitoire pseudo-périodique sans présence de résonance d'élongation si le régime est forcé.

3 Réponse d. La notation complexe ne s'applique qu'aux équations différentielles **linéaires** à coefficients constants dans le cas du régime **sinusoïdal forcé** :

a. **Faux**, car régime non sinusoïdal.

b. **Faux**, car équation différentielle non linéaire.

c. **Faux**, car la notation complexe peut permettre de déterminer la solution particulière mais la présence du coefficient négatif de \dot{x} ne permet pas à une solution particulière stable de s'établir lorsque $t \rightarrow +\infty$.

$$\ddot{x} + \underset{\substack{\text{coefficient} \\ \text{négatif}}}{\frac{\omega_0}{Q} \dot{x}} + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos \omega t.$$

4 Réponse d. La pulsation de résonance d'élongation d'un oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé est :

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \leq \omega_0.$$

5 Pour diminuer l'amplitude à la résonance, il faut augmenter les frottements : le facteur de qualité est alors faible et la résonance « floue » (inversement, à un amortissement faible correspondent un facteur de qualité élevé et une résonance « aiguë »).

6 On ne doit pas utiliser la notation complexe pour représenter une puissance car elle est définie par un produit scalaire, ce n'est pas une opération linéaire :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{R_g}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M_{R_g}).$$

7 Réponse c. Analogie électromécanique :

$$\begin{aligned} h &\leftrightarrow R \\ m &\leftrightarrow L \\ \tau_e = \frac{m}{h} &\leftrightarrow \tau_c = \frac{L}{R} \end{aligned}$$

Savoir appliquer le cours

1 Le système est l'objet ponctuel M , son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre galiléen. Le système n'est pas amorti, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Déterminons la solution de cette équation :

• La solution générale de l'équation homogène est :

$$\ddot{z}_H + \omega_0^2 z_H = 0 \Rightarrow z_H = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

• La solution particulière de cette équation linéaire en régime sinusoïdal permanent est obtenue en utilisant la notation complexe :

$$-\omega^2 z_P + \omega_0^2 z_P = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow z_P = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{j\omega t} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

Seule la partie réelle a une réalité physique.

$$z_p(t) = \operatorname{Re}[z_p(t)] = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t).$$

La solution générale de cette équation est :

$$z(t) = z_H(t) + z_p(t) \\ = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t).$$

Il faut prendre en compte les conditions initiales, pour cela nous avons besoin de la dérivée :

$$\dot{z}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \omega \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin(\omega t).$$

$$\begin{cases} z(0) = A \cos \varphi + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0 \\ \dot{z}(0) = -\omega_0 A \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \text{ et } \varphi = 0.$$

La réponse en élongation de l'oscillateur et ainsi :

$$z(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)]$$

Avec la relation trigonométrique :

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

la solution peut s'écrire :

$$z(t) = 2 \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin\left[\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right) t\right] \sin\left[\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right) t\right]$$

ou encore :

$$z(t) = 2 \frac{F_0}{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)} \sin\left[\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right) t\right] \sin\left[\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right) t\right]$$

2 Lorsque $\omega = \omega_0$:

$$z(t) \approx \frac{F_0}{\omega_0 m (\omega - \omega_0)} \sin\left[\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right) t\right] \sin(\omega_0 t).$$

Pour faire intervenir $\frac{\sin u}{u}$:

$$z(t) \approx \frac{1}{2} \frac{F_0}{\omega_0 m} t \frac{\sin\left[\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right) t\right]}{\left[\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right) t\right]} \sin(\omega_0 t)$$

En se plaçant au début des oscillations pour que le produit $(\omega - \omega_0)t$ reste faible :

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} z(t) = \frac{1}{2} \frac{F_0}{m \omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

$$z(t) \approx \frac{1}{2} \frac{F_0}{m \omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

Les oscillations croissent en amplitude au cours du temps mettant en danger la structure. Il est important de noter que l'on sort du cadre du modèle adopté, celui-ci n'est valable que pour de petites oscillations. La force en $-kz$ est une approximation, elle n'est valable pour de faibles oscillations.

3 Les atomes du cristal sont de petits oscillateurs qui vibrent lorsqu'ils sont soumis à une excitation extérieure. Quand ils sont sollicités à leur pulsation propre, ils entrent en résonance : il faut donc une fréquence particulière d'excitation. L'amplitude est au démarrage proportionnelle au temps, il faut maintenir la note suffisamment longtemps pour augmenter jusqu'à la rupture l'amplitude des oscillations des atomes du cristal.

4 Équation du mouvement de M lorsque l'oscillateur est amorti :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Utilisons la notation complexe en régime permanent sinusoïdal : à l'élongation z associons le signal analytique \underline{z} .

$$z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$$

avec $\underline{Z}_m = Z_m e^{j\varphi}$.

amplitude
complexe

$$f(t) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \Rightarrow \underline{f}(t) = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}.$$

φ est l'avance de phase de l'élongation par rapport à l'excitation.

L'équation du mouvement devient :

$$\underline{z} \left[\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right] = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_m = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\left[\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right]} = Z_m e^{j\varphi}.$$

Lorsque $\omega = \omega_0$, alors :

$$Z_m = Z_m e^{j\varphi} \approx -j Q \frac{F_0}{m \omega_0^2}$$

$$\text{Ainsi } Z_m e^{i\varphi} = Q \frac{F_0}{m\omega_0^2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Amplitude et avance de phase sont :

$$Z_m = Q \frac{F_0}{m\omega_0^2} \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

En remplaçant dans l'expression de $z(t)$, on a :

$$z(t) = Q \frac{F_0}{k} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Finalement :

$$z(t) = Q \frac{F_0}{k} \sin(\omega_0 t)$$

L'amplitude des oscillations est indépendante de t .
Lorsque ω est très proche de ω_0 , l'amplitude de l'oscillation est multipliée d'un facteur Q par rapport à l'amplitude statique (réponse à très faible fréquence)

d'un facteur Q . Voici quelques exemples de facteurs de qualité :

Terre (pour les tremblements de Terre)	250 - 1 400
Corde de piano ou de violon	10^3
Atome excité	10^7
Noyau excité	10^{12}

Il faut ainsi s'attendre à de très fortes agitations de la structure.

Les calculs ont été effectués dans le cadre de l'approximation harmonique ; ils ne sont valables que pour de faibles oscillations. Or nous sortons de ce cadre à la résonance.

S'entraîner

1. Le système étudié est la membrane M supposée se comporter comme un point matériel. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre galiléen.

Le bilan des forces appliquées à M est :

- (i) le poids de la membrane \vec{P} ;
- (ii) la tension du ressort $\vec{T} = -k(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0})$;
- (iii) la force de freinage $\vec{F}_f = -h\dot{x}\vec{e}_x$;
- (iv) la réaction de la capsule \vec{R} ;
- (v) la force électrostatique $\vec{F}_0 = F_0\vec{e}_x$.

Explicitons la tension du ressort :

$$\vec{T} = -k(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}) = -k(x - x_0)\vec{e}_x$$

Le système n'est pas conservatif à cause de la présence d'une force de freinage. Le mouvement est à un degré de liberté puisqu'il a lieu selon l'axe $(O; \vec{e}_x)$.

La réaction \vec{R} du support (la capsule) équilibre le poids \vec{P} de l'équipage selon \vec{e}_x . Le point M est fixe, écrivons la projection du principe fondamental de la statique appliqué à M suivant \vec{e}_x :

$$-k(x_{\text{eq}} - x_0) + F_0 = 0$$

$$F_0 = k(x_{\text{eq}} - x_0)$$

Il y a nécessairement une force à distance (différente du poids de la membrane) qui équilibre la tension du ressort. Parmi les interactions fondamentales, il ne nous reste que l'interaction électromagnétique. Les

charges électriques sont fixes dans le référentiel d'étude, elle est électrostatique.

2. Ajoutons une force pressante \vec{F}_p au bilan des forces. La pression étant la force exercée par unité de surface de la membrane :

$$\vec{F}_p = -p(t)S\vec{e}_x = -P_m \cos(\omega t)S\vec{e}_x$$

Le principe fondamental de la dynamique projeté selon \vec{e}_x donne :

$$-k(x - x_0) - h\dot{x} - P_m \cos(\omega t)S + F_0 = m\ddot{x}$$

3. En remplaçant F_0 par sa valeur, on trouve :

$$-k(x - x_{\text{eq}}) - h\dot{x} - P_m S \cos(\omega t) = m\ddot{x}$$

en écrivant $X = x - x_{\text{eq}}$, $\dot{X} = \dot{x}$, $\ddot{X} = \ddot{x}$, cette équation devient :

$$m\ddot{X} + h\dot{X} + kX = -P_m S \cos(\omega t)$$

D'où l'équation différentielle du point M sous la forme canonique :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_m}{m} \cos \omega t$$

avec

- $F_m = P_m S$, l'amplitude de la force pressante ;
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la pulsation propre de l'oscillateur harmonique ;
- $Q = \frac{m\omega_0}{h}$, le facteur de qualité de l'oscillateur.

4. L'équation différentielle du mouvement de la membrane est linéaire et le régime sinusoïdal permanent, la notation complexe fait intervenir les grandeurs analytiques suivantes :

$$\bullet X(t) = X_m \cos(\omega t - \varphi) \rightarrow \underline{X}(t) = X_m e^{j(\omega t - \varphi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$$

avec $\underline{X}_m = \frac{\text{amplitude}}{\text{complexe}} = X_m e^{-j\varphi}$;

$\bullet \cos(\omega t) \rightarrow e^{j\omega t}$.

L'équation différentielle devient :

$$-\omega^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \underline{X}_m e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} = -\frac{F_m}{m} e^{j\omega t}$$

$$\underline{X}_m \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0} \right) = -\frac{F_m}{m\omega_0^2}$$

D'où l'expression de l'amplitude complexe :

$$\underline{X}_m = \frac{-\frac{F_m}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} = X_m e^{-j\varphi}$$

5. Calculons la valeur numérique du facteur de qualité :

$$Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{1}{h} \sqrt{k m}$$

A.N. : $Q = 2,5$.

La pulsation propre de l'oscillateur a pour valeur :

$$\omega_0 = 50\,000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Comme $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a résonance d'élongation. Cette résonance a lieu pour :

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

A.N. : $\omega_R = 47\,958 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Or $\omega_R = 2\pi N_R$, d'où :

$$N_R = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

A.N. : $N_R = 7\,632 \text{ Hz}$.

Cette valeur est au milieu du domaine audible, c'est un effet recherché car le microphone doit y avoir une bonne réponse.

Remarquons que l'écart entre la fréquence de résonance et la fréquence propre n'est que de 4 % pour un facteur de qualité de 2,5.

En considérant que $N_R \approx N_0 = 7\,957 \text{ Hz}$, la bande passante est : $\Delta N = \frac{N_0}{Q} = 3\,183 \text{ Hz}$.

2 1. Le système étudié dans le référentiel terrestre galiléen est la machine M .

Le bilan des forces appliquées à M est :

(i) le poids \vec{P} de la machine, force conservative ;

(ii) La tension du ressort : $\vec{T} = -k(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{A_0M_0})$, force conservative ;

(iii) la réaction du support horizontal : \vec{R} , force qui ne travaille pas.

Le système est conservatif en l'absence de frottement et à un degré de liberté puisque le mouvement a lieu selon l'axe $(O ; \vec{x})$.

Contentons-nous d'écrire le principe fondamental de la dynamique selon cet axe après avoir explicité la tension \vec{T} du ressort (la réaction du support compense le poids de M) :

$$\vec{T} = -k(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{A_0M_0}) = -k[(\ell_0 - x_A + x) - \ell_0] \vec{x} = -k(x - x_A) \vec{x}$$

$$-k(x - x_A) = m\ddot{x}, \text{ soit } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_A$$

D'où l'équation du mouvement de M :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_A \sin(\omega t)$$

L'équation différentielle est linéaire et le régime sinusoïdal permanent, cherchons la solution harmonique sous la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

En notation complexe :

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}, \text{ avec } \underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$$

$$x_A = X_A \sin(\omega t) = X_A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \underline{x}_A = X_A e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

L'équation différentielle devient algébrique :

$$-\omega^2 \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 \underline{x}_A e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \underline{x} = \underline{x}_A e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

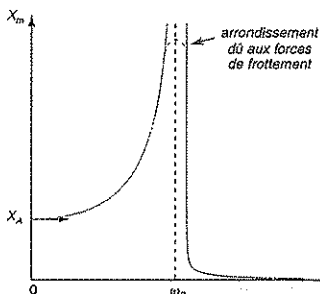
$$\underline{x}(t) = \text{Re}[\underline{x}(t)] = \frac{X_A}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \text{Re}\left[e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{X_A}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t) = \frac{X_A}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \sin(\omega t)$$

- Si $\omega < \omega_0$, exciteur et oscillateur sont en phase ;
- Si $\omega > \omega_0$, exciteur et oscillateur sont en opposition de phase.

La courbe d'évolution de l'amplitude de M en fonction de ω est la suivante :



L'amplitude diverge lorsque $\omega \rightarrow \omega_0$. Ce résultat est absurde et incompatible avec le modèle linéaire adopté, restreint aux faibles oscillations. Il y a nécessairement des forces de frottement qui « arrondissent » la courbe au voisinage de ω_0 .

À faible amortissement, pour ω proche de ω_0 , les phénomènes de résonance engendrent une très forte amplitude des vibrations de la machine au risque de la déstabiliser violemment : il faut « étouffer » ces vibrations.

2. Au bilan des forces appliquées à M , il faut maintenant ajouter la tension exercée par le second ressort :

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= -k_1(\overrightarrow{MM} - \overrightarrow{M_0M_0}) \\ &= -k_1[-(\ell_1 + x_1 - x) + \ell_1]\vec{e}_x \\ &= k_1(x_1 - x)\vec{e}_x \end{aligned}$$

Le principe fondamental appliqué à M et projeté suivant \vec{e}_x devient :

$$-k(x - x_A) + k_1(x_1 - x) = m\ddot{x} \quad (1)$$

Choisissons maintenant M_1 pour système :

La seule force orientée sur l'axe (O ; \vec{e}_x) est la tension exercée sur M par le second ressort :

$$\vec{T}'_1 = -k_1(\overrightarrow{MM_1} - \overrightarrow{M_0M_0}) = -\vec{T}_1 = -k_1(x_1 - x)\vec{e}_x$$

Le principe fondamental appliqué à M_1 et projeté suivant \vec{e}_x donne :

$$-k_1(x_1 - x) = m_1\ddot{x}_1 \quad (2)$$

Si l'élongation x reste constante et nulle, les équations (1) et (2) deviennent :

$$kx_A + k_1x_1 = 0 \quad (1')$$

$$-k_1x_1 = m_1\ddot{x}_1 \quad (2')$$

(1') : la vibration de la masse m_1 est en opposition de phase par rapport aux vibrations du support

$$x_1 = -\frac{k}{k_1}x_A = -\frac{k}{k_1}X_A \sin \omega t$$

On peut jouer sur le rapport $\frac{k}{k_1}$ pour diminuer l'amplitude des vibrations du second ressort.

Injectons cette solution dans l'équation (2') :

$$k_1 \frac{k}{k_1} x_A(t) = m_1 \frac{k}{k_1} \omega^2 x_A(t)$$

Pour annuler les vibrations de M_1 , il faut une masse m_1 :

$$m_1 = \frac{k_1}{\omega^2}$$

3 Le système est l'électron M , son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre galiléen.

Le bilan des forces appliquées à l'électron est :

- (i) la force élastique $\vec{F}_e(t) = -k\vec{E}(t)$;
- (ii) la force de frottement $\vec{F}_f(t) = -h\vec{v}(M_{\text{e}})$;
- (iii) la force électrique $\vec{F}(t) = q\vec{E}(t) = -e\vec{E}(t)$.

À l'échelle atomique, le poids de l'électron est négligeable devant la force électrique.

Le système n'est pas conservatif à cause de la dissipation d'énergie par rayonnement.

1. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel terrestre galiléen en notant $\vec{a} = \vec{a}(M_{\text{e}})$ l'accélération de M :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_f + \vec{F} = m\vec{a}$$

Explicitons le principe dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$-k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - h \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} - e \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Le principe fondamental conduit ainsi à un système de trois équations différentielles :

• projection sur \vec{e}_x :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = -eE_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

• projection sur \vec{e}_y : $m\ddot{y} + h\dot{y} + ky = 0 \quad (2)$

• projection sur \vec{e}_z : $m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = 0 \quad (3)$

Les équations différentielles (2) et (3) correspondent au régime libre (non entretenu) d'un oscillateur amorti. Leurs solutions x et y tendent vers zéro au bout d'un temps de l'ordre de quelques τ_c (temps de relaxation de l'énergie et durée de vie des oscillations selon \vec{e}_y et \vec{e}_z).

A.N. : Les données numériques permettent de calculer la durée de vie τ_c du régime transitoire, le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur harmonique :

$$\tau_c = \frac{m}{h} = 9,1 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2,3 \cdot 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Q = \omega_0 \tau_c = 2 \cdot 10^8$$

Le mouvement de l'électron selon \vec{e}_y et \vec{e}_z s'annule instantanément :

$$\vec{OM} = x \vec{e}_x$$

Le mouvement de l'électron est à un degré de liberté.

La fréquence propre est $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3,6 \cdot 10^{15}$ Hz.

Elle correspond à la longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = 80$ nm (domaine des UV).

2. L'équation (1) est l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = -\frac{eE_0}{m} \cos(\omega t).$$

Forme canonique de l'équation :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{eE_0}{m} \cos(\omega t)$$

Cette équation différentielle est linéaire.

3. Le système est linéaire et le régime sinusoïdal, utilisons la notation complexe en recherchant la solution sous la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$-\omega^2 X_m e^{j\omega t} + j \frac{\omega \omega_0}{Q} X_m e^{j\omega t} + \omega_0^2 X_m e^{j\omega t} = -\frac{eE_0}{m} e^{j\omega t}$$

$$\text{Ainsi } X_m \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0} \right) = -\frac{eE_0}{m\omega_0^2}$$

D'où l'expression de l'amplitude complexe :

$$\underline{X}_m = -\frac{\frac{eE_0}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} = X_m e^{j\varphi}$$

L'amplitude des oscillations est le module de \underline{X}_m :

$$X_m = |\underline{X}_m| = \frac{\frac{eE_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

L'avance de phase de la réponse en élongation de l'électron par rapport à l'excitation électrique est l'argument de \underline{X}_m :

$$\begin{aligned} \underline{X}_m &= X_m e^{j\varphi} = \frac{\frac{eE_0}{m\omega_0^2}}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 - j \frac{\omega}{Q\omega_0}} \\ &= \frac{\frac{eE_0}{m\omega_0^2}}{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \tan \varphi = \frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1} \\ \sin \varphi > 0 \end{cases}$$

Le domaine de variation de φ est :

$$\varphi \in [0, \pi]$$

4. La pulsation propre de l'oscillateur est $\omega_0 = 2,3 \cdot 10^{16}$ rad · s⁻¹.

Calculons les pulsations extrêmes du champ électrique excitateur :

$$\lambda = cT = c \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = c \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega_{\text{bleu}} = 4,7 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{et } \omega_{\text{rouge}} = 2,3 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La valeur maximale du rapport $\frac{\omega}{\omega_0}$ est :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_{\text{max}} = \frac{\omega_{\text{bleu}}}{\omega_0} \approx 0,2.$$

Comparons maintenant les termes du dénominateur de \underline{X}_m :

$$(i) \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_{\text{max}}^2 = \left(\frac{\omega_{\text{bleu}}}{\omega_0}\right)^2 \approx 0,04 \ll 1;$$

$$(ii) \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)_{\text{max}} = \left(\frac{\omega_{\text{bleu}}}{Q\omega_0}\right) = 10^{-9} \ll 1.$$

En conséquence :

$$\underline{X}_m = -\frac{eE_0}{m\omega_0^2} = X_m e^{j\varphi} \Rightarrow \begin{cases} X_m = \frac{eE_0}{m\omega_0^2} \\ \varphi = \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= X_m \cos(\omega t + \varphi) = \frac{eE_0}{m\omega_0^2} \cos(\omega t + \pi) \\ &= -\frac{eE_0}{m\omega_0^2} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\vec{OM} = x \vec{e}_x = -\frac{eE_0}{m\omega_0^2} \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

$$\vec{OM} = -\frac{e\vec{E}_0}{m\omega_0^2} \cos(\omega t)$$

L'électron et le champ électrique vibrent en opposition de phase.

5. Le vecteur accélération est obtenu en dérivant deux fois le vecteur position par rapport à t :

$$\vec{v} = \omega \frac{e\vec{E}_0}{m\omega_0^2} \sin(\omega t).$$

$$\vec{a} = \omega^2 \frac{e\vec{E}_0}{m\omega_0^2} \cos(\omega t)$$

Nous avons obtenu dans le domaine du visible l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti de pulsation ω imposée par l'excitateur :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} + \omega^2 \overrightarrow{OM} = \vec{0}.$$

Ceci est dû au caractère très élevé du facteur de qualité et de l'approximation que nous avons effectuée :

$$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1.$$

La puissance lumineuse moyenne rayonnée étant proportionnelle au carré de l'amplitude de l'accélération :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{bleu}} \rangle = A \omega_{\text{bleu}}^4 \left(\frac{\varepsilon E_0}{m \omega_0^2} \right)^2;$$

$$\langle \mathcal{P}_{\text{rouge}} \rangle = A \omega_{\text{rouge}}^4 \left(\frac{\varepsilon E_0}{m \omega_0^2} \right)^2.$$

En faisant le rapport de ces deux expressions, il vient :

$$\frac{\langle \mathcal{P}_{\text{bleu}} \rangle}{\langle \mathcal{P}_{\text{rouge}} \rangle} = \left(\frac{\omega_{\text{bleu}}}{\omega_{\text{rouge}}} \right)^4 = \left(\frac{\lambda_{\text{rouge}}}{\lambda_{\text{bleu}}} \right)^4 = 16.$$

La puissance lumineuse diffusée par les atomes de l'atmosphère est environ 16 fois plus intense dans le bleu que dans le rouge : le ciel nous apparaît bleu.

Remarque : la puissance lumineuse diffusée est encore plus intense dans le violet, mais l'œil est peu sensible au violet.

4. Le système M est l'automobile, elle est en translation selon l'axe (Oz) et se comporte comme un point matériel. L'étude s'effectue dans le référentiel \mathcal{R}_g lié au sol et supposé galiléen.

• Bilan des forces appliquées au point M

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, poids du point matériel M ;

(ii) de contact :

• pour chaque ressort, $\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du ressort (1) ;

• pour chaque amortisseur, $\vec{F}_{\text{amortisseur} \rightarrow M} = \vec{F}_{f(1)}$, la force de frottement (1).

1. Évaluons la tension exercée par un ressort sur le point M à l'équilibre :

$$\vec{T} = -k(\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CP_0}) = -k(L_c - L_0)\vec{e}_z.$$

Or quatre ressorts agissent sur M de la même façon, la force de tension résultante est :

$$4\vec{T} = -4k(L_c - L_0)\vec{e}_z.$$

Les constantes de raideur des 4 ressorts identiques en parallèle s'ajoutent. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'automobile en situation d'équilibre dans le référentiel terrestre galiléen :

$$-(M_c + 4m)g\vec{e}_z - 4k(L_c - L_0)\vec{e}_z = \vec{0} \quad [1]$$

$$= -Mg\vec{e}_z - 4k(L_c - L_0)\vec{e}_z = \vec{0} \quad [1]$$

$$\Rightarrow \boxed{L_c = L_0 - \frac{Mg}{4k}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_0 = R + L_c = R + L_0 - \frac{Mg}{4k}}$$

2. $\lambda = VT = V \frac{2\pi}{\omega}$, T étant la période des excitations.

Le vecteur vitesse est constant :

$$V = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad x(t) = Vt, \quad \text{en supposant qu'à l'instant initial}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow 2\pi \frac{x}{\lambda} = \omega t.$$

Ainsi $\boxed{E(x) = E_0 \cos(\omega t)}$, avec la pulsation

$$\text{d'excitation : } \boxed{\omega = V \frac{2\pi}{\lambda}}$$

3. • La force de frottement de type visqueux exercée par les quatre amortisseurs est donnée par :

$$\vec{F}_f = 4\vec{F}_{f(1)} = -4k[\dot{z}(P) - \dot{z}(C)]\vec{e}_z.$$

• La force exercée par les ressorts :

$$\vec{T} = -4k[L(t) - L_0]\vec{e}_z = -4k[z(t) - E(t) - R - L_0]\vec{e}_z.$$

4. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'automobile en mouvement de translation verticale dans \mathcal{R}' référentiel galiléen car en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_g :

$$-Mg\vec{e}_z - 4k[z(t) - E(t) - R - L_0]\vec{e}_z - 4k[\dot{z} - \dot{E}]\vec{e}_z = M\ddot{z}\vec{e}_z$$

$$M\ddot{z} + \underbrace{Mg - 4kL_0 + 4h\dot{z} + 4kz(t) - 4kR}_{(1) : -4kL_0} = 4h\dot{E} + 4kE(t)$$

$$M\ddot{z} + 4h\dot{z} + 4kz(t) - 4k[L_0 + R] = 4kE(t) + 4h\dot{E}.$$

Or $z_0 = L_0 + R$, d'où :

$$\ddot{z} + \frac{4h}{M}\dot{z} + \frac{4k}{M}(z - z_0) = \frac{4h}{M}\dot{E} + \frac{4k}{M}E(t).$$

Avec les changements de variables :

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{2}{\tau}\dot{z} + \omega_0^2(z - z_0) = \frac{2}{\tau}\dot{E} + \omega_0^2 E(t)}$$

$$\text{et} \quad \boxed{\ddot{Z} + \frac{2}{\tau}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \frac{2}{\tau}\dot{E} + \omega_0^2 E(t)}$$

5. En notation complexe :

$$Z \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{2\omega}{\tau} \right] = \underline{E} \left[\omega_0^2 + j \frac{2\omega}{\tau} \right]$$

$$\Rightarrow \left| \frac{Z}{\underline{E}} \right| = \left| \frac{Z}{\underline{E}} \right|_{\text{en } \varphi} = \frac{\omega_0^2 + j \frac{2\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{2\omega}{\tau}}$$

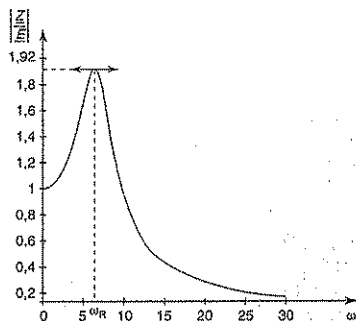
$$\text{et } \left| \frac{Z}{E} \right| = \frac{\omega_0^4 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}$$

Rappelons que la pulsation d'excitation est proportionnelle à la vitesse du véhicule par la relation :

$$\omega = \frac{2\pi V}{\lambda}$$

où λ est la période spatiale de l'ondulation.

6. Tracé de la courbe de réponse en amplitude de la voiture en fonction de ω :



On observe une pulsation de résonance d'amplitude pour une $\omega = \omega_R$.

$$A(\omega) = \left| \frac{Z}{E} \right| \quad \frac{dA}{d\omega} = 0 \text{ pour } \omega = \omega_R.$$

Plutôt que de dériver A , il est avantageux de dériver A^2 :

$$2A \times \frac{dA}{d\omega} = 0.$$

$$2A \frac{dA}{d\omega} = - \frac{2\omega}{\tau^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2} \right)^{3/2}} \left[\omega^4 + \frac{\tau^2 \omega_0^4}{2} \omega^2 - \frac{\tau^2 \omega_0^6}{2} \right]$$

La dérivée s'annule pour $\omega = 0$, ce qui correspond au minimum de la fonction A .

Elle s'annule aussi pour :

$$\omega^4 + \frac{\tau^2 \omega_0^4}{2} \omega^2 - \frac{\tau^2 \omega_0^6}{2} = 0,$$

équation dont on ne conserve que la solution positive en ω :

$$\omega_R = \frac{\tau \omega_0^2}{2} \sqrt{1 + \frac{8}{\tau^2 \omega_0^2}} - 1$$

A.N. : $\omega_R = 6,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

• Quand $\omega \ll \omega_R$: $\left| \frac{Z}{E} \right| \rightarrow 1$ et le ressort ne travaille pas, la voiture « suit » les oscillations de la route.

• Quand $\omega \gg \omega_R$: $\left| \frac{Z}{E} \right| \rightarrow 0$ et la voiture n'oscille pas à cause de son inertie.

• Par contre, il y a danger lorsque ω est proche de la pulsation de résonance ω_R , ce qui correspond pour $\lambda = 8 \text{ m}$ à une vitesse du véhicule de $29,3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 18 \text{ miles} \cdot \text{h}^{-1}$.

Dans ce cas $A(\omega_R) = 1,92$, ce qui correspond à une amplitude de $1,95 \times 5 = 9,62 \text{ cm}$. La garde au sol étant de 20 cm , le châssis de la voiture est fortement agité.

Pour que l'amplitude du mouvement soit faible, il faut se placer loin de la résonance, soit à très faible vitesse ($\omega \ll \omega_R$) soit à très grande vitesse ($\omega \gg \omega_R$) par rapport à $29,3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

⇒ Considérons les données du dialogue, le camion a les caractéristiques de notre problème, sa réponse en amplitude est donnée sur le graphe ci-dessus et $\lambda = 8 \text{ m}$.

Considérons la courbe précédente.

Le véhicule roule à grande vitesse et ne ressent pas les bosses. Il ne doit pas ralentir : si sa vitesse diminue, il commencera à vibrer à partir d'une pulsation de l'ordre de $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui correspond à une vitesse de $45,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, soit $28,6 \text{ miles} \cdot \text{h}^{-1}$.

En dessous de 6 mph le véhicule roule à faible vitesse : $9,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, soit $2,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. À cette vitesse la pulsation d'excitation est de l'ordre de $2,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Le camion est juste en dessous de la résonance et $A = 1$; il épouse les oscillations de la route. Les dialogues sont en accord avec le modèle que nous avons adopté.

Théorème du moment cinétique

1 Moment d'une force

1.1. Moment d'une force en un point

Par définition, le moment en un point O de la force \vec{F} appliquée en M est :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

• Propriétés

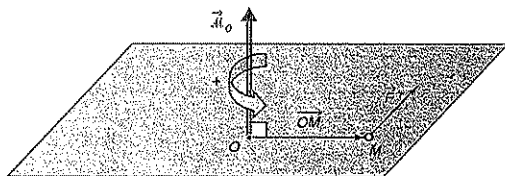
- (i) Le moment de la force dépend du point O choisi.
- (ii) Si plusieurs forces sont appliquées au point M , la somme vectorielle des moments en O de chacune de ces forces est égale au moment en O de la résultante de ces forces :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \vec{M}_O(\vec{F}_3)$$

- (iii) Le moment en O de la force appliquée en M est un vecteur perpendiculaire au plan (\vec{OM}, \vec{F}) . Son sens est donné par la *règle du tire-bouchon* ou la *règle de la main droite*.

Fig.



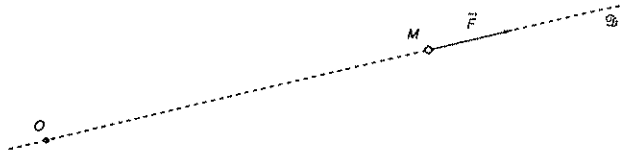
• Cas de nullité

Si le point O appartient à la droite d'action (ou support) de \vec{F} notée $\mathcal{D} = (M, \vec{F})$, alors :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$$

On dit que la force

\vec{F} « passe par » le point O ;



1.2. Moment d'une force par rapport à un axe orienté

Soit un axe Δ passant par le point O et orienté selon la direction du vecteur unitaire \vec{z}_Δ .

Le moment de la force \vec{F} appliquée au point M par rapport à l'axe Δ orienté est sa projection (grandeur algébrique) sur cet axe définie par le produit scalaire :

$$\boxed{M_\Delta(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) \cdot \vec{z}_\Delta}$$

• Cas de nullité

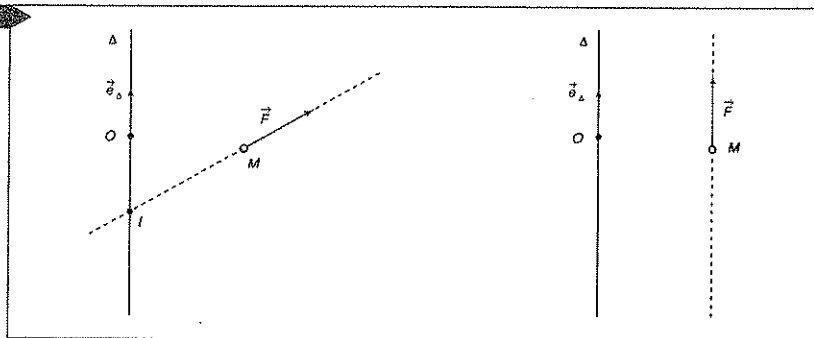
- (i) si la droite d'action $\mathcal{D} = (M, \vec{F})$ de la force \vec{F} coupe l'axe Δ en un point I ,
- (ii) si la droite d'action $\mathcal{D} = (M, \vec{F})$ est parallèle à l'axe Δ ,

alors :

$$M_\Delta(\vec{F}) = 0.$$

Ces situations sont respectivement représentées sur les schémas suivants :

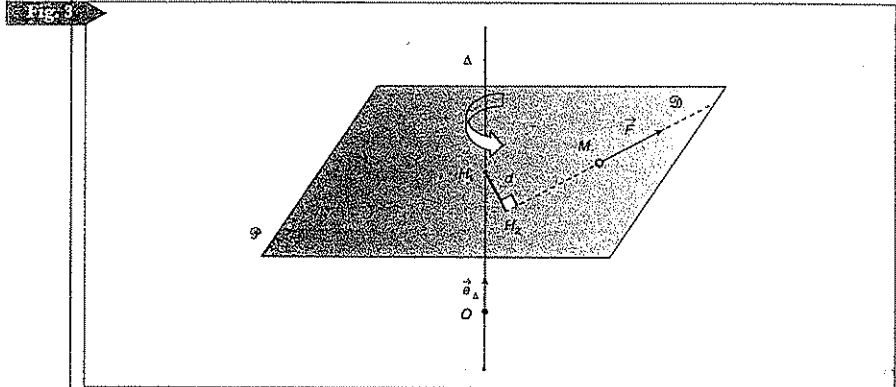
Fig. 2



Les propriétés du moment d'une force s'interprètent clairement dans les rotations : si la force \vec{F} n'a pas pour effet de faire tourner le point M autour de l'axe Δ , son moment par rapport à cet axe est nul.

1.3. Moment d'une force orthogonale à l'axe : notion de *bras de levier*

La force \vec{F} appartenant au plan \mathcal{P} orthogonal à l'axe Δ a pour effet de faire tourner le point matériel M autour de cet axe, son moment par rapport à Δ est non nul.



Le moment de cette force par rapport à Δ est indépendant du point choisi sur cet axe, pour calculer $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ choisissons le point H_1 du plan \mathcal{P} appartenant à Δ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_{H_1}(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta = (\overrightarrow{H_1 M} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta.$$

Décomposons cette expression en faisant intervenir le point H_2 , projection orthogonale de H_1 sur \mathcal{D} :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = ((\overrightarrow{H_1 H_2} + \overrightarrow{H_2 M}) \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta = (\overrightarrow{H_1 H_2} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta + \underbrace{(\overrightarrow{H_2 M} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta}_{\substack{0 \\ \overrightarrow{H_2 M} \text{ colinéaire avec } \vec{F}}}.$$

En conséquence :

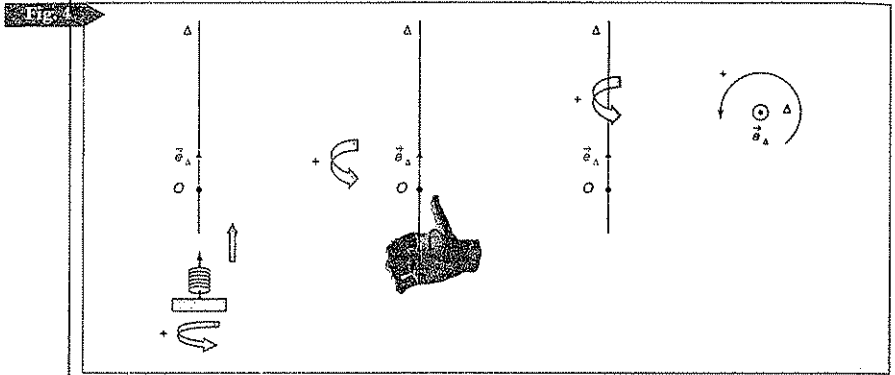
$$|\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})| = \|\overrightarrow{H_1 H_2}\| \|\vec{F}\|.$$

La distance $d = \|\overrightarrow{H_1 H_2}\|$ entre l'axe Δ et le support \mathcal{D} de la force \vec{F} est appelée *bras de levier*, la valeur absolue du moment de cette force par rapport à l'axe Δ est :

$$|\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})| = d \|\vec{F}\|$$

Le signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ dépend du fait que la force \vec{F} peut faire tourner le point matériel M dans un sens ou dans l'autre autour de Δ .

L'orientation positive de la rotation autour de l'axe Δ est définie corrélativement à l'orientation \vec{e}_Δ de cet axe par la *règle du tire-bouchon* ou la *règle de la main droite* :



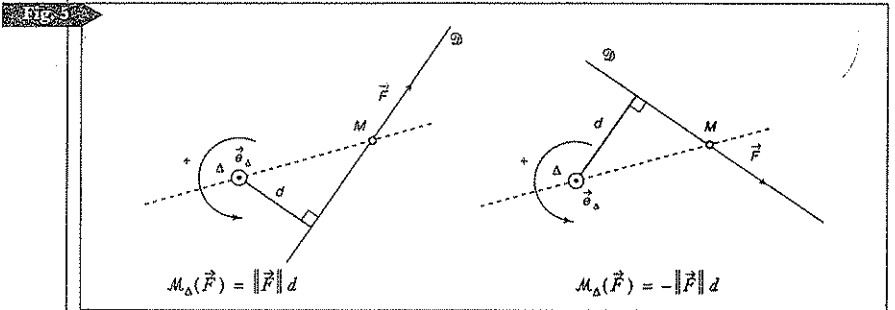
(i) si la force tend à faire tourner le point matériel dans le sens positif, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) > 0$:

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \|\vec{F}\| d.$$

(ii) si la force tend à faire tourner le point matériel dans le sens contraire, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) < 0$:

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -\|\vec{F}\| d.$$

Les deux situations sont résumées sur le schéma suivant :



• **Conséquence**

Les poignées de porte sont situées le plus loin possible de l'axe de rotation car, en augmentant le bras de levier, on déploie une plus petite force pour faire tourner la porte.

2 Moment cinétique d'un point matériel dans un référentiel \mathcal{R}

Le moment cinétique est, avec l'énergie mécanique et la quantité de mouvement associées à un point matériel M , une des grandeurs fondamentales de la physique.

Remarque
Unité de moment
cinétique :
 $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

2.1. Moment cinétique d'un point matériel en un point A

Le moment cinétique en A d'un point matériel M de masse m dans le référentiel \mathcal{R} est défini par :

$$\vec{L}_A(M/\mathcal{R}) = \vec{AM} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) = \vec{AM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R})$$

C'est le moment en A de la quantité de mouvement du point M dans le référentiel \mathcal{R} notée $\vec{p}(M/\mathcal{R})$

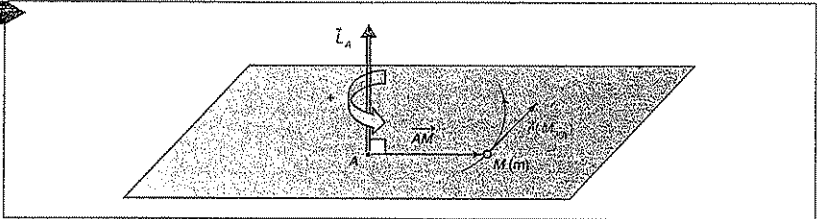
➤ Cette définition est valable que le point A soit fixe ou mobile dans le référentiel \mathcal{R} .

• Propriétés

(i) Le moment cinétique dépend du point A choisi pour le calculer.

(ii) Le moment cinétique en A du point matériel M est un vecteur perpendiculaire au plan $(\vec{OM}, \vec{v}(M/\mathcal{R}))$ orienté par la règle du tire-bouchon ou la règle de la main droite.

FIG. 6



2.2. Moment cinétique par rapport à un axe orienté

Considérons un axe Δ passant par le point A et orienté selon la direction du vecteur unitaire \vec{z}_Δ . Le moment cinétique du point M par rapport à l'axe Δ orienté est sa projection (grandeur algébrique) sur cet axe défini par le produit scalaire :

$$L_\Delta(M/\mathcal{R}) = \vec{L}_A(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{z}_\Delta = \left[\vec{AM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R}) \right] \cdot \vec{z}_\Delta$$

Remarque
Le moment cinétique
du point M par rapport
à l'axe Δ est in-
dépendant du point
A choisi sur cet axe.

3 Théorème du moment cinétique

3.1. Application en un point fixe dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g

Dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g)$ du point matériel M en un point fixe O est égale au moment en O de la force totale agissant sur ce point :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{F})$$

O est n'importe quel point fixe dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

Nous allons voir que ce théorème est une conséquence de la seconde loi de Newton.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un point matériel M soumis à la résultante des forces \vec{F} dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g donne :

$$\left(\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}$$

Calculons la dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g)$ exprimé en un point fixe O du référentiel \mathcal{R}_g :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} &= \left(\frac{d}{dt}[\vec{OM} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}_g)]\right)_{/\mathcal{R}_g} \\ &= \underbrace{\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)}_{\vec{0}} \wedge m \vec{v}(M/\mathcal{R}_g) + \vec{OM} \wedge \underbrace{\left(\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g}}_{\vec{F}} \end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique s'en déduit :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{F})$$

3.2. Application par rapport à un axe fixe dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g

Soit un axe Δ passant par le point O et orienté selon la direction constante du vecteur unitaire \vec{e}_Δ .

La projection de la relation vectorielle obtenue précédemment sur Δ donne :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} \cdot \underbrace{\vec{e}_\Delta}_{\text{vecteur constant}} = \left(\frac{d[\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{e}_\Delta]}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta$$

Dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe fixe Δ donne ainsi :

$$\boxed{\left(\frac{dL_\Delta(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = M_\Delta(\vec{F})}$$

3.3. Application par rapport à un point mobile dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g

Le moment cinétique du point matériel est défini en un point O_1 mobile dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

Exprimons sa dérivée par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_{O_1}(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} &= \left(\frac{d}{dt}[\vec{O_1M} \wedge m \vec{v}(M/\mathcal{R}_g)]\right)_{/\mathcal{R}_g} \\ &= \left(\frac{d\vec{O_1M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} \wedge m \vec{v}(M/\mathcal{R}_g) + \vec{O_1M} \wedge \underbrace{m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g)}_{\vec{F}} \end{aligned}$$

Faisons maintenant intervenir l'origine O du référentiel :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O_1}(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \left[\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} - \left(\frac{d\vec{OO}_1}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g}\right] \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) + \vec{M}_{O_1}(\vec{F}).$$

Ainsi :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O_1}(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = -m\vec{v}(O_1/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_g) + \vec{M}_{O_1}(\vec{F})$$

3.4. Théorème du moment cinétique et seconde loi de Newton

Le théorème du moment cinétique a été établi en utilisant le principe fondamental de la dynamique. Il est donc une conséquence de la seconde loi de Newton et n'apporte pas d'information supplémentaire sur le mouvement du point M .

L'association moment de force - théorème du moment cinétique fournit pour une masse ponctuelle une autre méthode d'obtention des équations du mouvement accessibles par l'association force - relation fondamentale de la dynamique.

Dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , nous avons maintenant à notre disposition deux théorèmes généraux appliqués au point M soumis à la résultante des forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M}$. Vous noterez leurs expressions semblables :

$$\left(\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} \quad \left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M}).$$

Si le système est soumis à une réaction inconnue passant par un point, le théorème du moment cinétique est appliqué en ce point de façon à faire disparaître la contribution de cette force.

La relation fondamentale de la dynamique, qui prend en compte la totalité du bilan des forces extérieures appliquées au système, permet d'accéder à cette force manquante.

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigés p. 226

1 Les deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} sont exprimés dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

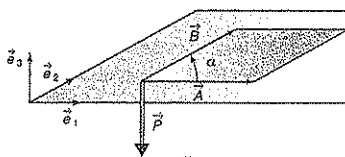
Avec $\alpha = (\vec{A}, \vec{B})$, leur produit vectoriel

$\vec{P} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ est un vecteur de norme :

a. $\|\vec{P}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin \alpha$,

b. $\|\vec{P}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \cos \alpha$

2 La direction du vecteur produit vectoriel \vec{P} est perpendiculaire à \vec{A} et \vec{B} . Son sens est :



a.



b.

3 Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

a. $m\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge m\vec{B}$,

b. $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{B} \wedge \vec{A}$,

c. $\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0}$.

4 Choisir la bonne réponse.

a. $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$,

b. $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{A}$.

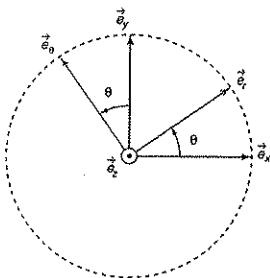
5 Choisir la bonne réponse.

a. $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} - (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B}$

b. $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

6 Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

Les bases $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ sont orthonormées directes.



a. $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_y$,

b. $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$,

c. $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_y = -\cos\theta \vec{e}_z$,

d. $\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_y = -\sin\theta \vec{e}_z$.

7 Les deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} sont exprimés dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Leur produit vectoriel $\vec{P} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ est :

a. $\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 \end{pmatrix}$,

c. $\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$.

8 Les vecteurs \vec{A} et \vec{B} dépendent de t , la dérivée par rapport à t de leur produit vectoriel est :

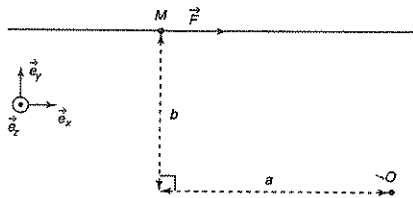
a. $\frac{d}{dt}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B} + \frac{d\vec{B}}{dt} \wedge \vec{A}$,

b. $\frac{d}{dt}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{dt}$,

c. $\frac{d}{dt}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B} - \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{dt}$,

d. $\frac{d}{dt}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B}$.

9 Le moment de la force \vec{F} , d'intensité $\|\vec{F}\| = F$, par rapport à O est :



- a. $Fa\vec{e}_z$, b. $-Fb\vec{e}_z$,
 c. $-Fb\vec{e}_y$, d. $-Fa\vec{e}_z$.

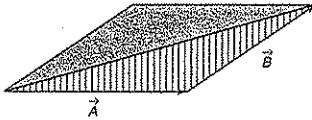
- 10 Si la force \vec{F} se déplace sur son support, son moment par rapport à Δ est-il modifié ?
 a. oui, b. non.

- 11 Dans le référentiel d'étude galiléen \mathcal{P}_g , la force \vec{F} appliquée au point matériel M est dite centrale, elle pointe à tout instant vers l'origine O du repère. Qualifier le moment cinétique du point M par rapport à O .
 a. constant, b. nul,
 c. sans propriété particulière.

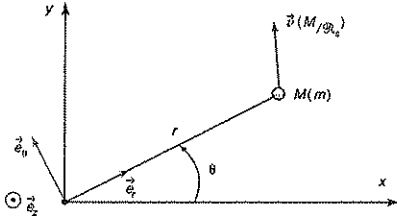
Savoir appliquer le cours

> Corrigés p. 227

- 1 Déterminer l'aire hachurée A en fonction de la norme du produit vectoriel :



- 2 Un point matériel M de masse m est en mouvement dans le plan Oxy . Déterminer son moment cinétique en O en coordonnées polaires.



- 3 Qualifier le moment cinétique d'un point matériel isolé.

- 4 Si un point matériel M_1 exerce sur un autre point M_2 une force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$, alors le point M_2 exerce sur M_1 la force :

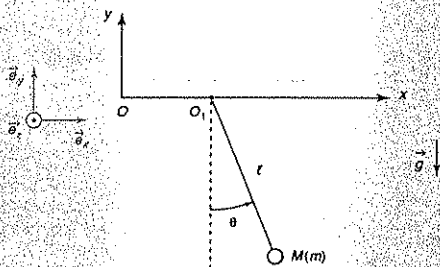
$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

Cette équation, à elle seule, traduit-elle le principe des actions réciproques ?

Les théorèmes du moment cinétique et de l'énergie cinétique appliqués dans un référentiel galiléen sont des conséquences du principe fondamental de la dynamique. Ils ne contiennent pas de principe physique nouveau mais peuvent se révéler très utiles pour résoudre plus facilement certains exercices.

1 – Oscillations libres d'un pendule simple non amorti

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z)$ est supposé galiléen.



Un pendule simple est constitué d'un objet ponctuel M de masse m , suspendu en O_1 à un fil sans raideur et sans masse, de longueur ℓ . Le champ de pesanteur terrestre est supposé uniforme et la résistance de l'air négligeable. À l'instant initial $t = 0$, la particule M est abandonnée d'un angle θ_0 , sans vitesse initiale et fil-tendu dans le plan (Oxy) . Elle reste dans ce plan tout au long de son mouvement.

L'extrémité O_1 du fil est fixe.

- 1 Déterminer le moment cinétique en O_1 du point M .
- 2 Établir l'équation différentielle vérifiée par θ en appliquant le théorème du moment cinétique en O_1 .
- 3 En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de ℓ et g . En déduire $\theta(t)$.

résolution méthodique

Reprenons l'étude systématique d'un problème de mécanique en y ajoutant un théorème supplémentaire : le théorème du moment cinétique.

L'utilisation d'un schéma représentatif du système dans une position quelconque au cours du mouvement est un support important à la résolution du problème. Placer, si possible, le système dans une position telle que ses coordonnées soient positives et que les angles orientés positivement soient

compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

À chaque étape du raisonnement, veiller à l'homogénéité des résultats.

[1] Définir le système étudié.

[2] Choisir le référentiel d'étude galiléen \mathcal{R}_g .

[3] Effectuer le bilan des forces appliquées au système. Le système est-il conservatif ?

[4] Préciser le nombre de degrés de liberté du problème.

[5] Mise en équation du problème : les théorèmes généraux.

Nous avons maintenant trois théorèmes généraux à notre disposition, ils sont associés à l'une des trois grandeurs cinématiques fondamentales associées au système M et permettent d'accéder aux équations différentielles du mouvement :

• La quantité de mouvement : $\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}_g} = m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}$.

L'association force-principe fondamentale de la dynamique est utilisable, dans le référentiel d'étude galiléen, chaque fois que l'on connaît le bilan des forces :

$$\left(\frac{d\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M}$$

Par son caractère vectoriel, ce théorème permet l'obtention de trois équations différentielles qui donnent accès aux équations horaires du mouvement et à la trajectoire du mobile. La connaissance de l'accélération permet de déterminer une force inconnue comme la tension d'un fil ou la réaction du support.

• Le moment cinétique : $\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g} = m\vec{OM} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}$

Le théorème du moment cinétique est particulièrement bien adapté aux situations où le système est en rotation autour d'un point fixe O ou autour d'un axe mais il affecte aussi tous les mouvements :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{F})$$

Un choix approprié du point O permet l'élimination d'une force inconnue (tension du fil, réaction du support) dont le moment par rapport au point O est nul. Pour déterminer cette force, il faudra revenir ensuite au principe fondamental de la dynamique.

• L'énergie cinétique : $\mathcal{E}_C(M)_{/\mathcal{R}_g} = \frac{1}{2}mv^2(M)_{/\mathcal{R}_g}$.

Mais on utilisera plus volontiers l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m(M)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{E}_C(M)_{/\mathcal{R}_g} + \mathcal{E}_P(M)$$

Le théorème de la puissance cinétique ou le théorème de la puissance mécanique fournit une intégrale première du mouvement :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_C(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} \cdot \vec{v})_{/\mathcal{R}_g} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\mathcal{E}_m(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{nc}})_{/\mathcal{R}_g}$$

Ces théorèmes sont bien adaptés aux systèmes conservatifs à un degré de liberté. L'équation différentielle du mouvement est obtenue en dérivant par rapport à t l'intégrale première de l'énergie. Ils ont l'avantage de faire disparaître la contribution des forces qui ne travaillent pas de l'équation du mouvement. Pour les déterminer il faut revenir au principe fondamental de la dynamique.

[6] Résolution de l'équation différentielle.

[7] Interprétation physique des résultats obtenus et vérification de leur cohérence.

► **1** Le système étudié est le point matériel M . Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le bilan des forces appliquées à M est :

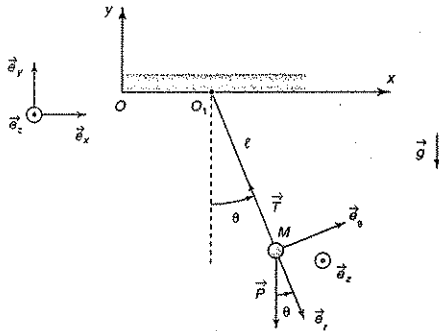
(i) Le poids de M : \vec{P} , force conservative ;

(ii) La tension du fil : \vec{T} , force normale à la trajectoire, elle ne travaille pas.

Le système est conservatif et à un degré de liberté d'élongation angulaire θ . La conservation de l'énergie mécanique permet d'accéder à l'équation du mouvement mais la méthode préconisée ici est le théorème du moment cinétique.

La base de projection adaptée à cette trajectoire en arc de cercle de M est la base cylindro-polaire mobile : $(\vec{e}_r; \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Le troisième vecteur de la base cylindro-polaire est ici le vecteur unitaire fixe \vec{e}_z de la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ liée au référentiel terrestre.



Le moment cinétique en O_1 du point M est défini par :

$$\vec{L}_{O_1}(M/\mathcal{R}_g) = m \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_g).$$

Calculons les vecteurs position et vitesse du point M :

(i) Le vecteur position du point M est défini par : $\overrightarrow{O_1M} = \ell \vec{e}_r$;

(ii) La dérivée de ce vecteur par rapport au temps donne le vecteur vitesse de M :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d(\ell \vec{e}_r)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \ell \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

La dérivation des fonctions composées permet d'écrire les dérivées par rapport au temps :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_e} = \left(\frac{d\vec{e}_r[\theta(t)]}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_e} = \left(\frac{d\vec{e}_r[\theta(t)]}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}_e} \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \theta \left(\frac{d\vec{e}_r[\theta(t)]}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}_e} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Dériver un vecteur unitaire par rapport à θ revient à le faire tourner de $\frac{\pi}{2}$.

Le moment cinétique en O_1 du point M est ainsi :

$$\vec{L}_{O_1}(M_{/\mathcal{R}_e}) = m \ell \vec{e}_r \wedge \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta = m \ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = m \ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{L}_{O_1}(M_{/\mathcal{R}_e}) = m \ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z}$$

2

[5] Mise en équation du problème

Le problème impose l'application du théorème du moment cinétique en O_1 et dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_e . Il se décompose de la façon suivante :

① Choisir le point O_1 fixe et de façon à « éliminer » les forces inconnues de moment nul par rapport à O_1 .

② Déterminer le moment cinétique du système en O_1 dans la base adaptée au problème :

$$\vec{L}_{O_1}(M_{/\mathcal{R}_e})$$

③ Calculer le moment en O_1 des forces appliquées au système : $\vec{M}_{O_1}(\vec{F})$

(i) en écrivant le produit vectoriel : $\vec{M}_{O_1}(\vec{F}) = \vec{O_1M} \wedge \vec{F}$

(ii) en utilisant le bras de levier d de la force :

- si la force tend à faire tourner M dans le sens positif : $M_\Delta(\vec{F}) = \|\vec{F}\| d$;

- si la force tend à faire tourner M dans le sens contraire : $M_\Delta(\vec{F}) = -\|\vec{F}\| d$.

④ Écrire le théorème du moment cinétique.

La projection de la relation vectorielle obtenue permet d'accéder à l'équation du mouvement de M .

Calculons le moment en O_1 des forces appliquées au point M :

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{P}) = \vec{O_1M} \wedge \vec{P}$$

• *Forme analytique du produit vectoriel dans la base* ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$)

$$\vec{O_1M} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{P} = \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{M}_{O_1}(\vec{P}) = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \ell \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{M}_{O_1}(\vec{P}) = -mg \ell \sin \theta \vec{e}_z}$$

Le support de la tension \vec{T} du fil passe par O_1 , le moment de cette force est nul en ce point :

$$\vec{M}_{O_1}(\vec{T}) = \vec{0}$$

Application du théorème du moment cinétique au point O_1 fixe dans le référentiel terrestre :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O_1}(M/\mathcal{R}_e)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_e} = \vec{M}_{O_1}(\vec{P}) + \underbrace{\vec{M}_{O_1}(\vec{T})}_{\vec{0}} = \vec{M}_{O_1}(\vec{P})$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O_1}(M/\mathcal{R}_e)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_e} = m\ell^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = -mg\ell\sin\theta\vec{e}_z$$

La projection suivant \vec{e}_z de cette équation donne l'équation du mouvement du point M :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

3

[6] Résolution de l'équation différentielle

Cette équation différentielle n'est pas linéaire. Pour la linéariser, il faut se restreindre aux oscillations de faible amplitude : dans ce cas $\sin\theta \approx \theta$.

Sa solution est sinusoïdale.

Dans le cas des petites oscillations : $\sin\theta \approx \theta$. L'équation différentielle devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

Cette équation différentielle linéaire est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Sa solution générale est de la forme :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Les constantes A et φ sont précisées à partir des conditions initiales :

$$\theta(0) = \theta_0 \text{ et } \dot{\theta}(0) = 0$$

$$\dot{\theta}(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta}(0) = -\omega_0 A\sin\varphi = 0$$

$$\theta(0) = A\cos\varphi = \theta_0$$

Ainsi $A = \theta_0$ et $\varphi = 0$, la solution du problème est :

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$$

en conclusion

Dans la phase [5], parmi les théorèmes généraux, nous avons choisi d'utiliser le théorème du moment cinétique qui a l'avantage d'exclure la tension du fil de notre raisonnement (son moment est nul si on choisit d'appliquer le théorème au point fixe O_1). Si l'expression de la tension avait été nécessaire pour poursuivre le problème, il n'y a pas d'autre solution que de revenir au principe fondamental.

2 - Oscillations forcées d'un pendule simple non amorti

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur uniforme.

Un pendule simple est constitué d'un objet ponctuel M de masse m , suspendu en O_1 à un fil sans raideur et sans masse, de longueur ℓ . À l'instant initial $t = 0$, le pendule est au repos :

$$\theta(0) = 0 \text{ et } \dot{\theta}(0) = 0.$$

L'extrémité O_1 du fil est *mobile*.

Le point O_1 se déplace horizontalement le long de l'axe $(O; \vec{e}_x)$ en effectuant de petites oscillations d'amplitude D et de pulsation ω :

$$\vec{OO}_1 = x_1(t)\vec{e}_x = D\cos(\omega t)\vec{e}_x.$$

Le mouvement du point matériel M s'effectue fil tendu, sans frottement et dans le plan (Oxy) .

On posera : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

1 Pourquoi vaut-il mieux appliquer le théorème du moment cinétique au point mobile O_1 plutôt qu'au point fixe O ?

2 Afin d'écrire le théorème du moment cinétique en un point mobile, exprimer la dérivée :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O_1}(M)_{\mathcal{R}_g}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g}$$

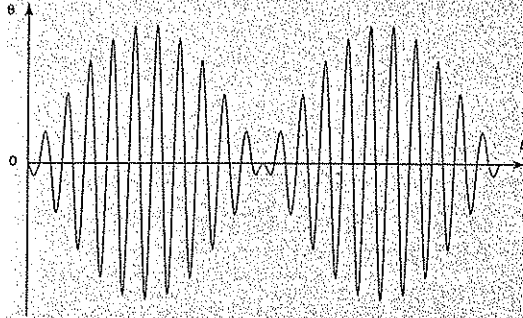
3 Établir l'équation du mouvement du pendule simple vérifiée par θ .

4 Résoudre cette équation dans le cas de petites oscillations du pendule et montrer que la solution peut se mettre sous la forme :

$$\theta(t) = f(\omega) \sin\left[\frac{(\omega + \omega_0)t}{2}\right] \sin\left[\frac{(\omega - \omega_0)t}{2}\right].$$

Déterminer la fonction $f(\omega)$.

- 5 La courbe de réponse en élongation angulaire obtenue lorsque la pulsation d'excitation ω est voisine de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur est représentée ci-dessous. Elle présente des phénomènes de battements, l'amplitude des oscillations variant sinusoidalement.



Justifier son allure en posant : $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, avec $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$. À quelle condition l'hypothèse des petites oscillations est-elle vérifiée ?

Donnée : $\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

resolution méthodique

1.

Reprenons les 4 premières étapes de l'exercice précédent jusqu'aux expressions des moments des forces au point O_1 . La tension T du fil est inconnue, il est avantageux de l'exclure du théorème du moment cinétique en observant que son moment en O_1 est nul.

Le système étudié est le point matériel M . Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

La base de projection adoptée est la base cylindro-polaire mobile : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Le bilan des forces appliquées à M est :

(i) le poids \vec{P} de M : $\vec{M}_{O_1}(\vec{P}) = -mgl \sin\theta \vec{e}_z$;

(ii) la tension \vec{T} du fil : $\vec{M}_{O_1}(\vec{T}) = \vec{0}$.

Le support de la tension du fil passe par O_1 mais pas par O : le moment de cette force n'est pas nul en O alors qu'il est nul en O_1 . Il est intéressant d'appliquer le théorème du moment cinétique en O_1 pour « éliminer » cette force d'expression inconnue et qui varie au cours du mouvement.

2.

Pour appliquer le théorème du moment cinétique, nous sommes à la recherche d'un point fixe dans le référentiel d'étude.

Pour exclure une force inconnue de son expression, il faut que la droite d'action de la force passe par ce point.

Mais dans le cas qui nous concerne, ces deux conditions ne peuvent pas être réunies simultanément et nous n'avons pas d'autre choix que d'appliquer le théorème du moment cinétique en un point mobile.

Que devient son expression ?

Exprimons la dérivée du moment cinétique en O_1 dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_{O_1}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} &= \left(\frac{d}{dt} [\vec{O}_1\vec{M} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)] \right)_{/\mathcal{R}_g} \\ &= \left(\frac{d\vec{O}_1\vec{M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) + \vec{O}_1\vec{M} \wedge \underbrace{m\vec{a}(M/\mathcal{R}_g)}_{\vec{F}} \end{aligned}$$

Faisons intervenir l'origine O :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O_1}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left[\left(\frac{d\vec{O}\vec{M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} - \left(\frac{d\vec{O}\vec{O}_1}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \right] \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) + \vec{M}_{O_1}(\vec{F}).$$

$\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$

Ainsi :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{L}_{O_1}(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = -m \left(\frac{d\vec{O}\vec{O}_1}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_g) + \vec{M}_{O_1}(\vec{F})} \quad (1)$$

3

Le mouvement de M est la composition d'une rotation et d'une translation : pour déterminer la vitesse du point M dans le référentiel terrestre il vaut mieux utiliser la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ liée à ce référentiel. Le passage du vecteur position au vecteur vitesse s'effectue par dérivation par rapport à t de chacune de ses composantes.

Pour déterminer le moment cinétique du point M par rapport à O_1 dans le référentiel \mathcal{R}_g , commençons par définir le vecteur position de M :

$$\vec{O}\vec{M} = \vec{O}\vec{O}_1 + \vec{O}_1\vec{M}.$$

Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ liée au référentiel terrestre :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell \sin \theta \\ -\ell \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \ell \sin \theta \\ -\ell \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation de chacune de ces composantes :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_2) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 + \ell \dot{\theta} \cos \theta \\ \ell \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où l'expression du moment cinétique :

$$\vec{L}_{O_1}(M/\mathcal{R}_2) = m \overrightarrow{OO_1} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_2) = m \begin{pmatrix} \ell \sin \theta \\ -\ell \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x}_1 + \ell \dot{\theta} \cos \theta \\ \ell \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\vec{L}_{O_1}(M/\mathcal{R}_2) = m\ell(\ell\dot{\theta} + \dot{x}_1 \cos \theta) \vec{e}_z}$$

Déterminons chacun des termes du théorème du moment cinétique :

$$(i) \left(\frac{d\vec{L}_{O_1}(M/\mathcal{R}_2)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2} = m\ell(\ell\ddot{\theta} + \ddot{x}_1 \cos \theta - \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta) \vec{e}_z$$

$$(ii) \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_2) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x}_1 + \ell \dot{\theta} \cos \theta \\ \ell \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} = \ell \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_z$$

$$(iii) \vec{M}_{O_1}(\vec{P}) = \vec{M}_{O_1}(\vec{P}) + \vec{M}_{O_1}(\vec{T}) = \vec{M}_{O_1}(\vec{P}) = -mg\ell \sin \theta \vec{e}_z.$$

L'équation (I) s'écrit suivant \vec{e}_z :

$$m\ell(\ell\ddot{\theta} + \ddot{x}_1 \cos \theta - \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta) = -m\ell \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta - mg\ell \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = -\frac{\ddot{x}_1}{\ell} \cos \theta.$$

En considérant $\ddot{x}_1 = -D\omega^2 \cos(\omega t)$, l'équation du mouvement du pendule est :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = \frac{D}{\ell} \omega^2 \cos(\omega t) \cos \theta}$$

4

Cette équation différentielle, linéaire dans le cas des petites oscillations, est d'ordre deux, à coefficients constants et avec second membre. La solution générale de cette équation est la somme d'une solution particulière $\theta_p(t)$ de l'équation complète avec second membre et de la solution générale $\theta_H(t)$ de l'équation sans second membre (ou homogène).

Dans le cas des petites oscillations : $\cos \theta \approx 1$ et $\sin \theta \approx \theta$. L'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = \frac{D}{\ell} \omega^2 \cos(\omega t).$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre deux, à coefficients constants et avec second membre.

$$(i) \text{ Résolution de l'équation homogène : } \ddot{\theta}_H + \frac{g}{\ell} \theta_H = 0.$$

En posant $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$, sa solution sinusoïdale est : $\theta_H(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

(ii) Une solution particulière est obtenue en utilisant la méthode complexe :

$$\ddot{\theta}_F + \omega_0^2 \theta_F = \frac{D}{\ell} \omega^2 e^{j\omega t} \quad (\omega_0^2 - \omega^2) \theta_F = \frac{D}{\ell} \omega^2 e^{j\omega t}$$

$$\theta_F = \frac{D}{\ell(\omega_0^2 - \omega^2)} \omega^2 e^{j\omega t}.$$

La solution particulière recherchée correspond au régime permanent sinusoïdal et est la partie réelle de la grandeur analytique θ_F :

$$\theta_F(t) = \text{Re}[\theta_F(t)] = \frac{D}{\ell(\omega_0^2 - \omega^2)} \omega^2 \cos(\omega t).$$

La solution générale de l'équation différentielle est obtenue par superposition de ces deux solutions :

$$\theta(t) = \theta_H(t) + \theta_F(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{D}{\ell(\omega_0^2 - \omega^2)} \omega^2 \cos(\omega t).$$

Les constantes A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales :

$$\dot{\theta}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - \frac{D\omega^2}{\ell(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t)$$

$$\theta(0) = A \cos \varphi + \frac{D}{\ell(\omega_0^2 - \omega^2)} \omega^2 = 0$$

$$\dot{\theta}(0) = -\omega_0 A \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$A = -\frac{D}{\ell(\omega_0^2 - \omega^2)} \omega^2.$$

La solution de l'équation différentielle est donc :

$$\theta(t) = \frac{D\omega^2}{\ell(\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)]$$

Ce résultat peut être mis sous la forme :

$$\theta(t) = \frac{2D\omega^2}{\ell(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin\left[\frac{(\omega + \omega_0)t}{2}\right] \sin\left[\frac{(\omega - \omega_0)t}{2}\right]$$

La fonction $f(\omega)$ est ainsi :

$$f(\omega) = \frac{2D\omega^2}{\ell(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

5 En écrivant l'élongation sous la forme :

$$\theta(t) = \frac{2D\omega^2}{\ell(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)} \sin\left[\frac{(\omega + \omega_0)t}{2}\right] \sin\left[\frac{(\omega - \omega_0)t}{2}\right].$$

Et en considérant que $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, $\omega - \omega_0 \approx \Delta\omega$ et $\omega^2 \approx \omega_0^2$, la relation devient :

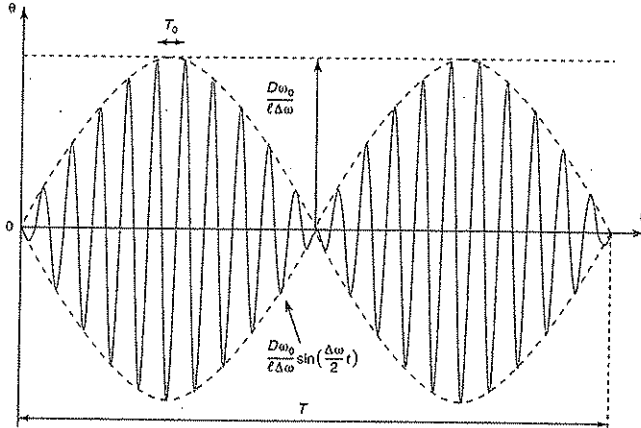
$$\theta(t) \approx \underbrace{\frac{D\omega_0}{\ell\Delta\omega} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)}_{\substack{\text{variation sinusoïdale} \\ \text{lente de l'amplitude} \\ \text{de l'élongation}}} \underbrace{\sin(\omega_0 t)}_{\substack{\text{variation} \\ \text{sinusoïdale} \\ \text{rapide}}}$$

La fonction $\theta(t)$ se présente comme le produit de deux fonctions variant à des vitesses très différentes :

(i) $\sin(\omega_0 t)$: la période de cette fonction est la période propre du pendule $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

(ii) $\frac{D\omega_0}{\ell\Delta\omega} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$: l'amplitude de cette fonction est $\frac{D\omega_0}{\ell\Delta\omega}$ et sa période $T = \frac{4\pi}{\Delta\omega}$.

Or $T \gg T_0$, la seconde fonction varie donc beaucoup plus lentement que $\sin(\omega_0 t)$, et est la courbe « enveloppe » de l'élongation $\theta(t)$.



Les oscillations restent de faibles amplitudes si $\frac{D\omega_0}{\ell\Delta\omega} \ll 1$, ce qui implique :

$$\frac{D}{\ell} \ll \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$$

L'amplitude D du déplacement impose à l'extrémité O_1 doit être très faible devant la longueur l du pendule. Si cette condition n'est pas réalisée, nous sortons du domaine de linéarité que nous nous sommes imposé pour traiter le problème.

en conclusion

Nous n'avons pas pris en compte les phénomènes d'amortissement et la solution de l'équation homogène s'additionne en permanence avec la solution particulière. La considération des amortissements, forcément présents au cours du mouvement, fait disparaître la solution de l'équation sans second membre et il ne reste, en régime permanent, que la solution particulière sinusoïdale que nous pouvons résoudre par la méthode complexe si la linéarité de l'équation différentielle reste assurée par de faibles oscillations.



> Corrigé p. 228

Oscillations libres d'un pendule simple amorti (d'après ENSTIM)

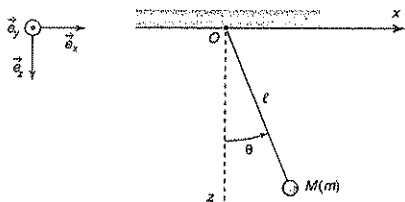
Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur uniforme :

$$\vec{g} = g \vec{e}_z \text{ avec } g = \|\vec{g}\| = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

L'enregistrement expérimental de l'élongation angulaire $\theta(t)$ d'un pendule simple montre que l'amplitude de θ diminue lentement. Ce résultat est interprété par la présence de frottements modélisés par une force de frottement de type fluide, proportionnelle à la vitesse de M et de coefficient de frottement h positif :

$$\vec{F}_f = -h \vec{v}.$$

Le pendule simple est constitué d'un objet ponctuel M de masse m , suspendu en O à un fil sans raideur et sans masse, de longueur ℓ .



1. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ par application du théorème du moment cinétique en O . En se limitant aux petites oscillations, montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

Donner l'expression de τ en fonction des données du problème. Quelle est son interprétation physique ?

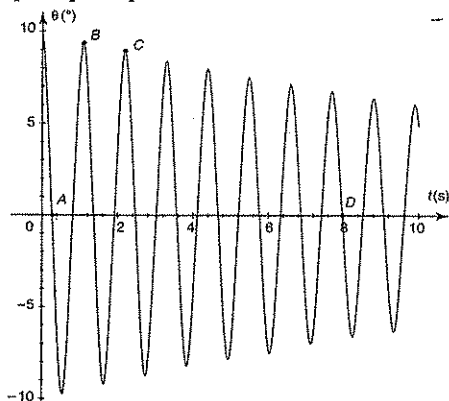
2. À quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ? Dans le cas de ce régime, calculer la pseudo-période ω et la pseudo-pulsation T des oscillations.

L'amortissement du régime pseudo-périodique est caractérisé par le décrement logarithmique :

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right).$$

Exprimer δ en fonction de T et τ .

3. La figure ci-dessous présente l'évolution de θ au cours du temps. Sont précisés, sur le tableau qui suit, quatre points particuliers :



points	A	B	C	D
t (s)	0,248	1,10	2,20	8,00
θ (°)	0,00	8,95	8,02	0,00

La masse m est égale à 470 g. Calculer numériquement à partir de ces valeurs et en précisant les unités :

- le décrement logarithmique δ ;
- la pseudo-période T ;
- le temps de relaxation τ ;
- la constante d'amortissement h ;
- le facteur de qualité Q ;
- la pulsation propre ω_0 ;
- la longueur ℓ du pendule.

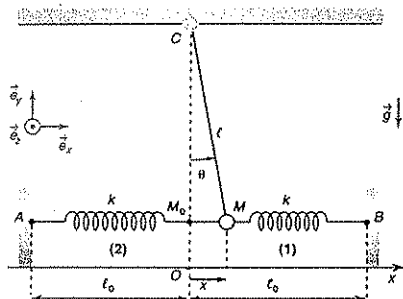


> Corrigé p. 229

Oscillations d'un pendule lié à deux ressorts

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur g uniforme.

Un pendule simple est constitué d'un fil rigide de masse négligeable et de longueur ℓ , à l'extrémité inférieure duquel est fixé un point matériel M de masse m . Ce point est lui-même attaché à deux ressorts (1) et (2) horizontaux identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 reliés à deux points fixes A et B distants de $2\ell_0$. Lorsque le pendule est vertical, les deux ressorts sont au repos.



Un opérateur extérieur déplace légèrement le point M le long de l'axe $(O ; \vec{e}_x)$ puis le laisse évoluer librement. Le pendule oscille sans frottement avec une faible amplitude de sorte que le déplacement du point M le long de l'axe est quasi-horizontale. Sa position est repérée par l'angle d'inclinaison $\theta(t)$ du pendule par rapport à la verticale.

On posera : $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement pendulaire vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant le théorème du moment cinétique. En déduire la pulsation ω_0 des petites oscillations.

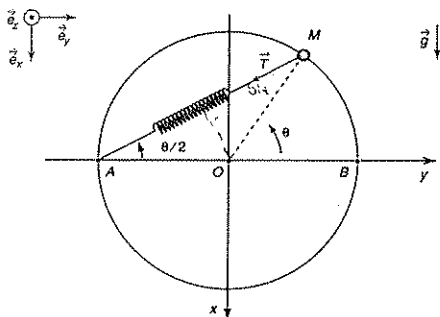
2. Retrouver l'équation différentielle du mouvement par une méthode énergétique.



> Corrigé p. 230

Stabilité d'un équilibre et linéarisation

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur uniforme.



Un guide circulaire de centre O et de rayon r est placé verticalement dans le plan Oxy . Un anneau ponctuel M de masse m est enfilé sur ce guide et est susceptible d'y glisser sans frottement.

Une force $\vec{T} = k\vec{MA}$ tend à attirer l'anneau M vers le point A . Elle se comporte comme une force de rappel élastique due à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 nulle, dont l'autre extrémité serait fixée en A .

On posera : $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{r}}$.

1. Représenter les trois forces appliquées au point M .

2. Exprimer les moments en O de ces forces.

3. En appliquant le théorème du moment cinétique en O , établir l'équation différentielle du mouvement de M vérifiée par l'élongation angulaire θ .

4. Par linéarisation, discuter l'existence de positions d'équilibre et préciser leur stabilité. Déterminer la pulsation ω_0 des petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre stable.

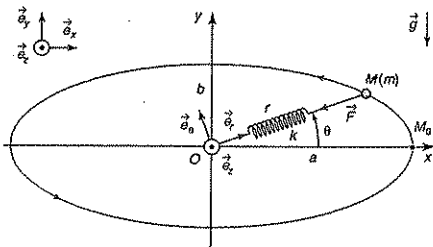


> Corrigé p. 232

Le modèle atomique de Thomson

En 1904 le physicien anglais Joseph John Thomson proposa de présenter l'atome d'hydrogène par un nuage sphérique de centre O , de rayon R et de charge $+e$ uniformément répartie. À l'intérieur de cette sphère, fixe dans le référentiel du laboratoire, se déplace librement un électron M de masse m et de charge $-e$.

Le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est assimilé à un référentiel galiléen.



En l'absence de toute action extérieure, l'électron M est soumis à une unique force d'origine électrostatique qui tend à attirer vers le point O :

$$\vec{F} = -k\vec{OM} \quad \text{avec : } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} e^2.$$

Cette force se comporte comme une force de rappel élastique due à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle, dont l'autre extrémité serait fixée en O .

La position de M est repérée dans les bases (\vec{e}_x, \vec{e}_y) et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ par les vecteurs positions respectifs :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y, \quad \text{et} \quad \vec{OM} = r\vec{e}_r \quad (r \leq R).$$

À l'instant $t = 0$, une perturbation écarte légèrement l'électron de sa position d'équilibre avec les conditions initiales :

$$\vec{OM}(t=0) = \vec{OM}_0 = r_0\vec{e}_x$$

$$\text{et} \quad \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = v_0\vec{e}_y,$$

1. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique en O de l'électron et déterminer sa valeur en fonction de r_0 , v_0 et m . En réduire que son mouvement reste confiné dans le plan (Oxy) .

2. Exprimer la pulsation ω_0 du mouvement de M en fonction de ϵ_0 , e , m et R . Calculer la valeur de R pour laquelle la pulsation ω_0 correspond à la fréquence ν_0 d'une des raies du spectre de Lyman de l'atome d'hydrogène ($\lambda_0 = 121,8 \text{ nm}$).

3. Déterminer les expressions de $x(t)$ et $y(t)$. Montrer que la trajectoire du point M est une ellipse (ellipse de Hooke) dont vous préciserez les longueurs a et b des demi axes.

4. À quelle condition cette trajectoire est-elle circulaire ? Que se passe-t-il si $v_0 = 0$?

5. L'électron accéléré perd de l'énergie par rayonnement. Pour tenir compte de ce phénomène, une force supplémentaire de freinage est introduite, elle a la forme d'une force de frottement de type visqueux :

$$\vec{F}_f = -h\vec{v}.$$

Le coefficient de freinage h est positif.

Quelle est l'évolution du moment cinétique en O de l'électron au cours de temps ? Dire qualitativement ce que sera le mouvement de l'électron pour de faibles amortissements. Commenter quant à la stabilité de l'atome.

Données :

$$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}; \quad e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C};$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ (S.I.)}$$

vitesse de la lumière dans le vide :

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

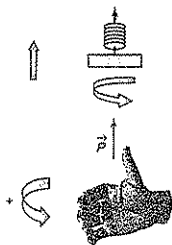
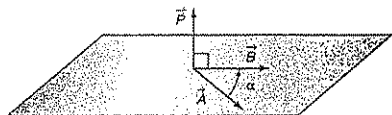
l'équation de l'ellipse en coordonnées cartésiennes

$$\text{avec origine en } O \text{ est : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tester ses connaissances

1 Réponse a. Le produit vectoriel $\vec{P} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ est caractérisé par :

- la direction perpendiculaire au plan défini par \vec{A} et \vec{B} ;
- le sens tel que le trièdre $\vec{A}, \vec{B}, \vec{P}$ soit direct (la règle du tire bouchon et la règle de la main droite sont rappelés sur le schéma ci-dessous ;
- la norme $\|\vec{P}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \sin \alpha$.



2 Comme l'indique le schéma de la question 1, la bonne réponse est la réponse b.

3 Réponses a. et c.

4 Réponse a.

Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition vectorielle.

b. Faux : Le produit mixte des trois vecteurs \vec{A}, \vec{B} et \vec{C} est le scalaire p tel que :

$$p = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}.$$

Il est invariant par permutation circulaire des trois vecteurs :

$$p = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}) = (\vec{C}, \vec{A}, \vec{B})$$

$$p = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B}.$$

5 Réponse b. Il s'agit du double produit vectoriel :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}.$$

6 a. Faux : règle de la main droite $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = -\vec{e}_y$,

b. Vrai : $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$.

c. Faux : $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z = + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{e}_y = \cos\theta \vec{e}_y$.
règle de la main droite

d. Vrai : $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = -\sin\theta \vec{e}_x$.
règle de la main droite

Remarque : choisir de préférence sur les schémas représentatifs, des angles orientés dans le sens positif choisi et compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, les sinus et les cosinus seront alors positifs.

7 Réponse a.

Pour calculer un produit vectoriel :

• *Forme analytique dans la base* ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) :

$$P = A \wedge B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}.$$

• *Méthode de détermination des composantes :*

(i) Pour calculer la composante P_1 suivant \vec{e}_1 , il faut ignorer la première ligne et calculer le discriminant :

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \wedge$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} : P_1 = a_2 \times b_3 - a_3 \times b_2.$$

(ii) Pour calculer la composante P_2 suivant \vec{e}_2 , il faut ignorer la seconde ligne et calculer le discriminant en lui affectant le signe - :

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ -\vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \wedge$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad P_2 = a_3 \times b_1 - a_1 \times b_3.$$

changement de signe

Attention au changement de signe de la composante suivant \vec{e}_2 du produit vectoriel.

(iii) Pour calculer la composante P_3 suivant \vec{z}_3 , il faut ignorer la troisième ligne et calculer le discriminant :

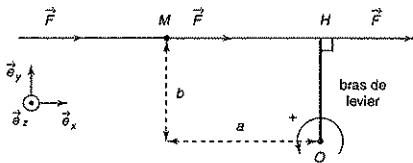
$$\begin{vmatrix} \vec{z}_1 & \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \\ \vec{z}_2 & \\ \vec{z}_3 & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} : P_3 = a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1.$$

8 Réponse b.

$$\text{Point math. } \frac{d}{dt}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{dt}.$$

9 Réponse b. L'orientation autour de l'axe passant par O est définie corrélativement à l'orientation de \vec{z}_z .



Le bras de levier est b et la force fait tourner M dans le sens contraire du sens positif (le moment est donc négatif).

10 Réponse b. Si la force \vec{F} se déplace sur son support son moment par rapport à Δ n'est pas modifié car le bras de levier est inchangé (voir schéma de la question 9).

11 Réponse a. (b. possible). La force \vec{F} appliquée au point matériel M est centrale, son support passe par O à tout instant :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}.$$

Appliquons en O le théorème du moment cinétique :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M, \mathcal{R}_e)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_e} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$$

force centrale

$$\begin{aligned} \vec{L}_O(M, \mathcal{R}_e) &= \vec{L}_O \text{ (vecteur constant)} \\ &= m \underbrace{\vec{OM}_0 \wedge \vec{v}_0}_{\text{conditions initiales}}. \end{aligned}$$

Si les conditions initiales qui fixent le moment cinétique sont telles que :

$$\underbrace{\vec{OM}_0 \wedge \vec{v}_0}_{\text{conditions initiales}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \vec{0}.$$

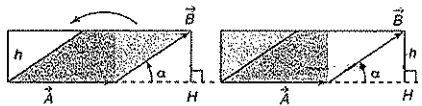
(vitesse initiale nulle ou \vec{OM}_0 colinéaire à \vec{v}_0).

Savoir appliquer le cours

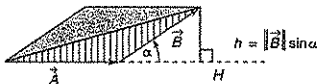
1 $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \sin \alpha.$

L'aire du parallélogramme construit sur \vec{A} et \vec{B} est :

$$\|\vec{A}\| \cdot h = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \sin \alpha = \|\vec{A} \wedge \vec{B}\|.$$



L'aire hachurée en représente la moitié :



$$A = \frac{1}{2} \|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$$

2 En coordonnées polaires :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r,$$

$$\vec{v}(M, \mathcal{R}_e) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

L'expression du moment cinétique en O du mobile M est :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O(M, \mathcal{R}_e) &= \vec{OM} \wedge m \vec{v}(M, \mathcal{R}_e) = m r \vec{e}_r \wedge [\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta] \\ &= m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

3 Le moment cinétique d'une particule isolée dans le référentiel \mathcal{R}_g galiléen est une constante du mouvement :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{\vec{F}}_{\substack{\vec{0} \\ M \text{ isolé}}} = \vec{0}.$$

En conséquence du principe de l'inertie, le mouvement du point matériel M est rectiligne uniforme. À tout instant \overrightarrow{OM} et $\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$ sont colinéaires si on place l'origine O sur la trajectoire de M .

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{0}.$$

Le moment cinétique en O du point M est nul.

4 Si un point matériel M_1 exerce sur un autre point M_2 une force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$, alors le point M_2 exerce sur M_1 la force :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}.$$

Mais il faut ajouter que ces forces ont même droit d'action (ou même support) :

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}.$$

S'entraîner

1. Sachant que la vitesse du point matériel M dans le référentiel terrestre est :

$$\vec{v} = \vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \ell \dot{\theta} \vec{z}_0.$$

Le moment en O de la force de frottement fluide s'exprime dans la base $(\vec{z}_1, \vec{z}_0, \vec{z}_2)$ par :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{F}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -h\ell\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_f) = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -h\ell\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -h\ell^2\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_f) = -h\ell^2\dot{\theta}\vec{z}_2$$

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = -mg\ell \sin\theta\vec{z}_2$$

Application du théorème du moment cinétique au point O fixe dans le référentiel terrestre :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} &= \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{T}) + \vec{M}_O(\vec{F}_f) \\ &= \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{F}_f). \end{aligned}$$

Le moment cinétique du point M calculé en O est :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) \\ &= m \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \ell\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = m\ell^2\dot{\theta}\vec{z}_2. \end{aligned}$$

D'où l'expression du théorème :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = m\ell^2\ddot{\theta}\vec{z}_2 = -mg\ell \sin\theta\vec{z}_2 - h\ell^2\dot{\theta}\vec{z}_2.$$

La projection suivant \vec{z}_2 de cette équation donne l'équation du mouvement du point M :

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

En posant $\frac{2}{\tau} = \frac{h}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$ et en supposant les oscillations de faibles amplitudes (dans ce cas $\sin\theta \approx \theta$), on retrouve bien l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique amorti sous sa forme normalisée :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

La constante de temps $\tau = \frac{2m}{h}$ est la durée caractéristique de l'amortissement de l'amplitude des oscillations.

La pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ est la pulsation propre du système, pulsation des oscillations libres non amorties.

Remarque : la durée de relaxation de l'énergie est $\tau_e = \frac{\tau}{2}$. Le facteur de qualité du système oscillant est $Q = \frac{\omega_0 m}{h}$.

2. Les solutions recherchées sont de la forme $\theta(t) = Ae^{rt}$.

L'équation caractéristique est :

$$r^2 + \frac{2}{\tau}r + \omega_0^2 = 0.$$

Pour que le régime soit pseudo-périodique, il faut que le discriminant réduit soit négatif :

$$\Delta' = \frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 < 0.$$

Ce qui impose :

$$\omega_0\tau > 1$$

La pseudo-pulsation des oscillations est :

$$\omega^2 = -\Delta' = \omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}\right)$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}}$$

La pseudo-pulsation est inférieure à la pulsation propre du régime libre sans amortissement.

La pseudo-période est obtenue par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}}}$$

La solution générale de l'équation est de la forme :

$$\theta(t) = \underbrace{C e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\substack{\text{décroissance} \\ \text{exponentielle} \\ \text{de l'amplitude}}} \cos(\omega t + \varphi)$$

On obtient bien une décroissance exponentielle de l'amplitude des oscillations dont la durée caractéristique est τ .

Après une pseudo-période :

$$\begin{aligned} \theta(t+T) &= C e^{-\frac{(t+T)}{\tau}} \cos[\omega(t+T) + \varphi] \\ &= \frac{C e^{-\frac{t}{\tau}} \cos[\omega t + \varphi + 2\pi]}{e^{\frac{T}{\tau}}} = \theta(t) e^{-\frac{T}{\tau}} \\ \Rightarrow \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} &= e^{\frac{T}{\tau}} \end{aligned}$$

D'où le décrement logarithmique :

$$\delta = \ln \left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} \right) = \frac{T}{\tau}$$

3. Pour obtenir le décrement logarithmique, faisons le rapport de deux amplitudes de l'élongation successives :

$$\delta = \ln \left(\frac{\theta_B}{\theta_C} \right) = \ln \left(\frac{8,95}{8,02} \right) = 0,11$$

Entre les points A et D, on compte 7 pseudo-périodes :

$$T = \frac{t_D - t_A}{7} = \frac{8 - 0,248}{7} = 1,1 \text{ s}$$

Le temps de relaxation est défini par :

$$\tau = \frac{T}{\delta} = \frac{8 - 0,248}{7 \ln \left(\frac{8,95}{8,02} \right)} = 10,1 \text{ s}$$

Le coefficient d'amortissement est :

$$h = \frac{2m}{\tau} = \frac{2 \cdot 0,470}{10,1} = 9,3 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$$

Considérons l'équation :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

et observons que $\frac{1}{\tau} \ll \omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$\frac{1}{\tau} = 0,1 \text{ s}^{-1} \text{ et } \omega = 5,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

L'oscillateur est faiblement amorti et $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx \omega_0$.

Ainsi $\omega_0 = 5,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui correspond à un facteur

de qualité $Q = \frac{\omega_0 m}{h} = \frac{\omega_0 \tau}{2} = 28,8$.

Et une longueur du fil de $\ell = \frac{g}{\omega_0^2} = 30 \text{ cm}$.

2 Le système est le point matériel M, son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre galiléen.

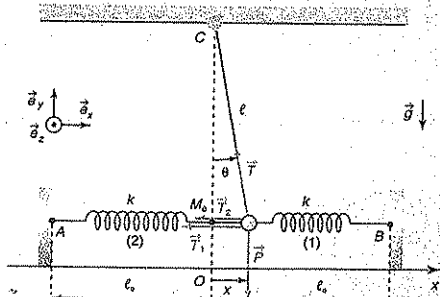
• Bilan des forces appliquées à M

- le poids \vec{P} , force conservative ;
- la tension du ressort (1) \vec{T}_1 , force conservative ;
- la tension du ressort (2) \vec{T}_2 , force conservative ;
- la tension exercée par la tige \vec{T} , $\delta \vec{T}(\vec{T}/\mathcal{R}_e) = 0$.

La tension de la tige ne travaille pas car elle est toujours normale à la trajectoire de M.

La position du point M est repérée par le seul paramètre θ . Le système est conservatif et à un degré de liberté, il peut être traité en appliquant la conservation de l'énergie mécanique, intégrale première du mouvement. Nous le ferons à la question suivante.

Les paramètres x et θ sont liés puisque : $x = \ell \sin \theta$.



1. Nous allons appliquer le théorème du moment cinétique en C pour évacuer \vec{T} de notre raisonnement : nous ne savons pas quelle est l'expression de la réaction de la tige mais le moment en C de cette force est nulle car son support passe par C .

Écrivons le théorème :

$$\left(\frac{d\vec{L}_C(M, \mathcal{R}_C)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_C} = \vec{M}_C(\vec{T}_1) + \vec{M}_C(\vec{T}_2) + \vec{M}_C(\vec{P}) + \underbrace{\vec{M}_C(\vec{T})}_0$$

Le moment en C du poids \vec{P} se calcule rapidement en utilisant son « bras de levier » :

$$\vec{M}_C(\vec{P}) = \underbrace{-mg}_{\substack{\text{le poids} \\ \text{déplace } M \\ \text{dans le sens} \\ \text{contraire de} \\ \text{l'orientation de}}} \underbrace{b}_{\substack{\text{bras} \\ \text{de levier} \\ \ell \sin \theta}} \vec{e}_z = -mgl \sin \theta \vec{e}_z$$

Rappelons que le vecteur unitaire \vec{e}_z oriente l'axe de rotation Δ passant par C corrélativement au sens d'orientation positif adopte pour θ (règle de la main droite). Pour considérer l'action simultanée des ressorts, nous allons calculer directement le moment de la somme des deux tensions :

$$\begin{aligned} \vec{M}_C(\vec{T}_1) + \vec{M}_C(\vec{T}_2) &= \vec{M}_C(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) \\ \vec{T}_1 &= -k(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM}_0) = -k\overrightarrow{M_0M} \\ \vec{T}_2 &= -k(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BM}_0) = -k\overrightarrow{M_0M} \\ \Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{T}_2 &= -2k\overrightarrow{M_0M} \\ \vec{M}_C(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) &= -2k\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{M_0M} \\ &= -2k(\overrightarrow{CM}_0 + \overrightarrow{M_0M}) \wedge \overrightarrow{M_0M} \\ &= -2k \underbrace{\overrightarrow{CM}_0}_{-\ell \cos \theta \vec{e}_z} \wedge \underbrace{\overrightarrow{M_0M}}_{\ell \sin \theta \vec{e}_z} \\ \vec{M}_C(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) &= 2k\ell^2 \cos \theta \sin \theta \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z \\ &= -2k\ell^2 \cos \theta \sin \theta \vec{e}_z \end{aligned}$$

Calculons maintenant le moment cinétique en C du point M :

$$\begin{aligned} \vec{L}_C(M, \mathcal{R}_C) &= m\overrightarrow{CM} \wedge \vec{v}(M, \mathcal{R}_C) \\ &= m\ell \vec{e}_z \wedge \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta = m\ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique en projection suivant \vec{e}_z donne :

$$m\ell^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta - 2k\ell^2 \cos \theta \sin \theta$$

D'où l'équation différentielle du mouvement :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \left[\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m} \cos \theta \right] \sin \theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + [\omega_2^2 + \omega_1^2 \cos \theta] \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation est non linéaire, mais elle est linéarisable dans le cas des petites oscillations : $\cos \theta \approx 1$; $\sin \theta \approx \theta$. On obtient ainsi l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + [\omega_2^2 + \omega_1^2] \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

2. **Étude énergétique** : cette méthode a aussi l'avantage d'exclure la réaction du fil de notre raisonnement : elle ne travaille pas et n'intervient donc pas dans le bilan énergétique.

L'énergie potentielle du point M se compose de l'énergie potentielle de pesanteur et de deux termes d'énergie potentielle élastique définis à une constante additive près :

• $\mathcal{E}_P^{\text{pes}}(\theta) = -mgl \cos \theta$ en adoptant C comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{P1}^{\text{elas}}(\theta) &= \frac{1}{2}k(AM - \ell_0)^2 + C_1 \\ &= \frac{1}{2}kM_0M^2 + C_1 = \frac{1}{2}k\ell^2 \sin^2 \theta + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{P2}^{\text{elas}}(\theta) &= \frac{1}{2}k(BM - \ell_0)^2 + C_2 \\ &= \frac{1}{2}kM_0M^2 + C_2 = \frac{1}{2}k\ell^2 \sin^2 \theta + C_2 \end{aligned}$$

D'où l'énergie potentielle totale :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_P^{\text{tot}}(\theta) &= \mathcal{E}_P^{\text{pes}} + \mathcal{E}_{P1}^{\text{elas}} + \mathcal{E}_{P2}^{\text{elas}} \\ &= -mgl \cos \theta + k\ell^2 \sin^2 \theta + \text{cte.} \end{aligned}$$

L'énergie cinétique de M est :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell \dot{\theta})^2$$

D'où l'expression de l'énergie mécanique de M :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_P^{\text{pes}} + \mathcal{E}_{P1}^{\text{elas}} + \mathcal{E}_{P2}^{\text{elas}} \\ &= \frac{1}{2}m(\ell \dot{\theta})^2 - mgl \cos \theta + k\ell^2 \sin^2 \theta + \text{cte.} \end{aligned}$$

L'énergie mécanique est constante, c'est une intégrale première du mouvement qu'il suffit de dériver une fois par rapport au temps pour obtenir l'équation du mouvement :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = m\ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgl \sin \theta \dot{\theta} + 2k\ell^2 \sin \theta \dot{\theta} \cos \theta = 0$$

$$\frac{m\ell^2 \dot{\theta}}{\dot{\theta}} \left[\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m} \cos \theta \right) \sin \theta \right] = 0$$

On retrouve ainsi l'équation du mouvement de M :

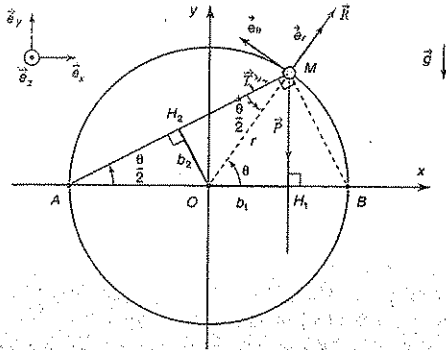
$$\ddot{\theta} + [\omega_2^2 + \omega_1^2 \cos \theta] \sin \theta = 0$$

3 1. Le système est le point M , son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• Bilan des forces appliquées au point M

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids de M : force conservative

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{Cercle} \rightarrow M} = \vec{R}$, la réaction du guide
 $\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du ressort



2. Le théorème du moment cinétique est particulièrement bien adapté dans cette situation où le système est en rotation autour du point fixe O.

• Un choix du point O permet d'exclure de notre raisonnement la réaction \vec{R} du support dont nous ne connaissons pas l'expression : son moment est nul en O car cette force passe par O.

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{0}$$

• Le poids \vec{P} fait tourner M dans le sens contraire de l'orientation positive choisie : le moment de \vec{P} en O est :

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = -Pb_1\vec{e}_z \text{ avec } \begin{cases} P = \|\vec{P}\| = mg \\ b_1 = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = -mgr \cos \theta \vec{e}_z$$

• La tension \vec{T} fait tourner M dans le sens de l'orientation positive choisie : le moment de \vec{T} en O est :

$$\vec{M}_O(\vec{T}) = Tb_2\vec{e}_z$$

$$\text{avec } \begin{cases} T = \|\vec{T}\| = k\|\vec{AM}\| = 2kr \cos \frac{\theta}{2} \\ b_2 = r \sin \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

$$\vec{M}_O(\vec{T}) = 2kr^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \vec{e}_z$$

$$\text{Or } \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\vec{M}_O(\vec{T}) = kr^2 \sin \theta \vec{e}_z$$

3. Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_e)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_e} = \vec{M}_O(\vec{R}) + \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{T}) \\ = [-mgr \cos \theta + kr^2 \sin \theta] \vec{e}_z$$

Déterminons le moment cinétique en O du point M :

• Le vecteur position de M est $\vec{OM} = r\vec{e}_r$,

• La vitesse du point M est réduite à sa composante orthoradiale : $\vec{v}(M/\mathcal{R}_e) = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$$\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_e) = m\vec{OM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_e) \\ = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

La dérivée de ce vecteur est :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_e)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_e} = mr^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = [-mgr \cos \theta + kr^2 \sin \theta] \vec{e}_z$$

La projection de cette équation suivant \vec{e}_z donne l'équation du mouvement :

$$mr^2\ddot{\theta} = -mgr \cos \theta + kr^2 \sin \theta \times \frac{1}{mr^2}$$

$$\ddot{\theta} = \omega_1^2 \sin \theta - \omega_2^2 \cos \theta$$

4. Les positions d'équilibre correspondent à $\ddot{\theta} = 0$, autrement dit à :

$$\omega_1^2 \sin \theta_{\text{eq}} - \omega_2^2 \cos \theta_{\text{eq}} = 0 \quad (\text{condition d'équilibre})$$

$$\tan \theta_{\text{eq}} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = \frac{mg}{kr}$$

L'angle polaire θ varie de 0 à 2π et $\tan \theta = \tan(\theta + \pi)$, il y a donc deux positions d'équilibre :

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \text{ et } \theta_2 = \theta_1 + \pi = \pi + \arctan \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2$$

La tangente étant positive : $\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta_2 \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

Pour étudier leur stabilité, écartons légèrement de point M de sa position d'équilibre pour le mettre en mouvement :

$$\theta = \theta_{\text{eq}} + \varepsilon \text{ avec } \varepsilon \ll \theta_{\text{eq}}$$

Remarquons que : $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$.

Au voisinage de l'équilibre, linéarisons l'équation différentielle du mouvement de M :

$$\ddot{\varepsilon} = \omega_1^2 \sin(\theta_{\text{eq}} + \varepsilon) - \omega_2^2 \cos(\theta_{\text{eq}} + \varepsilon)$$

$$\ddot{\varepsilon} = \omega_1^2 \left[\sin \theta_{\text{eq}} \underbrace{\cos \varepsilon}_{\approx 1} + \cos \theta_{\text{eq}} \underbrace{\sin \varepsilon}_{\approx \varepsilon} \right]$$

$$- \omega_2^2 \left[\cos \theta_{\text{eq}} \underbrace{\cos \varepsilon}_{\approx 1} - \sin \theta_{\text{eq}} \underbrace{\sin \varepsilon}_{\approx \varepsilon} \right]$$

$$\ddot{\varepsilon} - \varepsilon \left[\omega_1^2 \cos \theta_{\text{eq}} + \omega_2^2 \sin \theta_{\text{eq}} \right] = \underbrace{\omega_1^2 \sin \theta_{\text{eq}} - \omega_2^2 \cos \theta_{\text{eq}}}_0$$

condition d'équilibre

D'où l'équation différentielle :

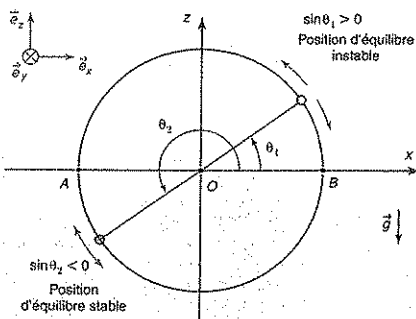
$$\ddot{\varepsilon} - \varepsilon[\omega_1^2 \cos^2 \theta_{\text{eq}} + \omega_2^2 \sin^2 \theta_{\text{eq}}] = 0.$$

Utilisons à nouveau la condition d'équilibre pour ne faire apparaître dans l'équation du mouvement qu'une seule fonction trigonométrique :

Par exemple $\cos^2 \theta_{\text{eq}} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \sin^2 \theta_{\text{eq}}$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} - \left[\frac{\omega_1^4 + \omega_2^4}{\omega_2^2} \right] \sin^2 \theta_{\text{eq}} \varepsilon = 0.$$

Considérons les deux positions d'équilibre :



Posons $\omega_0^2 = \left[\frac{\omega_1^4 + \omega_2^4}{\omega_2^2} \right] |\sin^2 \theta_{\text{eq}}|$

• si $\theta_{\text{eq}} = \theta_1$ $\sin^2 \theta_1 > 0$ $\ddot{\varepsilon} - \omega_0^2 \varepsilon = 0$

la solution est divergente et le mobile, éloigné légèrement de la position d'équilibre stable, n'y revient pas.

• si $\theta_{\text{eq}} = \theta_2$ $\sin^2 \theta_2 < 0$ $\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$.

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, la solution est sinusoidale. Le mobile oscille sinusoidalement au voisinage de cette position d'équilibre stable.

Pour déterminer ω_0 , considérons que : $\sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

À l'équilibre : $\sin^2 \theta_{\text{eq}} = \frac{\omega_1^4}{\omega_1^4 + \omega_2^4} \Rightarrow |\sin \theta_{\text{eq}}| = \frac{\omega_2^2}{\sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4}}$

$$\omega_0^2 = \left[\frac{\omega_1^4 + \omega_2^4}{\omega_2^2} \right] \frac{\omega_2^2}{\sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4}} = \sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4}.$$

D'où la pulsation des oscillations :

$$\omega_0 = \sqrt[4]{\omega_1^4 + \omega_2^4}$$

4 Le système étudié dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_0 est l'électron. Son poids est négligeable devant l'interaction électrostatique :

$$\vec{F} = -k \overrightarrow{OM}.$$

Le moment en O de cette force est nul car le support de la force passe par O : $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$.

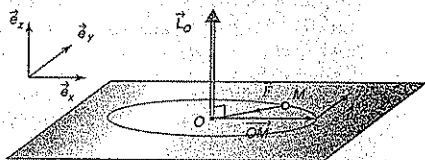
1. Considérons le moment cinétique en O de l'électron M et appliquons le théorème du moment cinétique :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_0)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}.$$

Le moment cinétique de M calculé en O se conserve au cours du mouvement, sa valeur est fixée par la position initiale \overrightarrow{OM}_0 et le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0 = \vec{v}(M_0/\mathcal{R}_0)$ du mobile :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O(M/\mathcal{R}_0) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R}_0) \\ &= \overrightarrow{OM}_0 \wedge m\vec{v}_0 = m r_0 v_0 \vec{e}_z = \vec{L}_0. \end{aligned}$$

Propriété du produit vectoriel : le vecteur position \overrightarrow{OM} est constamment perpendiculaire à \vec{L}_0 qui est un vecteur constant. La trajectoire du point M est donc plane et reste dans le plan (Oxy) orthogonal à \vec{L}_0 fixé par les conditions initiales $(\overrightarrow{OM}_0, \vec{v}_0)$.



2. Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à l'électron :

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}_0) = m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = -k \overrightarrow{OM}.$$

D'où l'équation sous forme vectorielle d'un oscillateur harmonique spatial :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} + \omega_0^2 \overrightarrow{OM} = \vec{0}$$

La pulsation propre est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

En remplaçant k :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

Avant d'effectuer l'application numérique, rappelons que : $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$ et $\omega_0 = 2\pi\nu_0$.

En conséquence :

$$R = \sqrt[3]{\frac{\lambda_0^2 e^2}{16\pi^3 \epsilon_0 mc^2}}$$

$$R = 10^{-10} \text{ m} = 100 \text{ pm.}$$

Le résultat est cohérent avec la longueur caractéristique de la dimension de l'atome.

3. La solution générale vectorielle de l'équation du mouvement est :

$$\vec{OM} = \vec{A} \cos(\omega_0 t) + \vec{B} \sin(\omega_0 t).$$

La vitesse de l'électron s'écrit :

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \omega_0 [-\vec{A} \sin(\omega_0 t) + \vec{B} \cos(\omega_0 t)].$$

Compte tenu des conditions initiales :

$$\begin{cases} \vec{A} = r_0 \vec{e}_x \\ \vec{B} = \frac{v_0}{\omega_0} \vec{e}_y \end{cases}$$

Le vecteur position est :

$$\vec{OM} = \underbrace{r_0 \cos(\omega_0 t)}_{x(t)} \vec{e}_x + \underbrace{\frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}_{y(t)} \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = r_0 \cos(\omega_0 t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

Éliminons le temps dans ce couple d'équations horaires correspondant à un mouvement de l'électron à deux dimensions :

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{\omega_0^2 y^2}{v_0^2} = 1$$

La trajectoire de l'électron est une ellipse de centre O décrite dans le sens imposé par \vec{v}_0 .

Les demi-axes de l'ellipse sont : $a = r_0$ et $b = \frac{v_0}{\omega_0}$

4. Pour que la trajectoire soit circulaire, il faut que $a = b$, autrement dit : $v_0 = r_0 \omega_0$

Lorsque la vitesse initiale de l'électron est nulle : $b = 0$. Le mouvement de l'électron est rectiligne, sa trajectoire est contenue par l'axe (Ox) . On retrouve l'oscillateur harmonique à une dimension.

On remarque l'importance des conditions initiales dues à la perturbation, elles vont fixer la nature de la trajectoire de l'électron dans l'atome.

5. Il faut prendre en compte une force de freinage dont nous allons calculer le moment en O :

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}_f) &= \vec{OM} \wedge \vec{F}_f = -h \vec{OM} \wedge \vec{v} = -\frac{h}{m} \vec{OM} \wedge m \vec{v} \\ &= -\frac{h}{m} \vec{L}_O \\ &= -\frac{h}{m} \vec{L}_O(M/\mathcal{R}_0). \end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique s'écrit maintenant :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_0)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}_f) = -\frac{h}{m} \vec{L}_O(M/\mathcal{R}_0).$$

Le moment cinétique vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} + \frac{h}{m} \vec{L}_O = 0.$$

La solution est : $\vec{L}_O(t) = \vec{L}_O(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Le moment cinétique en O de l'électron tend vers 0

avec une constante de temps : $\tau = \frac{m}{h}$

La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = -k \vec{OM} - h \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

L'équation du mouvement de l'électron sous sa forme canonique est :

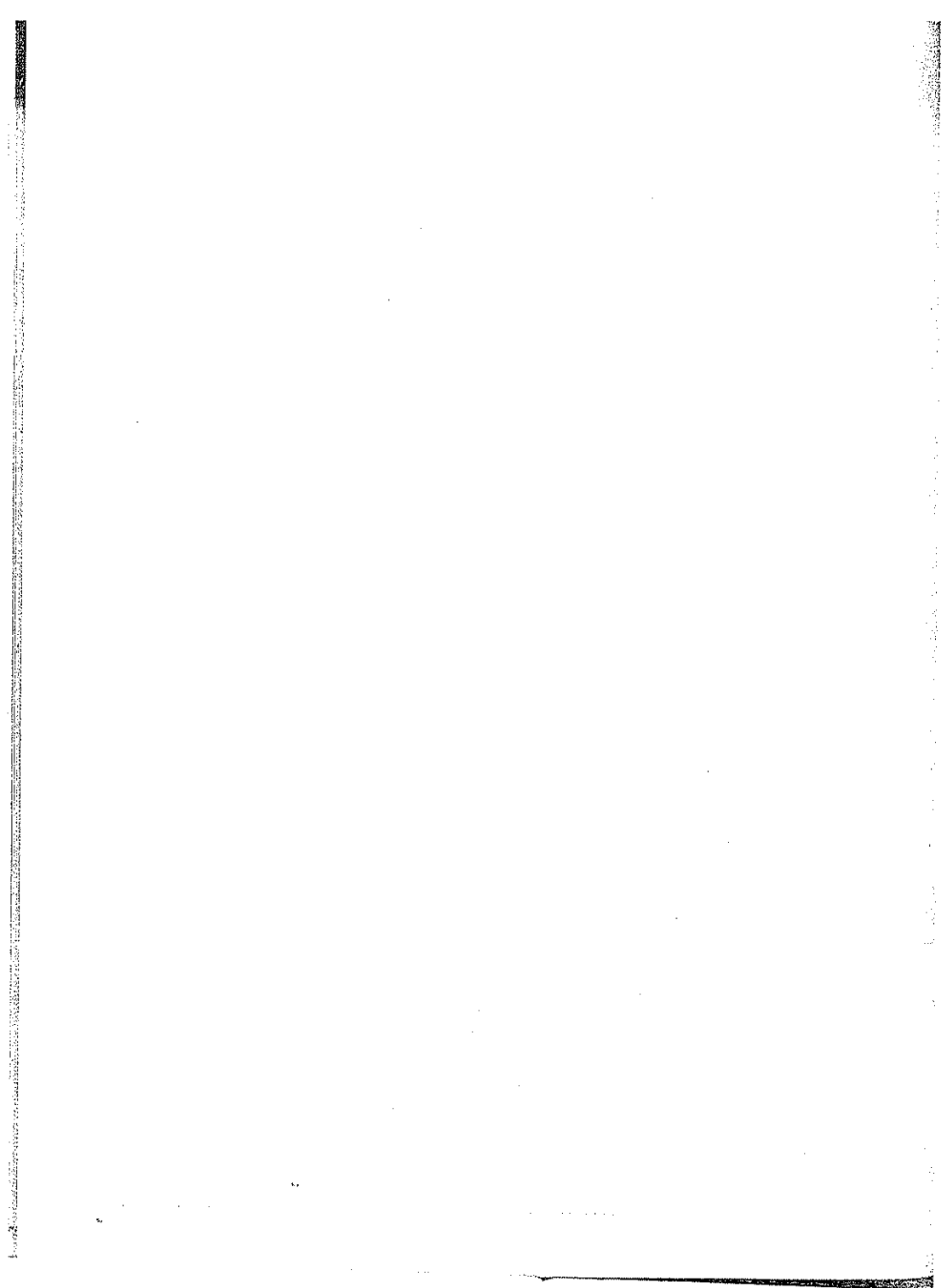
$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + \frac{\omega_0 d\vec{OM}}{Q dt} + \omega_0^2 \vec{OM} = \vec{0} \quad \text{avec : } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \quad \text{et}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti : le rayon vecteur r tend vers 0 .

Même si l'amortissement est faible, l'électron va se diriger inexorablement vers le centre O en tourbillonnant dans une trajectoire elliptique d'aire de plus en plus faible.

L'atome tel que l'a décrit ici Thomson ne peut pas être stable. Niels Bohr crée en 1913 un autre modèle d'atome pour rendre compte de la stabilité atomique : les orbites des électrons sont alors quantifiées. Ce fut le dernier modèle obéissant à la physique classique avant avènement de la physique quantique.



7 Force centrale conservative

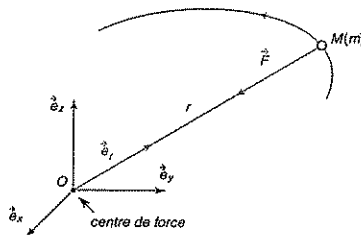
1 Forces centrales conservatives

L'étude s'effectue dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

1.1. Force centrale

Une force centrale est une force dont le support passe, à tout instant, par un point fixe O dans le référentiel d'étude galiléen.

O est appelé *centre de force* et, par commodité, il est l'origine du repère associé à \mathcal{R}_g .



Un point matériel M de masse m est soumis à une force centrale \vec{F} si la force qui s'exerce sur lui est de la forme :

$$\vec{F} = f(r)\vec{e}_r \text{ avec } \vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$$

Remarque

La force centrale est de moment nul et ne provoque pas la rotation du point M , mais ce mouvement de rotation peut se produire à cause des conditions initiales.

Cette définition implique que :

- (i) l'intensité de la force dépend uniquement de la distance r et non de la direction \vec{z} ;
- (ii) $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

1.2. Conservation du moment cinétique

1.2.1. Théorème du moment cinétique

Considérons le moment cinétique en O d'un point matériel M de masse m soumis à un champ de force central \vec{F} dont la source est en O et appliquons le théorème du moment cinétique :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_e)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_e} = \underbrace{\vec{M}_O(\vec{F})}_{\text{force centrale}} = \vec{0}.$$

Le moment cinétique du point matériel M calculé au centre de force se conserve au cours du mouvement, sa valeur est fixée par la position initiale \vec{OM}_0 et le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0 = \vec{v}(M_{0/\mathcal{R}_e})$ du mobile :

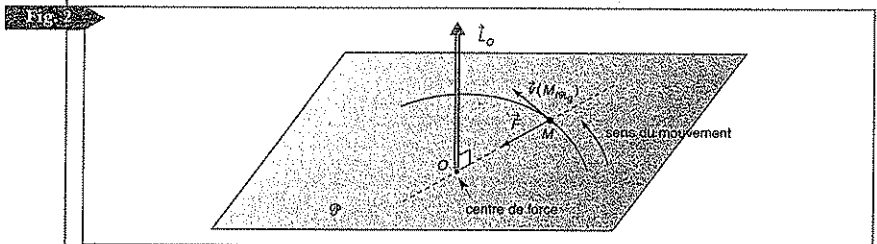
$$\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_e) = \underbrace{\vec{OM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R}_e)}_{\text{instant } t} = \underbrace{\vec{OM}_0 \wedge m\vec{v}(M_{0/\mathcal{R}_e})}_{\text{instant initial } t=0} = \vec{L}_0$$

• Cas particulier où le moment cinétique du point M est nul

$\vec{L}_0 = \vec{0}$: la particule est abandonnée sans vitesse initiale ou avec une vitesse dont le support passe par O . À tout instant \vec{OM} reste colinéaire à $\vec{v}(M/\mathcal{R}_e)$ et le mouvement de M est rectiligne selon la droite OM_0 .

1.2.2. Première conséquence : planéité de la trajectoire

Par définition du produit vectoriel, le vecteur position est constamment perpendiculaire à \vec{L}_0 qui est un vecteur constant. La trajectoire du point M est donc plane et ce plan \mathcal{P} , orthogonal à \vec{L}_0 , est fixé par les conditions initiales ($\vec{OM}_0, \vec{v}(M_{0/\mathcal{R}_e})$).



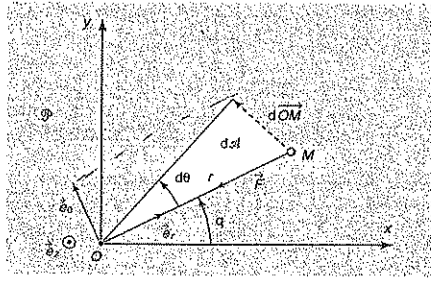
1.2.3. Deuxième conséquence : loi des aires

La description du mouvement du point M s'effectue, dans le plan \mathcal{P} de sa trajectoire, en coordonnées polaires :

REMARQUE

Remarque
Dans la base locale polaire :

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= r\vec{e}_r \\ \vec{v}(M, \mathcal{R}_0) &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{a}(M, \mathcal{R}_0) &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r \\ &\quad + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta \end{aligned}$$



L'expression du moment cinétique en O du mobile M est :

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M, \mathcal{R}_0) = mr\vec{e}_r \wedge [\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta] = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

Ce vecteur étant constant, la conservation du moment cinétique pour un mouvement à force centrale permet d'introduire une constante C appelée *constante des aires* :

$$C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Cette équation constitue l'*intégrale première du moment cinétique*.

Évaluons l'aire $d\mathcal{A}$ balayée par le rayon vecteur \vec{OM} lorsque θ varie de $d\theta$:

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge d\vec{OM}\| = \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge \vec{v} dt\| = \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge \vec{v}\| dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{\|\vec{L}_O\|}{m} dt = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} dt = \frac{C}{2} dt \end{aligned}$$

• **Loi des aires**

Dans un mouvement à force centrale, le rayon vecteur balaye des aires égales en des intervalles de temps égaux.

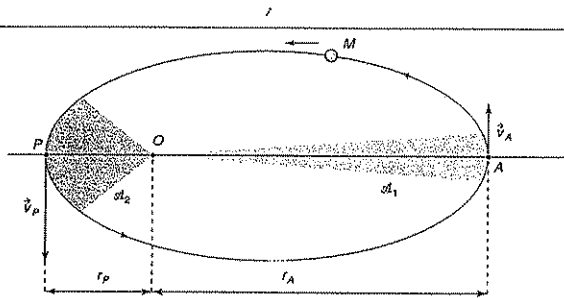
La *vitesse aréolaire* constante s'exprime par :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

• **Conséquence**

Considérons une trajectoire non circulaire du point M . L'aire balayée par le rayon vecteur étant proportionnelle au temps, sur une *durée identique* de parcours, les aires \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont égales :

FIG.



La vitesse angulaire du point M est nécessairement d'autant plus grande que le mobile est situé près du centre de force.

Revenons à la constante des aires écrite sous la forme $C = r r \dot{\theta}$.

Pour les points A (point le plus éloigné du centre de force O) et P (point le plus proche) la vitesse du mobile est réduite à sa composante orthoradiale :

$$\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow C = r r \dot{\theta} = \underbrace{r r \dot{\theta}}_{v_\theta} = \frac{r_A v_A}{\text{en } A} = \frac{r_P v_P}{\text{en } P}$$

$$r_A > r_P \Rightarrow v_A < v_P.$$

1.3. Conservation de l'énergie

1.3.1. Force centrale conservative

Une force centrale est conservative, $\mathcal{E}_P(r)$ est sa fonction énergie potentielle associée.

Le travail élémentaire de la force \vec{F} peut se mettre sous la forme :

$$\delta \mathcal{T}(\vec{F}/\mathcal{R}_g) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -d\mathcal{E}_P.$$

Le vecteur déplacement élémentaire étant :

$$d\vec{OM} = d(r\vec{e}_r) = dr\vec{e}_r + r d\vec{e}_r,$$

$$\delta \mathcal{T}(\vec{F}/\mathcal{R}_g) = f(r)\vec{e}_r \cdot (dr\vec{e}_r + r d\vec{e}_r) = f(r)dr(\vec{e}_r)^2 + r f(r)\vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r.$$

Le vecteur radial \vec{e}_r est unitaire, différentions $(\vec{e}_r)^2 = 1 \Rightarrow 2\vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r = 0$.

Ainsi :

$$\vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r = 0$$

$$\delta \mathcal{T}(\vec{F}/\mathcal{R}_g) = f(r)dr \underbrace{(\vec{e}_r)^2}_1 + r f(r) \underbrace{\vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r}_0 = \underbrace{f(r)dr}_{\text{ne dépend que de } r} = -d\mathcal{E}_P(r).$$

Remarque

\vec{e}_r est orthogonal à $d\vec{e}_r$.

Remarque

Les conditions initiales fixent le plan de la trajectoire, les valeurs du moment cinétique et de l'énergie mécanique.

Une force centrale dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_P(r)$ qui ne dépend que de r :

$$f(r) = -\frac{d\mathcal{E}_P(r)}{dr}$$

• La force centrale est attractive si elle est dirigée vers 0 : $f(r) < 0$ et $\frac{d\mathcal{E}_P(r)}{dr} > 0$.

• La force centrale est répulsive dans le cas contraire : $f(r) > 0$ et $\frac{d\mathcal{E}_P(r)}{dr} < 0$.

1.3.2. Conservation de l'énergie mécanique

La seule force \vec{F} appliquée au point matériel M est conservative, l'énergie mécanique de M dans le référentiel \mathcal{R}_g galiléen se conserve au cours du mouvement :

$$\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_g) = \mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_g) + \mathcal{E}_P(M) = \mathcal{E}_m$$

$$\mathcal{E}_m = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{instant } t} + \mathcal{E}_P(r) = \underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2 + \mathcal{E}_P(r_0)}_{\text{instant initial } t=0}$$

En fonction des conditions initiales imposées, toute l'énergie mécanique est *a priori* permise, contrairement à ce qui se passe à l'échelle atomique où les valeurs de l'énergie sont quantifiées.

En remplaçant la vitesse par son expression en coordonnées polaires :

$$\frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \mathcal{E}_P(r) = \mathcal{E}_m$$

Cette équation constitue l'intégrale première de l'énergie.

1.3.3. L'énergie potentielle effective

Le mobile ponctuel M a deux degrés de liberté dans le plan de sa trajectoire, les deux intégrales premières permettent de déterminer son mouvement sans utiliser explicitement la force :

$$\begin{cases} r^2 \frac{d\theta}{dt} = C \\ \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \mathcal{E}_P(r) = \mathcal{E}_m \end{cases}$$

L'énergie cinétique de la particule se compose de deux termes :

- L'énergie cinétique radiale : $\mathcal{E}_C^{\text{radiale}} = \frac{1}{2} m v_r^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$.
- L'énergie cinétique orthoradiale ou de rotation : $\mathcal{E}_C^{\text{rotation}} = \frac{1}{2} m v_\theta^2 = \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$.

L'énergie cinétique de rotation peut s'exprimer simplement en fonction de r en tenant compte de l'intégrale première du moment cinétique :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \Rightarrow \mathcal{E}_C^{\text{rotation}} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2}$$

L'intégrale première de l'énergie devient :

$$\underbrace{\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2}_{\text{énergie cinétique radiale}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2}}_{\text{énergie cinétique de rotation}} + \mathcal{E}_P(r) = \mathcal{E}_m$$

énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{\text{Peff}}(r)$

$$\mathcal{E}_C^{\text{radiale}}(\dot{r}) + \mathcal{E}_{\text{Peff}}(r) = \mathcal{E}_m$$

L'étude du mouvement se ramène ainsi à un mouvement radial à un degré de liberté : l'équation obtenue a la même forme que celle de l'énergie mécanique d'un point matériel de masse m animé d'un mouvement rectiligne sur une demi-droite $r > 0$ et dont l'énergie potentielle serait $\mathcal{E}_{\text{Peff}}(r)$.

Cette énergie potentielle est l'énergie potentielle effective (ou efficace) du mouvement :

$$\mathcal{E}_{\text{Peff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_P(r)$$

Elle dépend de r mais aussi du mouvement étudié car elle prend en compte les conditions initiales du fait de la présence dans son expression de la constante des aires C .

L'analyse du diagramme d'énergie potentielle effective permet une étude qualitative du mouvement radial :

- L'énergie cinétique radiale $\mathcal{E}_C^{\text{radiale}}$ peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_C^{\text{radiale}} = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{\text{Peff}}(r) \geq 0.$$

Cette énergie cinétique étant positive ou nulle, les domaines accessibles à la trajectoire de la particule correspondent à :

$$\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{\text{peff}}(r).$$

• Lorsque l'égalité est réalisée, c'est-à-dire lorsque la courbe $\mathcal{E}_{\text{peff}}(r)$ coupe la droite horizontale \mathcal{E}_m , la vitesse radiale \dot{r} de la particule s'annule : la distance au centre de force O atteint une valeur extrême qui peut être un maximum ou un minimum. Soulignons que la particule ne s'immobilise pas car la vitesse est orthoradiale et non nulle :

$$v_{\theta} = r \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r}.$$

La constante C est nulle pour une trajectoire rectiligne du mobile.

2 Champ de forces centrales newtonien

2.1. Force newtonienne

Un point matériel M de masse m situé à une distance r du centre de force O est soumis à une force centrale newtonienne si elle est de la forme :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{r}.$$

L'intensité d'une force newtonienne est inversement proportionnelle au carré de la distance r qui sépare son point d'application du centre de force O : on la qualifie de « force en $\frac{1}{r^2}$ ».

L'énergie potentielle associée à cette force est :

$$f(r) = -\frac{d\mathcal{E}_P(r)}{dr} = -\frac{K}{r^2}$$

$$d\mathcal{E}_P(r) = K \frac{dr}{r^2} = K d\left(-\frac{1}{r}\right) = d\left(-\frac{K}{r}\right).$$

L'énergie potentielle est définie à une constante A près : $\mathcal{E}_P(r) = -\frac{K}{r} + A$.

Par convention, choisissons $A = 0$ de sorte que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_P(r) = 0$ (origine des potentiels).

D'où l'énergie potentielle newtonienne :

$$\mathcal{E}_P(r) = -\frac{K}{r}$$

En fonction de la valeur de K , Nous allons considérer deux forces newtoniennes fondamentales : la force de gravitation entre deux masses ponctuelles et la force électrostatique entre deux charges électriques ponctuelles et fixes dans le référentiel d'étude.

2.2. Force d'interaction gravitationnelle ($K = Gm_0m$)

Deux particules (1) et (2) situées respectivement en O et M sont distantes de r et de « masses gravitationnelles » respectives m_0 et m . La particule (1) exerce sur la particule (2) une force attractive appelée *force de gravitation* telle que :

Remarque

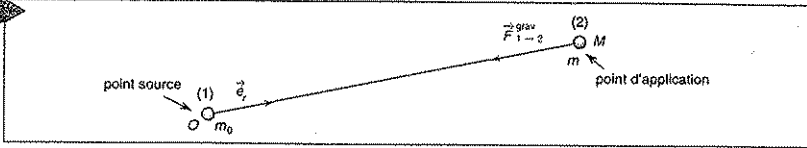
- La force newtonienne est attractive : $K > 0$.
- La force newtonienne est répulsive : $K < 0$.

Remarque

Inversement et en accord avec la troisième loi de Newton, la particule (2) exerce sur la particule (1) la force de gravitation

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}^{\text{grav}} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}^{\text{grav}} :$$

on parle d'interaction gravitationnelle.



$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}^{\text{grav}} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$$

$G = 6,672 \cdot 10^{-11}$ (S.I.) est une constante universelle, la *constante de gravitation universelle*. La « masse gravitationnelle », caractéristique de la gravitation, est actrice du mouvement par l'action attractive qu'elle exerce alors que la « masse inerte », qui intervient dans la relation fondamentale de la dynamique, traduit la propriété d'inertie (résistance au mouvement) du système :

$$\vec{a}(M)_{/g_{\text{e}}} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Plus la masse inerte du système est grande et plus il est difficile de l'accélérer, voire de le mettre en mouvement.

La masse gravitationnelle s'identifie expérimentalement à la masse inerte, nous les considérerons confondues.

L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle est :

$$\mathcal{E}_P^{\text{grav}}(r) = -G \frac{m_0 m}{r}$$

2.3. Force d'interaction électrostatique $\left(K = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \right)$

Deux particules (1) et (2) situées en O et M sont distantes de r et de charges électriques respectives q_0 et q. La particule (1) exerce sur la particule (2) la *force électrostatique* :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}^{\text{elec}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r$$

L'énergie potentielle d'interaction électrostatique est :

$$\mathcal{E}_P^{\text{elec}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}$$

Notez que la valeur ϵ_0 de la *permittivité du vide* vérifie $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ (S.I.).

3 Étude des trajectoires en champ newtonien

3.1. Étude énergétique

L'énergie potentielle newtonienne étant : $\mathcal{E}_P(r) = -\frac{K}{r}$

L'énergie potentielle effective s'écrit : $\mathcal{E}_{\text{Peff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{r}$

Remarque
Nous avons considéré ici des masses ponctuelles. La loi de gravitation est également valable si l'on remplace la masse m_0 par une boule dont la masse volumique présente une symétrie sphérique.

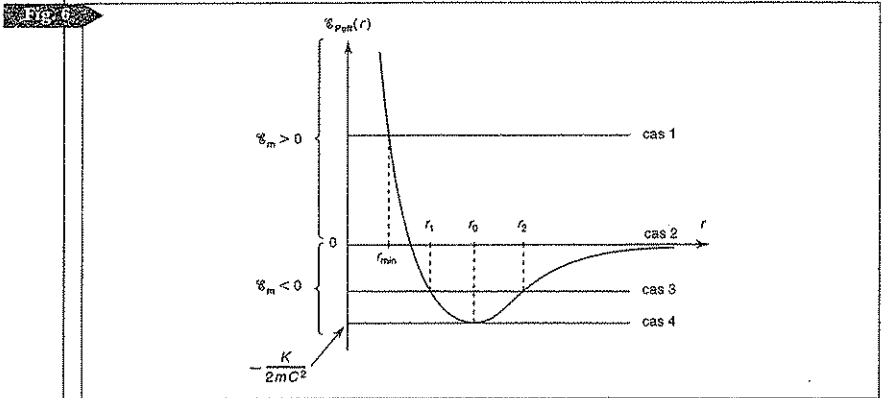
Remarque
Cette loi de force est la loi de Coulomb, il s'agit de l'interaction coulombienne. La force coulombienne est attractive : $q < 0$. La force coulombienne est répulsive : $q > 0$.

- Plaçons-nous d'abord dans le cas d'une force attractive : $K > 0$
- L'énergie potentielle effective admet un minimum pour la distance r_0 la dérivée de $\mathcal{E}_{\text{Peff}}(r)$ par rapport à r s'annule :

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{Peff}}}{dr} = -m\frac{C^2}{r^3} + \frac{K}{r^2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_{\text{Peff}}}{dr} = 0 \text{ pour } r_0 = \frac{mC^2}{K} \text{ et } r \rightarrow +\infty.$$

- L'énergie potentielle effective minimale est alors : $\mathcal{E}_{\text{Peff}}(r_0) = -\frac{1}{2} \frac{K^2}{mC^2} = -\frac{K}{2r_0}$.
- L'énergie potentielle effective s'annule en : $r^* = \frac{1}{2} \frac{mC^2}{K} = \frac{r_0}{2}$.

Le profil de potentiel à l'allure représentée sur la figure suivante. La nature des trajectoires dépend de l'énergie mécanique de la particule et ainsi de sa position initiale et de sa vitesse initiale. Nous allons étudier graphiquement les différentes trajectoires.



- Si $\mathcal{E}_m \geq 0$ (cas 1 et 2) :
 - dans la zone accessible, le domaine de variation de r est non borné :

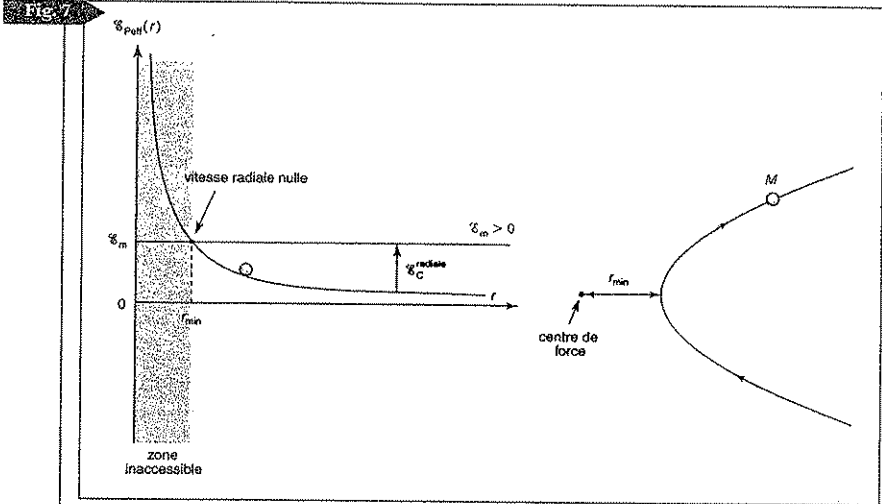
$$r \in [r_{\min}, +\infty[;$$
 - la particule M arrive de l'infini, atteint une distance minimale d'approche r_{\min} puis repart à l'infini, c'est un *état de diffusion*.
- Si $\mathcal{E}_m < 0$ (cas 3) :
 - dans la zone accessible, le domaine de variation de r est borné par r_1 et r_2 :

$$r \in [r_1, r_2];$$
 - la particule M reste à distance finie du centre de force, c'est un *état lié*.
- Si $\mathcal{E}_m = -\frac{K}{2mC^2}$ (cas 4) :
 - r ne peut prendre qu'une seule valeur : $r = r_0 = \frac{mC^2}{K}$
 - la trajectoire de la particule est un cercle de rayon r_0 autour du centre de force ;
 - la vitesse radiale est toujours nulle.

• Dans le cas d'une force newtonienne répulsive : $K < 0$

$$\mathcal{E}_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{r} = \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}}_{>0} + \underbrace{\left(-\frac{K}{r}\right)}_{>0}$$

L'énergie potentielle effective est toujours positive : il n'y a que des états de diffusion.
Le profil de potentiel a l'allure représentée sur la figure suivante :



La particule arrive de l'infini, s'approche du centre de force jusqu'à une distance minimale r_{\min} puis repart à l'infini.

Pour déterminer la distance minimale d'approche, observons qu'elle correspond à une annulation de la vitesse radiale :

$$\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r_{\min}^2} - \frac{K}{r_{\min}} = \mathcal{E}_m \Rightarrow \mathcal{E}_m r_{\min}^2 + K r_{\min} - \frac{1}{2}mC^2 = 0.$$

En ne gardant que la racine positive de cette équation du second degré :

$$r_{\min} = \frac{K}{2\mathcal{E}_m} \left(\sqrt{1 + \frac{2mC^2\mathcal{E}_m}{K^2}} - 1 \right)$$

3.2. Nature des trajectoires

La trajectoire de la particule M dans un champ de forces centrales newtonien est une conique. L'équation d'une conique en coordonnées polaires ($\theta \in [0, 2\pi[$, $r > 0$) avec origine au foyer O est :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Remarque

Le paramètre de la conique ne dépend que du moment cinétique.

Le *foyer* est le centre de force situé à l'origine O des coordonnées polaires. L'origine des angles est choisie au point de la conique le plus proche du foyer O . La distance p est le *paramètre* de la conique. On montre que :

$$p = \frac{mC^2}{K}$$

L'*excentricité* e caractérise le genre de la conique, la nature de la trajectoire :

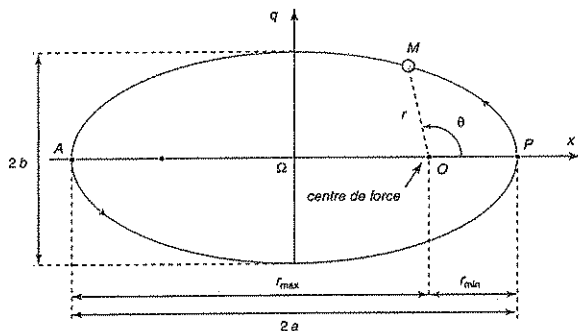
- $e = 0$: la trajectoire est circulaire.
 - Le rayon de la trajectoire est indépendant de θ : $r(\theta) = p$.
 - Le paramètre de la conique est le rayon de cette trajectoire, précisons sa valeur :

$$p = r_0 = \frac{mC^2}{K}$$

- $0 < e < 1$: la trajectoire est une ellipse.

Point maths. En notant a le demi-grand axe de l'ellipse et b son demi-petit axe, l'équation de l'ellipse en coordonnées cartésiennes avec origine au centre Ω est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



- Le dénominateur ne s'annule jamais car $e < 1 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{e} < -1$ (impossible)
 - $\Rightarrow \theta \in [0, 2\pi[$: le point M effectue un tour complet autour du centre de force O et r reprend sa valeur initiale : $r(\theta) = r(\theta + 2\pi)$.
- Lorsque le point M est à distance maximum (apogée, aphélie) :

$$r_A = r_{\max} = r(\pi) = \frac{p}{1 - e}$$

- Lorsque le point M est à distance minimum (périgée, périhélie).

$$r_P = r_{\min} = r(0) = \frac{p}{1 + e}$$

Une trajectoire fermée qui n'est pas circulaire est une ellipse de grand axe :

$$2a = r_{\max} + r_{\min} = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = \frac{2p}{1-e^2}$$

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{1+e}{1-e}$$

Ce rapport permet d'apprécier l'allure de l'ellipse en comparant le point le plus éloigné du foyer en O de l'ellipse du point le plus proche du foyer.

• $e = 1$: la trajectoire est une parabole.

• L'angle qui annule le dénominateur de la conique est $\theta = \pi$: r ne devient infini que dans la direction π . La distance minimale d'approche est $r_{\min} = \frac{p}{1+e} = \frac{p}{2}$.

$$r_{\min} = \frac{r_0}{2}$$

• $e > 1$: la trajectoire est une hyperbole.

• Le dénominateur s'annule pour $\cos\theta = -\frac{1}{e}$ ($\cos\theta < 0$), r devient infini pour les deux directions d'angles :

$$\theta_1 = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \quad \theta_2 = -\theta_1 = -\arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \quad \theta_1 \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$$

La trajectoire qui s'étend entre ces deux valeurs est une branche d'hyperbole.

3.3. Énergie et nature des trajectoires

La trajectoire d'une particule soumise à un champ newtonien attractif ou répulsif est une conique. Le type de trajectoire dépend du couple mathématique (p, e) mais derrière ce couple se cache le couple mécanique (C, \mathcal{E}_m) et donc les conditions initiales sur la position et la vitesse du mobile.

Connaissant l'expression de la conique, nous pouvons calculer l'énergie mécanique de la trajectoire :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{r} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r(t)} = \frac{1}{p}(1 + e \cos\theta(t))$$

• Pour déterminer $\frac{dr}{dt}$ effectuons la dérivée plus simple de $\frac{1}{r}$ en pensant à décomposer :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

D'autre part :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{e}{p} \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{e}{p} \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e}{p} r^2 \frac{d\theta}{dt} \sin\theta = \frac{Ce}{p} \sin\theta$$

On retrouve dans cette équation l'intégrale première du moment cinétique.

• L'expression de l'énergie mécanique devient :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m \left(\frac{eC}{p} \sin\theta \right)^2 + \frac{1}{2}mC^2 \left(\frac{1}{p}(1 + e \cos\theta) \right)^2 - \frac{K}{p}(1 + e \cos\theta)$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{mC^2}{p}}_K \frac{e^2}{p} + \underbrace{\frac{mC^2}{p}}_K \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2} + e \cos\theta \right) - \frac{K}{p}(1 + e \cos\theta) = \frac{K}{2p}(e^2 - 1).$$

Soit :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{K}{2p}(e^2 - 1)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathcal{E}_m = \frac{K^2}{2mC^2}(e^2 - 1)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{mC^2}{K}.$$

Si $\mathcal{E}_m > 0$ alors $e > 1$: la trajectoire est une hyperbole de foyer O . *État de diffusion.*

Si $\mathcal{E}_m < 0$ alors $e < 1$: la trajectoire est une ellipse de foyer O . *État lié.*

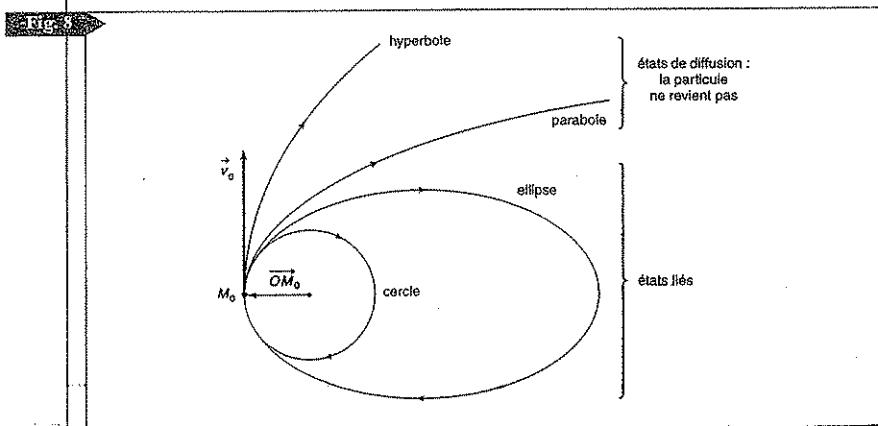
• Compte tenu de la relation $p = \frac{2a}{(1 - e^2)}$, l'énergie d'une particule sur une ellipse est :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{K}{2a}}$$

Récapitulons :

$e = 0$	$0 < e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
cercle	ellipse	parabole	hyperbole
$\mathcal{E}_m = -\frac{K}{2mC^2}$	$\mathcal{E}_m = -\frac{K}{2a} < 0$	$\mathcal{E}_m = 0$	$\mathcal{E}_m > 0$

Pour bien comprendre l'influence des conditions initiales, le schéma qui suit représente les diverses trajectoires adoptées par un satellite lancé à partir d'une même position initiale mais avec des vitesses initiales croissantes, c'est-à-dire pour des valeurs croissantes de son énergie :



4 Les lois de Kepler

4.1. Énoncé des lois de Kepler

À partir des observations de Tycho-Brahé, Kepler a découvert les lois du mouvement des planètes du système solaire.

- *Première loi* (1605) : les planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers.
- *Deuxième loi* (1604) : le rayon vecteur Soleil-planète balaye des aires égales en des temps égaux.
- *Troisième loi* (1618) : le carré de la période orbitale T des planètes est proportionnel au cube du grand axe de leur ellipse.

Les deux premières lois sont justifiées par l'étude des champs newtoniens.

4.2. Troisième loi de Kepler

La loi des aires (deuxième loi de Kepler) indique le caractère constant de la vitesse aréolaire :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}.$$

Exprimons cette vitesse sur une période T de révolution, alors que le rayon vecteur balaye, pendant cette durée, la totalité de l'aire de l'ellipse : πab .

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{C}{2} \quad (1)$$

Pour démontrer la troisième loi de Kepler, il faut exprimer b .

Une caractéristique géométrique de l'ellipse est $p = \frac{b^2}{a}$ et nous avons montré que :

$$p = \frac{mC^2}{K} \Rightarrow b^2 = \frac{maC^2}{K}.$$

Élevons l'équation (1) au carré et remplaçons b^2 par cette valeur, il vient :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K}}$$

L'interaction est gravitationnelle entre corps à symétrie sphérique : ils se comportent comme des particules ponctuelles. La particule mobile est la planète de masse m et le centre attracteur est le Soleil de masse M_\odot .

$$K = GM_\odot m$$

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}}$$

Le rapport est indépendant de la planète considérée et permet d'accéder à la valeur M_\odot .

Avant la colle

Tester ses connaissances

► Corrigés p. 267

1 Lorsque la trajectoire d'un point soumis à une force centrale est un cercle, le mouvement de ce point est uniforme.

- a. Vrai.
 b. Faux.

2 Lorsque la vitesse d'un point matériel M soumis à une force centrale est nulle en un point M_1 de la trajectoire, la trajectoire du mobile est :

- a. Un cercle. d. Une parabole.
 b. Une ellipse. e. Une droite.
 c. Une hyperbole.

3 Un satellite M décrit une ellipse dont le centre de la Terre occupe un des foyers O . Lorsqu'il est à une distance $r_0 = 30\,000$ km de O , un moteur auxiliaire lui communique une vitesse \vec{v}_0 de module $v_0 = 6$ km · s⁻¹.

On donne : $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ;

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

La trajectoire du satellite est :

- a. Un cercle. c. Une hyperbole.
 b. Une ellipse. d. Une parabole.

4 Pour un satellite de la Terre en trajectoire elliptique, le périhélie P se trouve à la distance r_P du centre de la Terre et l'apogée A à une distance r_A double : $r_A = 2r_P$. Les vitesses respectives du satellite en ces points sont telles que :

- a. $v_A = v_P$. c. $v_A = \frac{1}{2}v_P$.
 b. $v_A = 2v_P$.

5 Un satellite M est en orbite elliptique autour de la Terre. Par l'intermédiaire d'un moteur auxiliaire, on désire lui communiquer de l'énergie

pendant une durée très brève. En quel point de la trajectoire devra-t-on déclencher le moteur pour une efficacité maximale ?

- a. Au périhélie.
 b. À l'apogée.

6 La trajectoire de la Terre autour du Soleil est quasi circulaire de rayon R .

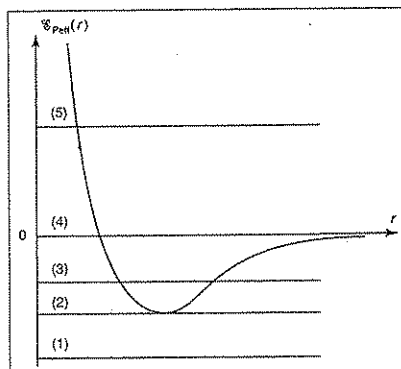
Données : $R = 150 \cdot 10^6$ km ;

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

La masse M_\odot du Soleil est :

- a. $2 \cdot 10^{21}$ kg. c. $8,2 \cdot 10^{28}$ kg.
 b. $2 \cdot 10^{30}$ kg.

7 Pour un champ newtonien, la courbe représentative de l'évolution de l'énergie potentielle effective en fonction de r est :



Préciser, pour chacune des valeurs de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m (notées de (1) à (5)), la nature de la trajectoire et celle de son état, lié ou de diffusion. Donner pour chacune de ces énergies la valeur de l'excentricité e ou l'intervalle qui la délimite.

Données :

$$M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}; \quad R_T = 6\,400 \text{ km};$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

1 On désigne par M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. G est la constante de gravitation universelle.

Un satellite artificiel M de masse m est en orbite circulaire de rayon R autour du centre O de la Terre. Les frottements dus à l'atmosphère sur le satellite sont négligés.

a. Déterminer l'énergie mécanique \mathcal{E}_m du satellite sur cette trajectoire en fonction de G , M_T , m et R .

b. Retrouver la troisième loi de Kepler reliant la période T de révolution du satellite autour de la Terre, le rayon R de sa trajectoire, G et M_T .

c. Dédurre de ces résultats l'énergie mécanique et la période de révolution du satellite s'il est en trajectoire elliptique de demi grand axe a autour de la Terre. Le centre O de la Terre occupe, en ce cas, le foyer actif de l'ellipse.

2 Calculer la vitesse v_S nécessaire pour satelliser un corps sur une orbite circulaire rasante, c'est-à-dire au voisinage de la surface de la Terre. Cette vitesse est la *première vitesse cosmique*. Déterminer la période de révolution du satellite.

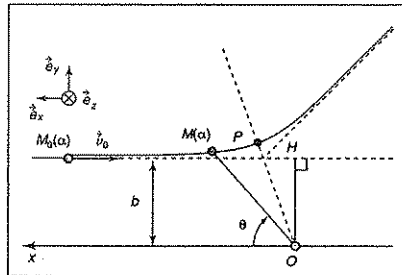
3 Calculer la *seconde vitesse cosmique* ou *vitesse de libération* v_L : c'est la vitesse minimale qu'il faut communiquer au satellite placé sur la Terre pour qu'il se libère de l'attraction gravitationnelle.

4 Dans la bande dessinée « *Objectif Lune* » de Hergé, on peut lire ces mots des ingénieurs qui suivent la fusée transportant Tintin :

« Observatoire à Station Contrôlée... La fusée est à présent à 3 185 km de son point de départ. Elle vient d'atteindre la vitesse de libération, soit 9 km 133 m à la seconde. Tout semble normal ».

Cette observation vous semble-t-elle compatible avec votre résultat de la question précédente ?

5 Une particule incidente α , de masse m et de charge $q = 2e$, est émise à l'infini avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ et se dirige vers un noyau cible placé en O , fixe dans le référentiel du laboratoire galiléen et de charge $Q = Ze$. La distance entre le support de la vitesse initiale et la droite passant par O parallèle à \vec{v}_0 est le *paramètre d'impact* b .



Déterminer la distance minimale d'approche $r_{\min} = OP$ en fonction de ϵ_0 , Z , e , m , v_0 et b .

Satellite géostationnaire

La Terre possède un seul satellite naturel : la Lune. De nombreux satellites artificiels sont par ailleurs placés en orbite autour de la Terre dans des buts variés tels que les télécommunications, la météorologie, la défense...

Le mouvement des satellites artificiels de la Terre est étudié dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G dont l'origine O est au centre de la Terre, supposée à symétrie sphérique, et dont les axes pointent dans la direction de trois étoiles très éloignées et fixes. Dans le référentiel géocentrique, la Terre tourne autour de son axe avec une période de révolution T et une vitesse angulaire Ω .

On désignera par M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. G est la constante de gravitation universelle.

Données : $T = 86164 \text{ s}$; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_T = 6\,370 \text{ km}$;
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Un satellite artificiel M de masse m est en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. Les frottements dus à l'atmosphère sur le satellite sont négligés.

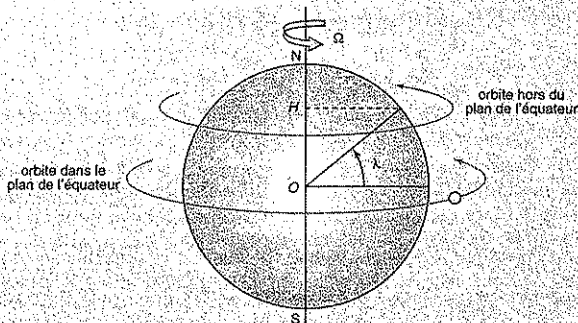
1 Montrer qu'un satellite artificiel en orbite circulaire autour de la Terre a nécessairement une trajectoire plane contenant le centre O de la Terre.

2 Démontrer que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme et exprimer littéralement sa vitesse v_0 . On exprimera d'abord v_0 en fonction de G , M_T et r , puis en fonction de g_0 , R_T et r , où g_0 désigne l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre. Le satellite SPOT (Satellite sPécialisé dans l'Observation de la Terre) est en orbite circulaire à l'altitude $h = 832 \text{ km}$ au-dessus de la Terre. Calculer numériquement la vitesse v_0 de SPOT sur son orbite.

3 L'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle est choisie nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique \mathcal{E}_m du satellite autour de la Terre en fonction de G , M_T , r et m . Quel est l'effet des forces de frottement de l'atmosphère sur le rayon de la trajectoire et sur la vitesse du satellite ?

4 Exprimer l'énergie mécanique \mathcal{E}_{m_0} du satellite immobile à la surface de la Terre en un point de latitude λ en fonction de G , M_T , m , R_T , λ et de la période T de rotation de la Terre autour de l'axe Sud-Nord. Pourquoi lance-t-on préférentiellement les satellites depuis les régions de basse latitude (Kourou en Guyane française, latitude 5° Nord ; Cap Canaveral en Floride 28° N). Les lance-t-on plutôt vers l'Est ou vers l'Ouest ?

Un satellite artificiel de la Terre est géostationnaire s'il est immobile dans le référentiel terrestre : son orbite est circulaire, dans le plan de l'équateur et il survole constamment le même point de celui-ci. Le satellite TELECOM de masse $m_S = 1\,000 \text{ kg}$ est géostationnaire.



5 Peut-on placer le satellite en orbite en dehors du plan de l'équateur ?

6 Calculer l'altitude h_G (ou distance au sol), la vitesse v_G et l'énergie mécanique \mathcal{E}_{m_G} du satellite TELECOM sur son orbite géostationnaire. Tous les satellites géostationnaires doivent-ils avoir la même masse ?

résolution méthodique

Étude systématique d'un problème de mécanique : cas d'un mouvement à *force centrale*.

[1] Définir le système M étudié.

[2] Choisir le référentiel d'étude galiléen \mathcal{R}_G .

[3] Effectuer le bilan des forces appliquées au système: Le système est-il conservatif ?

Ajoutons une autre interrogation : le mouvement est-il à *force centrale conservative* ?

L'étude d'un tel mouvement est systématique :

(i) écrire la conservation du moment cinétique : le mouvement a lieu dans un plan fixe par les conditions initiales sur la position et la vitesse du mobile, et obéit à la loi des aires,

(ii) écrire la conservation de l'énergie mécanique.

Le système est le satellite M de la Terre.

L'étude s'effectue dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G supposé galiléen.

La seule force appliquée à M est la force gravitationnelle :

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -G \frac{M_T m}{r^2} \hat{i}_r = -G \frac{M_T m}{r^3} \vec{OM}.$$

C'est une *force centrale conservative* d'énergie potentielle : $\mathcal{E}_p^{\text{grav}}(r) = -G \frac{M_T m}{r}$.

Avec l'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle choisie nulle à l'infini.

Le moment en O de cette force est nul car son support passe par le centre de force O .

L'application du théorème du moment cinétique en O nous permet de conclure sur le caractère constant du vecteur moment cinétique de M :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M/\mathcal{R}_G)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_G} = \underbrace{\vec{M}_O(\vec{F})}_{\text{force centrale}} = \vec{0}.$$

Ce moment cinétique est fixé par les conditions initiales :

$$\vec{L}_O = \underbrace{m\vec{OM}_0 \wedge \vec{v}_0}_{\text{à l'instant } t=0} = \underbrace{m\vec{OM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_G)}_{\text{à l'instant } t}$$

Par propriété du produit vectoriel, le vecteur position et le vecteur vitesse du mobile M sont en permanence perpendiculaires au vecteur \vec{L}_O constant.

La trajectoire de M est plane et confinée dans le plan (\vec{OM}_0, \vec{v}_0) contenant le centre de force O et perpendiculaire à \vec{L}_O .
conditions initiales

2

[4] Préciser le nombre de degrés de liberté du problème.

[5] Détermination des équations du mouvement.

Le théorème du moment cinétique en O a été utilisé, il nous reste à écrire la conservation de l'énergie mécanique et à exploiter le caractère vectoriel du principe fondamental de la dynamique.

Les coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire sont bien adaptées au mouvement à force centrale. L'origine O est au centre de force.

Rappelons les grandeurs cinématiques dans le cas général :

- $\vec{OM} = r\vec{e}_r$,

- $\vec{v}(M/\mathcal{R}_G) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

- $\vec{a}(M/\mathcal{R}_G) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$.

Lorsque la trajectoire est circulaire, ces expressions se simplifient :

- $\vec{v}(M/\mathcal{R}_G) = \underset{0}{\dot{r}}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

- $\vec{a}(M/\mathcal{R}_G) = (\underset{0}{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\underset{0}{\dot{r}}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Puisque le problème s'intéresse à la vitesse v du satellite, nous écrirons plutôt :

- $\vec{v}(M/\mathcal{R}_G) = v\vec{e}_\theta$

- $\vec{a}(M/\mathcal{R}_G) = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta$.

La trajectoire du satellite est circulaire, sa position est définie sans ambiguïté par l'angle θ des coordonnées polaires.

Écrivons la conservation de l'énergie mécanique du satellite :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C(v) + \mathcal{E}_P^{\text{grav}}(r) = \frac{1}{2}mv^2 - \underbrace{G \frac{M_T m}{r}}_{\text{terme constant}}$$

Le rayon de la trajectoire étant constant, la vitesse (pas le vecteur vitesse) est constante :

Le mouvement de M est circulaire uniforme.

Le référentiel \mathcal{R}_G est galiléen, appliquons maintenant le principe fondamental de la dynamique au système dans la base polaire adaptée au problème :

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r = m \ddot{\alpha}(M/\mathcal{R}_G) = -m \frac{v^2}{r} \vec{e}_r + m \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta.$$

Le caractère vectoriel de ce principe nous permet d'obtenir deux relations suivant \vec{e}_r et \vec{e}_θ :

• projection sur \vec{e}_r : $v^2 = \frac{GM_T}{r}$

• projection sur \vec{e}_θ : $\frac{dv}{dt} = 0$ mouvement circulaire uniforme.

Nous retrouvons par la deuxième équation le caractère uniforme du mouvement circulaire de M .

La première équation nous donne la vitesse constante du satellite :

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

À la surface de la Terre, si l'on confond champ de pesanteur est champ de gravitation :

$$mg_0 = G \frac{M_T m}{R_T^2}$$

D'où :

$$GM_T = g_0 R_T^2.$$

La vitesse du satellite s'exprime encore de la façon suivante :

$$v_0 = R_T \sqrt{\frac{g_0}{r}}$$

Pour l'application numérique, observons que : $r = R_T + h$:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = 7,44 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3

Lorsqu'on adopte une démarche systématique comme la nôtre, il peut arriver que nous répondions prématurément à certaines questions du problème. C'est ce qui nous arrive ici. Nous avons déjà abordé la conservation de l'énergie mécanique de M , il ne nous reste qu'à remplacer la vitesse par la valeur obtenue dans la question précédente.

Le mouvement est à force centrale, l'énergie mécanique de M est constante au cours du mouvement.

L'expression de v obtenue permet d'écrire l'énergie cinétique du satellite :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2} \mathcal{E}_P^{\text{grav}}(r) \Leftrightarrow \mathcal{E}_P^{\text{grav}}(r) = -2\mathcal{E}_C.$$

D'où l'énergie mécanique du satellite :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_P^{\text{grav}} = -\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} \mathcal{E}_P^{\text{grav}}$$

$$\mathcal{E}_m = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r}$$

Le théorème de la puissance mécanique permet d'écrire :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_C)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_C} = P(\vec{F}_{/\mathcal{R}_C}^{\text{nc}}) = P(\vec{F}_{f/\mathcal{R}_C}) < 0.$$

Les forces de frottement sont dissipatives de l'énergie mécanique du satellite :

$$d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_C) < 0.$$

Or :

$$d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_C) = \frac{d\mathcal{E}_m}{dr} dr = \frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r^2} dr \Rightarrow dr < 0.$$

> 0

Et d'autre part,

$$d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_C) = -d\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_C) \Rightarrow d\mathcal{E}_C > 0.$$

Si la dissipation d'énergie par frottement reste faible, le rayon de la trajectoire sera de plus en plus faible et cette « chute tourbillonnaire » s'accompagne d'une augmentation progressive de la vitesse du satellite.



Le satellite est immobile sur la surface de la Terre mais en rotation dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_C qui, soulignons-le, ne tourne pas avec la Terre car ses axes sont orientés vers des étoiles éloignées et fixes.

La vitesse du satellite est la vitesse d'un point de la surface de la Terre confondu avec lui (un point coïncident) en rotation autour de l'axe SN .

La trajectoire de M est circulaire de rayon $R = R_T \cos \lambda$, dans le plan passant par H parallèle au plan de l'équateur.

R est la distance entre le satellite au sol et l'axe de rotation de la Terre.

Ecrivons la vitesse de M en coordonnées polaires avec origine en H , en faisant apparaître $\Omega = \dot{\theta}$:

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_C) = R\Omega\vec{e}_\theta = R_T \cos \lambda \Omega \vec{e}_\theta$$

Ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe, elle est liée à sa période de révolution par :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

Lorsque le satellite est posé sur la Terre en un point de latitude λ , son énergie mécanique se compose :

• De l'énergie cinétique de rotation :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (R_T \cos \lambda \Omega)^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \cos \lambda \right)^2.$$

• De l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$\mathcal{E}_P^{\text{grav}} = -G \frac{M_T m}{R_T}.$$

La somme de ces deux termes constitue l'énergie mécanique \mathcal{E}_{m_0} du satellite immobile à la surface de la Terre :

$$\mathcal{E}_{m_0} = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \cos \lambda \right)^2 - G \frac{M_T m}{R_T} = \mathcal{E}_{m_0}(\lambda)$$

On constate que cette énergie mécanique est maximale lorsque $\lambda = 0$, c'est-à-dire sur l'Équateur. Puisque le terme d'énergie potentielle est indépendant de la latitude, cela veut dire qu'à l'énergie mécanique maximale correspond une énergie cinétique maximale due à la rotation de la Terre :

$$\mathcal{E}_C^{\text{rotation}} = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \right)^2.$$

Pour lancer le satellite, il faut lui fournir de l'énergie cinétique dans le référentiel géocentrique. Celle-ci sera d'autant plus faible que le satellite dispose déjà, dans ce référentiel, de l'énergie cinétique de rotation de la Terre, maximale à l'Équateur. Mais, pour en bénéficier, il faudra bien entendu envoyer le satellite dans le sens de rotation de la Terre, c'est-à-dire vers l'Est.

Le calcul de la vitesse d'un point de la surface du sol terrestre est :

$$v_{\text{sol}} = \frac{2\pi}{T} R_T = 0,46 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

5 Le plan de la trajectoire du satellite M lancé dans le sens de rotation de la Terre en un point de latitude λ est un plan parallèle au plan de l'équateur (orbite hors du plan de l'Équateur sur la figure). Or le mouvement de M est à force centrale et le plan de sa trajectoire doit absolument contenir de centre de force O . Le seul plan parallèle au plan de l'Équateur et contenant le point O est le plan de l'Équateur lui-même.

6

Nous n'avons pas encore utilisé une loi propre aux trajectoires circulaires et elliptiques d'astres tournant autour du même centre de force et dont l'interaction mutuelle est négligée : la troisième loi de Kepler. Cette loi est indépendante de la masse m du satellite :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

M_T est la masse de la Terre associée au centre de force O et a est le rayon de la trajectoire circulaire ou le demi-grand axe de la trajectoire elliptique. La Terre est ici supposée à symétrie sphérique, cela veut dire que la répartition de sa masse ne dépend que de r . Dans ce cas, la Terre se comporte comme une particule ponctuelle située en O à laquelle est associée la totalité de sa masse M_T .

à résoudre les exercices

Les satellites géostationnaires doivent tourner sur un cercle de rayon r_G dans le plan équatorial avec la même vitesse angulaire Ω que la Terre.

$$v_G = r_G \Omega = r_G \frac{2\pi}{T}$$

T est la période du mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe SN . Le satellite géostationnaire a sa période de rotation calée sur T pour qu'il puisse à tout instant être à la verticale d'un même lieu à la surface du sol terrestre.

$$T = 86\,164 \text{ s.}$$

Tous les satellites sur orbite circulaire ont pour vitesse :

$$v_G = \sqrt{\frac{GM_T}{r_G}} = r_G \frac{2\pi}{T}$$

Lorsque le satellite soumis à l'interaction gravitationnel est situé à l'altitude h_G , son mouvement obéit ainsi à la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r_G^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

Sachant que $r_G = R_T + h_G$, on déduit immédiatement la valeur de h_G :

$$h_G = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}} - R_T = 35\,800 \text{ km ; } r_G = 42\,170 \text{ km.}$$

On retiendra l'altitude de l'orbite géostationnaire : 36 000 km.

Observons que le résultat est indépendant de la masse du satellite.

La vitesse de rotation du satellite est la vitesse de rotation de la Terre :

$$v_G = r \Omega = (R_T + h_G) \frac{2\pi}{T} = 3,07 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Son énergie mécanique est :

$$\mathcal{E}_m = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{4,7 \cdot 10^9 \text{ J}} - \underbrace{G \frac{M_T m}{r_G}}_{9,4 \cdot 10^9 \text{ J}} = -4,7 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

Ces grandeurs sont à comparer avec les termes d'énergie cinétique de rotation et d'énergie potentielle gravitationnelle du satellite immobile à la surface du sol :

Pour $\lambda = 0$

$$\mathcal{E}_{m_0} = \underbrace{\frac{1}{2}m \left(\frac{2\pi}{T} R_T \right)^2}_{0,1 \cdot 10^9 \text{ J}} - \underbrace{G \frac{M_T m}{R_T}}_{62,6 \cdot 10^9 \text{ J}} = -62,5 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

en conclusion

Nous avons traité ici le mouvement circulaire d'une particule soumise à un champ de force centrale newtonien attractif.



45 min

> Corrigé p. 263

Quantification du moment cinétique : l'atome de Bohr

En 1913, le physicien danois Niels Bohr imagine un modèle « planétaire » de l'atome afin d'expliquer les raies émises par des atomes d'hydrogène excités. Ce modèle, aujourd'hui obsolète, ne permet pas d'expliquer les spectres des autres atomes. Une nouvelle physique fut nécessaire : la physique quantique.

Dans ce modèle, l'atome d'hydrogène est un système à deux corps constitué d'un noyau, le proton de charge électrique $+e$, et d'un électron M , de masse m_e et de charge $-e$.

La masse du proton étant près de 2 000 fois celle de l'électron, le proton est considéré comme fixe dans le référentiel d'étude galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ayant pour origine le noyau.

• **Premier postulat de Bohr** : l'électron se déplace uniquement sur certaines orbites circulaires appelées états stationnaires. Ce mouvement peut être décrit par la physique classique.

D'après Bohr, l'électron a un mouvement circulaire de rayon r et de vitesse v autour de O .

Le champ de pesanteur est négligeable à l'échelle atomique et l'électron n'est soumis qu'à la force d'interaction électrostatique :

$$\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

1. Montrer que le mouvement circulaire de l'électron autour du noyau est uniforme et exprimer v^2 en fonction de r , e , m_e et ϵ_0 .

2. Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_C(r)$, l'énergie potentielle d'interaction électrostatique $\mathcal{E}_P(r)$ et l'énergie totale $\mathcal{E}(r)$ de l'électron :

$$\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}_C(r) + \mathcal{E}_P(r)$$

• **Deuxième postulat de Bohr d'après une idée de Planck** : l'électron accéléré par le proton ne peut pas rayonner de façon continue, mais doit attendre de passer d'une orbite permise n à une autre orbite d'énergie inférieure m pour émettre

brutalement un rayonnement sous la forme d'un photon d'énergie :

$$h\nu_{n \rightarrow m} = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m \quad (\text{avec } n > m)$$

\mathcal{E}_m et \mathcal{E}_n sont les énergies des deux états, h la constante de Planck et $\nu_{n \rightarrow m}$ la fréquence du rayonnement correspondant à la transition $n \rightarrow m$. Pour quantifier l'énergie de l'électron, il ajouta un troisième postulat ou condition de quantification : les seules trajectoires circulaires permises sont celles pour lesquelles le moment cinétique orbital est un multiple entier de la constante de Planck réduite \hbar :

$$L_O(M) = n\hbar = n \frac{h}{2\pi}$$

3. Déterminer la vitesse v de l'électron en fonction de r , m_e , h et du nombre quantique principal n (n entier ≥ 1).

4. Les trajectoires stables de l'électron sont des cercles de rayon r quantifié par n tel que :

$$r = n^2 r_0$$

Calculer (en pm) le rayon de Bohr noté r_0 .

5. En déduire l'énergie totale de l'électron quantifiée sous la forme :

$$\mathcal{E}_n = -\frac{\mathcal{E}_0}{n^2}$$

6. En supposant l'électron dans son état fondamental ($n = 1$), calculer sa vitesse v_0 et l'énergie d'ionisation de l'atome (l'exprimer en eV : 1 eV = $1,6 \cdot 10^{-19}$ J). L'électron est-il relativiste ?

7. Déterminer l'expression littérale de la constante de Rydberg R_H relative à l'atome d'hydrogène et calculer sa valeur :

$$\frac{1}{\lambda_{n \rightarrow m}} = \frac{\nu_{n \rightarrow m}}{c} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (\text{avec } n > m)$$

La constante c est la célérité de la lumière dans le vide.

Données :

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

2

30 min

> Corrigé p. 264

Satellite en orbite elliptique

Le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre est étudié dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G supposé galiléen. Ce référentiel a pour origine ce centre O de la Terre et ses axes sont orientés dans la direction de trois étoiles très éloignées et fixes. L'équation de la trajectoire elliptique du satellite soumis à la seule force de gravitation exercée par la Terre est donnée dans le cas général :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

L'origine des coordonnées polaires adoptées pour décrire le mouvement est en O ; p et e sont des constantes.

On donne : $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_T = 6\,370 \text{ km}$;
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

1. Comment appelle-t-on p et e ? Que peut-on dire de la valeur de e ?

2. Représenter l'allure de la trajectoire du satellite en faisant figurer r , θ , le centre O et la force exercée par la Terre sur le satellite. Placer les points P et A correspondant respectivement à l'apogée et au périhélie :

- *apogée* : point le plus éloigné du centre de force O ,
- *périhélie* : point le plus proche du centre de force O .

Préciser, sur le schéma, le demi-grand axe de l'ellipse noté a , les vecteurs vitesses \vec{v}_A et \vec{v}_P du satellite respectivement en A et P ainsi que ses positions respectives r_A et r_P par rapport à O . Établir une relation entre valeurs v_A , v_P , r_A et r_P .

3. Déterminer r_A et r_P en fonction de p et e . En déduire une expression de r_P en fonction de a et e .

4. Rappeler l'expression générale de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m du satellite de masse m en orbite elliptique en fonction de G , m , M_T , r et de sa vitesse v . En considérant l'expression de l'énergie mécanique en A et P , montrer que :

$$\mathcal{E}_m = -G \frac{M_T m}{2a}$$

5. Le satellite a son périhélie à une altitude $h_P = 600 \text{ km}$ par rapport au sol terrestre et une période de révolution $T = 6\,700 \text{ s}$. Calculer le demi-grand axe a de sa trajectoire, son excentricité e et l'altitude h_A de l'apogée par rapport au sol.

3

45 min

> Corrigé p. 265

Changement d'orbite d'un satellite : demi-ellipse de transfert

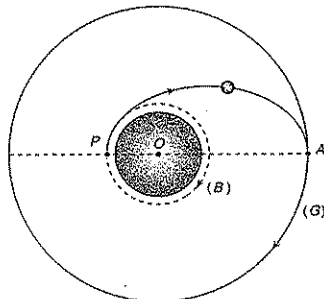
Le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre est étudié dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G supposé galiléen. Ce référentiel a pour origine ce centre O de la Terre et ses axes sont orientés dans la direction de trois étoiles très éloignées et fixes. La Terre tourne, dans ce référentiel, autour de son axe avec une période de révolution T et une vitesse angulaire Ω .

Le satellite subit la seule force de gravitation de la Terre considérée à symétrie sphérique, sa masse m est négligeable devant celle de la Terre.

On désignera par M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. G est la constante de gravitation universelle et g_0 l'intensité du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol.

On donne : $R_T = 6\,370 \text{ km}$; $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
 $T = 86\,164 \text{ s}$.

Le satellite M est en orbite circulaire (B) rasante de rayon R_T autour de la Terre, on veut le transférer sur l'orbite géostationnaire (G) de rayon R_G .



Pour effectuer le transfert, une variation brusque de vitesse est communiquée au satellite en P par éjection d'un gaz pendant une durée très brève et dans le sens opposé de la vitesse du satellite. À son arrivée en A , on communique au satellite le supplément de vitesse qui lui permet de se stabiliser sur l'orbite géostationnaire.

1. Dans quel plan particulier se situent les trois orbites?

2. Calculer la vitesse v_B du satellite sur son orbite basse.

3. Calculer le rayon R_G de la trajectoire du satellite en orbite géostationnaire et sa vitesse v_G .

4. Exprimer l'énergie \mathcal{E}_m du satellite sur l'ellipse de transfert. Calculer sa valeur pour un satellite de masse $m = 1\,000\text{ Kg}$. En déduire le supplément de vitesse Δv_P qu'il faut fournir au satellite pour qu'il passe en P sur l'ellipse de transfert et le supplément de vitesse Δv_A qu'il faut lui fournir en A pour qu'il se cale en orbite géostationnaire. Quelle énergie faut-il fournir en P et A pour réaliser le transfert du satellite ?

5. Quelle est la durée de ce transfert ?



45 min

> Corrigé p. 267

Freinage d'un satellite en trajectoire quasi circulaire

Le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre est étudié dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G supposé galiléen. Ce référentiel a pour origine ce centre O de la Terre et ses axes sont orientés dans la direction de trois étoiles très éloignées et fixes. Le satellite subit la seule force de gravitation de la Terre considérée à symétrie sphérique, sa masse m est négligeable devant celle de la Terre.

On désignera par M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. G est la constante de gravitation universelle.

Le satellite M , en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre, subit des hautes couches d'air atmosphérique raréfié une force de frottement de la forme :

$$\vec{F}_f = -\alpha m v \vec{v}.$$

Le coefficient α est positif et v est le module de la vitesse \vec{v} du satellite dans \mathcal{R}_G .

La force de freinage étant très faible, la trajectoire du satellite reste quasi circulaire et, pendant une révolution, la variation de la distance au centre Δr reste très inférieure à r . La durée d'une révolution est notée T_S .

1. Dans le cas d'une trajectoire circulaire du satellite, alors que les frottements sont négligés, montrer que les énergies mécanique, cinétique et potentielle du satellite vérifient :

$$\mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_G = \frac{1}{2} \mathcal{E}_P^{\text{grav}}.$$

Ces relations restent valables dans le cas de la trajectoire quasi circulaire.

2. Déterminer, pour une révolution, la variation $\Delta \mathcal{E}_P^{\text{grav}}$ de l'énergie potentielle de gravitation en fonction de G , m , M_T , r et Δr . En déduire la perte $\Delta \mathcal{E}_m$ d'énergie mécanique sur une révolution.

3. Calculer, sur la même période, le travail $\mathcal{F}_{\text{frott}}$ de la force de frottement en fonction de α , m , v et r . En déduire que :

$$\Delta r = -4\pi\alpha r^2.$$

Quel est l'effet des forces de frottement de l'atmosphère sur le rayon de la trajectoire et sur la vitesse du satellite ?

4. En supposant que $\frac{dr}{dt} = \frac{\Delta r}{T}$, montrer que r suit une loi de la forme : $\sqrt{r(t)} = \sqrt{r_0} + Kt$ où K est une constante à déterminer en fonction de α , G et M_T .



1h

> Corrigé p. 268

Utilisation de l'invariant de Runge-Lenz

L'expérience de Rutherford réalisée en 1911 révéla la structure lacunaire de la matière. Il interposa, entre une source radioactive émettant des particules α (noyaux d'hélium) et un détecteur de particules, une mince feuille d'or de $0,5\ \mu\text{m}$; il constata que quelques particules seulement étaient déviées, alors que la plupart d'entre elles traversaient la feuille d'or dans l'espace vide, sans modification de leur trajectoire.

Une particule M de masse m est en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}_g(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ galiléen. Ce mouvement est dû à un champ de force centrale newtonien de centre de force O :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r, \text{ avec } \vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{r}.$$

On introduit le vecteur de Runge-Lenz \vec{A} pour retrouver certaines caractéristiques de la trajectoire :

$$\vec{A} = \frac{1}{m} \vec{p} \wedge \vec{L}_O - K \vec{e}_r.$$

\vec{L}_O est le moment cinétique de la particule (constant et défini par rapport à O) et $\vec{p} = \vec{p}(M, \mathcal{R}_g)$ son vecteur quantité de mouvement.

1. Montrer que \vec{A} est un vecteur constant du plan de la trajectoire.

2. Exprimer la quantité A^2 en fonction de l'énergie mécanique de la particule :

$$A^2 = K^2 \left(1 + 2 \frac{\mathcal{E}_m}{mK^2} L_0^2 \right).$$

3. Effectuer le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{OM}$. En déduire l'équation polaire de la trajectoire en désignant par θ l'angle entre \vec{A} et \vec{OM} :

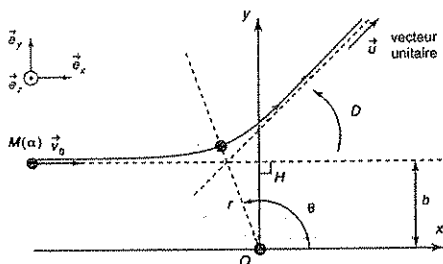
$$r(\theta) = \frac{p}{\frac{K}{|K|} + e \cos \theta}.$$

Exprimer le paramètre p et l'excentricité e de la conique en fonction de m, K, L_0 et \mathcal{E}_m .

En déduire une borne inférieure de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m de la particule et la classification des coniques obtenues en fonction du signe de l'énergie.

4. On s'intéresse au cas particulier de la diffusion Rutherford. Une particule incidente α , de masse m et de charge $q = 2e$, est émise à l'infini avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ et se dirige vers un

noyau cible placé en O , fixe dans \mathcal{R}_g et de charge $Q = Ze$. Sous l'effet de la force coulombienne répulsive, la particule α subit une déviation repérée par l'angle D . La distance entre le support de la vitesse initiale et la droite passant par O parallèle à \vec{v}_0 est le paramètre d'impact b .



En écrivant la conservation du vecteur de Runge-Lenz, loin avant et après la zone d'interaction, établir l'expression de l'angle de diffusion $D = (\vec{e}_x, \vec{u})$:

$$\tan \frac{D}{2} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m b v_0^2}.$$

Tester ses connaissances

1 Réponse a. La force est centrale et de centre de force O , il y a conservation du moment cinétique en O . Son expression en coordonnées polaires est :

$$\vec{L}_O = \underbrace{mr^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_z}_{\text{à l'instant } t}$$

\vec{L}_O est un vecteur constant et r est le rayon (constant) de la trajectoire. Ceci implique que $\frac{d\theta}{dt}$ est constant : le mouvement est circulaire uniforme.

2 Réponse e. Le moment cinétique est constant, il s'exprime au centre de force O par :

$$\vec{L}_O = \underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)}_{\text{en un point } M \text{ quelconque}} = \underbrace{\overrightarrow{OM}_1 \wedge m\vec{v}(M)}_{\text{au point } M_1} = \vec{0}$$

En un point M_1 de cette trajectoire, ce vecteur est nul. Il est donc nul à tout instant et quelle que soit la position du mobile. Par conséquent, à tout instant, \overrightarrow{OM} est colinéaire à $\vec{v}(M)$: la trajectoire de M est une droite passant par le centre de force.

3 Réponse c. Pour répondre à cette question, nous allons calculer l'énergie mécanique de la trajectoire :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{M_T m}{r}}_{\text{à l'instant } t} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{M_T m}{r_0}}_{\text{à l'instant } t=0} \\ &= m \left(\frac{1}{2}v_0^2 - G \frac{M_T}{r_0} \right) = m \cdot 4,6 \cdot 10^6 \text{ J.} \end{aligned}$$

Cette énergie est strictement positive, elle correspond à un état de diffusion : trajectoire hyperbolique.

4 Réponse c. La loi des aires implique :

$$\begin{aligned} \frac{r_A v_A}{\text{en } A} &= \frac{r_P v_P}{\text{en } P} \\ r_A &= 2r_P \Rightarrow 2v_A = v_P. \end{aligned}$$

5 Réponse a. L'énergie mécanique du satellite est :

$$\mathcal{E}_m = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{M_T m}{r}}_{\text{à l'instant } t}$$

Différentions cette expression en considérant que, pendant la durée très courte de l'impulsion donnée par le moteur, la distance r n'a pas le temps de varier :

$$d\mathcal{E}_m = mv dv.$$

Pour minimiser l'énergie nécessaire d' \mathcal{E}_m à une modification particulière de la vitesse dv il faut la vitesse v la plus grande possible : les corrections de trajectoires sont effectuées au périhélie pour économiser l'énergie.

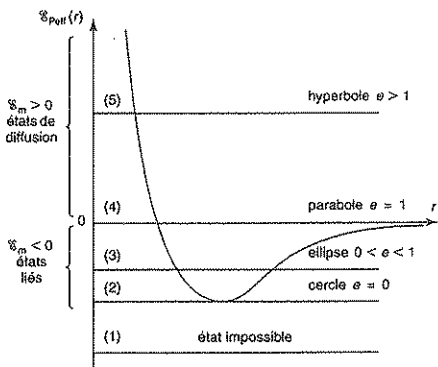
6 Réponse b. La troisième loi de Kepler permet d'accéder à la masse du Soleil :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}$$

La Terre effectue un tour complet autour du Soleil en une année, soit :

$$\begin{aligned} T &= 365 \times 24 \times 3600 \text{ s} \\ M_\odot &= \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg.} \end{aligned}$$

7 À retenir :



Savoir appliquer le cours

1 a. Le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G est galiléen, appliquons le principe fondamental de la dynamique au système dans la base polaire :

$$\vec{F}^{\text{grav}} = -G \frac{M_T m}{R^2} \vec{e}_r = m \vec{a}(M_T, \mathcal{R}_G) = -m \frac{v^2}{R} \vec{e}_r + m \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta.$$

Le caractère vectoriel de ce principe nous permet d'obtenir deux relations suivant \vec{e}_r , et \vec{e}_θ :

$$\vec{e}_r : v^2 = \frac{GM_T}{R} \quad (1)$$

$$\vec{e}_\theta : \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{mouvement circulaire uniforme.}$$

La vitesse du satellite est constante : $v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$.

L'expression de v obtenue permet d'écrire l'énergie cinétique du satellite :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} G \frac{M_T m}{R} = -\frac{1}{2} \mathcal{E}_P^{\text{grav}}(r)$$

$$\mathcal{E}_P^{\text{grav}}(r) = -2 \mathcal{E}_C.$$

D'où l'énergie mécanique du satellite :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_P^{\text{grav}} = -\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} \mathcal{E}_P^{\text{grav}}$$

$$\mathcal{E}_m = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{R}$$

b. La vitesse du satellite est $v = R\Omega$ avec $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, l'équation (1) donne :

$$v^2 = \frac{GM_T}{R} = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2.$$

D'où la troisième loi de Kepler relative à une trajectoire circulaire de rayon R , de période de révolution T autour du centre attracteur affecté de la masse M_T :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

c. Pour passer à la trajectoire elliptique, il suffit de remplacer R par le demi-grand axe de l'ellipse :

$$\mathcal{E}_m = -G \frac{M_T m}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

2 À la surface de la Terre $r = R_T$. L'énergie mécanique qu'il faut communiquer à l'objet pour le satelliser en orbite rasante est :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{M_T m}{R_T}.$$

En conséquence, la première vitesse cosmique ou vitesse de satellisation en orbite rasante est :

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$

À la surface de la Terre, si l'on confond champ de pesanteur et champ de gravitation :

$$m g_0 = G \frac{M_T m}{R_T^2}$$

D'où :

$$GM_T = g_0 R_T^2$$

La première vitesse cosmique s'exprime encore de la façon suivante :

$$v_0 = \sqrt{g_0 R_T} = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

La période de révolution est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T^3}{GM_T}} = 1 \text{ h } 25 \text{ min.}$$

3 La seconde vitesse cosmique ou vitesse de libération v_L correspond à la trajectoire parabolique du mobile d'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = 0.$$

Or, l'équation mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\frac{1}{2} m v_L^2 - G \frac{M_T m}{R_T} = 0.$$

D'où :

$$v_L = \sqrt{2 \frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{2} v_0 = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

4 Le point de départ de la fusée est à 3 185 km. L'énergie mécanique s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M_T m}{r} = 0.$$

Avec maintenant :

$$r = R_T + h = 6400 + 3185 = 9585 \text{ km.}$$

La vitesse de libération est, depuis cette altitude de lancement :

$$v_L = \sqrt{2 \frac{GM_T}{R_T + h}} = v_L \sqrt{\frac{R_T}{R_T + h}}$$

L'application numérique donne :

$$v_L = 9,15 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La valeur indiquée est exacte, les résultats sont compatibles.

5 Le mouvement est à force centrale, il y a conservation du moment cinétique en O , centre de force.

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{mOM_0} \wedge \vec{v}_O = \overrightarrow{mOM} \wedge \vec{v}$$

à l'instant $t=0$ à l'instant t

Or

$$\vec{L}_O = m \overrightarrow{OM_0} \wedge \vec{v}_O = m \left(\overrightarrow{OH} \wedge \vec{v}_O + \overrightarrow{HM_0} \wedge \vec{v}_O \right)$$

$$= -mbv_0 \vec{z}$$

Lorsque la particule atteint le point P , sa vitesse, tangente à la trajectoire, est normale à l'axe OP . Le moment cinétique appliqué en O donne alors :

$$\vec{L}_O = m \overrightarrow{OP} \wedge \vec{v}_P = m r_{\min} v_P \vec{z}$$

Par conséquent :

$$-bv_0 = r_{\min} v_P$$

Le mouvement est à force centrale, il y a conservation de l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)(2e)}{r_0} = \frac{1}{2} m v_P^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)(2e)}{r_{\min}}$$

tend vers 0

En remplaçant $v_P = -\frac{bv_0}{r_{\min}}$, on obtient l'équation du second degré :

$$r_{\min}^2 - \frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2} r_{\min} - b^2 = 0$$

Le discriminant est positif et on obtient les deux racines dont on ne garde que la racine positive :

$$r_{\min} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2} \right)^2 + b^2}$$

Dans le cas d'un processus de diffusion frontal, $b = 0$:

$$r_{\min} = \frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2}$$

S'entraîner

1. Le système étudié dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_e est l'électron. Il n'est soumis qu'à une seule force d'origine électrostatique :

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{z}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron donne :

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{z} = m_e \vec{a}(M_{\mathcal{R}_e})$$

La base adaptée à cette trajectoire circulaire et plane est la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. L'accélération de l'électron dans cette base est :

$$\vec{a}(M_{\mathcal{R}_e}) = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{z} = -m_e \frac{v^2}{r} \vec{e}_r + m_e \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta$$

\vec{z}_θ : $\frac{dv}{dt} = 0$ le mouvement de l'électron est circulaire uniforme autour du noyau

$$\vec{z}_r : m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}$$

2. L'énergie cinétique $\mathcal{E}_C(M_{\mathcal{R}_e}) = \frac{1}{2} m v^2$ devient :

$$\mathcal{E}_C(M_{\mathcal{R}_e}) = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \mathcal{E}_C(r)$$

Pour déterminer l'énergie potentielle électrostatique, revenons au travail élémentaire fourni par la force \vec{F} :

$$\delta\mathcal{T}(\vec{F}/\mathcal{R}_e) = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{z} \cdot (dr\vec{z} + r d\theta \vec{z}_\theta)$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -d\mathcal{E}_P(r)$$

$$\int_r^\infty d\mathcal{E}_P(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$\mathcal{E}_P(\infty) - \mathcal{E}_P(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

L'état de référence correspond à l'énergie potentielle électrostatique nulle à l'infini :

$$\mathcal{E}_P(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -2\mathcal{E}_C(r)$$

L'énergie totale de l'électron est donc :

$$\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}_C(r) + \mathcal{E}_P(r) = -\mathcal{E}_C(r)$$

$$= \frac{\mathcal{E}_P(r)}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

3. L'expression du moment cinétique de l'électron dans \mathcal{R}_e est :

$$\vec{L}_O(M_{\mathcal{R}_e}) = \overrightarrow{OM} \wedge m_e \vec{v} = r \vec{z} \wedge m_e v \vec{e}_\theta = r m_e v \vec{z}$$

Or ce moment cinétique de l'électron est quantifié. Son expression est :

$$r m_e v = n \frac{h}{2\pi}$$

D'où la vitesse de l'électron :

$$v = n \frac{h}{2\pi r m_e}$$

4. Dans la première question une autre expression de la vitesse a été établie :

$$v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} = \left(\frac{h}{2\pi r m_e} \right)^2$$

Cette équation permet d'établir les rayons des trajectoires circulaires stables de l'électron autour du noyau :

$$r = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = n^2 r_0$$

Le rayon de Bohr correspondant à la trajectoire de l'électron dans son état fondamental $n = 1$:

$$r_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$$

A.N. :

$$r_0 = 53 \text{ pm.}$$

5. En remplaçant r dans l'expression de l'énergie totale de l'électron, nous accédons à une forme quantifiée :

$$\mathcal{E}(r) = -\frac{1}{n^2} \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \frac{1}{r_0}$$

ou :

$$\mathcal{E}(r) = -\frac{\mathcal{E}_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_0 = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$$

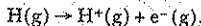
6. Lorsque l'électron est dans son état fondamental, c'est-à-dire dans son état de plus basse énergie ($n = 1$) correspondant à l'orbite la plus proche du noyau :

$$\mathcal{E}(r) = -\mathcal{E}_0$$

$$\mathcal{E}_0 = 13,6 \text{ eV.}$$

L'énergie d'ionisation est l'énergie qu'il faut fournir à l'électron pour le soustraire de l'interaction du noyau. Plus précisément, sa définition est :

L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène est l'énergie minimale à fournir pour arracher l'électron de l'atome gazeux à l'état fondamental. Elle correspond au processus :



État initial : $n = 1$

État final : $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}_{\text{ionisation}} = \mathcal{E}(n \rightarrow \infty) - \mathcal{E}(n = 1) = \mathcal{E}_0 = 13,6 \text{ eV.}$$

Dans l'état fondamental, la vitesse de l'électron est :

$$v_0 = \frac{h}{2\pi r_0 m_e} = 2,2 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette vitesse reste éloignée de la vitesse de la lumière dans le vide, l'électron n'est pas relativiste.

7. Pour déterminer la constante de Rydberg, écrivons l'énergie de l'électron dans les deux niveaux :

niveau supérieur n :

$$\mathcal{E}_n = -\frac{1}{n^2} \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$$

niveau inférieur m :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{1}{m^2} \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} < \mathcal{E}_n$$

$$h\nu_{n \rightarrow m} = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m = -\frac{1}{n^2} \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} + \frac{1}{m^2} \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$$

$$= \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\lambda_{n \rightarrow m}} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

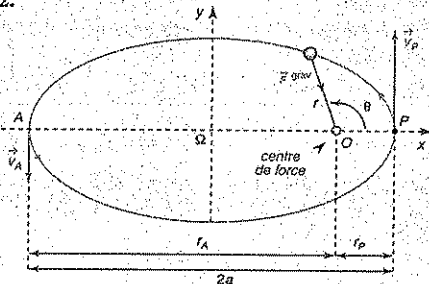
D'où l'expression de la constante de Rydberg :

$$R_H = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 1,09 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Le succès de la théorie de Bohr vient de la coïncidence entre les valeurs expérimentales de la constante de Rydberg et la valeur calculée.

2. 1. Le paramètre de la conique est noté p . L'excentricité de la conique est notée e , elle caractérise la nature de la trajectoire du satellite. Lorsque sa trajectoire est elliptique, donc lorsque r ne tend pas vers l'infini : $0 < e < 1$.

2.



Le satellite est soumis à une force centrale, il conserve son moment cinétique calculé au centre de force O .

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_{g.c.}$$

$$= m\vec{r} \wedge [\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta] = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

La valeur constante du moment cinétique peut se mettre sous la forme : $C = \frac{L_O}{m} = r r \dot{\theta}$.

Le vecteur vitesse de M est à tout instant tangent à la trajectoire de M : pour les points A et P la vitesse du mobile est réduite à sa composante orthoradiale :

$$\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta = C = r r \dot{\theta} = \frac{r_A v_A}{\text{en } A} = \frac{r_P v_P}{\text{en } P}$$

$$\boxed{r_A v_A = r_P v_P}$$

$$r_A > r_P \Rightarrow v_P > v_A.$$

3. Partons de l'équation de la conique :

$$r_A = r_{\max} = r(\pi) = \frac{p}{1 - e}$$

$$r_P = r_{\min} = r(0) = \frac{p}{1 + e}$$

$$2a = r_A + r_P = \frac{p}{1 - e} + \frac{p}{1 + e} = \frac{2p}{1 - e^2} \Rightarrow p = a(1 - e^2).$$

Ainsi :

$$r_P = \frac{1 - e^2}{1 + e} a \Rightarrow \boxed{r_P = (1 - e) a} \quad \text{et} \quad \boxed{r_A = (1 + e) a}$$

4. L'énergie mécanique du satellite est constante car la force de gravitation est conservative :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_C^{\text{grav}} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M_T m}{r}.$$

En A et P cette expression donne :

$$(1) \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v_A^2 - G \frac{M_T m}{r_A} \quad \times r_A^2$$

$$(2) \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v_P^2 - G \frac{M_T m}{r_P} \quad \times r_P^2$$

Effectuons la différence $(1) \times r_A^2 - (2) \times r_P^2$ et en prenant en compte $r_A v_A = r_P v_P$:

$$\frac{(r_A - r_P)}{=0} [\mathcal{E}_m (r_A + r_P) + G M_T m] = 0.$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -G \frac{M_T m}{2a}}$$

5. Pour notre raisonnement faisant intervenir la période de révolution du satellite, il manque une dernière loi, la *troisième loi de Kepler* :

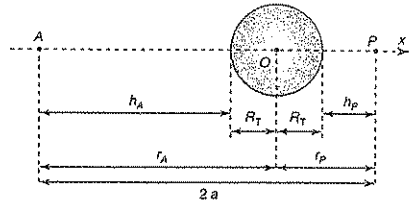
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G M_T}$$

À partir de cette loi, partant de la période T , on accède directement au demi-grand axe de l'ellipse :

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M_T}{4\pi^2}}$$

$$a = 7\,683 \text{ km.}$$

Les distances données pour A et P sont les distances au sol, or les formules que nous avons établies font apparaître r_A et r_P , distances au centre :



$$e = 1 - \frac{r_P}{a} = 1 - \left(\frac{h_P + R_T}{a} \right) \Rightarrow e = 0,093.$$

L'excentricité est bien comprise entre 0 et 1.

$$r_A = 2a - r_P = h_A + R_T \Rightarrow h_A = 2a - h_P - 2R_T$$

$$\boxed{h_A = 2\,026 \text{ km.}}$$

3 Le système est le satellite M de la Terre. L'étude s'effectue dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G supposé galiléen.

La seule force appliquée à M est la force gravitationnelle :

$$\vec{F}^{\text{grav}} = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r = -G \frac{M_T m}{r^3} \vec{OM}.$$

C'est une *force centrale conservative* d'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_P^{\text{grav}}(r) = -G \frac{M_T m}{r}.$$

Avec l'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle choisie nulle à l'infini.

1. Propriété du mouvement à force centrale : le mouvement est plan et ce plan est imposé par les conditions initiales sur les vecteurs position et vitesse du satellite. Le plan contenant les trois orbites est imposé par l'orbite géostationnaire qui est nécessairement dans le plan de l'Équateur.

2. Le référentiel \mathcal{R}_G étant galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique au satellite dans la base polaire :

$$\vec{F}^{\text{grav}} = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r = m \vec{a}(M, \mathcal{R}_G) = -m \frac{v^2}{r} \vec{e}_r + m \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta.$$

Le caractère vectoriel de ce principe nous permet d'obtenir deux relations suivant \vec{e}_r et \vec{e}_θ :

$$\vec{e}_r : \quad v^2 = \frac{G M_T}{r}$$

$$\vec{e}_\theta : \quad \frac{dv}{dt} = 0.$$

Le mouvement du satellite est circulaire uniforme à la

$$\text{vitesse : } v_B = \sqrt{\frac{G M_T}{r}}$$

Le satellite étant en orbite rasante $r = R_T$ et

$$v_B = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$

En confondant champ de pesanteur et champ de gravitation : $m g_0 = G \frac{M_T m}{R_T^2}$

$$D'où :$$

$$\boxed{GM_T = g_0 R_T^2}$$

La vitesse du satellite s'exprime encore de la façon suivante :

$$v_B = \sqrt{R_T g_0} = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (première vitesse cosmique).}$$

3. Le mouvement du satellite M , soumis à l'interaction gravitationnel, est circulaire et de rayon R_G sur l'orbite géostationnaire. Il obéit à la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{R_G^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

T est la période du mouvement de rotation de la Terre, elle est aussi la période de rotation du satellite en orbite géostationnaire : le satellite est à tout instant à la verticale d'un même lieu à la surface du sol terrestre.

$$T = 86\,164 \text{ s.}$$

On déduit immédiatement le rayon R_G de la trajectoire :

$$R_G = 3 \sqrt{\frac{T^2 g_0 R_T^2}{4\pi^2}} = 42\,130 \text{ km.}$$

La vitesse de rotation du satellite est la vitesse Ω de rotation de la Terre :

$$v_G = \sqrt{\frac{GM_T}{R_G}} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_G}} = 3,07 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4. L'énergie mécanique du satellite en trajectoire elliptique est :

$$\mathcal{E}_m = -G \frac{M_T m}{2a} = -\frac{g_0 R_T^2 m}{2a}$$

La distance $2a$ est le grand axe de l'ellipse parcourue par le satellite : $2a = R_T + R_G$.

L'énergie de la trajectoire elliptique est ainsi :

$$\mathcal{E}_m = -m g_0 \frac{R_T^2}{R_T + R_G} = -8,2 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

Cette énergie mécanique s'exprime à une distance r quelconque du foyer de l'ellipse situé en O de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_G^{\text{grav}} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M_T m}{r} = \frac{1}{2} m v^2 - m g_0 \frac{R_T^2}{r} \\ &= -m g_0 \frac{R_T^2}{R_T + R_G} \end{aligned}$$

D'où l'expression de la vitesse en un point quelconque de l'orbite elliptique de transfert :

$$v = \sqrt{2 g_0 R_T \left(\frac{R_T}{r} - \frac{R_T}{R_T + R_G} \right)}$$

Le supplément de vitesse en P est :

$$\begin{aligned} \Delta v_P &= v_P - v_B = \sqrt{2 g_0 R_T \left(1 - \frac{R_T}{R_T + R_G} \right)} - \sqrt{R_T g_0} \\ &= \sqrt{R_T g_0} \left(\sqrt{2 \left(1 - \frac{R_T}{R_T + R_G} \right)} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\Delta v_P = 2,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pour déterminer le supplément de vitesse en A , rappelons qu'il y a conservation du moment cinétique du satellite sur sa trajectoire elliptique, elle implique :

$$R_G v_A = R_T v_P.$$

En conséquence :

$$v_A = \frac{R_T}{R_G} v_P = \frac{R_T}{R_G} \sqrt{2 g_0 R_T \left(1 - \frac{R_T}{R_T + R_G} \right)}$$

D'où le supplément de vitesse en A :

$$\begin{aligned} \Delta v_A &= v_G - v_A = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_G}} - \frac{R_T}{R_G} \sqrt{2 g_0 R_T \left(1 - \frac{R_T}{R_T + R_G} \right)} \\ &= R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_G}} \left[1 - \sqrt{2 \frac{R_T}{R_G} \left(1 - \frac{R_T}{R_T + R_G} \right)} \right] \end{aligned}$$

$$\Delta v_A = 1,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

L'énergie mécanique de la trajectoire basse est déduite de l'énergie mécanique de la trajectoire elliptique en remplaçant la longueur a du demi-grand axe par le rayon R de la trajectoire circulaire.

$$\mathcal{E}_{mB} = -\frac{g_0 R_T^2 m}{2 R_T} = -\frac{1}{2} g_0 R_T m.$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_{mP} &= \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{mB} = -m g_0 \frac{R_T^2}{R_T + R_G} + \frac{1}{2} g_0 R_T m \\ &= m g_0 R_T \left(\frac{1}{2} - \frac{R_T}{R_T + R_G} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta \mathcal{E}_{mP} = 23 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

De la même façon le transfert d'énergie mécanique en A est :

$$\mathcal{E}_{mG} = -\frac{g_0 R_T^2 m}{2 R_G}$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_{mA} &= \mathcal{E}_{mG} - \mathcal{E}_m = m g_0 \frac{R_T^2}{R_T + R_G} - \frac{g_0 R_T^2 m}{2 R_G} \\ &= m g_0 R_T^2 \left(\frac{1}{R_T + R_G} - \frac{1}{2 R_G} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta \mathcal{E}_{mA} = 3,5 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

5. La troisième loi de Kepler appliquée sur la trajectoire elliptique permet de calculer la durée du transfert. Le satellite de parcourt qu'une demi-ellipse, aussi la durée du transfert correspond à la demi-période de révolution.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T^2}{\left(\frac{R_T + R_G}{2}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

$$\Rightarrow T_{\text{trans}} = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{GM_T} \left(\frac{R_T + R_G}{2}\right)^3} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{R_T} \sqrt{\frac{(R_T + R_G)^3}{2g_0}}$$

$$T_{\text{trans}} = 1,88 \cdot 10^4 \text{ s} = 5 \text{ h } 14 \text{ min.}$$

$$\mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} \mathcal{E}_P^{\text{grav}} \quad (3)$$

2. Pour déterminer la variation $\Delta \mathcal{E}_P^{\text{grav}}$ de l'énergie potentielle de gravitation au cours d'une révolution, revenons à l'équation (1) : la variation de r étant très faible, on peut écrire

$$\Delta \mathcal{E}_P^{\text{grav}} = GM_T m \frac{\Delta r}{r^2}$$

En différenciant les équations (2) et (3), on relie les énergies de la façon suivante :

$$\Delta \mathcal{E}_m = -\Delta \mathcal{E}_C = \frac{1}{2} \Delta \mathcal{E}_P^{\text{grav}} = \frac{1}{2} GM_T m \frac{\Delta r}{r^2} \quad (4)$$

3. Appliquons maintenant le théorème de l'énergie mécanique de façon à faire apparaître le terme de frottement :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_C)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_C} = \mathcal{P}(\vec{F}_{t/\mathcal{R}_C}) = \vec{F}_t \cdot \vec{v}$$

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_C)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_C} = -\alpha m v^3$$

Sur une période, la perte d'énergie mécanique est donc :

$$\Delta \mathcal{E}_m = -\alpha m v^3 T \quad (5)$$

L'énergie mécanique du satellite diminue alors que son énergie cinétique augmente.

En comparant les équations (4) et (5) :

$$\frac{1}{2} GM_T \frac{\Delta r}{r^2} = -\alpha v^3 T.$$

Grâce à l'équation (2) donnant $v^2 = \frac{GM_T}{r}$, on peut simplifier en :

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} = -\alpha v T.$$

La trajectoire étant quasi circulaire, la vitesse s'écrit en faisant apparaître la vitesse angulaire ω du satellite :

$$v = r\omega \text{ avec } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} = -2\pi\alpha \text{ et } \Delta r = -4\pi\alpha r^2$$

Le freinage rapproche le satellite de la surface terrestre.

4.

$$dr = \frac{-4\pi\alpha r^2}{T} dt \quad (6)$$

Sachant que, sur une révolution, le satellite obéit à la

$$\text{troisième loi de Kepler : } \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_T}} r \sqrt{r}.$$

En remplaçant dans (6), on obtient :

$$\frac{dr}{r} = -2\alpha \sqrt{GM_T} dt$$

4. 1. Le système est le satellite, son mouvement est étudié dans le référentiel géocentrique galiléen.

Bilan des forces appliquées au système :

• Terre \rightarrow M : force gravitationnelle

$$\vec{F}^{\text{grav}} = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r = f(r) \vec{e}_r, \text{ conservative.}$$

• Air \rightarrow M : force de frottement

$$\vec{F}_t = -\alpha m v \vec{v}, \text{ non conservative.}$$

La force gravitationnelle est centrale et dérive d'une énergie potentielle par la relation :

$$f(r) = -G \frac{M_T m}{r^2} = -\frac{d\mathcal{E}_P^{\text{grav}}}{dr}$$

En séparant les variables :

$$d\mathcal{E}_P^{\text{grav}} = GM_T m \frac{dr}{r^2} \quad (1)$$

L'intégration donne :

$$\int_r^\infty d\mathcal{E}_P^{\text{grav}} = GM_T m \int_r^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$\mathcal{E}_P^{\text{grav}}(\infty) - \mathcal{E}_P^{\text{grav}}(r) = \frac{GM_T m}{r}$$

L'énergie potentielle gravitationnelle est :

$$\mathcal{E}_P^{\text{grav}}(r) = -\frac{GM_T m}{r}$$

Appliquons maintenant le principe fondamental de la dynamique au satellite en négligeant la force de frottement, il vient :

$$\vec{F}^{\text{grav}} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_C)$$

$$-G \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r = -m \frac{v^2}{r} \vec{e}_r + m \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta.$$

Le caractère vectoriel de ce principe nous permet d'obtenir deux relations suivant \vec{e}_r et \vec{e}_θ :

$$\vec{e}_r : v^2 = \frac{GM_T}{r}; \quad \vec{e}_\theta : \frac{dv}{dt} = 0.$$

Le mouvement du satellite est circulaire uniforme et son énergie cinétique constante s'écrit dans le référentiel géocentrique :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} G \frac{m M_T}{r} = -\frac{1}{2} \mathcal{E}_P^{\text{grav}}(r) \quad (2)$$

Comme $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_P^{\text{grav}}$, il vient immédiatement :

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{r}} = -2\alpha \sqrt{GM_T} \int_0^t dt.$$

On obtient finalement :

$$\sqrt{r} = \sqrt{r_0} + Kt$$

Avec

$$K = -\alpha \sqrt{GM_T}$$

5 Le système est la particule M de masse m . Son mouvement est étudié dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

La particule est soumise à la force centrale newtonienne :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r, \text{ avec } \vec{z}_r = \frac{\vec{OM}}{r}.$$

- $K > 0$ force attractive.
- $K < 0$ force répulsive.

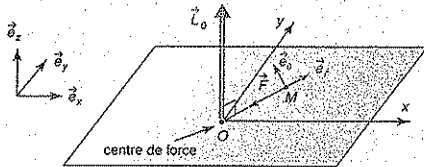
Cette force dérive de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p(M) = -\frac{K}{r}.$$

Cette force est conservative et l'énergie mécanique \mathcal{E}_m de la particule est une constante du mouvement fixée par les conditions initiales.

Ce mouvement à force centrale implique d'autre part la conservation du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{0}$.

Le moment cinétique par rapport à O est un vecteur constant, orthogonal au plan de la trajectoire de M imposé par les conditions initiales. Choisissons l'orientation de \vec{L}_0 suivant \vec{z}_r de sorte que le mouvement de M s'effectue dans le plan (Oxy) .



L'expression de \vec{L}_0 en coordonnées polaires est :

$$\vec{L}_0 = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

L'application du principe fondamental de la dynamique à la particule M donne :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r.$$

1. Pour montrer que le vecteur \vec{A} est un vecteur constant, nous allons effectuer sa dérivée par rapport à t dans le référentielle \mathcal{R}_g . Cette dérivée est nulle :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{L}_0 + \vec{p} \wedge \frac{d\vec{L}_0}{dt} - K \frac{d\vec{z}_r}{dt}.$$

Sachant que $\frac{d\vec{z}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$, cette expression devient :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{K}{m r^2} \vec{e}_r \wedge \vec{L}_0 - K \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

en remplaçant \vec{L}_0 par son expression, il vient :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -K \dot{\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z - K \dot{\theta} \vec{e}_\theta = K \dot{\theta} \vec{e}_\theta - K \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \vec{0}.$$

\vec{A} est un vecteur constant.

Pour montrer que \vec{A} est dans le plan de la trajectoire, développons $\vec{p} \wedge \vec{L}_0$:

$$\begin{aligned} \vec{p} \wedge \vec{L}_0 &= m(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \wedge L_0 \vec{e}_z \\ &= -m \dot{r} L_0 \vec{e}_\theta + \underbrace{m r \dot{\theta} L_0}_{\frac{L_0}{r}} \vec{e}_r \\ &= -m \dot{r} L_0 \vec{e}_\theta + \frac{L_0^2}{r} \vec{e}_r. \end{aligned}$$

Le vecteur de Runge-Lenz \vec{A} n'a pas de composante suivant \vec{e}_z ; il est dans le plan (Oxy) de la trajectoire.

2. Exprimons A^2 :

$$A^2 = \frac{1}{m^2} (\vec{p} \wedge \vec{L}_0)^2 + K^2 - 2 \frac{K}{m} \vec{p} \cdot (\vec{p} \wedge \vec{L}_0).$$

Or

$$\vec{p} \wedge \vec{L}_0 = -m \dot{r} L_0 \vec{e}_\theta + \frac{L_0^2}{r} \vec{e}_r \Rightarrow$$

$$\vec{e}_r \cdot (\vec{p} \wedge \vec{L}_0) = \frac{L_0^2}{r} \quad (1)$$

$$(\vec{p} \wedge \vec{L}_0)^2 = m^2 L_0^2 [\dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2] = (mv)^2 L_0^2 = p^2 L_0^2$$

$$A^2 = \frac{p^2}{m^2} L_0^2 + K^2 - 2 \frac{K L_0^2}{m r}.$$

Dans l'expression proposée, il y a l'énergie mécanique de la particule :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c(M/\mathcal{R}_g) + \mathcal{E}_p(M) = \frac{p^2}{2m} - \frac{K}{r}.$$

En conséquence :

$$\frac{p^2}{m^2} = \frac{2}{m} \left(\mathcal{E}_m + \frac{K}{r} \right).$$

D'où :

$$A^2 = 2 \frac{\mathcal{E}_m}{m} L_0^2 + K^2.$$

$$A^2 = K^2 \left(1 + 2 \frac{\mathcal{E}_m}{m K^2} L_0^2 \right) \quad (2)$$

$$3. \vec{A} \cdot \vec{OM} = \frac{r}{m} \underbrace{(\vec{p} \wedge \vec{L}_0) \cdot \vec{e}_r}_{(1)} - K r \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_1$$

$$\vec{A} \cdot \vec{OM} = \frac{L_0^2}{m} - Kr.$$

θ désignant l'angle entre \vec{A} et \vec{OM} :

$$\vec{A} \cdot \vec{OM} = \|\vec{A}\| \|\vec{OM}\| \cos \theta = A r \cos \theta \quad (A > 0)$$

on obtient donc l'égalité :

$$A r \cos \theta = \frac{L_0^2}{m} - Kr.$$

Elle implique :

$$r = \frac{\frac{L_0^2}{m}}{1 + \frac{A}{K} \cos \theta}.$$

L'équation (2) donne d'expression de A :

$$A = |K| \sqrt{1 + 2 \frac{\mathcal{E}_m}{mK^2} L_0^2}.$$

En remplaçant A dans l'expression de r :

$$r = \frac{\frac{L_0^2}{m|K|}}{\frac{K}{|K|} + \sqrt{1 + 2 \frac{\mathcal{E}_m}{mK^2} L_0^2} \cos \theta}$$

Le paramètre p et excentricité e de la conique sont :

$$p = \frac{L_0^2}{m|K|} \quad \text{et} \quad e = \sqrt{1 + 2 \frac{\mathcal{E}_m}{mK^2} L_0^2}$$

L'expression de e impose :

$$1 + 2 \frac{\mathcal{E}_m}{mK^2} L_0^2 > 0 \Rightarrow \mathcal{E}_m > -\frac{mK^2}{2L_0^2}$$

Élevons au carré l'excentricité :

$$e^2 - 1 = 2 \frac{\mathcal{E}_m}{mK^2} L_0^2.$$

C'est l'excentricité qui fixe la nature de la trajectoire :

- trajectoire hyperbolique $e > 1$ $\mathcal{E}_m > 0$,
- trajectoire parabolique $e = 1$ $\mathcal{E}_m = 0$,
- trajectoire elliptique $0 < e < 1$ $\mathcal{E}_m < 0$.

4. Dans le cas de la diffusion de Rutherford, la force s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r^2} \vec{\lambda}_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \vec{\lambda}_r.$$

Nous pouvons adopter les résultats précédents en consi-

dérant $K = -\frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0} < 0$.

Le vecteur \vec{L}_0 est constant : $\vec{L}_0 = L_0 \vec{\lambda}_z$.

Loin avant l'interaction : $\vec{p}_0 = m v_0 \vec{\lambda}_x = -m v_0 \vec{\lambda}_z$,
 $[\vec{\lambda}_x = -\vec{\lambda}_z]$.

$$\vec{A}_0 = v_0 L_0 \vec{\lambda}_x \wedge \vec{\lambda}_z + K \vec{\lambda}_z.$$

$$\vec{A}_0 = K \vec{\lambda}_z - v_0 L_0 \vec{\lambda}_y$$

Loin après l'interaction :

$$\vec{p}_1 = m v_1 \vec{u} = m v_1 (\cos D \vec{\lambda}_x + \sin D \vec{\lambda}_y).$$

$$[\vec{u} = \cos D \vec{\lambda}_x + \sin D \vec{\lambda}_y]$$

$$\vec{A}_1 = v_1 \vec{u} \wedge L_0 \vec{\lambda}_z - K \vec{u}$$

$$\vec{A}_1 = v_1 (\cos D \vec{\lambda}_x + \sin D \vec{\lambda}_y) \wedge L_0 \vec{\lambda}_z - K (\cos D \vec{\lambda}_x + \sin D \vec{\lambda}_y)$$

$$\vec{A}_1 = \psi_1 L_0 \sin D - K \cos D \vec{\lambda}_x - (v_1 L_0 \cos D + K \sin D) \vec{\lambda}_y$$

Écrivons les lois de conservations :

(i) conservation de l'énergie mécanique, considérant que l'énergie potentielle d'interaction est nulle à l'infini que ce soit avant ou après le processus de choc :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \quad v_0 = v_1$$

(ii) conservation du moment cinétique :

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= L_0 \vec{\lambda}_z = \underbrace{m \vec{OM}_0}_{\text{avant interaction}} \wedge \vec{v}_0 \\ &= m \vec{OH} \wedge \vec{v}_0 + m \underbrace{HM_0}_{\vec{d}} \wedge \vec{v}_0 \\ &= m b v_0 \vec{\lambda}_y \wedge \vec{\lambda}_z = -m b v_0 \vec{\lambda}_x \end{aligned}$$

$$L_0 = -m b v_0$$

L'invariance du vecteur Runge-Lenz permet d'écrire deux équations suivant $\vec{\lambda}_x$ et $\vec{\lambda}_y$:

$$\vec{A}_0 = \vec{A}_1$$

$$\begin{cases} K = v_0 L_0 \sin D - K \cos D \\ v_0 L_0 = v_0 L_0 \cos D + K \sin D. \end{cases}$$

Choisissons la première équation :

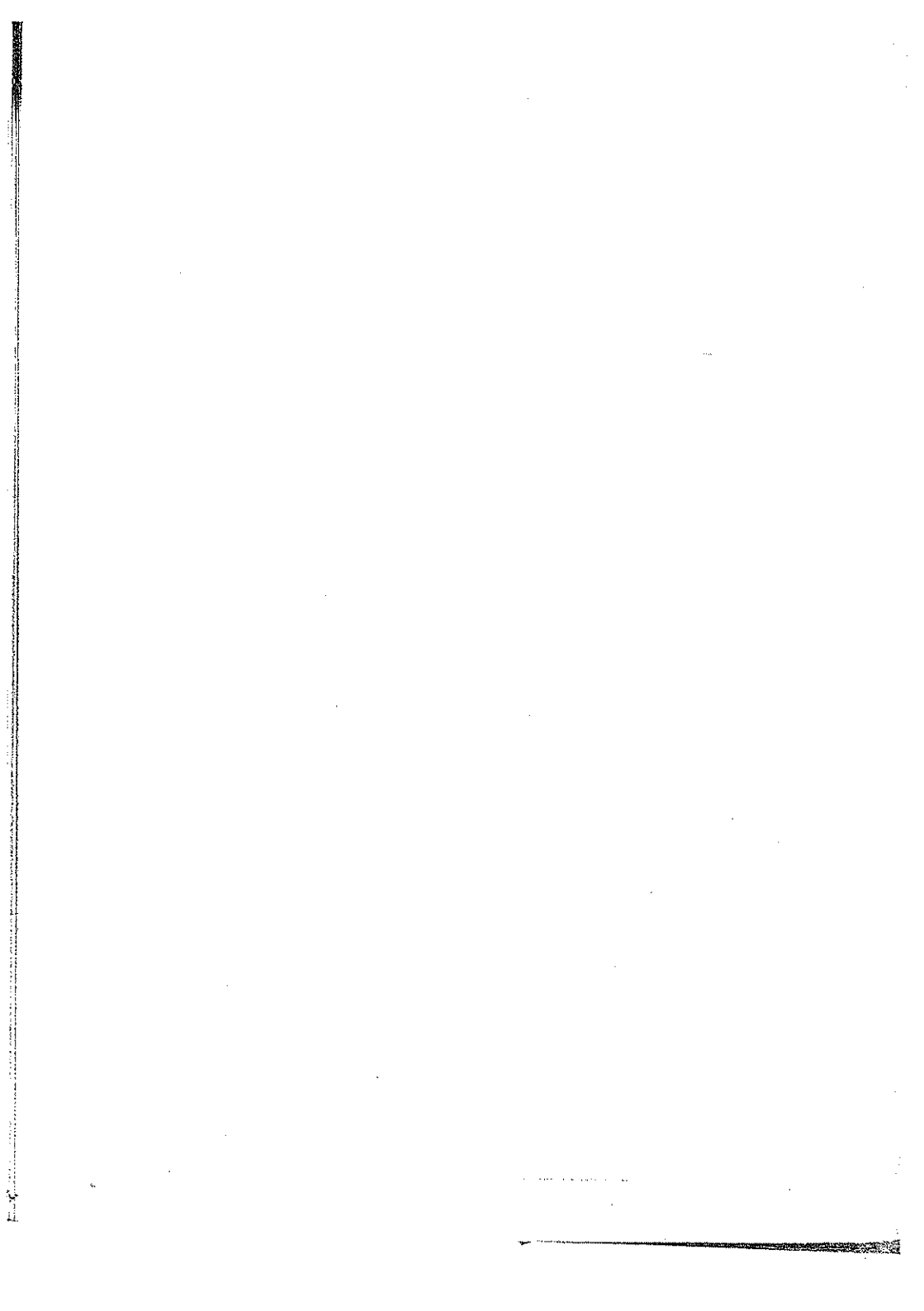
$$K(1 + \cos D) = v_0 L_0 \sin D.$$

$$\text{Or } \sin D = 2 \cos \frac{D}{2} \sin \frac{D}{2}$$

$$1 + \cos D = 2 \cos^2 \frac{D}{2} \Rightarrow \tan \frac{D}{2} = \frac{K}{v_0 L_0}$$

En remplaçant K et v_0 par leurs expressions, il vient :

$$\tan \frac{D}{2} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m b v_0^2}$$



Changement de référentiel

Attention
 a B.O.N.D.
 $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est liée
 au référentiel (\mathcal{R}) ,
 i B.O.N.D.
 $(\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$ est liée
 au référentiel (\mathcal{R}') et
 accompagne dans
 un mouvement par
 rapport au référen-
 tel (\mathcal{R}) .

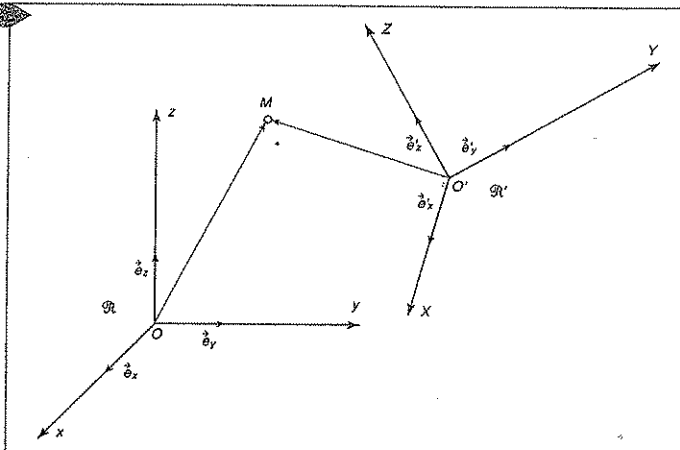
1 Changement de référentiel

1.1. Mouvement absolu et mouvement relatif

Considérons deux référentiels :

- un référentiel $\mathcal{R}(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- un référentiel $\mathcal{R}'(O' ; \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$, en mouvement par rapport à (\mathcal{R}) .

Fig. 1



Remarque

Cette dénomination est arbitraire car les rôles joués par chacun de ces deux référentiels sont interchangeables.

Le mouvement d'une particule M dans l'espace peut être décrit par :

- soit l'observateur O lié au référentiel (\mathcal{R}) : le mouvement de M par rapport à (\mathcal{R}) est qualifié de *mouvement absolu* ;
- soit l'observateur O' lié au référentiel d'entraînement (\mathcal{R}') : le mouvement de M par rapport à (\mathcal{R}') est qualifié de *mouvement relatif*.

Parce que les deux observateurs sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, ils ne peuvent percevoir les déplacements de M de façon identique : la trajectoire est une apparence visuelle et les grandeurs cinématiques, telles que la vitesse et l'accélération de M , ne prennent pas la même valeur dans deux référentiels distincts.

Le passage de la description du mouvement d'un observateur à l'autre s'appelle la *composition des mouvements*. Il nécessite la connaissance précise du mouvement de (\mathcal{R}') par rapport à (\mathcal{R}) appelé *mouvement d'entraînement*.

1.2. Mouvement d'entraînement du référentiel (\mathcal{R}') par rapport au référentiel (\mathcal{R})

Le référentiel (\mathcal{R}') constitue un solide indéformable, c'est-à-dire un ensemble de points dont les distances mutuelles ne varient pas au cours du temps.

Son mouvement général par rapport à (\mathcal{R}) se décompose en un mouvement de translation par rapport à (\mathcal{R}) caractérisé par le vecteur vitesse $\vec{v}(O'/\mathcal{R})$ et un mouvement de rotation par rapport à (\mathcal{R}) caractérisé par un vecteur rotation d'entraînement $\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}$ tel que :

$$\left(\frac{d\vec{z}'_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{z}'_x ; \quad \left(\frac{d\vec{z}'_y}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{z}'_y ; \quad \left(\frac{d\vec{z}'_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{z}'_z$$

Nous allons établir une formule de dérivation vectorielle pour un mouvement quelconque du solide de référence qui permettra de passer de la dérivée d'une fonction vectorielle par rapport au temps dans (\mathcal{R}') à sa dérivée dans (\mathcal{R}).

Dérivons successivement dans (\mathcal{R}) et dans (\mathcal{R}') la fonction vectorielle quelconque du temps $\vec{U}(t)$:

$$\vec{U} = U_X \vec{z}'_x + U_Y \vec{z}'_y + U_Z \vec{z}'_z$$

• dans (\mathcal{R})

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{U}_X \vec{z}'_x + \dot{U}_Y \vec{z}'_y + \dot{U}_Z \vec{z}'_z + U_X \left(\frac{d\vec{z}'_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + U_Y \left(\frac{d\vec{z}'_y}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + U_Z \left(\frac{d\vec{z}'_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{U}_X \vec{z}'_x + \dot{U}_Y \vec{z}'_y + \dot{U}_Z \vec{z}'_z + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \underbrace{(U_X \vec{z}'_x + U_Y \vec{z}'_y + U_Z \vec{z}'_z)}_{\vec{U}}$$

• dans (\mathcal{R}')

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \dot{U}_X \vec{z}'_x + \dot{U}_Y \vec{z}'_y + \dot{U}_Z \vec{z}'_z$$

En comparant les deux résultats :

La formule de dérivation vectorielle pour un mouvement quelconque de (\mathcal{R}') par rapport à (\mathcal{R}) est :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{U}$$

Remarque

Il est inutile de préciser le référentiel de dérivation pour le vecteur rotation :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \\ &= \left(\frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} \\ &= \frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt} \end{aligned}$$

2 Composition des mouvements

L'observateur du référentiel « absolu » (\mathcal{R}), situé en O , observe le point M et détermine le vecteur position \overrightarrow{OM} :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

L'observateur du référentiel « relatif » (\mathcal{R}'), situé en O' , observe le point M et détermine le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$:

$$\overrightarrow{O'M} = X\vec{e}'_x + Y\vec{e}'_y + Z\vec{e}'_z.$$

La relation entre les vecteurs positions est immédiate :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}} \quad (1)$$

2.1. Composition des vecteurs vitesse

Le vecteur vitesse *absolue* de M par rapport à (\mathcal{R}) pour l'observateur en O est :

$$\vec{v}_{\text{abs}}(M) = \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z.$$

Le vecteur vitesse *relative* de M par rapport à (\mathcal{R}') pour l'observateur en O' est :

$$\vec{v}_{\text{rel}}(M) = \vec{v}(M/\mathcal{R}') = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \dot{X}\vec{e}'_x + \dot{Y}\vec{e}'_y + \dot{Z}\vec{e}'_z.$$

Pour comparer ces deux vitesses, dérivons l'équation (1) par rapport à t dans le référentiel (\mathcal{R}) puis utilisons la formule de dérivation vectorielle :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \\ \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O'M} \\ \underbrace{\vec{v}_{\text{abs}}(M)}_{\text{vitesse absolue}} &= \underbrace{\vec{v}(M/\mathcal{R}')}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\text{vitesse d'entraînement}} \end{aligned} \quad (2)$$

On reconnaît dans cette expression le vecteur vitesse relative du point M par rapport au référentiel (\mathcal{R}'), le second terme est la *vitesse d'entraînement* du point M .

$$\vec{v}_{\text{abs}}(M) = \vec{v}_{\text{rel}}(M) + \underbrace{\vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\vec{v}_{\text{ent}}(M)}.$$

2.1.1. Vitesse d'entraînement - Notion de point coïncident

La vitesse d'entraînement du point M est :

$$\boxed{\vec{v}_{\text{ent}}(M) = \vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

Considérons le point fixe M^* du référentiel (\mathcal{R}') coïncidant avec M à l'instant t , sa vitesse par rapport à (\mathcal{R}) est la vitesse d'entraînement du point M :

$$\vec{v}_{\text{abs}}(M^*) = \vec{v}(M^*/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM^*}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(O'/\mathcal{R})}_{\substack{\text{vitesse d'entraînement} \\ \text{due à la translation} \\ \text{de } \mathcal{R}'/\mathcal{R}}} + \underbrace{\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O'M^*}}_{\substack{\text{vitesse d'entraînement} \\ \text{due à la rotation} \\ \text{de } \mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$$

$$\vec{v}_{\text{ent}}(M) = \vec{v}_{\text{abs}}(M^*).$$

Attention

M^* est un point fixe sur le solide indéformable de référence (\mathcal{R}').

La vitesse instantanée d'entraînement du point M s'interprète comme la vitesse du point coïncident M^* de \mathcal{R}' par rapport au référentiel (\mathcal{R}) , autrement dit, c'est la vitesse qu'aurait M s'il était fixe dans (\mathcal{R}') .

2.1.2. Loi de composition des vitesses

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(M/\mathcal{R}') + \vec{v}_{\text{ent}}(M)$$

$$\vec{v}_{\text{ent}}(M) = \vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

2.2. Composition des vecteurs accélération

Le vecteur accélération *absolue* de M par rapport à (\mathcal{R}) pour l'observateur en O est :

$$\vec{a}_{\text{abs}}(M) = \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z$$

Le vecteur accélération *relative* de M par rapport à (\mathcal{R}') pour l'observateur en O' est :

$$\vec{a}_{\text{rel}}(M) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}'}$$

Pour les comparer, dérivons l'équation (2) par rapport à t dans le référentiel (\mathcal{R}) :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R}')}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{v}(O'/\mathcal{R}')}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

En utilisant la formule de dérivation vectorielle, cette équation devient :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \left[\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O'M} \right]$$

$$\underbrace{\vec{a}(M/\mathcal{R})}_{\text{accélération absolue}} = \underbrace{\vec{a}(M/\mathcal{R}')}_{\text{accélération relative}} + \underbrace{\vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge (\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O'M})}_{\text{accélération d'entraînement}} + \underbrace{2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')}_{\text{accélération de Coriolis}}$$

On reconnaît dans cette expression le vecteur accélération relative du point M par rapport au référentiel (\mathcal{R}') auquel s'ajoutent deux termes : l'*accélération d'entraînement* et l'*accélération complémentaire* ou *de Coriolis* du point M .

2.2.1. Accélération d'entraînement

L'accélération d'entraînement est l'accélération absolue du point fixe M^* du référentiel (\mathcal{R}') qui coïncide avec M à l'instant t :

$$\vec{a}_{\text{abs}}(M^*) = \vec{a}(M^*/\mathcal{R}) = \underbrace{\vec{a}(O'/\mathcal{R})}_{\text{accélération d'entraînement due à la rotation de } \mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M^*} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge (\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O'M^*})}_{\text{accélération d'entraînement due à la rotation de } \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

L'accélération instantanée d'entraînement du point M s'interprète comme l'accélération du point coïncident M^* par rapport au référentiel (\mathcal{R}) , autrement dit, c'est l'accélération qu'aurait M s'il était fixe dans (\mathcal{R}') .

$$\vec{a}_{\text{abs}}(M^*) = \vec{a}_{\text{ent}}(M).$$

2.2.2. Accélération de Coriolis

Le dernier terme est l'accélération de Coriolis du point M :

$$\vec{a}_{\text{cor}}(M) = 2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(M).$$

L'accélération de Coriolis disparaît lorsque :

- $\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} = \vec{0}$ le référentiel (\mathcal{R}') est en translation par rapport à (\mathcal{R}) .
- $\vec{v}_{\text{rel}}(M) = \vec{0}$ le point M est à l'équilibre dans (\mathcal{R}') .

2.2.3. Loi de composition des accélérations

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}_{\text{ent}}(M) + \vec{a}_{\text{cor}}(M)$$

- $\vec{a}_{\text{ent}}(M) = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge (\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{O'M})$
- $\vec{a}_{\text{cor}}(M) = 2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(M).$

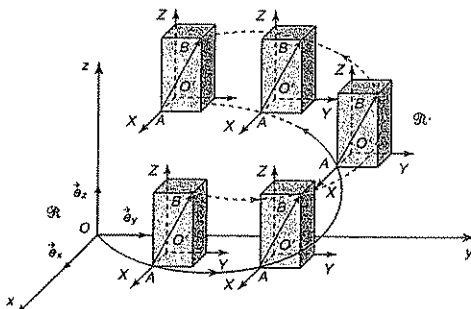
3 Mouvements d'entraînement particuliers de (\mathcal{R}') par rapport à (\mathcal{R})

3.1. Le mouvement d'entraînement est une translation

Le solide de référence ou référentiel (\mathcal{R}') est animé d'un mouvement de translation dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ si, A et B étant deux points quelconques fixés sur (\mathcal{R}') , le vecteur \overrightarrow{AB} reste constant au cours du temps.

Pour bien comprendre, observez les différentes positions du référentiel (\mathcal{R}') en translation par rapport au référentiel \mathcal{R} :

Fig. 2



\mathcal{R}' est en mouvement de translation par rapport à \mathcal{R} .

Appliquons la formule de dérivation au vecteur $\vec{AB}(t)$ quelconque, fixe sur le référentiel (\mathcal{R}') en translation et donc indépendant du temps :

$$\underbrace{\left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}}_{\vec{0}} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'}}_{\vec{0}} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{AB}.$$

Cette relation étant réalisée quel que soit le vecteur $\vec{AB}(t)$:

Le référentiel (\mathcal{R}') est en translation par rapport au référentiel (\mathcal{R}) si : $\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} = \vec{0}$.

Appliquons la formule de dérivation aux vecteurs de la base *liée* au référentiel \mathcal{R}' en translation :

$$\left(\frac{d\vec{e}'_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{e}'_x = \vec{0} \quad \left(\frac{d\vec{e}'_y}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{e}'_y = \vec{0} \quad \left(\frac{d\vec{e}'_z}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{e}'_z = \vec{0}.$$

Cette base orthonormée directe est aussi fixe dans \mathcal{R} et on peut les choisir tels que :

$$\vec{e}'_x = \vec{e}_x; \quad \vec{e}'_y = \vec{e}_y; \quad \vec{e}'_z = \vec{e}_z.$$

En conséquence :

Si le mouvement d'entraînement est une translation, il est inutile de préciser le référentiel de dérivation :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \frac{d\vec{U}}{dt}.$$

3.1.1. Superposabilité des trajectoires dans \mathcal{R} de tous les points fixes de \mathcal{R}'

Les trajectoires de tous les points du solide sont superposables.

Commentaires :

- Les trajectoires ont une forme quelconque : la translation est curviligne.
- Les trajectoires sont des droites parallèles entre elles : la translation est rectiligne.
- Les trajectoires sont des cercles de même rayon : la translation est circulaire.

3.1.2. Loi de composition des vitesses

La loi de composition des vitesses se réduit à :

$$\vec{v}(M_{/\mathcal{R}}) = \vec{v}(M_{/\mathcal{R}'}) + \vec{v}_{\text{ent}}(M)$$

$$\vec{v}_{\text{ent}}(M) = \vec{v}(O'_{/\mathcal{R}}).$$

Comme tous les points de (\mathcal{R}') ont, à chaque instant t , même vecteur vitesse, la vitesse d'entraînement de M est la vitesse de n'importe quel point du référentiel d'entraînement :

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\frac{d\vec{AB}}{dt} = \frac{d\vec{OB}}{dt} - \frac{d\vec{OA}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{v}(B_{/\mathcal{R}}) = \vec{v}(A_{/\mathcal{R}}) = \vec{v}(O'_{/\mathcal{R}}) = \vec{v}_{\text{ent}}(M).$$

En dérivant à nouveau cette expression par rapport au temps, on démontre aisément que tous les points du référentiel (\mathcal{R}') ont même accélération.

3.1.3. Loi de composition des accélérations

La loi de composition des accélérations se réduit à :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}_{\text{ent}}(M)$$

$$\vec{a}_{\text{ent}}(M) = \vec{a}(O'/\mathcal{R}).$$

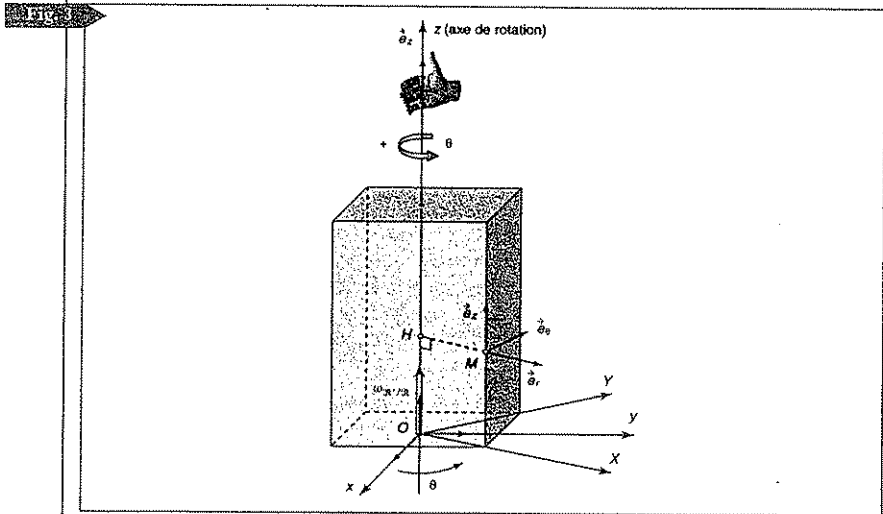
Comme tous les points de (\mathcal{R}') ont, à chaque instant t , même vecteur accélération, l'accélération d'entraînement de M est l'accélération de n'importe quel point du référentiel d'entraînement :

En dérivant à nouveau par rapport au temps dans le référentiel (\mathcal{R}) :

$$\vec{a}(B/\mathcal{R}) = \vec{a}(A/\mathcal{R}) = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) = \vec{a}_{\text{ent}}(M).$$

3.2. Le mouvement d'entraînement est une rotation

Supposons que O' soit confondu avec O et qu'à l'instant $t = 0$ les deux repères soient superposés. À l'instant t le solide de référence ou référentiel (\mathcal{R}') a effectué une rotation d'un angle $\theta(t)$ autour de l'axe fixe (Oz) :



La position du solide dans (\mathcal{R}) est parfaitement déterminée à l'instant t par l'*élongation angulaire* instantanée $\theta(t)$.

3.2.1. Vecteur rotation d'entraînement

Au cours de ce mouvement de rotation autour de (Oz) , tous les points du solide décrivent des cercles d'axe (Oz) avec la même vitesse angulaire :

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}.$$

Les coordonnées cylindro-polaires sont bien adaptées pour décrire le mouvement d'un point M fixe dans (\mathcal{R}) :

$$\vec{r}'_x = \vec{e}_r, \quad \vec{r}'_y = \vec{e}_\theta, \quad \vec{r}'_z = \vec{e}_z$$

Attention

L'accélération de Coriolis est nulle et n'intervient pas dans les mouvements de translation.

Fig. 3

Exprimons, par exemple, la dérivée :

$$\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{e}_x \Rightarrow \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{e}_r.$$

Or
$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \underbrace{\dot{\theta} \vec{e}_z}_{\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}} \wedge \vec{e}_r$$

Ainsi :

Le vecteur rotation d'entraînement $\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}$ caractérise la rotation de (\mathcal{R}') par rapport à (\mathcal{R}) :

$$\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} = \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

Ce vecteur de norme déterminée est porté par l'axe de rotation (Oz) et est orienté, corrélativement au sens positif de rotation adopté pour θ , par la règle du tire-bouchon ou la règle de la main droite : c'est un « pseudo-vecteur » ou vecteur « axial ».

3.2.2. Loi de composition des vitesses

Puisque O est confondu avec O' , la vitesse d'entraînement s'écrit :

$$\vec{v}_{\text{ent}}(M) = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{OM}.$$

On peut la décomposer en faisant intervenir H , projection de M sur l'axe de rotation :

$$\vec{v}_{\text{ent}}(M) = \underbrace{\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{OH}}_0 + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{HM} = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{HM}.$$

La loi de composition des vitesses donne :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(M/\mathcal{R}') + \vec{v}_{\text{ent}}(M)$$

$$\vec{v}_{\text{ent}}(M) = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{HM}.$$

3.2.3. Loi de composition des accélérations

L'accélération d'entraînement est :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\text{ent}}(M) &= \frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge (\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{OM}) \\ &= \frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt} \wedge \overrightarrow{HM} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge (\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{HM}) \end{aligned}$$

En exprimant le double produit vectoriel, on obtient :

$$\vec{a}_{\text{ent}}(M) = \frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt} \wedge \overrightarrow{HM} + \left(\underbrace{\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \cdot \overrightarrow{HM}}_0 \right) \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} - \omega_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}^2 \overrightarrow{HM}.$$

La loi de composition des accélérations donne :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}_{\text{ent}}(M) + \vec{a}_{\text{cor}}(M)$$

$$\vec{a}_{\text{cor}}(M) = 2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(M)$$

$$\vec{a}_{\text{ent}}(M) = \frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt} \wedge \overrightarrow{HM} - \omega_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}^2 \overrightarrow{HM}$$

Pour une rotation uniforme :

Si le mouvement d'entraînement est une rotation uniforme, l'accélération d'entraînement est :

$$\vec{a}_{\text{ent}}(M) = -\omega_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}^2 \overrightarrow{HM} \quad \text{car} \quad \frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt} = \vec{0}$$

4 Dynamique en référentiel non galiléen

4.1. Le principe de relativité galiléenne

La première loi de Newton postule l'existence de référentiels particuliers, dits galiléens pour lesquels le principe d'inertie est vérifié : dans de tels référentiels, un point matériel isolé a une accélération nulle.

Un référentiel galiléen est-il unique ?

Pour répondre à cette question imaginons un point matériel M isolé dans deux référentiels galiléens \mathcal{R}_g et \mathcal{R}'_g . La loi de composition des accélérations permet de passer d'un référentiel à l'autre :

$$\underbrace{\vec{a}(M/\mathcal{R}_g)}_{\substack{\vec{0} \\ M \text{ isolé}}} = \underbrace{\vec{a}(M/\mathcal{R}'_g)}_{\substack{\vec{0} \\ M \text{ isolé}}} + \vec{a}_{\text{ent}}(M) + 2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g)} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}'_g)$$

Ainsi :

$$\vec{a}_{\text{ent}}(M) + 2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g)} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}'_g) = \vec{0}$$

Cette relation doit être réalisée pour toutes positions et toutes vitesses du point M , ceci impose :

- $\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g)} = \vec{0}$ \mathcal{R}'_g est en translation par rapport à \mathcal{R}_g .
- $\vec{a}_{\text{ent}}(M) = \vec{0}$ le vecteur vitesse d'entraînement est constant, la translation est rectiligne uniforme.

Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme par rapport à l'un d'entre eux.

La loi de composition des accélérations, si la particule M n'est pas isolée, donne pour ces deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{a}(M/\mathcal{R}'_g)$$

Multiplicons par la masse m de la particule les deux membres de cette égalité :

$$m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = m \vec{a}(M/\mathcal{R}'_g)$$

L'application de la seconde loi de Newton à la particule M dans les deux référentiels galiléens \mathcal{R}_g et \mathcal{R}'_g permet de conclure à l'invariance des forces dans tout changement de référentiel galiléen :

$$\underbrace{\vec{F}}_{\text{dans } \mathcal{R}_g} = \underbrace{\vec{F}'}_{\text{dans } \mathcal{R}'_g}$$

Nous postulons pour cela que la masse est invariante par changement de référentiel galiléen.

En conséquence :

Principe de relativité galiléenne : les lois fondamentales de la mécanique sont invariantes par changement de référentiel galiléen.

Il n'existe donc pas d'expérience de mécanique réalisée en référentiel galiléen qui permette de savoir si le référentiel d'expérimentation est en mouvement ou non par rapport à d'autres référentiels galiléens.

4.2. Extension du principe fondamental de la dynamique aux référentiels non galiléens

Les lois de la mécanique ne valent que dans les référentiels galiléens ; mais comment les étendre aux référentiels non galiléens ?

Considérons le mouvement d'un point matériel M de masse m en mouvement dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g d'origine O et dans un référentiel quelconque \mathcal{R}_{ng} , d'origine O' , mobile par rapport à \mathcal{R}_g .

• *Point de vue de l'observateur lié au référentiel galiléen* : le principe fondamental de la dynamique lui permet d'écrire.

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_g).$$

$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M}$ est la somme des forces appliquées au point matériel M , elle traduit l'interaction de ce point avec son environnement immédiat et les forces sont issues des interactions fondamentales.

• *Point de vue de l'observateur lié au référentiel non galiléen* : pour interpréter le mouvement dans \mathcal{R}_{ng} , l'observateur a besoin de connaître les conditions initiales du mouvement, de mesurer l'accélération relative $\vec{a}(M/\mathcal{R}_{ng})$ et de communiquer avec l'observateur du référentiel galiléen qui lui fournira l'accélération absolue $\vec{a}(M/\mathcal{R}_g)$, l'accélération d'entraînement $\vec{a}_{\text{ent}}(M)$, l'accélération Coriolis $\vec{a}_{\text{cor}}(M)$ et $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M}$.

Il ne peut pas appliquer le principe fondamental de la dynamique, mais la loi cinématique de composition des accélérations lui permet d'écrire :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}_{ng}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) - \vec{a}_{\text{ent}}(M) - \vec{a}_{\text{cor}}(M) = \underbrace{\frac{\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M}}{m} - \vec{a}_{\text{ent}}(M) - \vec{a}_{\text{cor}}(M)}_{\text{informations fournies par l'observateur de } \mathcal{R}_g}.$$

Modifions cette relation pour nous ramener à une expression similaire à la seconde loi de Newton dans \mathcal{R}_{ng} :

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} + \underbrace{[-m \vec{a}_{\text{ent}}(M)]}_{\vec{F}_{\text{ie}}} + \underbrace{[-m \vec{a}_{\text{cor}}(M)]}_{\vec{F}_{\text{ic}}} = m \vec{a}(M/\mathcal{R}_{ng})$$

Des termes nouveaux, homogènes à une force, appelés « forces d'inertie » apparaissent ainsi dans la traduction de la loi fondamentale de la dynamique en référentiel non galiléen :

• $\vec{F}_{\text{ie}} = -m \vec{a}_{\text{ent}}(M) = -m \vec{a}_{\text{abs}}(\underbrace{M^*}_{\text{point coïncident}})$ est la *force d'inertie d'entraînement*.

• $\vec{F}_{\text{ic}} = -m \vec{a}_{\text{cor}}(M) = -2m \vec{\omega}_{(\mathcal{R}_{ng}/\mathcal{R}_g)} \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(M)$ est la *force d'inertie de Coriolis*.

Ce sont des « pseudo forces » car d'une part elles ne résultent pas d'une interaction et d'autre part elles ne sont pas invariantes par changement de référentiel. Ce sont des « forces de

repère » qui ne s'exercent sur le point M que parce que l'observateur n'est pas dans un référentiel galiléen. Mais les effets mécaniques engendrés par les « pseudo-forces » sont bien réels.

4.3. Théorème du moment cinétique en référentiel non galiléen

Le moment cinétique en O' d'un point matériel M de masse m dans le référentiel quelconque \mathcal{R}_{ng} est défini par :

$$\vec{L}_{O'}(M/\mathcal{R}_{ng}) = \overrightarrow{O'M} \wedge m \vec{v}(M/\mathcal{R}_{ng}).$$

Le théorème du moment cinétique en O' , point fixe du référentiel \mathcal{R}_{ng} , est applicable au point matériel M de masse m à condition de faire intervenir les forces d'inertie :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}(M/\mathcal{R}_{ng})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_{ng}} = \vec{M}_{O'}(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M}) + \vec{M}_{O'}(\vec{F}_{\text{ic}}) + \vec{M}_{O'}(\vec{F}_{\text{ie}}).$$

5 Énergétique en référentiel non galiléen

5.1. La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas

La puissance de la force d'inertie de Coriolis est nulle :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ic}/\mathcal{R}_{ng}}) = -2m \vec{\omega}(\mathcal{R}_{ng}/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(M) \cdot \vec{v}_{\text{rel}}(M) = 0.$$

Mais, il n'en est en général pas de même pour la force d'inertie d'entraînement.

5.2. Théorème de la puissance cinétique en référentiel non galiléen

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_{ng})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_{ng}} = \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M/\mathcal{R}_{ng}}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ie}/\mathcal{R}_{ng}}).$$

En intégrant entre deux instants t_1 et t_2 , alors que la particule se déplace de la position M_1 à la position M_2 , on obtient le *théorème de l'énergie cinétique* :

$$\mathcal{E}_C(t_2/\mathcal{R}_{ng}) - \mathcal{E}_C(t_1/\mathcal{R}_{ng}) = \mathcal{J}_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M/\mathcal{R}_{ng}}) + \mathcal{J}_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_{\text{ie}/\mathcal{R}_{ng}}).$$

5.3. Théorème de la puissance mécanique en référentiel non galiléen

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_{ng})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_{ng}} = \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{nc}/\mathcal{R}_{ng}}).$$

En intégrant entre deux instants t_1 et t_2 , on obtient le *théorème de l'énergie mécanique* :

$$\mathcal{E}_m(t_2/\mathcal{R}_{ng}) - \mathcal{E}_m(t_1/\mathcal{R}_{ng}) = \mathcal{J}(\vec{F}_{\text{nc}/\mathcal{R}_{ng}}).$$

À l'instant t , l'énergie mécanique de la particule M dans \mathcal{R}_{ng} est :

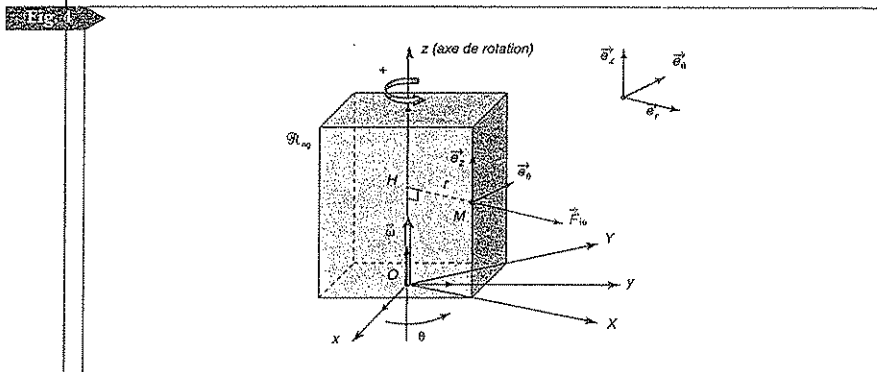
$$\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_{ng}) = \mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_{ng}) + \mathcal{E}_P(M).$$

$\mathcal{E}_P(M)$ est la somme de toutes les énergies potentielles.

La force d'inertie d'entraînement travaille mais est en général non conservative.

On peut néanmoins définir une *énergie potentielle d'entraînement centrifuge* dans le cas où le référentiel \mathcal{R}_{ng} est en *rotation uniforme* autour de l'axe fixe (Oz) du référentiel \mathcal{R}_g :

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_{ent}(M) = -m \vec{a}_{abs}(M^*) = m \omega^2 \vec{HM}.$$



Le travail élémentaire de \vec{F}_{ie} est :

$$\begin{aligned} \delta T(\vec{F}_{ie}/\mathcal{R}_{ng}) &= \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{OM} = m\omega^2 \vec{HM} \cdot (d\vec{OH} + d\vec{HM}) = m\omega^2 \vec{HM} \cdot d\vec{HM} \\ &= d\left(\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2\right) = -d\mathcal{E}_P^{cent} \end{aligned}$$

En choisissant l'origine de cette énergie potentielle sur l'axe de rotation :

$$\mathcal{E}_P^{cent} = \frac{1}{2}m\omega^2 HM^2$$

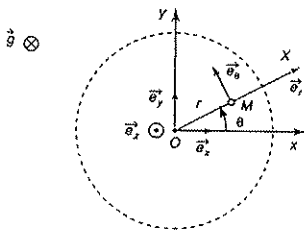
Il faut ajouter l'énergie potentielle centrifuge dans l'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_P(M)$.

Avant la colle

Tester ses connaissances

> corrigé p. 306

Spirale d'Archimède. Une particule M part de O à l'instant $t = 0$ et se déplace à vitesse constante v_0 le long de la tige (Ox) qui tourne dans le plan horizontal (Oxy) lié au référentiel terrestre à la vitesse angulaire constante positive ω_0 autour de l'axe (Oz).



L'étude du mouvement de M peut s'effectuer dans deux référentiels :

- le référentiel terrestre « absolu » $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$;
- ou le référentiel « relatif » de la tige en rotation $\mathcal{R}'(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1 Le vecteur rotation qui caractérise le mouvement de la tige par rapport au référentiel terrestre est :

- a. $\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} = -\omega_0 \vec{e}_z$.
- b. $\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} = \omega_0 \vec{e}_z$.

2 La trajectoire du point coïncident M^* de M dans le référentiel \mathcal{R} est :

- a. une droite ;
- b. une spirale ;
- c. un cercle ;
- d. une hyperbole.

3 La vitesse d'entraînement de M est :

- a. $\vec{v}_{\text{ent}}(M) = \vec{OM} \wedge \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}$.
- b. $\vec{v}_{\text{ent}}(M) = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{OM}$.
- c. $\vec{v}_{\text{ent}}(M) = 2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(M)$.
- d. $\vec{v}_{\text{ent}}(M) = 2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{OM}$.

4 L'accélération d'entraînement de M est :

- a. $\vec{a}_{\text{ent}}(M) = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{OM} - \omega_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}^2 \vec{OM}$.
- b. $\vec{a}_{\text{ent}}(M) = \frac{d\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}}{dt} \wedge \vec{OM} + \omega_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}^2 \vec{OM}$.
- c. $\vec{a}_{\text{ent}}(M) = -\omega_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}^2 \vec{OM}$.
- d. $\vec{a}_{\text{ent}}(M) = \omega_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}^2 \vec{OM}$.

5 L'accélération de Coriolis de M est :

- a. $\vec{a}_{\text{cor}}(M) = 2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}_{\text{abs}}(M)$.
- b. $\vec{a}_{\text{cor}}(M) = -2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(M)$.
- c. $\vec{a}_{\text{cor}}(M) = -2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}_{\text{abs}}(M)$.
- d. $\vec{a}_{\text{cor}}(M) = 2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(M)$.

6 Lors du passage d'un référentiel galiléen à un autre référentiel galiléen, l'accélération d'entraînement est :

- a. constante ;
- b. nulle ;
- c. quelconque.

7 La force d'inertie d'entraînement est conservative lorsque :

- a. \mathcal{R}_{ng} est en translation par rapport à \mathcal{R}_g .
- b. \mathcal{R}_{ng} est en translation à accélération constante par rapport à \mathcal{R}_g .
- c. \mathcal{R}_{ng} est en rotation uniforme autour d'un axe fixe de \mathcal{R}_g .

8 La force d'inertie de Coriolis est nulle lorsque :

- a. \mathcal{R}_{ng} est en translation par rapport à \mathcal{R}_g .
- b. \mathcal{R}_{ng} est en translation uniforme par rapport à \mathcal{R}_g .
- c. \mathcal{R}_{ng} est en rotation uniforme autour d'un axe fixe de \mathcal{R}_g .
- d. Le point matériel est à l'équilibre relatif.

Savoir appliquer le cours

> corrigé p. 306

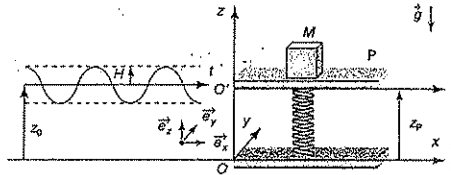
Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur uniforme.

- 1 Revenons à la spirale d'Archimède présentée en introduction de la partie « tester ses connaissances ». Déterminer la vitesse d'entraînement de la particule M . En déduire la vitesse de M dans le référentiel \mathcal{R} .
- 2 Poursuivons avec la spirale d'Archimède. Déterminer les accélérations d'entraînement et de Coriolis du point M . En déduire l'accélération de M dans le référentiel \mathcal{R} . Les forces de frottement étant négligeables, quelle force doit exercer un intervenant extérieur sur la particule pour lui assurer un déplacement à vitesse constante le long de la tige ?
- 3 Le tambour d'une machine à laver tourne autour d'un axe horizontal. Quelle doit être la vitesse minimale de rotation du tambour pour que le linge reste collé aux parois pen-

dant l'essorage ? Le diamètre du tambour est $d = 50 \text{ cm}$ et $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- 4 Un objet rigide de forme cubique est posé sur un plateau P horizontal animé par rapport au sol d'un mouvement vibratoire sinusoïdal. La cote z_P de P obéit à l'équation horaire :

$$z_P(t) = z_0 + H \cos \omega t.$$

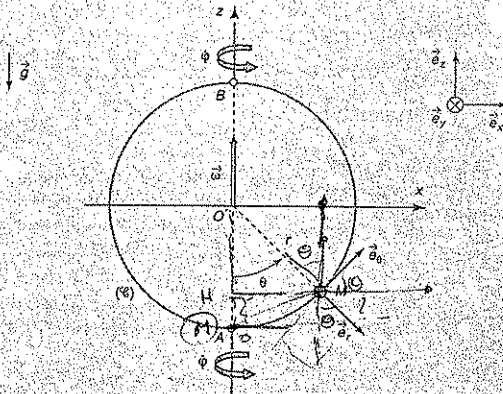


Vous effectuerez votre raisonnement par rapport au référentiel du plateau : à quelle condition doit satisfaire la pulsation ω des oscillations verticales pour que le cube reste à tout instant en contact avec le plateau. Déterminer la fréquence critique à partir de laquelle le contact est rompu. Effectuer l'application numérique.

Données : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $H = 1 \text{ mm}$.

1 - Anneau coulissant sur un cercle en rotation

Un guide circulaire de centre O et de rayon r est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ autour de son diamètre vertical ($\omega = \dot{\varphi} > 0$). Un anneau M de masse m et assimilé à un point matériel coulisse sans frottement sur la circonférence. Son mouvement est repéré par un seul degré de liberté cinématique : l'angle $\theta = (\vec{OA}, \vec{OM})$ compté positivement dans le sens indiqué sur le schéma ci-dessous :



*à psi 201/12
vous souhaitez
une bonne combinaison
dans votre cursus
scolaire*

*Tout
Majorant
72.3a*

Le référentiel d'étude est le référentiel (\mathcal{C}) lié au cercle. Le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ attaché rigidement à (\mathcal{C}) est en rotation d'angle φ autour de l'axe vertical (Oz) du référentiel terrestre \mathcal{R}_g supposé galiléen. Dans le plan (Oxz) , la base locale des coordonnées polaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ accompagne l'anneau M dans son mouvement.

On notera \vec{R} l'action du cercle (\mathcal{C}) sur le point M .

A - Étude du mouvement de M sur le guide

• Utilisation de la relation fondamentale de la dynamique

- 1 Exprimer la force d'inertie d'entraînement en fonction de θ , m , r , ω , et \vec{e}_x .
- 2 Exprimer la force d'inertie de Coriolis \vec{F}_{ic} en fonction de θ , $\dot{\theta}$, m , r , ω , et \vec{e}_z .
- 3 Écrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel (\mathcal{C}) et déduire de sa projection suivant \vec{e}_θ l'équation différentielle vérifiée par θ . Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme : $r\ddot{\theta} = f(\theta)$ où $f(\theta)$ est à exprimer en fonction de θ , g , r et ω .

• Utilisation du théorème du moment cinétique

- 4 Définir et exprimer le moment cinétique en O du point M en mouvement dans (\mathcal{C}) .

- 5 Appliquer le théorème du moment cinétique en O pour retrouver l'équation du mouvement et l'expression de $f(\theta)$.

• Utilisation de l'énergie mécanique

- 6 Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p^{\text{ent}}$. Exprimer cette énergie en fonction de θ en prenant la position $\theta = 0$ comme état de référence : $\mathcal{E}_p^{\text{ent}}(\theta = 0) = 0$.

- 7 Déterminer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p^{\text{pes}}$ dont dérive le poids de M en fonction de θ en choisissant l'état de référence $\mathcal{E}_p^{\text{pes}}(\theta = 0) = 0$.

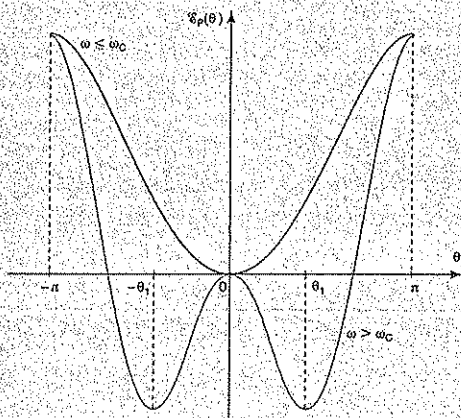
- 8 Montrer que les énergies potentielles dont dérivent la réaction \vec{R} et la force d'inertie de Coriolis \vec{F}_{ic} sont des constantes que l'on fixera à 0.

- 9 Dédire de ce qui précède que l'énergie potentielle totale peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_p(\theta) = K \left[1 - \cos\theta - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \sin^2\theta \right].$$

Déterminer K et ω_c en fonction de m , g et r .

- 10 Le tracé de l'énergie potentielle totale de M en fonction de θ fait apparaître deux cas :



Par une rapide analyse de ces deux courbes, commencer à prévoir les positions d'équilibre possibles de l'anneau dans (%). Discuter leurs conditions d'existence et leur stabilité.

- 11 Écrire la conservation de l'énergie mécanique en la justifiant et retrouver l'équation différentielle du mouvement.

B - Étude de l'équilibre relatif de M sur le guide

1 Montrer que l'équation en θ , dont les solutions sont les positions d'équilibre, est :

$$\sin \theta \left[\left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \cos \theta - 1 \right] = 0.$$

2 Déterminer les positions d'équilibre de M . Discuter de leur existence et de leur stabilité.

C - Étude des oscillations autour de l'équilibre stable

1 On écarte légèrement l'anneau d'une de ses deux positions d'équilibre stable notée de manière générale θ_{eq} .
Montrer qu'un développement limité de la fonction $f(\theta)$ au voisinage de θ_{eq} conduit à l'équation :

$$r \ddot{\theta} - \left(\frac{df(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta_{eq}} (\theta - \theta_{eq}) = 0.$$

2 En déduire les pulsations Ω_0 et Ω_1 des petites oscillations de l'anneau autour des deux positions d'équilibre stable.

résolution méthodique

• **Position du problème :** nous avons jusqu'ici pris soin de choisir, pour référentiel d'étude, le référentiel terrestre que l'on peut considérer comme galiléen à condition de substituer la notion de poids à la force de gravitation et de nous restreindre à de petits mouvements et de faibles intervalles de temps. Ce choix permet d'appliquer au système le principe fondamental de la dynamique et les théorèmes du moment cinétique et de l'énergie cinétique qui en découlent. L'énoncé nous impose de nous placer dans le référentiel du guide circulaire en rotation et donc accéléré par rapport au référentiel terrestre : le référentiel du guide est non galiléen. En conséquence, il est nécessaire d'ajouter les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis au bilan des forces naturelles issues des interactions du système avec les objets extérieurs.

A - Étude du mouvement de M sur le guide

• Utilisation de la relation fondamentale de la dynamique

1

Reprenons l'étude systématique d'un problème de mécanique, cette fois-ci dans un référentiel non galiléen.

[1] Définir le système étudié.

[2] Choisir le référentiel d'étude : est-il galiléen ou non galiléen ?

La question à se poser est la suivante : le référentiel d'étude est-il accéléré par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen ? Retenons qu'un référentiel en translation non uniforme ou en rotation par rapport au référentiel terrestre n'est pas galiléen.

[3] Effectuer le bilan des forces qui agissent sur le système

⇒ Recenser pour cela les objets extérieurs agissant sur le système et distinguer :

- (i) les forces à distance ;
- (ii) les forces de contact.

⇒ Ajouter les « pseudo-forces » si le référentiel d'étude est quelconque.

Commençons par exprimer la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_{ent}(M) = -m \vec{a}_{ab}(M^*),$$

point
coincident

L'accélération d'entraînement de l'anneau due à la rotation de C par rapport à \mathcal{R}_e est l'accélération du point coïncidant avec M à l'instant t . Cette accélération est évaluée dans le référentiel « absolu » \mathcal{R}_e . Dans le cas d'une rotation autour d'un axe fixe passant par O , il est avantageux de retenir l'expression suivante :

$$\vec{a}_{ent}(M) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}_{(C/\mathcal{R}_e)}}{dt}}_{\vec{0}} \wedge \overrightarrow{HM} - \omega_{(C/\mathcal{R}_e)}^2 \overrightarrow{HM} = -\omega_{(C/\mathcal{R}_e)}^2 \overrightarrow{HM}$$

rotation uniforme

H est la projection de M sur l'axe de rotation.

Le système est l'anneau M , son mouvement est étudié dans le référentiel \mathcal{C} du guide circulaire en rotation uniforme par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen.

Le référentiel \mathcal{C} est non galiléen.

• Bilan des forces agissant sur le point M :

(i) à distance : $\vec{F}_{Terre \rightarrow M} = \vec{P} = m \vec{g}$ le poids du point matériel M ;

(ii) de contact : $\vec{F}_{support \rightarrow M} = \vec{R}$ la réaction du support.

Il faut ajouter les « forces de repère » dues au caractère non galiléen du référentiel d'étude.

La force d'inertie d'entraînement est :

(iii) $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_{ent}(M) = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$ avec $\overrightarrow{HM} = x \vec{e}_x = r \sin \theta \vec{e}_x$.

H est la projection orthogonale de M sur l'axe de rotation (Oz).

$$\vec{F}_{ie} = m \omega^2 r \sin \theta \vec{e}_x$$

La force d'inertie d'entraînement est axifuge.

» 2

La forme d'inertie de Coriolis s'exprime de la façon suivante :

$$\vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_{cor}(M) = -2m \vec{\omega}_{(C/\mathcal{R}_e)} \wedge \vec{v}_{rel}(M).$$

Au préalable, il faut déterminer la vitesse relative de l'anneau, c'est-à-dire sa vitesse dans le référentiel du guide circulaire. Observons que la trajectoire de M dans ce référentiel est un arc de cercle : la vitesse étant tangente à la trajectoire, elle est nécessairement orthoradiale.

Il ne faudra pas confondre l'angle θ de repérage du point M sur le guide et l'angle φ de la rotation propre du guide circulaire autour de l'axe (Oz) :

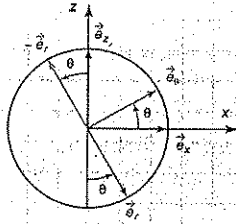
$$\vec{\omega}_{(C/\mathcal{R}_e)} = \dot{\varphi} \vec{e}_z.$$

Autre difficulté à laquelle il faut prendre garde : la B.O.N.D. locale qui accompagne le point M est :

$$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k}), \text{ avec } \vec{k} = -\vec{e}_z.$$

En conséquence, $\vec{k} = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = -\vec{e}_z$.

Un schéma utile qui permet de projeter \vec{e}_x dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et d'effectuer les produits scalaires et vectoriels qui vont suivre :



La force d'inertie de Coriolis (ou complémentaire) est :

$$(iv) \vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_{cor}(M) = -2m \vec{\omega}_{(C,rk)} \wedge \vec{v}_{rel}(M)$$

$$\text{avec } \vec{\omega}_{(C,rk)} = \dot{\phi} \vec{e}_z \text{ et } \vec{v}_{rel}(M) = \vec{v}(M_{r\theta}) = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

En conséquence :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\omega r \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta.$$

Or $\vec{e}_z = -\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta$. D'où l'expression finale de la force :

$$\boxed{\vec{F}_{ic} = -2mr \dot{\theta} \omega \cos\theta \vec{e}_r}$$

3

Poursuivons l'étude systématique :

[4] Expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel d'étude non galiléen.

L'accélération de M en mouvement circulaire le long du guidé est :

$$\vec{a}(M_{r\theta}) = mr \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - mr \dot{\theta}^2 \vec{e}_r,$$

[5] Projeter les vecteurs dans la base orthonormée directe adaptée à la trajectoire.

Le guidé étant circulaire, la base adaptée à la trajectoire est la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

• Expression du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen du guidé :

$$m \vec{a}(M_{r\theta}) = mr \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - mr \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_{ic}.$$

On peut encore écrire :

$$mr \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - mr \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -mg \vec{e}_z + \vec{R} + m\omega^2 r \sin\theta \vec{e}_z - 2mr \dot{\theta} \omega \cos\theta \vec{e}_r \quad (1)$$

Le mouvement s'effectuant sans frottement le long du guide, la réaction \vec{R} du support n'a pas de composante suivant \vec{e}_θ : $\vec{R} \cdot \vec{e}_\theta = 0$.

Projetons l'équation (1) selon \vec{e}_θ :

$$mr\ddot{\theta} \underbrace{\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta}_1 - mr\dot{\theta}^2 \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta}_0 = -mg \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta}_{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)} + \underbrace{\vec{R} \cdot \vec{e}_\theta}_0 + m\omega^2 r \sin\theta \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta}_{\cos\theta} - 2mr\dot{\theta}\omega \cos\theta \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\theta}_0 \quad (1)$$

$$\boxed{r\ddot{\theta} = f(\theta) = \sin\theta[\omega^2 r \cos\theta - g]} \quad (2)$$

• Utilisation du théorème du moment cinétique

4

N'oublions pas que le mouvement de M est considéré dans le référentiel du guide en rotation : la vitesse de M qui intervient dans le moment cinétique est la vitesse relative :

$$\vec{L}_O(M_{/R_0}) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}_{\text{rel}}(M).$$

La base adaptée au problème est la base polaire en déplacement avec M .

Dans le référentiel \mathcal{C} , le moment cinétique en O du point M est :

$$\vec{L}_O(M_{/R_0}) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}_{\text{rel}}(M) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = -mr^2\dot{\theta}\vec{e}_y.$$

5

Nous utilisons maintenant le théorème du moment cinétique en O , appliqué dans le référentiel non galiléen imposé par l'énoncé :

[4]_{bis} Expression vectorielle du théorème du moment cinétique au point O fixe dans le référentiel d'étude non galiléen.

O est un point fixe dans le référentiel \mathcal{C} . Le théorème du moment cinétique en O s'exprime dans un référentiel non galiléen en faisant intervenir les moments en O des forces d'inertie.

Une difficulté : la réaction \vec{R} du support est dans le plan normal à la trajectoire en M , car le mouvement de M s'effectue sans frottement. Elle admet donc deux composantes, l'une suivant \vec{e}_r et l'autre suivant \vec{e}_θ .

[5]_{bis} Projeter les vecteurs dans la base orthonormée directe adaptée à la trajectoire.

La projection de la relation vectorielle obtenue permet d'accéder à l'équation du mouvement de M .

Théorème du moment cinétique en O :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M_{/R_0})}{dt}\right)_{/R_0} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{R}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{ie}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{ic}).$$

Le vecteur unitaire \vec{e}_y est un vecteur constant, la dérivée par rapport à t du moment cinétique de M en O est :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(M_{/R_0})}{dt}\right)_{/R_0} = -mr^2\ddot{\theta}\vec{e}_y.$$

Calculons les moments en O des forces agissant sur M :

$$\cdot \vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = -r m g \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = -r m g \vec{e}_r \wedge [-\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_O(\vec{P}) = r m g \sin\theta \vec{e}_y}$$

$$\cdot \vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{OM} \wedge \vec{R} = r \vec{e}_r \wedge [R_r \vec{e}_r + R_y \vec{e}_y]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{OM} \wedge \vec{R} = r R_y \vec{e}_\theta}$$

$$\cdot \vec{M}_O(\vec{F}_{ic}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_{ic} = m \omega^2 r^2 \sin\theta \vec{e}_r \wedge \vec{e}_x = m \omega^2 r^2 \sin\theta \vec{e}_r \wedge [\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_O(\vec{F}_{ic}) = -m \omega^2 r^2 \sin\theta \cos\theta \vec{e}_y}$$

$$\cdot \vec{M}_O(\vec{F}'_{ic}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}'_{ic} = -2m\omega \dot{\theta} r^2 \cos\theta \vec{e}_r \wedge \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_O(\vec{F}'_{ic}) = -2m\omega \dot{\theta} r^2 \cos\theta \vec{e}_\theta}$$

L'application du théorème du moment cinétique donne :

$$-mr^2 \ddot{\theta} \vec{e}_y = r m g \sin\theta \vec{e}_y + r R_y \vec{e}_\theta - m \omega^2 r^2 \sin\theta \cos\theta \vec{e}_y - 2m\omega \dot{\theta} r^2 \cos\theta \vec{e}_\theta$$

Elle permet d'accéder aux deux équations :

$$- \text{suivant } \vec{e}_\theta : R_y = 2m\omega \dot{\theta} r \cos\theta.$$

Nous ne ferons rien de cette équation qui permet de déterminer R_y .

$$- \text{suivant } \vec{e}_y : \boxed{\tau \ddot{\theta} = f(\theta) = \sin\theta(\omega^2 r \cos\theta - g)}$$

On retrouve bien l'équation attendue.

• Utilisation de l'énergie mécanique



[3]_{cor.} Effectuer le bilan des forces agissant sur le système. Le système est-il conservatif ?

La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas et la force d'inertie d'entraînement est conservative lorsque le référentiel relatif \mathcal{R}' est en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans le référentiel absolu \mathcal{R} ou si \mathcal{R}' est en translation uniformément accélérée par rapport à \mathcal{R} .

[4]_{cor.} Préciser le nombre de degrés de liberté du problème.

Déterminer pour cela le nombre de paramètres nécessaires pour connaître la position de la particule M dans l'espace.

[5]_{cor.} Déterminer les équations du mouvement.

Si le système est à un degré de liberté et conservatif, l'écriture de la conservation de l'énergie mécanique (intégrale première de l'énergie) suffit :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{cte.}$$

→ L'équation du mouvement est alors obtenue en dérivant \mathcal{E}_m par rapport à t :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0.$$

Exprimons le travail élémentaire de la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ic} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{T}(\vec{F}_{ic}/\mathcal{C}) &= \vec{F}_{ic} \cdot d\overrightarrow{OM} = m\omega^2 \overrightarrow{HM} \cdot (d\overrightarrow{OH} + d\overrightarrow{HM}) = m\omega^2 \overrightarrow{HM} \cdot d\overrightarrow{HM} \\ &= d\left(\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2\right) = -d\mathcal{E}_P^{\text{ent}}. \end{aligned}$$

En choisissant l'origine de l'énergie potentielle d'entraînement centrifuge sur l'axe de rotation :

$$\mathcal{E}_P^{\text{centrifuge}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

7 L'énergie potentielle de pesanteur s'exprime en fonction de l'altitude h de M évaluée à partir du point A choisi comme état de référence :

$$\mathcal{E}_P^{\text{pes}} = mgh = mgr(1 - \cos \theta)$$

8 \vec{R} est à tout instant normal à la trajectoire guidée de l'anneau :

$$-d\mathcal{E}_P(\vec{R}) = \delta \mathcal{T}(\vec{R}/\mathcal{C}) = (R_r \vec{e}_r + R_\theta \vec{e}_\theta) \cdot \vec{v}(M/\mathcal{C}) = (R_r \vec{e}_r + R_\theta \vec{e}_\theta) \cdot r \dot{\theta} \vec{e}_\theta = 0.$$

La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas :

$$-d\mathcal{E}_P(\vec{F}_{ic}) = \delta \mathcal{T}(\vec{F}_{ic}/\mathcal{C}) = \vec{F}_{ic} \cdot d\overrightarrow{OM} = -2m(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\text{rel}}) \cdot \vec{v}_{\text{rel}} dt = 0.$$

Leurs énergies potentielles sont des constantes que nous fixons à 0.

9 L'énergie potentielle totale est la somme de toutes les énergies potentielles, ici :

$$\mathcal{E}_P(\theta) = \mathcal{E}_P^{\text{pes}} + \mathcal{E}_P^{\text{centrifuge}} = mgr(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \sin^2 \theta.$$

En mettant mgr en facteur, on accède à l'équation attendue :

$$\mathcal{E}_P(\theta) = mgr \left[1 - \cos \theta - \frac{1}{2} \omega^2 \frac{r}{g} \sin^2 \theta \right].$$

• Conclusion

$$\mathcal{E}_P(\theta) = K \left[1 - \cos \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_C} \right)^2 \sin^2 \theta \right] \quad \text{avec} \quad K = mgr \quad \text{et} \quad \theta_C = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

10

L'observation du diagramme d'énergie potentielle permet de localiser les positions d'équilibres stables (minimum de l'énergie potentielle) et instables (maximum de l'énergie potentielle) de l'anneau M .

La position d'équilibre A de l'anneau correspondant à $\theta = 0$ est stable si $\omega < \omega_C$ et instable si $\omega > \omega_C$.

La position d'équilibre B correspondant à $\theta = \pi$ est toujours instable.

La position d'équilibre intermédiaire correspondant à $\theta = \theta_1$ n'existe que si le guide tourne assez vite autour de (Oz) avec une vitesse angulaire telle que $\omega > \omega_C$. Cet équilibre est stable.

11 Le système est conservatif car les forces appliquées à M sont conservatives ou ne travaillent pas. Le système est à un degré de liberté dans le référentiel \mathcal{C} puisque l'élongation angulaire θ suffit pour localiser l'anneau sur le guide. L'énergie mécanique se conserve et il suffira de la dériver une fois par rapport au temps pour obtenir l'équation différentielle du mouvement.

Exprimons l'énergie cinétique de M : $\mathcal{E}_C(M/\mathcal{C}) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$.

Écrivons l'intégrale première du mouvement :

$$\mathcal{E}_m(M/\mathcal{C}) = \mathcal{E}_C(M/\mathcal{C}) + \mathcal{E}_P(M) = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr \left[1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\omega^2 \frac{r}{g} \sin^2\theta \right].$$

Sa dérivée par rapport au temps est nulle :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_C}{dt} + \underbrace{\frac{d\mathcal{E}_P(\theta)}{d\theta}}_{\text{décomposer la dérivée}} \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Remarquons que :

$$\frac{d\mathcal{E}_P}{d\theta} = mr \sin\theta (g - r\omega^2 \cos\theta) = -mr f(\theta)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_C}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_P(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \underbrace{\dot{\theta}mr}_{=0} \left[r\ddot{\theta} + g \sin\theta \left(1 - \omega^2 \frac{r}{g} \cos\theta \right) \right] = 0.$$

$$r\ddot{\theta} = \sin\theta (\omega^2 r \cos\theta - g)$$

L'équation différentielle du mouvement de l'anneau dans le référentiel \mathcal{C} a été obtenue par trois méthodes différentes.

B. Étude de l'équilibre relatif de M sur le guide

1

Le système est à l'équilibre relatif, c'est-à-dire qu'il est à l'équilibre dans le référentiel relatif du guide \mathcal{C} :

$$\dot{\theta} = 0 \text{ et } \ddot{\theta} = 0$$

L'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_P(\theta)$ est extrémale à l'équilibre. Pour déterminer les positions d'équilibre de l'anneau il faut donc résoudre l'équation :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_P}{d\theta} \right)_{\text{eq}} = 0.$$

À l'équilibre relatif, la force d'inertie de Coriolis est nulle et la réaction du support radiale (sa composante orthoradiale est compensée par la force d'inertie de Coriolis si l'anneau est en mouvement sur le guide).

À l'équilibre relatif, l'énergie potentielle est extrémale et :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_P}{d\theta}\right)_{\theta_{\text{eq}}} = -mr f(\theta_{\text{eq}}) = mr \sin \theta_{\text{eq}} (g - r \omega^2 \cos \theta_{\text{eq}}) = 0.$$

En mettant g en facteur :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_P}{d\theta}\right)_{\theta_{\text{eq}}} = -mr g \sin \theta_{\text{eq}} \left(\frac{r}{g} \omega^2 \cos \theta_{\text{eq}} - 1\right) = 0.$$

Or $\omega_C = \sqrt{\frac{g}{r}}$.

Les positions d'équilibre vérifient l'équation :

$$\sin \theta_{\text{eq}} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2 \cos \theta_{\text{eq}} - 1 \right] = 0$$

Les positions d'équilibre sont bien solution de l'équation :

$$\sin \theta \left[\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2 \cos \theta - 1 \right] = 0$$

2

Lorsque l'énergie potentielle est minimale, la position d'équilibre θ_{eq} de l'anneau est stable :

$$\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta_{\text{eq}}} = -mr \left(\frac{df}{d\theta}\right)_{\theta_{\text{eq}}} > 0.$$

Lorsque l'énergie potentielle est maximale, la position d'équilibre θ_{eq} de l'anneau est instable :

$$\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}\right)_{\theta_{\text{eq}}} = -mr \left(\frac{df}{d\theta}\right)_{\theta_{\text{eq}}} < 0.$$

Commençons par déterminer les positions d'équilibre, elles vérifient :

$$\frac{f(\theta)}{g} = \sin \theta \left[\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2 \cos \theta - 1 \right] = 0.$$

Les positions d'équilibre correspondant à $\sin \theta = 0$ existent pour toutes les vitesses angulaires de rotation ω . Elles sont :

$$\theta_0 = 0 \text{ et } \theta_2 = \pi \quad (\forall \omega)$$

La position d'équilibre correspondant à $\cos \theta_1 = \left(\frac{\omega_C}{\omega}\right)^2$ n'existe que si $\cos \theta_1 < 1$, ce

qui impose :

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{\omega_C}{\omega}\right)^2 \text{ si } \omega > \omega_C$$

Remarquons que $\cos \theta_1 > 0$ impose $\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour étudier la stabilité de ces positions d'équilibre calculons $\frac{1}{g} \frac{df}{d\theta}$:

$$\frac{1}{g} \frac{df}{d\theta} = \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2 [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] - \cos \theta = \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2 [2 \cos^2 \theta - 1] - \cos \theta.$$

- $\theta_0 = 0$: $\frac{1}{g} \left(\frac{df(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta_0} = \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 - 1$ stable si $\omega < \omega_c$, instable si $\omega > \omega_c$.
- $\theta_2 = \pi$: $\frac{1}{g} \left(\frac{df(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta_2} = \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 + 1 > 0$ toujours instable ($\forall \omega$).
- θ_1 : $\frac{1}{g} \left(\frac{df(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta_1} = \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \left[2 \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^4 - 1 \right] - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 = 2 \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2$
 $\frac{1}{g} \left(\frac{df(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta_1} = \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2$.

avec la condition $\omega > \omega_c$: $\left(\frac{df(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta_1} < 0$ si l'équilibre existe ($\omega > \omega_c$), il est stable.

C. Étude des oscillations autour de l'équilibre stable



Si $\left(\frac{d^2g}{d\theta^2} \right)_{\theta_{\text{éq}}} > 0$ ou si $\left(\frac{df}{d\theta} \right)_{\theta_{\text{éq}}} < 0$, la linéarisation conduit à l'équation du mouvement linéaire d'un oscillateur harmonique. Cette approximation harmonique conduit à des oscillations sinusoïdales de l'anneau au voisinage de la position d'équilibre stable.

$\theta_{\text{éq}}$ est une position d'équilibre stable : $f(\theta_{\text{éq}}) = 0$ et $\left(\frac{df}{d\theta} \right)_{\theta_{\text{éq}}} < 0$.

Effectuons un développement limité au premier ordre au voisinage de $\theta_{\text{éq}}$ de la fonction $f(\theta)$:

$$f(\theta) = \underbrace{f(\theta_{\text{éq}})}_0 + (\theta - \theta_{\text{éq}}) \left(\frac{df}{d\theta} \right)_{\theta_{\text{éq}}}$$

$$f(\theta) = r \ddot{\theta} \quad r \ddot{\theta} - \left(\frac{df}{d\theta} \right)_{\theta_{\text{éq}}} (\theta - \theta_{\text{éq}}) = 0.$$

2 • Si $\omega < \omega_c$: la seule position d'équilibre stable est en $\theta_{\text{éq}} = \theta_0 = 0$, le développe-

ment limité de la fonction $f(\theta)$ autour de θ_0 donne : $r \ddot{\theta} - \left(\frac{df}{d\theta} \right)_{\theta_0} \theta = 0$.

$$\text{Or } \left(\frac{df(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta_0} = g \left[\left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 - 1 \right] \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{r} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right] \theta = \ddot{\theta} + \omega_c^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right] \theta = 0$$

$\ddot{\theta} + [\omega_c^2 - \omega^2] \theta = 0$, posons $\Omega_0^2 = \omega_c^2 - \omega^2$: oscillations de l'anneau à la pulsation Ω_0

$$\ddot{\theta} + \Omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega_0 = \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} \quad \text{et} \quad \omega < \omega_c.$$

• Si $\omega > \omega_c$: la seule position d'équilibre stable est en θ_1 , le développement limité de la fonction $f(\theta)$ autour de θ_1 donne : $r \ddot{\theta} - \left(\frac{df(\theta)}{d\theta}\right)_{\theta_1} \theta = 0$.

$$\text{Or } \left(\frac{df(\theta)}{d\theta}\right)_{\theta_1} = g \left[\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \right] \quad \ddot{\theta} - \frac{g}{r} \left[\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \right] \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} - \omega_c^2 \left[\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \right] \theta = \ddot{\theta} + \omega_c^2 \left[\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 \right] \theta = \ddot{\theta} + \omega^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^4 \right] \theta = 0$$

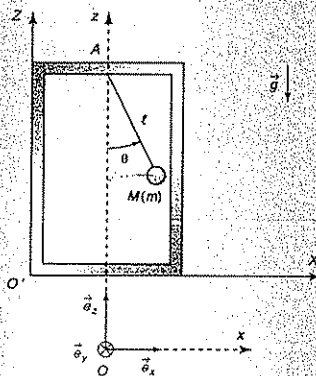
$$\ddot{\theta} + \Omega_1^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega_1 = \omega \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^4} \quad \text{et} \quad \omega > \omega_c$$

en conclusion

Nous avons revu la plupart des méthodes nécessaires à la résolution d'un problème de mécanique en nous plaçant dans un référentiel non galiléen parce qu'en rotation par rapport au référentiel terrestre.

2 – Période du pendule simple dans un ascenseur

Un ascenseur est animé d'un mouvement de translation uniformément accéléré : $\vec{a}_0 = a_z \vec{e}_z$ ($a_z > 0$) dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen. Le champ de pesanteur terrestre est uniforme d'intensité $g = \|\vec{g}\| > 0$.



Un pendule simple constitué d'un fil de masse négligeable et de longueur ℓ est accroché en A ; il porte à son autre extrémité un point matériel M de masse m et oscille dans le plan (OXY) en restant tendu. Les frottements sont supposés négligeables.

1 Le référentiel \mathcal{R} de l'ascenseur est-il galiléen ?

- 2 Effectuer le bilan des forces agissant sur M .
- 3 Établir l'équation différentielle du mouvement de M en utilisant le théorème du moment cinétique en A dans le référentiel de l'ascenseur.
- 4 Retrouver cette équation différentielle en appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel de l'ascenseur.
- 5 Déterminer à nouveau l'équation différentielle du mouvement de M par une étude énergétique.
- 6 Quelle est la période T des petites oscillations de ce pendule ? Que se passe-t-il si l'ascenseur est en chute libre ?

résolution méthodique

1

Le référentiel de l'ascenseur est en translation rectiligne mais non uniforme par rapport au référentiel terrestre galiléen, il n'est donc pas un référentiel galiléen.

Le référentiel \mathcal{R}' de l'ascenseur n'est pas galiléen car il est accéléré par rapport au référentiel terrestre galiléen.

2

Le caractère non galiléen du référentiel d'étude implique l'intervention des « pseudo-forces » dans le bilan des forces agissant sur le système. Le mouvement de l'ascenseur étant une translation :

$$\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}_e) = \vec{0}$$

En conséquence, les forces d'inertie se réduisent à la seule force d'inertie d'entraînement car la force d'inertie de Coriolis est nulle :

$$\vec{F}_{ic} = -2m \underbrace{\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}_e)}_{\vec{0}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

Le système est le point matériel M . L'étude est effectuée dans le référentiel de l'ascenseur \mathcal{R}' non galiléen.

Bilan des forces agissant sur M :

(i) à distance : $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, le poids de M ;

(ii) de contact : $\vec{F}_{\text{fil} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du fil ;

(iii) d'inertie : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M)$, la force d'inertie d'entraînement.

La force d'inertie de Coriolis est nulle car le référentiel de l'ascenseur est en translation par rapport au référentiel terrestre.

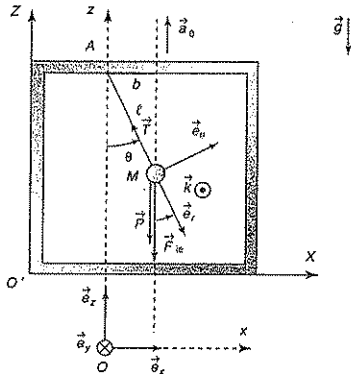
3

Poursuivons en établissant l'expression vectorielle du théorème du moment cinétique au point A fixe dans le référentiel de l'ascenseur. L'avantage de ce théorème est qu'il exclut de notre raisonnement les forces inconnues dont le moment est nul en A car leur support passe par ce point. C'est le cas de la tension du fil.

Un schéma représentatif permet de voir le bras de levier et de comprendre comment agissent les forces.

La projection des vecteurs s'effectue dans la B.O.N.D. adaptée à la trajectoire de M dans l'ascenseur.

Ce sera la base cylindro-polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ car la trajectoire de M est un arc de cercle.



Exprimons les forces agissant sur M :

$$\vec{P} = -mg \vec{e}_z \quad \vec{T} = -T \vec{e}_r \quad (\text{avec } T = \|\vec{T}\|) \quad \vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_c(M) = -m \vec{a}(M/\mathcal{R}_e).$$

Tous les points liés au référentiel \mathcal{R}' ont la même accélération $\vec{a}_0 = a_z \vec{e}_z$ car \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} . Il en est de même pour le point coïncident M^* de M , l'accélération d'entraînement de M s'obtient de façon immédiate :

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}(M^*/\mathcal{R}_e) = -m \vec{a}_0 = -m a_z \vec{e}_z.$$

Le théorème du moment cinétique en A donne :

$$\left(\frac{d\vec{L}_A(M/\mathcal{R}_e)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_e} = \vec{M}_A(\vec{P}) + \vec{M}_A(\vec{T}) + \vec{M}_A(\vec{F}_{ie}).$$

Calculons les moments de ces forces en A :

$$\vec{M}_A(\vec{P}) = -mgb\vec{k} = -mg\ell \sin \theta \vec{k}.$$

La force d'inertie contribue au mouvement de la même façon que le poids :

$$\vec{M}_A(\vec{F}_{ie}) = -ma_z b \vec{k} = -ma_z \ell \sin \theta \vec{k}.$$

La droite d'action de la tension \vec{T} du fil passe par A , le moment de cette force est nul en ce point :

$$\vec{M}_A(\vec{T}) = \vec{0}.$$

Dans le référentiel \mathcal{R}' , le moment cinétique en A du point M est :

$$\vec{L}_A(M/\mathcal{R}') = \vec{AM} \wedge m \vec{v}_{\text{rel}}(M) = m \ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = m \ell^2 \dot{\theta} \vec{k}.$$

Sa dérivée par rapport à t dans le référentiel de l'ascenseur est :

$$\left(\frac{d\vec{L}_A(M/\mathcal{R}')}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} = m \ell^2 \ddot{\theta} \vec{k}.$$

Le théorème du moment cinétique projeté suivant \vec{k} donne :

$$m \ell^2 \ddot{\theta} = -m a_z \ell \sin \theta - m g \ell \sin \theta.$$

D'où l'équation du mouvement de M dans le référentiel de l'ascenseur :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{a_z + g}{\ell} \right) \sin \theta = 0$$

4

Nous n'avons projeté les forces que partiellement pour appliquer le théorème du moment cinétique. Projetons-les toutes maintenant pour appliquer dans \mathcal{R}' le principe fondamental de la dynamique.

Le schéma de la résolution méthodique de la question 2 partie A de l'exercice précédent peut être à nouveau utilisé pour effectuer les projections dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Nous utiliserons à nouveau l'accélération de M en coordonnées polaires :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}') = m \ell \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - m \ell \dot{\theta}^2 \vec{e}_r.$$

Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel de l'ascenseur s'écrit :

$$m \vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{ie}}.$$

Le mouvement a lieu dans le plan $(O'XZ)$, la projection dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ donne :

$$m \begin{pmatrix} -\ell \dot{\theta}^2 \\ \ell \ddot{\theta} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} g \cos \theta \\ -g \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} a_z \cos \theta \\ -a_z \sin \theta \end{pmatrix}.$$

En ne considérant que la projection du mouvement suivant \vec{e}_θ :

$$m \ell \ddot{\theta} = -m g \sin \theta - m a_z \sin \theta.$$

D'où l'équation du mouvement de M dans le référentiel de l'ascenseur :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{a_z + g}{\ell} \right) \sin \theta = 0$$

5

Le système est conservatif et à un degré de liberté : la conservation de l'énergie mécanique permet de déterminer l'équation du mouvement de M . Nous allons voir que la force d'inertie d'entraînement est une force conservative dans le cas d'une translation uniformément accélérée du référentiel \mathcal{R}' par rapport au référentiel \mathcal{R} .

Reprenons le bilan des forces :

- $\vec{P} = m\vec{g}$ le poids de M : force conservative ;
- $\vec{F}_{\text{fil} \rightarrow M} = \vec{T}$ la tension du fil : ne travaille pas ;
- $\vec{F}_{\text{ie}} = -m\vec{a}_e(M)$ la force d'inertie d'entraînement.

La force d'inertie d'entraînement est en général non conservative. Qu'en est-il dans le cas d'une translation uniformément accélérée du référentiel de l'ascenseur \mathcal{R}' par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R} ?

Exprimons le travail élémentaire de cette force :

$$\delta \vec{\mathcal{J}}(\vec{F}_{\text{ie}/\mathcal{R}'}) = \vec{F}_{\text{ie}} \cdot d\vec{AM} = -m a_z \underbrace{\vec{e}_z}_{\text{vecteur constant}} \cdot d\vec{AM} = -d(m a_z \vec{e}_z \cdot \vec{AM}) = -d(m \ell a_z \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r}_{\cos(\pi - \theta)})$$

Comme $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$:

$$\delta \vec{\mathcal{J}}(\vec{F}_{\text{ie}/\mathcal{R}'}) = d(m \ell a_z \cos \theta) = -dE_{\text{P}}^{\text{ent}}(\theta)$$

En choisissant $\theta = \frac{\pi}{2}$ comme origine de l'énergie potentielle d'entraînement :

$$\mathcal{E}_{\text{P}}^{\text{ent}}(\theta) = -m \ell a_z \cos \theta$$

La force d'inertie d'entraînement est, dans ce cas précis, une force conservative.

En adoptant $\theta = \frac{\pi}{2}$ comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$\mathcal{E}_{\text{P}}^{\text{pes}} = -mgh \quad (h > 0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{\text{P}}^{\text{pes}}(\theta) = -mg \ell \cos \theta$$

Le système est conservatif et à un degré de liberté car l'élongation angulaire θ suffit à repérer le point M dans le plan $(O'XY)$.

L'intégrale première de l'énergie s'écrit :

$$\mathcal{E}_{\text{m}} = \mathcal{E}_{\text{C}}(M/\mathcal{R}') + \mathcal{E}_{\text{P}}^{\text{pes}}(\theta) + \mathcal{E}_{\text{P}}^{\text{ent}}(\theta) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - m \ell (g + a_z) \cos \theta$$

Sa dérivée par rapport au temps est nulle :

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{m}}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_{\text{C}}}{dt} + \underbrace{\frac{d\mathcal{E}_{\text{P}}(\theta)}{d\theta}}_{\text{décomposer la dérivée}} \frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \underbrace{m \ell^2 \dot{\theta}}_{=0} \left[\ddot{\theta} + \left(\frac{g + a_z}{\ell} \right) \sin \theta \right] = 0$$

L'équation du mouvement de M est obtenue à nouveau :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{a_z + g}{\ell} \right) \sin \theta = 0$$

➔ 6

L'étape suivante du raisonnement consiste à résoudre l'équation différentielle du mouvement et à interpréter le résultat obtenu.

Dans le cas des faibles oscillations ($\sin\theta \approx \theta$) on retrouve l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

La pulsation propre des oscillations est : $\omega_0 = \sqrt{\frac{a_z + g}{\ell}}$ et la période propre :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{a_z + g}}$$

Dans le cas où l'ascenseur est uniformément accéléré ($a_z > 0$), la période des oscillations est plus courte et leur fréquence plus élevée (la fréquence est le nombre d'oscillations du pendule par seconde).

Dans le cas où l'ascenseur est uniformément retardé ($a_z < 0$), la période des oscillations est plus longue et leur fréquence plus faible.

Si l'ascenseur est en chute libre : $a_z = -g$. La période des oscillations est infinie et la masse M met un temps infini pour revenir à sa position initiale. Autrement dit, elle n'y revient pas : la particule M est en pesanteur et « flotte » dans la cabine d'ascenseur.

en conclusion

L'adaptation des lois de la mécanique appliquées à M dans le référentiel non galiléen de l'ascenseur nécessite l'intervention de la force d'inertie d'entraînement ; celle-ci ne représente pas l'interaction entre la particule M et le milieu extérieur ; elle traduit seulement le caractère non galiléen du référentiel de l'ascenseur. Elle disparaît dès l'instant que $a_z = 0$, autrement dit dès que l'ascenseur est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre galiléen.



> Corrigé p. 308

Mouvement guidé de l'anneau en référentiel non galiléen

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen et le champ de pesanteur uniforme :

$$\vec{a} = -g\vec{e}_z \text{ avec } g = \|\vec{g}\| > 0.$$

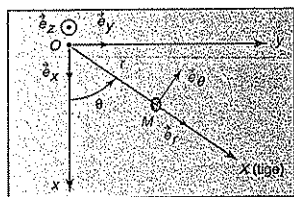
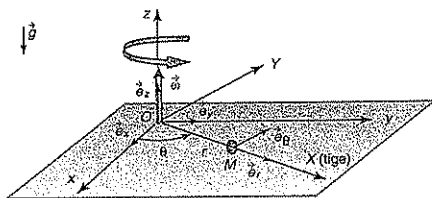
La résistance au mouvement de l'air est négligeable. Une tige rectiligne horizontale (OX) tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω en restant dans le plan (Oxy). Un anneau M de masse m est enfilé sur cette tige et peut y glisser sans frottement.

À un instant t quelconque, la rotation de la tige est repérée par l'angle polaire $\theta(t)$ et la position de l'anneau sur la tige par $\|\vec{OM}\| = OM = r(t)$.

À l'instant $t = 0$, l'anneau démarre sans vitesse initiale par rapport à la tige du point M_0 repéré par les coordonnées polaires :

$$\theta(t=0) = \theta_0 \text{ et } r(t=0) = r_0.$$

Le mouvement de M est étudié dans le référentiel de la tige $\mathcal{R}'(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.



1. Étude cinématique

Donner l'expression de la vitesse de l'anneau dans le référentiel de la tige. Déterminer la vitesse d'entraînement du point M due à la rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} . En déduire la vitesse de l'anneau dans le référentiel terrestre.

2. Donner l'expression de l'accélération de M dans le référentiel de la tige. Déterminer l'accélération d'entraînement de M due à la rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} et l'accélération de Coriolis de ce point. En déduire l'accélération de l'anneau dans le référentiel terrestre.

3. Étude dynamique

Effectuer le bilan des forces subies par le point M . Exprimer les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis. Les placer sur un schéma. Le théorème du moment cinétique appliqué au point fixe O est-il adapté pour accéder à l'équation du mouvement de M ?

4. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de M le long de la tige. En déduire l'équation de la trajectoire du point M dans le référentiel \mathcal{R} .

5. Étude énergétique

Retrouver cette équation différentielle en écrivant la conservation de l'énergie mécanique de l'anneau que vous justifierez.

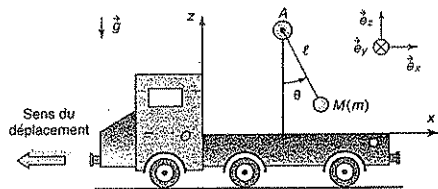


> Corrigé p. 309

Approximation harmonique du pendule composé

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen, une plate-forme mobile est animée d'un mouvement uniformément accéléré :

$\vec{a} = -a_0\vec{e}_x$. Le champ de pesanteur terrestre est uniforme d'intensité $g = \|\vec{g}\| > 0$.



Un pendule simple de masse négligeable et de longueur ℓ est accroché en A à un axe rigide vertical solidaire du véhicule. Le pendule porte à son extrémité un point matériel M de masse m et oscille dans le plan (OXY) en restant tendu.

1. Déterminer l'angle d'inclinaison θ_0 du pendule en équilibre relatif dans le référentiel \mathcal{R}_p de la plate-forme :

(i) en appliquant la relation fondamentale de la statique

(ii) en appliquant le théorème du moment cinétique en un point fixe de \mathcal{R}_p

(iii) à partir de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\theta)$ du système.

2. Discuter son signe en fonction de celui de a_0 . Montrer qu'un tel dispositif peut faire office d'accéléromètre.

3. On écarte le pendule d'un petit angle ε à partir de cette position d'équilibre : $\theta = \theta_0 + \varepsilon$.

L'énergie potentielle harmonique approchée est alors :

$$\mathcal{E}_p(\theta) = \mathcal{E}_p(\theta_0) + (\theta - \theta_0) \left(\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} \right)_{\theta_0} + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2} \right)_{\theta_0}$$

À partir de l'intégrale première de l'énergie, exprimer l'équation différentielle vérifiée par ε . En déduire la période T des petites oscillations observées en fonction de ℓ , a_0 et g .

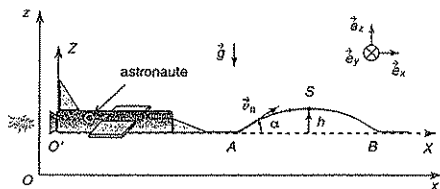
4. Retrouver l'équation différentielle vérifiée par ε par application du théorème du moment cinétique en A .

3 >>> 30 min

> Corrigé p. 312

Entraînement à l'impesanteur

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen, un avion, en translation par rapport au référentiel terrestre, décrit dans le plan vertical Oxz une trajectoire particulière AB afin d'entraîner les astronautes à l'impesanteur. Le champ de pesanteur terrestre est uniforme d'intensité $g = \|\vec{g}\| = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Les phénomènes de frottement sont négligés.



À l'instant $t = 0$: l'avion est en A , il modifie sa trajectoire avec une vitesse initiale située dans le plan Oxz et faisant un angle $\alpha > 0$ avec l'horizontale. Sa position est alors :

$$\vec{OA} = x_A \vec{e}_x + z_A \vec{e}_z.$$

1. Quelle doit être la nature de la trajectoire AB de l'avion pour que l'astronaute soit en impesanteur (l'astronaute n'est alors plus en contact avec l'avion) pendant cette phase de vol ? Déterminer l'équation de cette trajectoire par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R}_g .

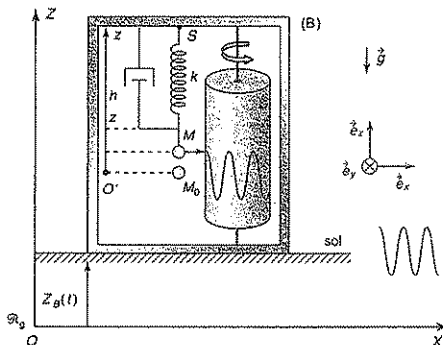
2. Les possibilités de l'avion limitant la hauteur h de son ascension à 9 000 m, quelle est la durée maximale t_{max} pendant laquelle on peut réaliser l'impesanteur par ce procédé ?

4 >>> 1 h

> Corrigé p. 313

Sismographe à ressort

Le sismographe est un instrument chargé d'enregistrer les mouvements vibratoires de l'écorce terrestre. Son principe est représenté sur la figure qui suit. Il est constitué d'un ressort dont l'extrémité supérieure S est fixée au boîtier rigide (B) de l'instrument qui repose sur le sol. Lorsque le sol est *localement* mis en mouvement sous l'effet des secousses sismiques, le référentiel du boîtier \mathcal{R}_B est animé, par rapport au référentiel terrestre galiléen $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, d'un mouvement vertical représenté par la fonction $Z_B(t)$.



Le ressort est de masse négligeable, de longueur au repos ℓ_0 et sa réponse en élongation est linéaire, de constante de raideur k .

Un point matériel M de masse m est accroché à l'autre extrémité du ressort. Sa position est repérée par sa cote $z(t)$ sur l'axe ($O'z$) fixe par rapport au boîtier. L'origine O' de cet axe correspond à la position d'équilibre du point-matériel en l'absence

d'onde sismique. Le mouvement de M est amorti par la force de frottement fluide :

$$\vec{F}_f = -h \vec{v}(M/\mathcal{R}_G) = -h \dot{z} \vec{e}_z \quad (h > 0).$$

L'onde sismique est caractérisée par $Z_B(t)$ et la réponse du sismographe est caractérisée par la fonction $z(t)$ que l'on enregistre à l'aide d'un marqueur.

1. En l'absence d'onde sismique, le point matériel est immobile et $z(t) = 0$. Exprimer la longueur ℓ_{eq} du ressort en fonction de m, g, k et ℓ_0 .

2. En présence d'une onde sismique sinusoïdale de pulsation ω , le boîtier est animé d'un mouvement du type :

$$Z_B(t) = Z_0 \cos \omega t.$$

Montrer que l'équation différentielle du mouvement de M dans le référentiel du boîtier peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\sqrt{2}}{\tau} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = -\frac{d^2 Z_B}{dt^2}.$$

Que représente τ ?

3. En régime sinusoïdal établi, la réponse de l'oscillateur est de la forme :

$$z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi).$$

En utilisant la notation complexe, établir l'expression de la fonction de transfert mécanique :

$$\underline{H} = \frac{z}{Z_B}.$$

4. En supposant que $\omega_0 \tau = 1$, montrer que la fonction de transfert peut s'écrire :

$$\underline{H} = \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j\sqrt{2}\frac{\omega_0}{\omega}}.$$

En déduire le module ou gain du filtre

$G = |\underline{H}| = \frac{Z_m}{Z_0}$ et l'argument φ de la fonction de transfert. Examiner les cas limites $\omega_0 \gg \omega$ et $\omega_0 \ll \omega$? Déterminer le facteur de qualité Q du filtre. Commenter le comportement en fréquence du sismographe et préciser la nature du filtre. Dans quel cas le mouvement relatif de M reproduit-il l'amplitude de la secousse sismique.



> Corrigé p. 314

Boomerang spatial (d'après ENSTIM)

Une station spatiale est sur une orbite circulaire autour de la Terre.

Son mouvement est étudié dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G considéré comme galiléen. Ce référentiel a pour origine le centre O de la Terre et ses axes sont orientés dans la direction de trois étoiles très éloignées.

1. La station est assimilée à un point matériel S de masse M_S repéré par le rayon vecteur $\vec{R} = \vec{OS}$.

Définir le moment cinétique de la station S par rapport à l'origine O du référentiel. Rappeler les caractéristiques du mouvement de S .

2. Montrer que le mouvement circulaire du satellite s'effectue avec un vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constant.

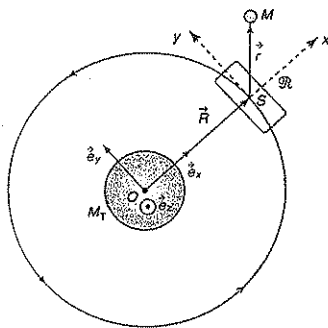
3. Exprimer ω en fonction de la masse M_T de la Terre, de la constante de gravitation universelle G et du rayon R .

4. La station spatiale internationale en construction depuis 1998 est située à une altitude d'environ 400 km. Calculer sa période de révolution.

La station orbitale est en rotation synchrone autour de la Terre.

Elle tourne sur elle-même avec un vecteur vitesse angulaire identique à celui de son mouvement orbital, $\vec{\omega}$. On désigne par \mathcal{R} le référentiel lié à la station. L'origine de ce référentiel est située au centre de masse S de la station. L'axe (Sx) est dirigé suivant \vec{R} , l'axe (Sz) est porté par le moment cinétique et l'axe (Sy) complète le trièdre orthonormé.

Dans ce référentiel, un corps ponctuel M , de masse m , est en mouvement dans le plan (Sxy) . Il est repéré dans la station par le rayon vecteur $\vec{r} = \vec{SM}$.



5. Définir le point coïncident de M et donner son accélération $\vec{a}_e(M)$ en fonction de \vec{r} , \vec{R} et ω . En déduire la force d'inertie d'entraînement \vec{F}_{ie} exercée sur la masse m dans \mathcal{R} .

6. Si la particule M est animée d'une vitesse \vec{v} dans \mathcal{R} , quelle force d'inertie supplémentaire lui est elle appliquée ? Exprimer cette force en fonction de m , $\vec{\omega}$ et \vec{v} .

La particule se trouvant dans le voisinage proche de la station, l'inégalité $r \ll R$ sera toujours vérifiée dans la suite du problème.

7. À l'aide d'un développement limité arrêté au premier ordre en $\frac{r}{R}$, montrer que la force d'interaction gravitationnelle qu'exerce la Terre sur le corps M s'écrit :

$$\vec{F} = -m\omega^2(\vec{R} + \vec{r} - 3x\vec{e}_x)$$

où \vec{e}_x est le vecteur unitaire porté par l'axe (Sx) et $(x; y)$ sont les coordonnées de \vec{r} dans \mathcal{R} .

8. Le corps M est une balle que le cosmonaute lance en direction de la Terre avec la vitesse relative $\vec{v}_0 = -v_0\vec{e}_x$ ($v_0 \ll R\omega$) dans \mathcal{R} depuis l'origine S de ce référentiel. Établir l'équation du mouvement dans \mathcal{R} de la balle sous la forme de deux équations différentielles pour les variables x et y .

9. Intégrer ces équations, montrer que la trajectoire suivie par M est une ellipse et déterminer sa période de parcours.

Données :

Rayon terrestre moyen $R_T = 6\,400$ km.

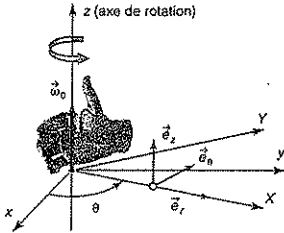
Accélération de la pesanteur à la surface du globe

$g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;

$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$ lorsque $|\varepsilon| \ll 1$.

Tester ses connaissances

1 Réponse b. Le vecteur rotation qui caractérise le mouvement de la tige par rapport au référentiel terrestre est orienté corrélativement à l'orientation de θ en utilisant la règle de la main droite :



2 Réponse c. Le point coïncident M^* de M est fixe sur la tige et en rotation dans le référentiel \mathcal{R} : sa trajectoire est circulaire.

3 Réponse b. La vitesse d'entraînement de M s'exprime de façon générale par :

$$\vec{v}_{\text{ent}}(M) = \underbrace{\vec{v}(O'/\mathcal{R})}_{\text{vitesse d'entraînement due à la translation de } \mathcal{R}'/\mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\text{vitesse d'entraînement due à la rotation de } \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

C'est un mouvement de rotation pure autour de O (O' est confondu avec O) :

$$\vec{v}_{\text{ent}}(M) = \underbrace{\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}}_{\text{vitesse d'entraînement due à la rotation de } \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

4 Réponse c. Le référentiel de la tige \mathcal{R}' est animé d'un mouvement circulaire uniforme dans le référentiel terrestre \mathcal{R} avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$. Le point M^* , coïncident de M et fixe sur la tige, a donc lui aussi un mouvement circulaire uniforme de rayon vecteur $\overrightarrow{OM^*}$, son accélération dans \mathcal{R} est centripète :

$$\vec{a}(M^*/\mathcal{R}) = -\omega(\mathcal{R}'/\mathcal{R})^2 \overrightarrow{OM^*} = \vec{a}_{\text{ent}}(M).$$

Conseil : retenons l'expression de l'accélération d'entraînement de M dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} :

$$\vec{a}_{\text{ent}}(M) = -\omega(\mathcal{R}'/\mathcal{R})^2 \overrightarrow{OM}.$$

5 Réponse b. L'accélération de Coriolis de M est :

$$\vec{a}_{\text{cor}}(M) = 2\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(M).$$

6 Réponse b. Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres : l'accélération d'entraînement d'un référentiel galiléen par rapport à un autre référentiel galiléen est nulle.

7 La force d'inertie d'entraînement est en général non conservative sauf dans les cas particuliers correspondants aux réponses b. et c.

8 La force d'inertie de Coriolis est :

$$\vec{a}_{\text{cor}}(M) = 2\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(M).$$

a. Vrai. b. Vrai. c. Faux. d. Vrai.

Savoir appliquer le cours

1 La vitesse d'entraînement dans cette situation de rotation pure est :

$$\vec{v}_{\text{ent}}(M) = \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM} = r\omega_0 \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = r\omega_0 \vec{e}_\theta.$$

Or l'intégration de $v_\theta = \frac{dr}{dt}$ donne avec la condition initiale : $r(t=0) = 0$:

$$r = v_0 t$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{\text{ent}}(M) = v_0 \omega_0 t \vec{e}_\theta.$$

La vitesse relative est :

$$\vec{v}_{\text{rel}}(M) = v_0 \vec{e}_r.$$

La loi de composition des vitesses permet d'écrire :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = v_0(\vec{e}_r + \omega_0 t \vec{e}_\theta)$$

2 L'accélération d'entraînement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est : $\vec{a}_{\text{ent}}(M) = -\omega(\mathcal{R}'/\mathcal{R})^2 \overrightarrow{OM}$

$$\vec{a}_{\text{ent}}(M) = -\omega_0^2 r \vec{e}_r = -\omega_0^2 v_0 t \vec{e}_r.$$

L'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_{\text{cor}}(M) = 2\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(M)$$

$$\vec{a}_{\text{cor}}(M) = 2\omega_0 v_0 \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = 2\omega_0 v_0 \vec{e}_\theta.$$

La particule se déplaçant à vitesse constante le long de la tige, son accélération relative est nulle.

La loi de composition des accélérations permet d'écrire :

$$\vec{a}(M_{/R_0}) = \underbrace{-\omega_0^2 \nu_0 t \vec{e}_r}_{\text{accélération d'entraînement}} + \underbrace{2\omega_0 \nu_0 \vec{e}_\theta}_{\text{accélération de Coriolis}}$$

$$\vec{a}(M_{/R_0}) = \omega_0 \nu_0 (-\omega_0 t \vec{e}_r + 2\vec{e}_\theta)$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la particule en trajectoire rectiligne et uniforme dans le référentiel de la tige non galiléen :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_{op} = \vec{0}$$

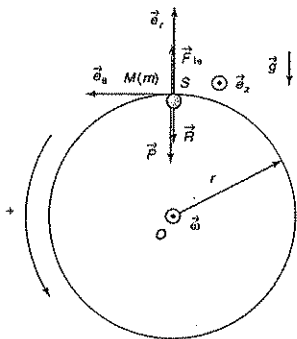
La projection de cette équation vectorielle dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ donne :

$$m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_\theta \\ R_z \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \omega_0^2 \nu_0 t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega_0 \nu_0 \vec{e}_\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{op} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} F_{op} = -m\omega_0^2 \nu_0 t \\ R_\theta = 2m\omega_0 \nu_0 \\ R_z = mg \end{cases}$$

Les deux composantes du support R_θ et R_z équilibrent respectivement la force d'inertie de Coriolis et le poids de la particule. L'opérateur retient la particule en équilibrant à tout instant la force d'inertie d'entraînement.

3 Prenons la situation la plus favorable pour que le linge perde le contact avec le tambour : au sommet S du cylindre. Si l'objet textile M supposé ponctuel et de masse m reste en contact à cet endroit avec le tambour, il le restera tout au long de son mouvement. Considérons la situation d'équilibre relatif dans le référentiel du tambour non galiléen : la force d'inertie de Coriolis est nulle. Le schéma représentatif suivant décrit la situation :



Les forces à considérer sont le poids de M , la réaction du tambour et la force d'inertie d'entraînement. À l'équilibre dans le tambour :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ic} = \vec{0}$$

En projection suivant \vec{z} , (avec $R = \|\vec{R}\| \geq 0$) :

$$-mg - R + m\omega^2 \frac{d}{2} = 0$$

D'où :

$$R = m\left(\omega^2 \frac{d}{2} - g\right)$$

Pour que le linge reste en contact avec le tambour il faut que $R > 0$:

$$\omega > \sqrt{\frac{2g}{d}}$$

La vitesse angulaire est exprimée en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Le résultat en tours/min est :

$$\Omega_{\text{lim}} = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{d}} \quad \Omega_{\text{lim}} = 60 \text{ tours} \cdot \text{min}^{-1}$$

4 Le système étudié est l'objet rigide M . L'étude a lieu dans le référentiel du plateau P . Ce référentiel est accéléré par rapport au référentiel terrestre, il n'est donc pas galiléen.

• *Bilan des forces appliquées au point M*

(i) à distance : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$, le poids du point matériel M ;

(ii) de contact : $\vec{R} = R\vec{z}$, la réaction du support ;

(iii) d'inertie : $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(M)$, la force d'inertie d'entraînement.

Le référentiel du plateau étant en translation par rapport au référentiel terrestre, l'accélération d'entraînement est l'accélération de n'importe quel point du référentiel du plateau :

$$\vec{a}_c(M) = \vec{z}_p \ddot{z}$$

$$\vec{F}_{ic} = -m\vec{z}_p \ddot{z}$$

L'accélération de Coriolis est nulle car le plateau est en translation par rapport au référentiel terrestre.

• *Expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique*

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{F}_{ic} = \vec{0}$$

Projection suivant le vecteur unitaire \vec{z} :

$$R - mg - m\ddot{z}_p = 0$$

Or

$$\ddot{z}_p(P) = -\omega^2 H \cos \omega t$$

La réaction du support se déduit du principe fondamental :

$$R = m(g - \omega^2 H \cos \omega t)$$

Le cube reste en contact avec le plateau tant que $R \geq 0$, la condition du contact est ainsi :

$$g - \omega^2 H \cos \omega t \geq 0.$$

Pour que cette condition soit réalisée à tout instant, il faut que :

$$\begin{aligned} [g - \omega^2 H \cos \omega t]_{\text{minimal}} &= g - \omega^2 H [\cos \omega t]_{\text{maximal}} \\ &= g - \omega^2 H \geq 0 \end{aligned}$$

$$\omega \leq \sqrt{\frac{g}{H}}$$

La pulsation critique est donc $\omega_C = \sqrt{\frac{g}{H}}$ et la fré-

quence critique $N_C = \frac{\omega_C}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{H}}$

A.N. : $N_C = 15,7$ Hz.

S'entraîner

1. Le référentiel \mathcal{R}' est en rotation par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R} la loi de composition des vitesses est :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \underbrace{\vec{v}_{\text{ent}}(M/\mathcal{R}')}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\vec{v}_{\text{ent}}(M)}_{\text{vitesse d'entraînement due à la rotation de } \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

La vitesse relative du point M est :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}') = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{d[r\vec{e}_r]}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = r\vec{e}_t$$

Le vecteur \vec{e}_t est fixe dans le référentiel de dérivation, il n'est donc pas dérivé par rapport à t .

La vitesse d'entraînement de M est la vitesse du point coïncident M^* par rapport à \mathcal{R} . Son expression dans le cas d'un mouvement de rotation pure est :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{ent}}(M) &= \vec{v}(M^*/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{OM}^*}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{OM}^* \\ &= r\omega\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = r\omega\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

En conséquence :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = r\vec{e}_t + r\omega\vec{e}_\theta$$

2. L'accélération relative est :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \left(\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R}')}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{d[r\vec{e}_t]}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = r\vec{e}_r$$

Le point fixe M^* de \mathcal{R}' qui coïncide avec M étant animé d'un mouvement circulaire uniforme, l'accélération d'entraînement est :

$$\vec{a}_{\text{ent}}(M) = -\omega_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}^2 \vec{OM}^* = -\omega^2 r\vec{e}_r$$

L'accélération de Coriolis s'écrit :

$$\vec{a}_{\text{cor}}(M) = 2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}') = 2\omega r\vec{e}_z \wedge \vec{e}_t = 2\omega r\vec{e}_\theta$$

La loi de composition des accélérations donne l'accélération de M dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}_{\text{ent}}(M) + \vec{a}_{\text{cor}}(M)$$

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = (r - \omega^2 r)\vec{e}_r + 2\omega r\vec{e}_\theta$$

3. Le système est le point M . Son mouvement est étudié dans le référentiel de la tige en rotation par rapport au référentiel terrestre galiléen. Le référentiel de la tige est en conséquence non galiléen, il faut ajouter les forces d'inertie au bilan des forces « naturelles ».

• Bilan des forces agissant sur M

Action des objets extérieurs sur M :

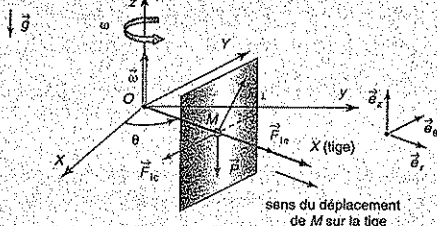
$\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$, le poids du point matériel M ;

$\vec{F}_{\text{tige} \rightarrow M} = \vec{R}_1 = R_z\vec{e}_z + R_\theta\vec{e}_\theta$, la réaction du support sur M . Pseudo-forces ou forces d'inertie :

$\vec{F}_{\text{ic}} = -m\vec{a}_{\text{ent}}(M) = m\omega^2 r\vec{e}_r$, la force d'inertie d'entraînement ;

$\vec{F}_{\text{ic}} = -m\vec{a}_{\text{cor}}(M) = -2m\omega r\vec{e}_\theta$ la force d'inertie de Coriolis.

Le schéma représentatif va nous permettre de comprendre le mouvement :



Le théorème du moment cinétique appliqué au point O , fixe dans \mathcal{R}' , ne peut pas être utilisé pour déterminer l'équation du mouvement de M . La force d'inertie d'entraînement, qui est responsable du mouvement du mobile le long de la tige, a sa droite d'action qui passe par O : le moment de cette force calculé en O est nul.

4. Expression du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel de la tige :

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}_t) = \vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_{ic}.$$

La projection du principe fondamental dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ donne :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_\theta \\ R_z \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ -2\omega\dot{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et conduit à un système de trois équations :

$$\vec{e}_r : \begin{cases} \ddot{r} - \omega^2 r = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\vec{e}_\theta : \begin{cases} R_\theta = 2m\dot{r}\omega \end{cases} \quad (2)$$

$$\vec{e}_z : \begin{cases} R_z = mg \end{cases} \quad (3)$$

Le mouvement est impossible dans le plan perpendiculaire à la tige : la réaction orthoradiale de la réaction du support compense la force d'inertie de Coriolis et sa composante axiale compense le poids de M . L'anneau est entraîné le long de la tige par la force d'inertie d'entraînement centrifuge.

La résolution de l'équation différentielle (1) donne la solution générale divergente :

$$r(t) = A_1 \text{ch}(\omega t) + A_2 \text{sh}(\omega t).$$

Les conditions initiales permettent de préciser les constantes A_1 et A_2 :

$$r(t) = r_0 \text{ch}(\omega t).$$

Sachant que $\theta = \omega t$, l'équation de la trajectoire de M dans le référentiel \mathcal{R} est :

$$\boxed{r(t) = r_0 \text{ch} \theta}$$

L'anneau glisse le long de la tige puis la quitte à son extrémité. Le problème change ensuite de nature.

5. Reprenons le bilan des forces et considérons la puissance de chacune d'elles.

Le poids est une force conservative mais sa puissance est nulle :

$$\mathcal{P}(\vec{P}/\mathcal{R}_t) = -mg\vec{e}_z \cdot \dot{r}\vec{e}_r = 0.$$

La réaction du support ne travaille pas car c'est une force perpendiculaire à la trajectoire du mobile. Sa puissance est nulle dans le référentiel de la tige :

$$\mathcal{P}(\vec{R}_1/\mathcal{R}_t) = \vec{R}_1 \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}_t) = (\mathcal{R}_z\vec{e}_z + \mathcal{R}_\theta\vec{e}_\theta) \cdot \dot{r}\vec{e}_r = 0.$$

Remarque : en revanche, la réaction du support a une puissance non nulle dans le référentiel \mathcal{R} car si elle est toujours normale à la tige, la tige ne se confond pas avec la trajectoire (voir chapitre 3, exercice 6 de « s'entraîner »).

La force d'inertie de Coriolis a une puissance nulle et ne travaille pas.

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{ic}/\mathcal{R}_t) = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_t) \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}_t) = 0.$$

Toutes ces forces de puissances nulles dérivent chacune d'une énergie potentielle constante que nous choisirons nulle.

La force d'inertie d'entraînement est conservative et dérive de l'énergie potentielle centrifuge :

$$\boxed{\mathcal{E}_P^{\text{centrifuge}}(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2}$$

L'origine de l'énergie potentielle d'entraînement centrifuge est choisie en O .

Le système est donc conservatif et il est à un degré de liberté sur l'axe.

La solution de notre problème peut ainsi être obtenue de manière élégante en écrivant l'intégrale première de l'énergie :

$$\mathcal{E}_m(M/\mathcal{R}_t) = \mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_t) + \mathcal{E}_P^{\text{centrifuge}}(M)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \mathcal{E}_m.$$

Sa dérivée par rapport au temps est nulle :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_C}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_P(r)}{dr} \frac{dr}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m\dot{r}(\dot{r} - \omega^2 r)}{=0} = 0.$$

L'équation différentielle du mouvement est :

$$\boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = 0}$$

2.1. Le système est le point matériel M étudié dans le référentiel de la plate-forme \mathcal{R}_p .

Ce référentiel n'est pas galiléen car il est accéléré par rapport au référentiel terrestre galiléen \mathcal{R}_g .

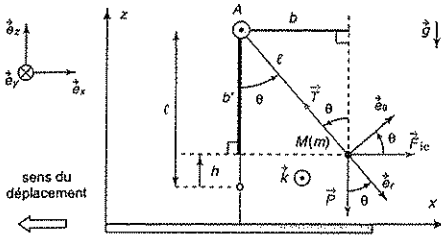
◦ *Bilan des forces agissant sur M*

• à distance : $\vec{F}_{\text{terre} \rightarrow M} = \vec{P} = m\vec{g}$, les poids de M ;

• de contact : $\vec{F}_{\text{fil} \rightarrow M} = \vec{T}$, la tension du fil ;

• d'inertie : $\vec{F}_{ic} = m\vec{a}_e(M) = ma_0\vec{e}_x$, la force d'inertie d'entraînement.

La force d'inertie de Coriolis est nulle car le référentiel de la plate-forme est en translation par rapport au référentiel terrestre : $\vec{\omega}_{(\mathcal{R}_p/\mathcal{R}_g)} = \vec{0}$.



(i) Relation fondamentale de la statique appliquée au point M en équilibre relatif dans \mathcal{R}_P :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ic} = \vec{0}.$$

En projetant suivant \vec{e}_θ pour éliminer T , on obtient :

$$ma_0 \cos \theta_0 - mg \sin \theta_0 = 0.$$

Ainsi :

$$\tan \theta_0 = \frac{a_0}{g}$$

On remarque que :

• si $a_0 \ll g$: $\theta_0 \rightarrow 0$;

• si $a_0 \gg g$: $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Discussion du mouvement :

• si $a_0 > 0$, alors $\theta_0 \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$;

• si $a_0 < 0$, alors $\theta_0 \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$.

(ii) Le théorème du moment cinétique en A , point fixe du référentiel \mathcal{R}_P , donne dans cette situation d'équilibre relatif :

$$\vec{M}_A(\vec{P}) + \vec{M}_A(\vec{T}) + \vec{M}_A(\vec{F}_{ic}) = \vec{0}.$$

Calculons les moments de chacune de ces forces en A :

$$\vec{M}_A(\vec{P}) = -mgb\vec{k} = -mgl \sin \theta \vec{k}$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}_{ic}) = ma_0 b' \vec{k} = ma_0 \ell \cos \theta \vec{k}.$$

La droite d'action de la tension \vec{T} du fil passe par A , le moment de cette force est nul en ce point :

$$\vec{M}_A(\vec{T}) = \vec{0}.$$

La nullité de la somme des moments des forces appliquées en A donne suivant \vec{k} :

$$-mgl \sin \theta_0 + ma_0 \ell \cos \theta_0 = m\ell(a_0 \cos \theta_0 - g \sin \theta_0) = 0$$

$$\Rightarrow \tan \theta_0 = \frac{a_0}{g}$$

(iii) Le système est conservatif.

Le poids \vec{P} est une force conservative et en adoptant $\theta = 0$ comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$\mathcal{E}_P^{pes} = mgh \quad (h > 0)$$

$$\mathcal{E}_P^{pes}(\theta) = mgl(1 - \cos \theta).$$

La force d'inertie d'entraînement est dans ce cas particulier, conservative :

$$\delta \mathcal{T}(\vec{F}_{ic}/\mathcal{R}_P) = \vec{F}_{ic} \cdot d\vec{AM} = ma_0 \vec{e}_x \cdot d\vec{AM}$$

vecteur constant

$$= d(ma_0 \vec{e}_x \cdot \vec{AM}) = d\left(m\ell a_0 \vec{e}_x \cdot \vec{e}_r\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$:

$$\delta \mathcal{T}(\vec{F}_{ic}/\mathcal{R}_P) = d(m\ell a_0 \sin \theta) = -d\mathcal{E}_P^{ent}(\theta).$$

En choisissant $\theta = 0$ comme origine de l'énergie potentielle d'entraînement :

$$\mathcal{E}_P^{ent}(\theta) = -m\ell a_0 \sin \theta.$$

L'énergie potentielle totale de M est :

$$\mathcal{E}_P(\theta) = \mathcal{E}_P^{pes}(\theta) + \mathcal{E}_P^{ent}(\theta) = mgl(1 - \cos \theta) - m\ell a_0 \sin \theta.$$

Dérivons cette expression par rapport à θ :

$$\frac{d\mathcal{E}_P(\theta)}{d\theta} = m\ell(g \sin \theta - a_0 \cos \theta).$$

Les positions d'équilibre de M correspondent à un extremum de la fonction $\mathcal{E}_P(\theta)$:

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_P(\theta)}{d\theta}\right)_{\theta_0} = 0$$

$$g \sin \theta_0 - a_0 \cos \theta_0 = 0.$$

La seule position d'équilibre correspond à :

$$\tan \theta_0 = \frac{a_0}{g}$$

Est-elle stable ?

$$\frac{d^2\mathcal{E}_P(\theta)}{d\theta^2} = m\ell(g \cos \theta + a_0 \sin \theta)$$

La position d'équilibre est stable car à l'équilibre :

$$\left(\frac{d^2\mathcal{E}_P(\theta)}{d\theta^2}\right)_{\theta_0} = m\ell \left(\begin{matrix} g \cos \theta_0 > 0 \\ a_0 \sin \theta_0 > 0 \end{matrix} \right) > 0$$

car $\theta_0 \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Cette position d'équilibre peut faire l'objet d'une *approximation harmonique* car celle-ci est applicable à un minimum de l'énergie potentielle pour laquelle celle-ci est deux fois dérivable et dont la dérivée seconde est non nulle et positive.

Développons encore :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P(\theta)}{d\theta^2} \right)_{\theta_0} &= \frac{m\ell}{g} \cos \theta_0 (g^2 + g a_0 \tan \theta_0) \\ &= \frac{m\ell}{g} \cos \theta_0 (g^2 + a_0^2). \end{aligned}$$

Or :

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_0}} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a_0^2}}$$

$$\left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P(\theta)}{d\theta^2} \right)_{\theta_0} = m\ell \sqrt{g^2 + a_0^2}.$$

Remarquons que :

$$g \cos \theta_0 + a_0 \sin \theta_0 = \sqrt{g^2 + a_0^2}.$$

2. Lors de l'accélération uniforme, la position d'équilibre du pendule est située en arrière de la verticale dans le sens opposé au déplacement de la plate-forme.

Lors du freinage, l'accélération du véhicule est négative ($a_0 < 0$) : $\tan \theta_0 = \frac{a_0}{g} < 0$ et $\theta_0 < 0$.

La position d'équilibre du pendule (lorsque l'accélération est uniforme) est située en avant de la verticale dans le sens du déplacement.

L'observation du pendule permet d'accéder à l'accélération du véhicule et d'en connaître le signe par la relation :

$$a_0 = g \tan \theta_0.$$

Si l'accélération du véhicule est nulle, le pendule est à la verticale et $\theta_0 = 0$: le référentiel \mathcal{R}_P est alors galiléen car il est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre galiléen. Rien n'indique pour un observateur du pendule qui serait enfermé dans le véhicule si le référentiel d'expérimentation est en mouvement ou non par rapport au référentiel terrestre. C'est le principe de relativité galiléenne.

3. *Approximation harmonique* : effectuons un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\mathcal{E}_P(\theta)$ au voisinage de la position d'équilibre θ_0 en notant l'écart de la position du pendule par rapport à sa position d'équilibre : $\varepsilon = \theta - \theta_0$.

L'énergie potentielle harmonique approchée est :

$$\mathcal{E}_P(\theta) = \mathcal{E}_P(\theta_0) + (\theta - \theta_0) \underbrace{\left(\frac{d\mathcal{E}_P}{d\theta} \right)_{\theta_0}}_0 + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^2 \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P}{d\theta^2} \right)_{\theta_0}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_P(\varepsilon) = \mathcal{E}_P(\theta_0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P}{d\theta^2} \right)_{\theta_0}$$

La fonction $\mathcal{E}_P(\varepsilon)$ est une représentation parabolique, les oscillations sont sinusoïdales.

En remarquant que $\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}$, l'énergie cinétique de la particule $M(m)$ dans \mathcal{R}_P est :

$$\mathcal{E}_C(M/\mathcal{R}_P) = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varepsilon}^2$$

et son énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varepsilon}^2 + \mathcal{E}_P(\varepsilon) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varepsilon}^2 + \mathcal{E}_P(\theta_0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P}{d\theta^2} \right)_{\theta_0}$$

Le système étant conservatif, l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Rightarrow m \ell^2 \dot{\varepsilon} \left[\ddot{\varepsilon} + \frac{1}{m \ell^2} \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P}{d\theta^2} \right)_{\theta_0} \varepsilon \right] = 0.$$

Cette équation est vérifiée à tout instant et le système est en mouvement :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{1}{m \ell^2} \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P}{d\theta^2} \right)_{\theta_0} \varepsilon = \ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0.$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation au carré :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m \ell^2} \left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P}{d\theta^2} \right)_{\theta_0}$$

En remplaçant $\left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P}{d\theta^2} \right)_{\theta_0}$ par sa valeur obtenue dans la première question :

$$\left(\frac{d^2 \mathcal{E}_P(\theta)}{d\theta^2} \right)_{\theta_0} = m\ell \sqrt{g^2 + a_0^2}.$$

On obtient :

$$\omega_0^2 = \frac{\sqrt{g^2 + a_0^2}}{\ell}.$$

La période des petites oscillations est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \frac{\ell}{\sqrt{g^2 + a_0^2}}$$

4. Appliquons le théorème du moment cinétique en A dans la situation hors équilibre :

$$\left(\frac{d\vec{L}_A(M/\mathcal{R}_P)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_P} = \vec{M}_A(\vec{P}) + \underbrace{\vec{M}_A(\vec{T})}_{\vec{0}} + \vec{M}_A(\vec{F}_{ic}).$$

Dans le référentiel \mathcal{R}_P , le moment cinétique en A du point M est :

$$\vec{L}_A(M/\mathcal{R}_P) = \vec{AM} \wedge m \vec{v}_{rel}(M) = m \ell^2 \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge \vec{z}_0 = m \ell^2 \dot{\theta} \vec{k}.$$

Sa dérivée par rapport à t dans le référentiel de l'ascenseur est :

$$\left(\frac{d\vec{L}_A(M/\mathcal{R}_P)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_P} = m \ell^2 \dot{\theta} \vec{k}.$$

Le théorème du moment cinétique projeté suivant \vec{k} donne :

$$m \ell^2 \dot{\theta} = -m g \ell \sin \theta + m a_0 \ell \cos \theta.$$

Or $\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} = \frac{1}{\ell} [-g \sin(\theta_0 + \varepsilon) + a_0 \cos(\theta_0 + \varepsilon)].$$

En remplaçant :

$$\sin(\theta_0 + \varepsilon) = \sin \theta_0 \frac{\cos \varepsilon}{-1} + \cos \theta_0 \frac{\sin \varepsilon}{-\varepsilon} \approx \sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0$$

$$\cos(\theta_0 + \varepsilon) = \cos\theta_0 \underbrace{\cos\varepsilon}_{\approx 1} - \sin\theta_0 \underbrace{\sin\varepsilon}_{\approx \varepsilon} \approx \cos\theta_0 - \varepsilon \sin\theta_0$$

on obtient

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{1}{\ell} \left[\underbrace{-g \sin\theta_0 + a_0 \cos\theta_0}_0 - \varepsilon (g \cos\theta_0 + a_0 \sin\theta_0) \right].$$

Or : $g \cos\theta_0 + a_0 \sin\theta_0 = \sqrt{g^2 + a_0^2}$.

L'équation différentielle vérifiée par ε est ainsi :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\sqrt{g^2 + a_0^2}}{\ell} \varepsilon = 0$$

C'est bien l'équation du mouvement obtenue dans la question précédente.

Appliquons maintenant le principe fondamental de la dynamique à l'avion M_A de masse m_0 dans le référentiel terrestre galiléen :

$$m_0 \vec{a}(M_A/\mathcal{R}_g) = m_0 \vec{g}.$$

L'avion n'est soumis qu'à la force de pesanteur : il s'agit d'un mouvement parabolique de chute libre.

En intégrant avec les conditions initiales adoptées l'équation différentielle :

$$\vec{a}(M_A/\mathcal{R}_g) = \left(\frac{d^2 \vec{O}M_A}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{g},$$

on obtient successivement vitesse et position de l'avion :

$$\vec{v}(M_A/\mathcal{R}_g) = \vec{g}t + \vec{v}_0 \quad \text{et} \quad \vec{O}M_A = \frac{1}{2} \vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{O}A.$$

D'où les vitesses et position de l'avion dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{v}(M_A/\mathcal{R}_g) = \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\vec{O}M_A = \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha t + x_A \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t + z_A \end{cases}$$

La trajectoire de l'avion dans \mathcal{R}_g est obtenue en éliminant le temps dans les équations horaires du mouvement :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} (x - x_A)^2 + \tan\alpha (x - x_A) + z_A$$

La trajectoire de l'avion est parabolique.

2. Le point culminant S de la trajectoire correspond à $\dot{z}_S = 0$. L'avion atteint S à l'instant :

$$t_S = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

En conséquence, l'avion est monté de l'altitude :

$$h = z_S - z_A = -\frac{1}{2}gt_S^2 + v_0 \sin\alpha t_S = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} \\ \Rightarrow v_0 \sin\alpha = \sqrt{2gh}.$$

La parabole décrite sans frottement est symétrique par rapport à l'axe $(S; \vec{e}_z)$, la durée maximale de l'impesanteur est :

$$T = 2t_S = 2 \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Finalement :

$$T = 2 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

A.N : $T = 84,85 \text{ s} = 1 \text{ min } 25 \text{ s}.$

3 1. Le système est l'astronaute M de masse m . Son mouvement est étudié dans le référentiel de l'avion \mathcal{R}_a , non galiléen car il est en translation non uniforme par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R}_g supposé galiléen.

• Bilan des forces appliquées à l'astronaute lorsqu'il est en contact avec le plancher de l'avion

- le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$.
- la réaction du support : \vec{R} .
- la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(M) = -m\vec{a}(M/\mathcal{R}_a) = -m\vec{a}(O'/\mathcal{R}_g) = -m\vec{a}.$$

L'accélération d'entraînement est l'accélération \vec{a} d'un point quelconque de l'avion car celui-ci est en translation par rapport au référentiel terrestre.

L'accélération de Coriolis (et donc la force de Coriolis) est nulle car le référentiel de l'avion est en translation par rapport au référentiel terrestre :

$$\vec{\omega}(\mathcal{R}_a/\mathcal{R}_g) = \vec{0}.$$

Lorsque l'astronaute est en équilibre relatif sur le plancher de l'avion, l'expression de la relation fondamentale de sa statique donne :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}.$$

D'où : $\vec{R} = m(\vec{a} - \vec{g}).$

Pour que l'astronaute soit en impesanteur, il faut qu'il ne soit plus en contact avec l'avion, autrement dit :

$$\vec{R} = \vec{0}.$$

En conséquence, il faut que $\vec{a} = \vec{g}$: l'avion se met en chute libre à partir de A .

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}_a) = m(\vec{g} - \vec{a}) = \vec{0}.$$

La trajectoire de l'astronaute dans l'avion est rectiligne uniforme. La force d'inertie d'entraînement compense le poids de l'astronaute.

4 1. Le système est le point matériel M de masse m . Il est à l'équilibre dans le référentiel du boîtier \mathcal{R}_B . Ce référentiel étant fixe par rapport au référentiel terrestre galiléen, il est lui-même galiléen : le principe fondamental de la statique est applicable.

• Bilan des forces appliquées au point M

• le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$.

• la tension du ressort :

$$\vec{T} = -k(\overrightarrow{SM}_{\text{eq}} - \overrightarrow{SM}_0) = k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{e}_z.$$

Le principe fondamental de la statique donne en projection selon \vec{e}_z :

$$k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) - mg = 0.$$

La longueur du ressort à l'équilibre, en l'absence d'onde sismique, est :

$$\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

2. En présence d'une onde sismique, le référentiel du boîtier est en translation par rapport au référentiel terrestre. Étant accéléré par rapport à \mathcal{R}_z , il n'est pas galiléen, et nous devons effectuer un nouveau bilan des forces :

• le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$.

• la tension du ressort : $\vec{T} = -k(\overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SM}_0)$.

• la force de frottement : $\vec{F}_f = -h\dot{z}\vec{e}_z$.

• la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M) = -m\vec{a}(M_{/\mathcal{R}_B}) = -m\vec{a}(S_{/\mathcal{R}_B}) = -m\ddot{Z}_B\vec{e}_z$$

L'accélération d'entraînement est l'accélération d'un point quelconque du boîtier car celui-ci est en translation par rapport au référentiel terrestre.

L'accélération de Coriolis est nulle et la force de Coriolis n'intervient pas car $\vec{\omega}(\mathcal{R}_B/\mathcal{R}_z) = \vec{0}$.

L'expression du principe fondamental de la dynamique dans \mathcal{R}_B donne :

$$m\vec{a}(M_{/\mathcal{R}_B}) = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_f + \vec{F}_{ie}.$$

$$m\vec{a}(M_{/\mathcal{R}_B}) = m\vec{g} - k(\overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SM}_0) + \vec{F}_f + \vec{F}_{ie}$$

$$= k(\overrightarrow{SM}_{\text{eq}} - \overrightarrow{SM}_0) - k(\overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SM}_0) + \vec{F}_f + \vec{F}_{ie}.$$

$$\text{Ainsi : } m\vec{a}(M_{/\mathcal{R}_B}) = k(\overrightarrow{SM}_{\text{eq}} - \overrightarrow{SM}) + \vec{F}_f + \vec{F}_{ie}$$

$$= -k(M_{\text{eq}}M) + \vec{F}_f + \vec{F}_{ie}.$$

Sa projection selon \vec{e}_z :

$$m\ddot{z} = -kz - h\dot{z} - m\ddot{Z}_B$$

Ainsi, il vient :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = -\ddot{Z}_B.$$

En posant $\frac{h}{m} = \frac{\sqrt{2}}{\tau}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, on obtient l'équation différentielle :

$$\ddot{z} + \frac{\sqrt{2}}{\tau}\dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{Z}_B$$

$$\text{Avec } \tau = \sqrt{\frac{2m}{h}} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

τ a la dimension d'un temps, il représente un ordre de grandeur de la durée de la phase transitoire précédant le régime permanent et caractérise l'amortissement de l'oscillateur.

3. En régime sinusoïdal établi :

$$z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow{\text{notation complexe}} \underbrace{z(t)}_{\text{amplitude complexe}} = Z_m e^{j\omega t}$$

$$\text{avec } Z_m = Z_m e^{j\varphi}$$

$$Z_B(t) = Z_0 \cos \omega t \xrightarrow{\text{notation complexe}} Z_B(t) = Z_0 e^{j\omega t}.$$

L'équation différentielle du mouvement de M s'écrit :

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\sqrt{2}}{\tau}) z = \omega^2 Z_B.$$

D'où l'expression de la fonction de transfert mécanique :

$$H = \frac{z}{Z_B} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\sqrt{2}}{\tau}} = \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j\sqrt{2} \frac{\omega_0}{\omega \tau}}$$

4. En remplaçant dans l'expression précédente τ par $\frac{1}{\omega_0}$, la fonction de transfert devient :

$$H = \frac{z}{Z_B} = \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j\sqrt{2} \frac{\omega_0}{\omega}}$$

Le module de la fonction de transfert est :

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 + 1}}$$

Son argument est :

$$\varphi = \arg(H) = \arg(1) - \arg\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j\sqrt{2} \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 - j\sqrt{2} \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \varphi = \frac{\sqrt{2} \frac{\omega_0}{\omega}}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \\ \sin \varphi < 0 \end{array} \right. \quad -\pi \leq \varphi \leq 0.$$

(i) Comportement à basse fréquence :

$$\omega_0 \gg \omega \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0} \ll 1 :$$

les vibrations du boîtier sont en phase avec les vibrations du sol et fortement atténuées.

(ii) Comportement à haute fréquence :

$$\omega_0 \ll \omega \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0} \approx -1 :$$

les vibrations du boîtier sont en opposition de phase avec les vibrations du sol et restituent fidèlement le mouvement du sol.

Revenons à l'équation différentielle du mouvement de M :

$$\ddot{z} + \frac{\sqrt{2}}{\tau} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{Z}_B.$$

Sous sa forme canonique, elle peut aussi s'écrire :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{Z}_B.$$

Le facteur de qualité est :

$$Q = \frac{\omega_0 \tau}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

C'est la valeur limite du facteur de qualité correspondant à la réponse la plus rapide de l'oscillateur sans résonance. Le sismographe est un filtre passe-haut d'ordre 2 à cause du terme en ω^2 ; il reproduit l'amplitude de la secousse sismique lorsque $\omega \gg \omega_0$.

5 1. Le système est la station spatiale assimilée au point S de masse M_S . Son mouvement est étudié dans le référentiel géocentrique galiléen.

S'est soumis à la force d'interaction gravitationnelle :

$$\vec{F} = -G \frac{M_T M_S}{R^3} \vec{R}.$$

C'est une force centrale, de centre de force O .

Le moment cinétique \vec{L} de la station S par rapport à l'origine O du référentiel est :

$$\vec{L} = M_S \vec{OS} \wedge \vec{v}(S)_{/\mathcal{R}_G} = M_S \vec{R} \wedge \vec{v}_S$$

Le mouvement de S étant à force centrale, \vec{L} se conserve. Le mouvement de la station est plan, il a lieu dans le plan (Oxy) .

2. Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le vecteur vitesse position de S est :

$$\vec{OS} = R \vec{e}_x.$$

Sachant que la trajectoire est circulaire, la dérivée par rapport à t de \vec{OS} donne :

$$\vec{v}_S = \left(\frac{d\vec{OS}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_G} = R \left(\frac{d\vec{e}_x}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_G} = R \omega \vec{e}_y.$$

La base étant orthonormée directe, on peut écrire :

$$\vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x.$$

D'où :

$$\vec{v}_S = \omega \vec{e}_z \wedge R \vec{e}_x = \vec{\omega} \wedge \vec{R}.$$

Le moment cinétique en O de S est :

$$\vec{L} = M_S \vec{R} \wedge \vec{v}_S = M_S \vec{R} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) = M_S R^2 \vec{\omega} - \underbrace{(\vec{R} \cdot \vec{\omega}) \vec{R}}_0.$$

Ainsi :

$$\vec{L} = M_S R^2 \vec{\omega}$$

Le vecteur moment cinétique est constant et $\vec{\omega}$ est un vecteur constant.

3. Le principe fondamental appliqué à S donne :

$$\vec{F} = -G \frac{M_T M_S}{R^3} \vec{R} = M_S \vec{a}(S)_{/\mathcal{R}_G} = M_S \vec{a}_S.$$

Or l'accélération de S s'exprime par :

$$\vec{a}_S = \left(\frac{d\vec{v}_S}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_G} = R \omega \left(\frac{d\vec{e}_y}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_G} = -R \omega^2 \vec{e}_x = -\omega^2 \vec{R}.$$

En remplaçant \vec{a}_S dans le principe fondamental, on obtient l'expression de ω :

$$\omega = \frac{GM_T}{R^3}$$

4. La période T s'exprime par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}.$$

On retrouve la troisième loi de Kepler.

Sachant que :

$$g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

La période est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g_0}} \left(\frac{R}{R_T} \right)^{\frac{3}{2}}$$

A.N. $T = 5\,560$ s (1 h 32 min).

5. Le point coïncident M^* coïncide à l'instant t avec M mais est fixe dans \mathcal{R} . Dans le référentiel géocentrique, il est repéré par le vecteur position :

$$\vec{OM}^* = \vec{OS} + S\vec{M}^* = \vec{R} + \vec{r}.$$

L'accélération d'entraînement dans ce cas de rotation pure est :

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{R} + \vec{r})] = -\omega^2 (\vec{R} + \vec{r}).$$

D'où la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ic} = m\omega^2(\vec{R} + \vec{\gamma})$$

6. Il faut ajouter la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

7. La force gravitationnelle d'interaction entre la Terre et la particule est :

$$\vec{F} = -GM_T m \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} = -GM_T m \frac{(\vec{R} + \vec{\gamma})}{\|\vec{R} + \vec{\gamma}\|^3}$$

Remarquons que :

$$\|\vec{R} + \vec{\gamma}\|^2 = R^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{\gamma} + r^2 = R^2 \left(1 + 2\frac{\vec{R}}{R^2} \cdot \vec{\gamma} + \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{R} + \vec{\gamma}\|^{-3} &= (\|\vec{R} + \vec{\gamma}\|^2)^{-\frac{3}{2}} = R^{-3} \left(1 + 2\frac{\vec{R}}{R^2} \cdot \vec{\gamma} + \frac{r^2}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\approx R^{-3} \left(1 - 3\frac{\vec{R}}{R^2} \cdot \vec{\gamma} - \frac{3}{2}\frac{r^2}{R^2} \right). \end{aligned}$$

En observant que :

$$x = \vec{\gamma} \cdot \vec{e}_x = \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{R}}{R}$$

et en s'arrêtant au premier ordre en $\frac{r}{R}$, il vient :

$$\|\vec{R} + \vec{\gamma}\|^{-3} \approx R^{-3} \left(1 - 3\frac{x}{R} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -m \frac{GM_T}{R^3} \left(1 - 3\frac{x}{R} \right) (\vec{R} + \vec{\gamma}) = -m\omega^2 \left(1 - 3\frac{x}{R} \right) (\vec{R} + \vec{\gamma})$$

$$\vec{F} = -m\omega^2 \left(\vec{R} + \vec{\gamma} - 3x\frac{\vec{\gamma}}{R} - 3x\frac{\vec{R}}{R} \right)$$

terme négligeable

Ainsi :

$$\vec{F} = -m\omega^2 (\vec{R} + \vec{\gamma} - 3x\frac{\vec{\gamma}}{R})$$

8. Le principe fondamental appliqué à la balle dans le référentiel de la station donne :

$$\begin{aligned} m \vec{a}(M_{/S}) &= \vec{F} + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_{ic} \\ &= -m\omega^2 (\vec{R} + \vec{\gamma} - 3x\frac{\vec{\gamma}}{R}) \\ &\quad + m\omega^2 (\vec{R} + \vec{\gamma}) - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}. \end{aligned}$$

Il reste :

$$\vec{a}(M_{/S}) = 3\omega^2 x \frac{\vec{\gamma}}{R} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}.$$

En projection suivant $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\omega^2 x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Suivant \vec{e}_z , on a $\ddot{z} = 0$. Compte tenu des conditions initiales ($\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = 0$) on obtient à tout instant : $\dot{z} = 0$ et $z = 0$.

Le mouvement du projectile a lieu dans le plan (Oxy) . suivant \vec{e}_x et \vec{e}_y , on obtient le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - 3\omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = 0 \end{cases}$$

9. Les conditions initiales sont les suivantes :

$$x(0) = y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = -v_0 \quad \text{et} \quad \dot{y}(0) = 0.$$

L'intégration de la seconde équation donne $\dot{y} = -2\omega x$. En reportant cette expression dans la première équation on obtient :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

La solution de cette équation, compte tenu des conditions initiales, est :

$$x = -\frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

D'où $\dot{y} = 2v_0 \sin \omega t$.

La solution de cette autre équation est :

$$y = \frac{2v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$$

La trajectoire de M est une ellipse de centre $(0; \frac{2v_0}{\omega})$,

de demi-grand axe $\frac{2v_0}{\omega}$, de demi-petit axe $\frac{v_0}{\omega}$ et par-

courue en une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Son équation paramétrée est obtenue en considérant que :

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1.$$

On obtient :

$$\frac{x^2}{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{2v_0}{\omega}\right)^2}{\left(\frac{2v_0}{\omega}\right)^2} = 1$$

À l'issue d'une rotation de la station, la balle revient à sa position initiale à des termes du second ordre près.



PCSI

MPSI

Système de deux points matériels

1 Système étudié : ensemble de deux points matériels

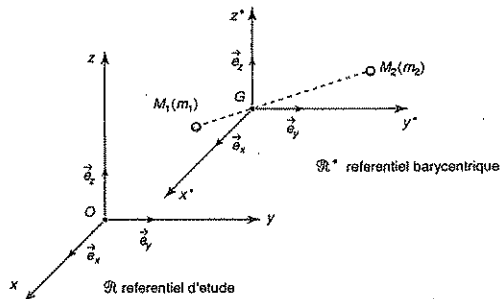
Nous avons étudié jusqu'ici les lois et théorèmes généraux de la mécanique appliqués à un point matériel (tout objet pouvant être assimilé à un point matériel à condition de ne s'intéresser qu'au mouvement à trois degrés de liberté de son centre d'inertie). En préambule à l'étude future d'un système quelconque, décomposable « par la pensée » en éléments matériels considérés comme ponctuels, nous allons appliquer maintenant les lois de la mécanique au système le plus simple constitué de deux particules en interaction.

1.1. Description du système

Le référentiel d'étude \mathcal{R} est quelconque.

Considérons un système S de deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 en mouvement dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

Fig.



1.1.1. Masse totale

La masse totale du système S est :

$$m = m_1 + m_2$$

1.1.2. Centre d'inertie (ou centre de masse)

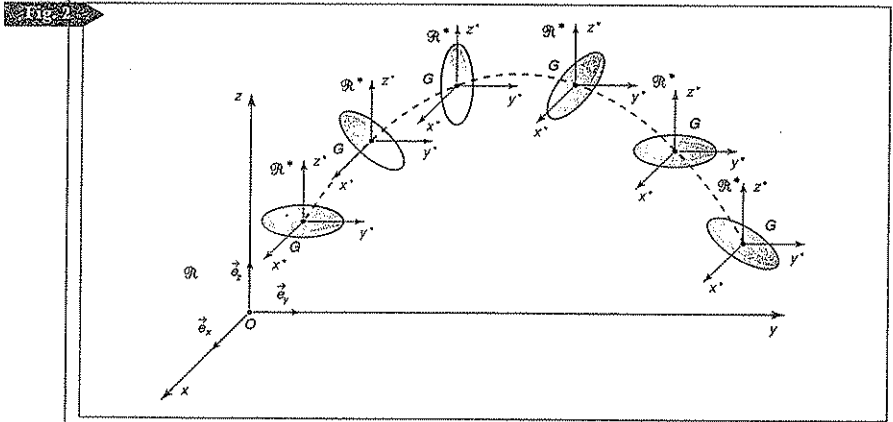
Le centre d'inertie G du système S est le barycentre des points M_1 et M_2 affectés des coefficients m_1 et m_2 :

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{soit} \quad m_1 \vec{GM}_1 + m_2 \vec{GM}_2 = \vec{0} \quad (1)$$

1.1.3. Référentiel barycentrique

Afin de pouvoir étudier séparément le mouvement d'ensemble du système (c'est-à-dire le mouvement de G) et le mouvement dû à l'interaction des deux particules, on associe au système le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* : ce référentiel, en mouvement de translation par rapport à \mathcal{R} , a G pour origine et ses axes restent parallèles aux axes du repère du référentiel \mathcal{R} .

Pour bien comprendre, observez les différentes positions du référentiel barycentrique du ballon de rugby sur la figure 2.



Si la résistance de l'air est négligée, la trajectoire du centre d'inertie G du système est parabolique, elle correspond au mouvement d'ensemble du ballon dans le référentiel \mathcal{R} . Le mouvement relatif de rotation propre du ballon autour de G est étudié dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* .

Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est en translation à la vitesse $\vec{v}(G)$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le vecteur rotation de \mathcal{R}^* par rapport à \mathcal{R} est nul :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

La vitesse $\vec{v}(G) = \vec{v}(G/\mathcal{R})$ est la vitesse du centre d'inertie G dans le référentiel \mathcal{R} . Elle est obtenue, en fonction de $\vec{v}_1 = \vec{v}(M_1/\mathcal{R})$ et de $\vec{v}_2 = \vec{v}(M_2/\mathcal{R})$, en dérivant l'équation (1) par rapport à t :

$$\vec{v}(G) = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m} \quad (2)$$

Le mouvement d'entraînement de \mathcal{R}^* par rapport à \mathcal{R} étant une translation, il est inutile de préciser le référentiel de dérivation et, pour un vecteur U quelconque, nous pourrions écrire indifféremment :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{U}}{dt}$$

2 Éléments cinétiques du système

2.1. Quantité de mouvement ou résultante cinétique

La quantité de mouvement du système S par rapport au référentiel \mathcal{R} est la somme des quantités de mouvement de chacun de ses points :

$$\vec{p}(S/\mathcal{R}) = \vec{p}(M_1/\mathcal{R}) + \vec{p}(M_2/\mathcal{R}) = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2.$$

L'équation (2) permet de conclure :

$$\vec{p}(S/\mathcal{R}) = m \vec{v}(G)$$

Dans le référentiel \mathcal{R} , la *quantité de mouvement* du système ou *résultante cinétique* est la quantité de mouvement d'un point matériel fictif situé en G où serait concentrée la masse totale m du système.

G étant fixe dans le référentiel barycentrique, la quantité de mouvement barycentrique du système est nulle :

$$\vec{p}^*(S) = m \vec{v}^*(G) = \vec{0}$$

2.2. Moment cinétique en un point

Le moment cinétique en O du système S par rapport au référentiel \mathcal{R} est la somme des moments cinétiques en O de chacun de ses points :

$$\vec{L}_O(S/\mathcal{R}) = \vec{L}_O(M_1/\mathcal{R}) + \vec{L}_O(M_2/\mathcal{R})$$

soit :

$$\vec{L}_O(S/\mathcal{R}) = \vec{OM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1 + \vec{OM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2.$$

Le moment cinétique dépend du point O par rapport auquel il est calculé. Cherchons la relation entre les moments cinétiques calculés en deux points différents O et O' :

$$\vec{L}_{O'}(S/\mathcal{R}) = \vec{O'M}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1 + \vec{O'M}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2 = \vec{O'O} \wedge \underbrace{(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)}_{\vec{p}(S/\mathcal{R})} + \vec{L}_O(S/\mathcal{R}).$$

Remarque

Toutes les grandeurs relatives au référentiel barycentrique seront notées avec un astérisque (*).

Ainsi, on obtient la loi de composition du moment cinétique :

$$\vec{L}_{O'}(S/\mathcal{R}) = \vec{L}_O(S/\mathcal{R}) + \vec{O}'\vec{O} \wedge \vec{p}(S/\mathcal{R})$$

2.3. Énergie cinétique

Dans le référentiel \mathcal{R} , l'énergie cinétique du système S est la somme des énergies cinétiques de chacun de ses points :

$$\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}) = \mathcal{E}_C(M_1/\mathcal{R}) + \mathcal{E}_C(M_2/\mathcal{R})$$

soit :

$$\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

2.4. Théorèmes de Kœnig

Les théorèmes de Kœnig décrivent le mouvement du système dans le référentiel \mathcal{R} en séparant le mouvement d'ensemble (celui du centre de masse G) du mouvement propre autour de G (observé dans le référentiel barycentrique).

2.4.1. Moment cinétique barycentrique

Dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , la formule du changement de point d'application du moment cinétique donne :

$$\vec{L}_{O'}^*(S) = \vec{L}_O^*(S) + \vec{O}'\vec{O} \wedge \underbrace{\vec{p}^*(S)}_{\vec{0}} = \vec{L}_O^*(S) = \vec{L}^*(S).$$

Le moment cinétique du système S dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est indépendant du point où on le calcule, il sera noté simplement $\vec{L}^*(S)$ et pourra être calculé en n'importe quel point.

2.4.2. Théorème de Kœnig du moment cinétique

Comparons le moment cinétique barycentrique $\vec{L}^*(S)$ au moment cinétique du système calculé en O dans le référentiel \mathcal{R} . La loi de composition des vitesses entre \mathcal{R} et \mathcal{R}^* , ces deux référentiels étant en translation l'un par rapport à l'autre à la vitesse $\vec{v}(G)$, donne pour M_1 et M_2 :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(M_1/\mathcal{R}) = \vec{v}^*(M_1) + \vec{v}(G)$$

vitesse d'entraînement due
à la translation de \mathcal{R}'/\mathcal{R}

$$\vec{v}_2 = \vec{v}(M_2/\mathcal{R}) = \vec{v}^*(M_2) + \vec{v}(G)$$

vitesse d'entraînement due
à la translation de \mathcal{R}'/\mathcal{R}

Le moment cinétique en O du système s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O(S/\mathcal{R}) &= \vec{OM}_1 \wedge m_1[\vec{v}^*(M_1) + \vec{v}(G)] + \vec{OM}_2 \wedge m_2[\vec{v}^*(M_2) + \vec{v}(G)] \\ &= \underbrace{\vec{OM}_1 \wedge m_1\vec{v}^*(M_1) + \vec{OM}_2 \wedge m_2\vec{v}^*(M_2)}_{\vec{L}_O^*(S) = \vec{L}^*(S)} + \underbrace{[m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2]}_{m\vec{OG}} \wedge \vec{v}(G). \end{aligned}$$

D'où le *théorème de Kœnig pour le moment cinétique* :

$$\vec{L}_O(S/\mathcal{R}) = \underbrace{m \vec{OG} \wedge \vec{v}(G)}_{\text{mouvement d'ensemble de } S} + \underbrace{\vec{L}^*(S)}_{\text{mouvement d'agitation de } S \text{ autour de } G}$$

Le moment cinétique se décompose en deux termes :

- le premier terme caractérise le mouvement d'ensemble de S dans \mathcal{R} : c'est le moment cinétique en O d'un point matériel placé en G et affecté de la masse totale m du système ;
- le second caractérise le mouvement relatif de S dans \mathcal{R}^* . Il prend en compte les trajectoires de M_1 et M_2 dans le référentiel barycentrique et le mouvement propre du système autour de G . Ce pourra être une rotation pour le ballon de rugby ou une agitation dans le cas d'un système déformable. Le second terme apparaît dès que l'on cesse de considérer le système comme un point matériel et que l'on envisage le mouvement dans \mathcal{R}^* des différents points qui le composent.

2.4.3. Théorème de Kœnig de l'énergie cinétique

Dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , l'énergie cinétique du système est :

$$\mathcal{E}_C^*(S) = \mathcal{E}_C^*(M_1) + \mathcal{E}_C^*(M_2) = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2}$$

Comparons l'énergie cinétique barycentrique $\mathcal{E}_C^*(S)$ à l'énergie cinétique du système dans \mathcal{R} :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}) &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 [\vec{v}^*(M_1) + \vec{v}(G)]^2 + \frac{1}{2} m_2 [\vec{v}^*(M_2) + \vec{v}(G)]^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 [v_1^{*2} + v_G^2 + 2\vec{v}_1^* \cdot \vec{v}(G)] + \frac{1}{2} m_2 [v_2^{*2} + v_G^2 + 2\vec{v}_2^* \cdot \vec{v}(G)] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2}}_{\mathcal{E}_C^*(S)} + \underbrace{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_G^2}_m + \underbrace{[m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^*]}_{\vec{p}^*(S) = \vec{0}} \cdot \vec{v}(G). \end{aligned}$$

D'où le *théorème de Kœnig pour l'énergie cinétique* :

$$\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}) = \underbrace{\frac{1}{2} m v_G^2}_{\text{énergie cinétique d'ensemble}} + \underbrace{\mathcal{E}_C^*(S)}_{\text{énergie cinétique barycentrique}}$$

On retrouve la décomposition du mouvement du système : le premier terme correspond à l'énergie cinétique d'un point confondu avec G et affecté de la masse totale m du système, il caractérise le mouvement d'ensemble de S , et le second terme correspond à l'énergie cinétique propre de S mesurée dans \mathcal{R}^* , il caractérise le mouvement d'agitation propre du système autour de G .

3 Éléments dynamiques du système

3.1. Forces intérieures et forces extérieures

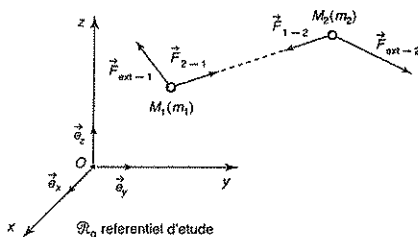
Le référentiel d'étude \mathcal{R}_g est galiléen.

Le système S est soumis à des forces intérieures d'interaction mutuelle entre les deux constituants du système M_1 et M_2 et à des forces extérieures exercées par les corps étrangers au système sur M_1 et M_2 . Effectuons le bilan des forces.

- Pour la particule M_1 :
 - force exercée par M_2 sur M_1 : $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$
 - force exercée par le milieu extérieur sur M_1 : $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1}$
- Pour la particule M_2 :
 - force exercée par M_1 sur M_2 : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$
 - force exercée par le milieu extérieur sur M_2 : $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2}$
- La résultante \vec{F} des forces subies par le système S se décompose ainsi en deux termes :
 - la résultante des forces intérieures : $\vec{F}_{\text{int}} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$
 - la résultante des forces extérieures : $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2}$

Écrivons provisoirement :

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{int}} + \vec{F}_{\text{ext}}$$



Le principe des actions réciproques appliqué aux forces intérieures donne :

$$\begin{cases} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \\ \vec{M}_1 \vec{M}_2 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{cases}$$

Soit O un point quelconque, la seconde égalité peut se décomposer de la façon suivante :

$$(\vec{OM}_2 - \vec{OM}_1) \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} - \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{2 \rightarrow 1}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) = \vec{0}$$

La résultante et le moment résultant en O des forces intérieures sont nuls :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{int}} &= \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \\ \vec{M}_O, \text{int} &= \vec{M}_O(\vec{F}_{2 \rightarrow 1}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) = \vec{0} \end{aligned}$$

En conséquence, les actions mécaniques qui agissent sur le système S sont caractérisées par la résultante \vec{F} et par le moment résultant \vec{M}_O en O des forces extérieures uniquement :

$$\begin{cases} \vec{F} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} \\ \vec{M}_O = \vec{M}_O, \text{ext} = \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2}) \end{cases}$$

3.2. Théorème du centre de masse ou de la quantité de mouvement

Appliquons pour chacune des particules le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel \mathcal{R}_g galiléen :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{p}(M_1/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} \\ \left(\frac{d\vec{p}(M_2/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} \end{cases}$$

Pour le système S constitué de M_1 et M_2 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{p}(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} &= \left(\frac{d\vec{p}(M_1/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} + \left(\frac{d\vec{p}(M_2/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \\ &= \underbrace{\vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2}}_{\vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}} + \underbrace{\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2}}_{\vec{F}_{\text{ext}}} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d\vec{p}(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Cette relation exprime le *théorème de la quantité de mouvement*.

En considérant que $\vec{p}(S/\mathcal{R}_g) = m\vec{v}(G)$ et que la masse totale m du système est constante :

$$m\vec{a}(G/\mathcal{R}_g) = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Cette relation exprime le *théorème du centre de masse*.

Relativement à un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie d'un système est celui d'un point matériel où serait concentrée toute la masse du système et sur lequel s'appliquerait la résultante des forces extérieures agissant sur le système.

3.3. Théorème du moment cinétique en un point fixe de \mathcal{R}

O est un point fixe du référentiel \mathcal{R}_g galiléen.

Appliquons pour chacune des particules le théorème du moment cinétique en ce point :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_O(M_1/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} &= \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{2 \rightarrow 1}) \\ \left(\frac{d\vec{L}_O(M_2/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} &= \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) \end{aligned}$$

Pour le système S constitué de M_1 et M_2 :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\vec{L}_O(M_1/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} + \left(\frac{d\vec{L}_O(M_2/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g}$$

Ainsi :

$$\left(\frac{dL_O(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \underbrace{\vec{M}_O(\vec{F}_{2 \rightarrow 1}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{1 \rightarrow 2})}_{\vec{M}_{O, \text{int}} = \vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2})}_{\vec{M}_{O, \text{ext}}}$$

D'où la relation qui exprime le théorème du moment cinétique en un point fixe O du référentiel \mathcal{R}_g galiléen pour le système de deux particules :

$$\boxed{\left(\frac{dL_O(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{O, \text{ext}}}$$

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique du système par rapport à un point fixe O est égale au moment résultant par rapport à O de toutes les forces extérieures agissant sur le système.

Si $\Delta = (O; \vec{u})$ est un axe fixe passant par O dans le référentiel \mathcal{R}_g , la projection de cette équation sur cet axe donne :

$$\left(\frac{dL_O(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \cdot \vec{u} = \left(\frac{d}{dt} \left[\vec{L}_O(S/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{u} \right] \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{O, \text{ext}} \cdot \vec{u}$$

vecteur
unitaire
constant

Ainsi :

$$\boxed{\frac{dL_\Delta(S/\mathcal{R}_g)}{dt} = M_{\Delta, \text{ext}}}$$

Cette relation traduit le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe fixe $\Delta = (O; \vec{u})$.

4 Éléments énergétiques du système

4.1. Puissance et travail des forces intérieures

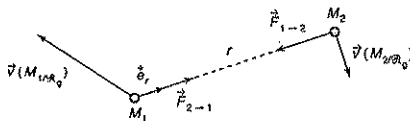
La puissance des forces intérieures au système S s'exprime de la façon suivante :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(M_2/\mathcal{R}_g) + \underbrace{\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}_{-\vec{F}_{1 \rightarrow 2}} \cdot \vec{v}(M_1/\mathcal{R}_g) = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot [\vec{v}(M_2/\mathcal{R}_g) - \vec{v}(M_1/\mathcal{R}_g)].$$

Ainsi :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g}$$

Fig.



La distance relative entre les deux particules M_1 et M_2 est notée r , elle ne dépend pas du référentiel d'étude.

La force intérieure $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est colinéaire au vecteur unitaire $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|} = \frac{M_1 M_2}{r}$.

Ainsi : $\overrightarrow{M_1 M_2} = r \vec{e}_r$ et $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{e}_r$.

Remarque

La dérivée par rapport au temps de $\vec{e}_r^2 = 1$ donne

$$2\vec{e}_r \cdot \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{e}_r \cdot \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = 0$$

En conséquence, la puissance \mathcal{P}_{int} s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{e}_r \cdot \left[\frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} \right] = F_{1 \rightarrow 2} \frac{dr}{dt} + \underbrace{r F_{1 \rightarrow 2} \vec{e}_r \cdot \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g}}_0$$

La puissance totale des forces intérieures $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ est :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = F_{1 \rightarrow 2} \frac{dr}{dt}$$

Le travail total fourni par les forces intérieures $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ entre les instants t et $t + dt$ étant défini par :

$$\delta \mathcal{W}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{int}} dt.$$

Le travail élémentaire des forces intérieures est obtenu par la relation :

$$\delta \mathcal{W}_{\text{int}} = F_{1 \rightarrow 2} dr$$

La puissance et le travail des forces intérieures sont liés par le terme dr aux variations de la distance qui sépare les deux particules, il faut donc distinguer deux cas :

- Le système est *déformable* et la distance relative entre M_1 et M_2 varie : le travail et la puissance des forces intérieures sont non nuls malgré la nullité de la résultante et du moment résultant en O des forces intérieures ($\vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}$ et $\vec{M}_{O, \text{int}} = \vec{0}$);

- Le système est un solide *indéformable* et la distance relative entre M_1 et M_2 est constante : le travail et la puissance des forces intérieures sont nuls car $dr = 0$.

La puissance et le travail des forces intérieures ne dépendent pas du référentiel d'étude car la position relative r entre M_1 et M_2 et la force $F_{1 \rightarrow 2}$ sont deux grandeurs indépendantes du référentiel.

4.2. Théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique

Appliquons pour chacune des particules le théorème de la puissance cinétique dans le référentiel \mathcal{R}_g galiléen :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\mathcal{E}_C(M_1/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{2 \rightarrow 1}) \\ \left(\frac{d\mathcal{E}_C(M_2/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) \end{cases}$$

Pour le système S constitué de M_1 et M_2 :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \underbrace{\left(\frac{d\mathcal{E}_C(M_1/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} + \left(\frac{d\mathcal{E}_C(M_2/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g}}_{\substack{\mathcal{P}_{\text{int}} \\ \text{indépendant du référentiel}}} + \underbrace{\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2/\mathcal{R}_g}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1/\mathcal{R}_g})}_{\substack{\mathcal{P}_{\text{ext}} \\ \text{par rapport au référentiel } \mathcal{R}_g}}$$

Le théorème de la puissance cinétique est :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}$$

En intégrant cette relation entre deux instants t_1 et t_2 , on obtient le *théorème de l'énergie cinétique* qui relie la variation d'énergie cinétique du système aux travaux mis en jeu par les forces **intérieures** et **extérieures** :

$$\Delta\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g) = \mathcal{E}_C(S(t_2)/\mathcal{R}_g) - \mathcal{E}_C(S(t_1)/\mathcal{R}_g) = (\mathcal{T}_{\text{int}})_{\text{①} \rightarrow \text{②}} + (\mathcal{T}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g})_{\text{①} \rightarrow \text{②}}$$

4.3. Énergie potentielle – énergie mécanique

La variation élémentaire de l'énergie cinétique du système S pendant la durée dt est :

$$d\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g) = \delta\mathcal{T}_{\text{int}} + \delta\mathcal{T}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}$$

Séparons les travaux des forces conservatives (dérivant d'une énergie potentielle) des travaux des forces non conservatives :

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta\mathcal{T}_{\text{int}} = \delta\mathcal{T}_{\text{int}}^c + \delta\mathcal{T}_{\text{int}}^{\text{nc}} = -d\mathcal{E}_{P,\text{int}} + \delta\mathcal{T}_{\text{int}}^{\text{nc}} \\ \delta\mathcal{T}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g} = \delta\mathcal{T}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}^c + \delta\mathcal{T}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}^{\text{nc}} = -d\mathcal{E}_{P,\text{ext}/\mathcal{R}_g} + \delta\mathcal{T}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}^{\text{nc}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{d[\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g) + \mathcal{E}_{P,\text{int}} + \mathcal{E}_{P,\text{ext}/\mathcal{R}_g}]}_{\text{énergie mécanique du système dans } \mathcal{R}} = \delta\mathcal{T}_{\text{int}}^{\text{nc}} + \delta\mathcal{T}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}^{\text{nc}}$$

L'énergie mécanique du système à l'instant t est définie, dans le référentiel \mathcal{R}_g , par :

$$\mathcal{E}_m(S/\mathcal{R}_g) = \mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g) + \mathcal{E}_{P,\text{int}} + \mathcal{E}_{P,\text{ext}/\mathcal{R}_g}$$

- $\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g)$: énergie cinétique du système S dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g ;
- $\mathcal{E}_{P,\text{int}}$: énergie potentielle d'interaction des points M_1 et M_2 ou énergie potentielle interne de S , elle est indépendante du référentiel ;
- $\mathcal{E}_{P,\text{ext}/\mathcal{R}_g}$: énergie potentielle des forces extérieures conservatives agissant sur S .

4.4. Théorème de l'énergie mécanique

Entre deux instants voisins, le bilan d'énergie donne :

$$d\mathcal{E}_m(S/\mathcal{R}_g) = \delta\mathcal{T}_{\text{int}}^{\text{nc}} + \delta\mathcal{T}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}^{\text{nc}}$$

En intégrant entre les instants t_1 et t_2 :

$$\Delta\mathcal{E}_m(S/\mathcal{R}_g) = \mathcal{E}_m(S(t_2)/\mathcal{R}_g) - \mathcal{E}_m(S(t_1)/\mathcal{R}_g) = (\mathcal{T}_{\text{int}}^{\text{nc}})_{\text{①} \rightarrow \text{②}} + (\mathcal{T}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}^{\text{nc}})_{\text{①} \rightarrow \text{②}}$$

Cette relation constitue le *théorème de l'énergie mécanique* appliqué au système S dans le référentiel \mathcal{R}_g galiléen.

Le *théorème de la puissance mécanique* est obtenu en divisant par dt le bilan d'énergie :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{\text{int}}^{\text{nc}} + \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}^{\text{nc}}$$

5 Lois de conservation pour un système isolé de deux points matériels

Le référentiel \mathcal{R}_g est galiléen et O est un point fixe de ce référentiel.

Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* associé au système S n'est en général pas un référentiel galiléen car sa translation par rapport à \mathcal{R}_g n'est pas **rectiligne uniforme** : le vecteur vitesse du centre de masse n'est a priori pas un vecteur constant.

Le système S est isolé s'il n'est soumis à aucune action mécanique extérieure et pseudo-isolé si la résultante et le moment résultant des forces extérieures agissant sur lui sont constamment nulles. Dans les deux cas :

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \vec{M}_{O, \text{ext}} = \vec{0}. \end{cases}$$

5.1. Conservation de la quantité de mouvement

Le théorème de la quantité de mouvement appliqué au système isolé ou pseudo-isolé des deux particules M_1 et M_2 donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{p}(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} &= \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{p}(S/\mathcal{R}_g) &= \vec{\text{cte}} \end{aligned}$$

Dans un référentiel galiléen, il y a conservation de la quantité de mouvement du système isolé.

• **Conséquence : caractère galiléen du référentiel barycentrique**

En considérant que $\vec{p}(S/\mathcal{R}_g) = m\vec{v}(G)$ et que la masse totale m du système est constante :

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}_g) = \vec{\text{cte}}$$

Or $\vec{v}(G/\mathcal{R}_g)$ est la vitesse d'entraînement du référentiel barycentrique \mathcal{R}^* par rapport au référentiel \mathcal{R}_g : \mathcal{R}^* est donc en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel \mathcal{R}_g galiléen.

Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* d'un système isolé est galiléen.

5.2. Conservation du moment cinétique barycentrique

Le théorème du moment cinétique en un point fixe O du référentiel \mathcal{R}_g galiléen appliqué au système des deux particules donne :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{O, \text{ext}} = \vec{0}$$

$$\vec{L}_O(S/\mathcal{R}_g) = \text{cte.}$$

Dans un référentiel galiléen, il y a conservation du moment cinétique du système isolé S .

Puisque le référentiel barycentrique est galiléen, appliquons le théorème du moment cinétique au système S dans \mathcal{R}^* :

$$\left(\frac{d\vec{L}^*(S)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{M}_{O, \text{ext}} = \vec{0}$$

$$\vec{L}^*(S) = \text{cte}$$

Le moment cinétique barycentrique ou moment cinétique propre se conserve pour le système isolé S : la conservation du moment cinétique barycentrique est une intégrale première du mouvement de S .

5.3. Conservation de l'énergie mécanique barycentrique

Appliquons au système des deux points matériels le théorème de la puissance mécanique :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{\text{int}}^{\text{nc}} + \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}^{\text{nc}}$$

Il y a conservation de l'énergie mécanique du système si :

- les forces intérieures sont toutes conservatives : $\mathcal{P}_{\text{int}}^{\text{nc}} = 0$;
- les forces extérieures sont conservatives ou le système est isolé : $\mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}^{\text{nc}} = 0$.

Puisque le référentiel barycentrique est galiléen dans le cas du système isolé, appliquons le théorème de la puissance mécanique à S dans \mathcal{R}^* . Si les forces intérieures sont conservatives (autrement dit, elles dérivent d'une énergie potentielle) :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m^*(S)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = 0.$$

Puisque le système S n'est soumis à aucune force extérieure, son *énergie mécanique propre* ou *barycentrique* se décompose de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_m^*(S) = \mathcal{E}_C^*(S) + \mathcal{E}_{P, \text{int}} = \text{cte}$$

L'énergie mécanique propre ou barycentrique se conserve pour le système isolé dont les forces intérieures sont conservatives : la conservation de l'énergie mécanique barycentrique est une intégrale première du mouvement de S .

Le système ne peut alors pas être le siège de phénomènes dissipatifs.

6 Réduction canonique du problème à deux corps

6.1. Position du problème : couplage des équations

Considérons le système S constitué des deux particules M_1 et M_2 en interaction. Leurs positions dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g sont repérées par :

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1} \text{ et } \vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}.$$

La position relative de M_2 par rapport à M_1 est définie par :

$$\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}.$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué successivement aux deux particules dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g donne :

$$\begin{cases} m_1 \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} \\ m_2 \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} \end{cases}$$

Le principe des actions réciproques appliqué aux forces intérieures donne le système des deux équations vectorielles :

$$\begin{cases} m_1 \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} & (3) \\ m_2 \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} & (4) \end{cases}$$

Le système des deux équations vectorielles est *couplé* par la force d'interaction $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ qui dépend de la distance relative $r = \|\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}\|$ entre les deux points M_1 et M_2 : $\overrightarrow{OM_2}$ intervient dans l'équation du mouvement de M_1 comme $\overrightarrow{OM_1}$ intervient dans le mouvement de M_2 . La connaissance du mouvement d'un point dans \mathcal{R}_g nécessite la connaissance du mouvement de l'autre point.

6.2. Solution du problème : découplage des équations

Pour découpler le système, étudions séparément le mouvement d'ensemble du système caractérisé par le mouvement du centre de masse G des deux corps et le mouvement relatif de M_2 par rapport à M_1 décrit par le vecteur position :

$$\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}.$$

En adoptant $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ comme variable, effectuons l'opération : $\frac{1}{m_2} \times (4) - \frac{1}{m_1} \times (3)$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \frac{1}{m_2} \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} - \frac{1}{m_1} \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} \quad (5)$$

6.2.1. Mouvement d'ensemble du système

C'est le théorème du centre de masse qui gouverne le mouvement de G dans \mathcal{R}_g :

$$(m_1 + m_2) \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2}.$$

Lorsque les forces extérieures appliquées au système sont connues, on peut accéder au mouvement de G par résolution de cette équation vectorielle.

6.2.2. Mouvement propre ou barycentrique du système

De l'équation précédente se déduit :

$$\frac{1}{m_1} \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g} - \frac{1}{m_1} \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2}.$$

En remplaçant dans l'équation (5), on obtient :

$$\left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} - m_2 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g}.$$

En posant $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ ou $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, cette équation devient :

$$\mu \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} - m_2 \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g}.$$

• Analyse du mouvement dans \mathcal{R}^* :

Le mouvement d'entraînement de \mathcal{R}^* par rapport à \mathcal{R} étant une translation, la formule de dérivation vectorielle donne :

$$\left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}_g}}_{\vec{0}} \wedge \vec{r} = \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*}.$$

L'accélération d'entraînement de \mathcal{R}^* par rapport à \mathcal{R} est : $\vec{a}_{\text{ent}} = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g}$.

On obtient ainsi l'équation :

$$\mu \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} - m_2 \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g}.$$

Lorsque le référentiel barycentrique est non galiléen, la particule M_2 est soumise :

- à la force intérieure exercée sur elle par la particule M_1 : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$
- à la force extérieure exercée par tout autre objet : $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2}$
- à la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{\text{ie}}(M_2) = -m_2 \left(\frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g}$$

La force d'inertie de Coriolis est nulle car le référentiel barycentrique est en translation par rapport à \mathcal{R}_g .

D'où l'équation différentielle :

$$\mu \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} + \vec{F}_{\text{ie}}(M_2) \quad (6)$$

Cette équation est le principe fondamental de la dynamique appliqué dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* à une particule fictive M appelée *mobile réduit* ou *mobile équivalent* dont les caractéristiques sont les suivantes :

- sa masse est la *masse réduite* : $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$;
- son vecteur position est $\vec{GM} = \vec{r} = \vec{M_1 M_2}$;
- elle est soumise aux mêmes forces que M_2 dans \mathcal{R}^* .

Le mouvement des deux points matériels M_1 et M_2 se déduit de l'étude de la particule fictive M . En écrivant d'une part, la définition du centre d'inertie G du système et d'autre part, l'expression de la position relative \vec{r} de M_2 par rapport à M_1 :

$$\begin{cases} m_1 \vec{GM}_1 + m_2 \vec{GM}_2 = \vec{0} \\ \vec{r} = \vec{M_1 M_2} = \vec{GM}_2 - \vec{GM}_1 \end{cases}$$

on peut déduire les positions barycentriques des deux particules en fonction de \vec{r} :

$$\vec{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Les trajectoires de M_1 et M_2 dans \mathcal{R}^* sont homothétiques de la trajectoire du mobile réduit.

Les trajectoires de M_1 et M_2 dans \mathcal{R}_g sont données par composition des vecteurs positives :

$$\begin{cases} \vec{OM}_1 = \vec{OG} + \vec{GM}_1 = \vec{OG} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{OM}_2 = \vec{OG} + \vec{GM}_2 = \vec{OG} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{cases}$$

6.2.3. Si le système est isolé

Ce cas particulier est très important car il est un modèle représentatif de nombreux systèmes allant de l'association électron-noyau à l'interaction planète-satellite.

Dans le cas du système isolé de deux points matériels, le référentiel barycentrique est galiléen et n'est soumis à aucune force extérieure. Il n'y a pas non plus de force d'inertie et l'équation du mouvement (6) du mobile fictif dans \mathcal{R}^* se réduit à :

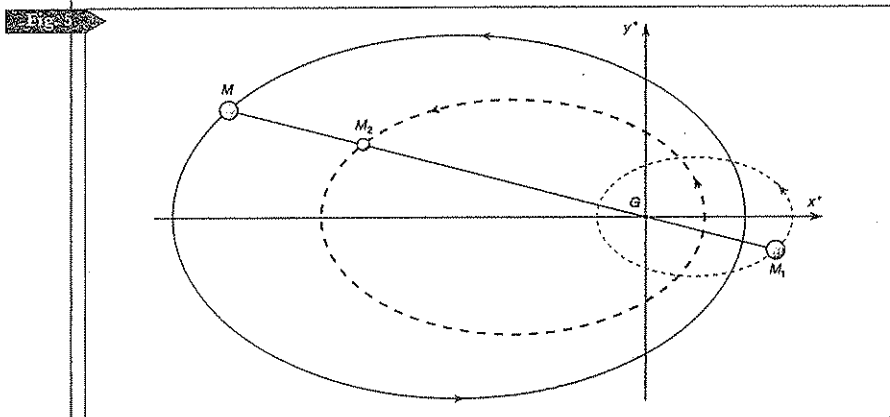
$$\mu \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

Cette équation est le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule fictive M de masse μ dans le référentiel barycentrique galiléen. Cette particule est soumise à la force centrale $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ de centre de force G .

Son vecteur position est $\vec{GM} = \vec{r} = \overline{M_1 M_2}$. La trajectoire du mobile réduit est plane, décrite selon la loi des aires et l'introduction de l'énergie potentielle effective permet d'étudier les types de trajectoires.

Le schéma qui suit représente les trajectoires d'une étoile double dans \mathcal{R}^* . Les trajectoires de M_1 et de M_2 se déduisent de la trajectoire elliptique du mobile fictif M par des homothéties de centre G et de rapports respectifs :

$$-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$



Si $m_1 \gg m_2$, le problème est un problème à un corps où M_1 est fixe et confondu avec G et où la trajectoire de M_2 se confond avec celle du mobile réduit M .

Dans ce cas : $\mu \approx m_2$, $\vec{GM}_2 \approx \vec{r}$ et $\vec{GM}_1 = \vec{0}$.

6.3. Grandeurs cinétiques du mobile réduit

Nous allons voir qu'elles vont à chaque fois faire intervenir la masse réduite et les grandeurs relatives caractéristiques du mobile réduit :

- position relative de M_2 par rapport à M_1 : $\vec{r} = \overline{M_1 M_2} = \vec{GM}$;

• vitesse relative de M_2 par rapport à M_1 : $\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

6.3.1. Quantité de mouvement

La quantité de mouvement du système S dans le référentiel barycentrique est nulle car le centre de masse G du système est l'origine du référentiel barycentrique :

$$\vec{p}^*(S) = \underbrace{m_1 \vec{v}^*(M_1)}_{\text{quantité de mouvement barycentrique de } M_1} + \underbrace{m_2 \vec{v}^*(M_2)}_{\text{quantité de mouvement barycentrique de } M_2} = m \vec{v}^*(G) = \vec{0}$$

$$m_1 \vec{v}^*(M_1) = -m_2 \vec{v}^*(M_2).$$

La quantité de mouvement barycentrique du mobile réduit est :

$$\vec{p}^*(M) = \mu \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d\vec{r}}{dt} = m_2 \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = m_2 \frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt} = m_2 \vec{v}^*(M_2)$$

ainsi :

$$\vec{p}^*(M) = \mu \vec{v}(M) = \underbrace{m_2 \vec{v}^*(M_2)}_{\text{quantité de mouvement barycentrique de } M_2} = - \underbrace{m_1 \vec{v}^*(M_1)}_{\text{quantité de mouvement barycentrique de } M_1}$$

6.3.2. Moment cinétique

Le moment cinétique barycentrique du système S est :

$$\vec{L}^*(S) = \vec{L}^*(M_1) + \vec{L}^*(M_2) = \overrightarrow{GM_1} \wedge \underbrace{\vec{p}^*(M_1)}_{-\mu \vec{v}(M)} + \overrightarrow{GM_2} \wedge \underbrace{\vec{p}^*(M_2)}_{\mu \vec{v}(M)}$$

$$= \underbrace{(\overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1})}_{\vec{r}} \wedge \mu \vec{v}(M)$$

Le moment cinétique barycentrique du mobile réduit est le moment cinétique barycentrique du système S

$$\vec{L}^*(M) = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}(M) = \vec{L}^*(S)$$

6.3.3. Énergie cinétique

L'énergie cinétique barycentrique du système S est :

$$\mathcal{E}_C^*(S) = \mathcal{E}_C^*(M_1) + \mathcal{E}_C^*(M_2) = \frac{p^{*2}(M_1)}{2m_1} + \frac{p^{*2}(M_2)}{2m_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p^{*2}(M)$$

d'où

$$\mathcal{E}_C^*(S) = \frac{1}{2\mu} [\mu \vec{v}(M)]^2$$

ainsi :

$$\mathcal{E}_C^*(M) = \frac{1}{2} \mu v^2(M) = \mathcal{E}_C^*(S)$$

L'énergie cinétique barycentrique du mobile réduit est l'énergie cinétique barycentrique du système S .

Avant la colle

Tester ses connaissances

➤ Corrigés p. 349

1 Deux particules ponctuelles M_1 et M_2 sont de masses respectives m_1 et $m_2 = 4m_1$.

Le centre de masse G du système est à 2 cm de M_2 . La distance qui sépare les deux particules est :

- a. 8 cm b. 10 cm c. 12 cm.

2 Le système S est de masse totale m et de centre de masse G . Le théorème de Koenig pour le moment cinétique s'écrit :

- a. $\vec{L}_O(S/\mathcal{R}_0) = m\vec{OG} \wedge \vec{v}(G) + \vec{L}^*(S)$
 b. $\vec{L}_O(S/\mathcal{R}_0) = m\vec{v}(G) \wedge \vec{OG} + \vec{L}^*(S)$
 c. $\vec{L}^*(S) = m\vec{OG} \wedge \vec{v}(G) + \vec{L}_O(S/\mathcal{R}_0)$.

3 Un système S de centre de masse G est constitué de deux particules : la particule M_1 de masse $m_1 = 200$ g se déplace dans le référentiel terrestre à la vitesse de $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et la particule M_2 de masse $m_2 = 800$ g se déplace à la vitesse de $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Sachant que l'énergie barycentrique du système est $\mathcal{E}_C(S) = 240$ J, la vitesse de G est :

- a. $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ b. $24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 c. $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

4 Le théorème du centre de masse s'écrit :

- a. $m\vec{a}(G/\mathcal{R}_0) = \vec{F}_{\text{int}} + \vec{F}_{\text{ext}}$
 b. $m\vec{a}(G/\mathcal{R}_0) = \vec{F}_{\text{ext}}$

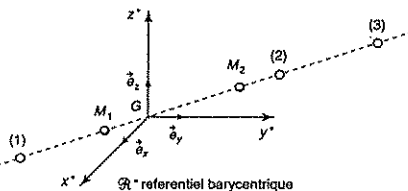
5 Le théorème de la puissance cinétique appliqué au système S dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g s'écrit :

- a. $\left(\frac{d\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}$
 b. $\left(\frac{d\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}_g}$

6 Une balle de masse $m = 10$ g est tirée à l'aide d'un pistolet de masse $M = 2$ kg. La vitesse de la balle juste après le tir est de $500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La vitesse du pistolet à cet instant est de :

- a. $2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ b. $3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 c. $-2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ d. $-3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

7 Le mobile réduit associé au système des deux particules est dans la position :



- a. (1) b. (2) c. (3)

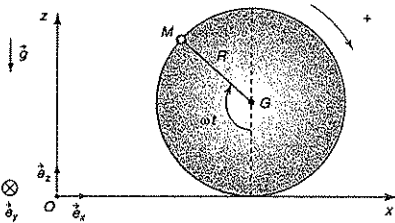
8 Le mouvement des deux points matériels M_1 et M_2 se déduit de l'étude de la particule fictive M . Les positions barycentriques des deux particules s'expriment en fonction de \vec{M}_1, \vec{M}_2 par :

- a. $\vec{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{M}_1 \vec{M}_2$
 b. $\vec{GM}_1 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{M}_1 \vec{M}_2$
 c. $\vec{GM}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{M}_1 \vec{M}_2$
 d. $\vec{GM}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{M}_1 \vec{M}_2$
 e. $\vec{GM}_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{M}_1 \vec{M}_2$
 f. $\vec{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{M}_1 \vec{M}_2$.

- 1 Une roue de rayon R roule sans glisser sur l'horizontale (Ox) en restant dans le plan (Oxz). Le vecteur vitesse angulaire de rotation de la roue est constant et noté $\vec{\omega}$. Le centre de masse G du système est animé d'une vitesse constante qui vérifie la condition :

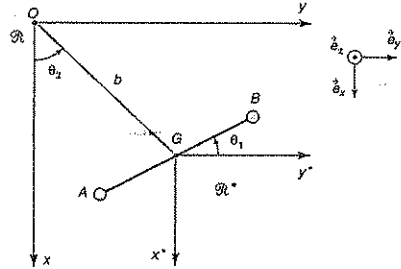
$$\vec{v}_G = R\omega\vec{e}_x.$$

Représenter le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* de la roue. En écrivant les lois de composition des vitesses et des accélérations entre les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}^* , déterminer les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ et accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ pour un point M de la circonférence de la roue. Vous les exprimerez dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_z) .



- 2 Deux particules ponctuelles A et B de même masse m sont fixées aux deux extrémités d'une barre de masse négligeable et de longueur a . Cette barre est articulée en G à une tige OG de longueur b et de masse négligeable. La tige tourne autour de l'axe $(O; \vec{e}_z)$ avec une vitesse angulaire ω_2 , alors que la barre tourne autour de l'axe $(G; \vec{e}_z)$ avec une vitesse angulaire ω_1 . Au cours de leur mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les points A et B

qui constituent le système S restent situés dans le plan (Oxy) .



En utilisant les théorèmes de Koenig, déterminer le moment cinétique $\vec{L}_O(S/\mathcal{R})$ en O du système et l'énergie cinétique $\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R})$ du système dans le référentiel \mathcal{R} .

- 3 Démontrer que le travail des forces intérieures pour un système indéformable constitué de deux points matériels en interaction est nul.
- 4 Deux particules ponctuelles constituent un système isolé. Elles sont situées à une distance r l'une de l'autre et interagissent suivant une force qui dérive de l'énergie potentielle élastique :

$$\mathcal{E}_P^{\text{elas}} = \frac{1}{2}kr^2.$$

Exprimer l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{P\text{eff}}(r)$ en fonction de la masse réduite μ du mobile fictif M , de son moment cinétique barycentrique \vec{L}^* , de la constante positive k et de r . Tracer l'allure de son évolution en fonction de r et en déduire les états liés et de diffusion du système.

1 – Système isolé de deux étoiles

De nombreuses étoiles sont associées en couple (ou doublet) et ces étoiles dites doubles occupent une place de choix dans l'astronomie d'observation, car elles offrent un moyen direct de mesure des masses stellaires.

Les deux étoiles formant le doublet S sont assimilées à deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 en mouvement dans un référentiel \mathcal{R}_g galiléen. Chacun de ces deux éléments n'est soumis qu'à la force de gravitation exercée par l'autre.

L'étude de S est effectuée dans le référentiel \mathcal{R}^* du centre d'inertie I des deux masses. On notera :

- la masse réduite : $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$;
- la position relative de M_2 par rapport à M_1 : $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$;
- la vitesse relative de M_2 par rapport à M_1 : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

- 1 Rappeler la définition du référentiel barycentrique \mathcal{R}^* du système des deux étoiles. Est-il en général galiléen ? Est-il galiléen avec les hypothèses adoptées pour l'étoile double ?
- 2 Rappeler brièvement le principe et l'intérêt de la réduction canonique du problème à deux corps.
- 3 Deux étoiles Alpha et Bêta, composantes de l'étoile double, décrivent des orbites circulaires de centre I et de rayons respectifs r_1 et r_2 . Exprimer la période orbitale T_0 de chaque étoile en fonction de G , m_1 , m_2 et $r = r_1 + r_2$. Déterminer les masses m_1 et m_2 des deux étoiles sachant que :
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $r_1 = 1,0 \cdot 10^9 \text{ km}$, $r_2 = 5,0 \cdot 10^8 \text{ km}$;
 $T_0 = 44,5 \text{ années}$.
- 4 Faire un schéma représentant de système S en respectant le rapport des masses m_1 et m_2 .

résolution méthodique

1

Pour pouvoir appliquer le principe fondamental de la dynamique au mobile réduit, il faut que le référentiel barycentrique soit galiléen, autrement dit, il faut que le système soit isolé. La première phase de votre raisonnement est donc la suivante :

[1] Définir le système étudié. Est-il isolé ?

Pour répondre à cette question, il faut appliquer le théorème de la quantité de mouvement au système dans le référentiel \mathcal{R}_g galiléen. Pour cela :

1. Définir le référentiel d'étude galiléen \mathcal{R}_g .
2. Établir le bilan des forces extérieures appliquées au système S .
3. Écrire le théorème de la quantité de mouvement.

Le vecteur vitesse \vec{v}_G est la vitesse d'entraînement du référentiel barycentrique \mathcal{R}^* par rapport au référentiel \mathcal{R}_g . S'il est un vecteur constant, alors \mathcal{R}^* est en translation rectiligne uniforme ou fixe par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est le référentiel associé au centre de masse I du système des deux étoiles, il est en translation par rapport au référentiel \mathcal{R}_g galiléen et n'est en général pas galiléen.

Le système de l'étoile double n'est soumis qu'aux forces intérieures de gravitation, il est donc isolé

$$\left(\frac{d\vec{p}(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\vec{p}(S/\mathcal{R}_g) = (m_1 + m_2) \underbrace{\vec{v}(G)}_{\substack{\text{vitesse d'entraînement} \\ \text{de } \mathcal{R}^* \text{ par rapport à } \mathcal{R}_g}} = \text{cste}$$

\mathcal{R}^* est en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_g galiléen. Dans le cas d'un système isolé, le référentiel barycentrique est galiléen.

2

[Z] Le système est isolé, le référentiel barycentrique est donc un référentiel galiléen. On peut appliquer dans ce référentiel le principe fondamental de la dynamique au mobile réduit M . Dans le cas de deux particules M_1 et M_2 , de masses respectives m_1 et m_2 , celui-ci est caractérisé par :

- sa masse réduite : $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

- son vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{IM} = M_1 M_2$

Le mobile réduit est soumis à la force appliquée à la particule M_2 : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$.

Considérons le système S isolé constitué des deux étoiles M_1 et M_2 en interaction.

La position relative de M_2 par rapport à M_1 est :

$$\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{IM_2} - \overrightarrow{IM_1}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué successivement aux deux particules dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* galiléen donne :

$$\begin{cases} m_1 \left(\frac{d^2 \overrightarrow{IM_1}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ m_2 \left(\frac{d^2 \overrightarrow{IM_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

En vertu du principe des actions réciproques : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ le système d'équations différentielles s'écrit :

$$\begin{cases} m_1 \left(\frac{d^2 \vec{M}_1}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} & (1) \\ m_2 \left(\frac{d^2 \vec{M}_2}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} & (2) \end{cases}$$

Le système d'équations est couplé par l'intermédiaire de la force de couplage $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$, car \vec{M}_2 intervient dans l'équation du mouvement de M_1 comme \vec{M}_1 intervient dans le mouvement de M_2 .

Pour découpler le système, adoptons le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ comme variable et effectuons l'opération :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_2} \times (2) - \frac{1}{m_1} \times (1) \\ \Rightarrow & \left(\frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \text{ou encore :} & \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}. \end{aligned}$$

En notant $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, cette équation devient :

$$\mu \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

Cette équation est le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule fictive M appelée *mobile réduit* ou *mobile équivalent* dont les caractéristiques sont les suivantes :

- sa *masse réduite* est $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$;
- elle est située au point M de vecteur position $\overrightarrow{IM} = \vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$;
- elle est soumise à la **force centrale** de centre de force I :

$$\vec{F} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}(r) = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}$$

La trajectoire du mobile réduit est plane, décrite selon la loi des aires et l'introduction de l'énergie potentielle effective permet d'étudier les types de trajectoires.

» 3

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au mobile réduit dans le référentiel barycentrique galiléen.

Les trajectoires des étoiles sont circulaires et de centre I . En conséquence, la trajectoire de la particule fictive est elle aussi circulaire de centre I . Elle est soumise à une force centrale, sa trajectoire est plane et décrite selon la loi des aires.

Sa vitesse et son accélération exprimées dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ mobile du référentiel \mathcal{R}^* sont :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\omega\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -r\omega^2\vec{e}_r + r\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_\theta.$$

Le principe fondamental appliqué au mobile réduit M donne :

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\Rightarrow -\mu r\omega^2\vec{e}_r + r\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_\theta = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r = -G \mu \frac{(m_1 + m_2)}{r^2} \vec{e}_r.$$

La projection de cette équation suivant \vec{e}_θ permet de conclure à une trajectoire circulaire uniforme du mobile réduit.

Comme $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$, on déduit de la projection de l'équation suivant \vec{e}_r , la troisième loi de Kepler :

$$\boxed{\frac{T_0^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}}$$

Notez la représentation générale de la loi de Kepler. Dans le chapitre précédent, nous avons considéré que $m_1 \gg m_2$ pour écrire la relation approchée :

$$\frac{T_0^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_1}$$

Les trajectoires des étoiles M_1 et M_2 se déduisent de celle de la particule fictive M par deux homothéties de centre I :

$$\vec{IM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{IM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

Ces équations permettent de déduire :

$$\frac{\|\vec{IM}_1\|}{\|\vec{IM}_2\|} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Les valeurs numériques donnent :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} = 2.$$

Ainsi :

$$m_1 = \frac{4\pi^2 r^3}{3G T_0^2} = \frac{m_2}{2}.$$

A.N. $m_1 = 3,4 \cdot 10^{29} \text{ kg}$; $m_2 = 6,8 \cdot 10^{29} \text{ kg}$.



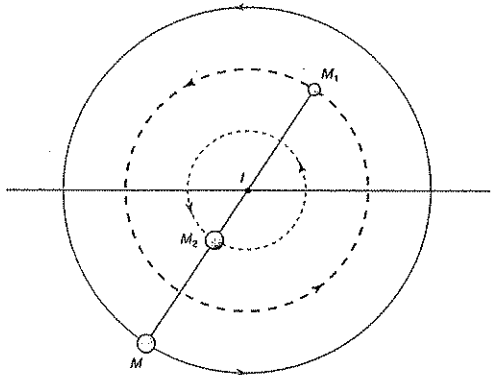
Les trajectoires de M_1 et de M_2 se déduisent de celle de M par des homothéties de centre I et de rapports respectifs :

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Les points M_1 , M_2 et M restent alignés à tout instant et décrivent des orbites circulaires de centre I . Les rayons vecteurs des trajectoires sont les suivants :

- Pour le mobile réduit : $\vec{IM} = \vec{M_1M_2} = \vec{r}$;
- Pour l'étoile M_1 : $\vec{IM}_1 = -\frac{2}{3}\vec{r}$;
- Pour l'étoile M_2 : $\vec{IM}_2 = \frac{1}{3}\vec{r}$.

La représentation graphique qui suit décrit les trajectoires des deux étoiles M_1 et M_2 , ainsi que celle du mobile réduit dans le référentiel barycentrique :



en conclusion

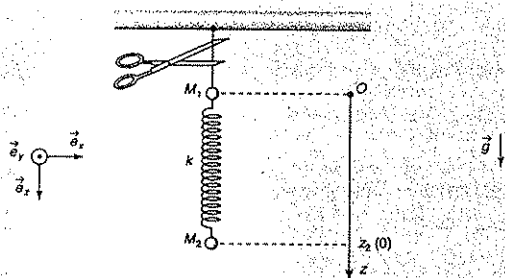
Dans le cas du système isolé de deux particules, le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est galiléen et l'on peut appliquer la relation fondamentale de la dynamique au mobile réduit. Nous allons voir dans l'exercice suivant que le mobile réduit peut être encore avantageusement introduit lorsque le référentiel barycentrique est non isolé et donc non galiléen.

2 – Système non isolé de deux particules liées par un ressort

Le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Deux particules ponctuelles M_1 et M_2 de masses respectives $m_1 = m$ et $m_2 = 2m$ sont suspendues verticalement et liées par un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Le système est à l'équilibre dans le référentiel du laboratoire alors que la particule M_1 est retenue par un fil. L'origine O de l'axe (Oz) lié au référentiel \mathcal{R}_g et orienté selon la verticale descendante est choisie à la position d'équilibre de la particule M_1 . Les positions respectives de M_1 et M_2 seront repérées par z_1 et z_2 .

Les frottements de l'air sont négligeables.



- 1 Déterminer les positions d'équilibre $z_2(0)$ et $z_G(0)$ de la particule M_2 et du centre de masse G du système S constitué des particules et du ressort.
- 2 À l'instant $t = 0$, un opérateur extérieur coupe le fil. Déterminer la vitesse du centre de masse G du système S . Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* des deux particules est-il galiléen ? Quelle est l'équation horaire $z_G(t)$ du mouvement de G ?
- 3 Déterminer l'équation du mouvement du mobile réduit M en lui appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* .
- 4 En déduire les équations horaires $z_1(t)$ et $z_2(t)$ des mouvements des deux masses selon la verticale descendante dans le référentiel du laboratoire.

résolution méthodique

Il s'agit simplement ici d'exprimer l'équilibre dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g du point matériel M_2 en lui appliquant la relation fondamentale de la statique. La position du centre de masse du système est obtenue en écrivant sa définition.

Dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g , le point matériel M_2 est soumis :

- à son poids : $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g} = m_2 g \vec{e}_z$;
- à la tension du ressort : $\vec{T}_2 = -k[z_2(0) - \ell_0] \vec{e}_z$.

La relation fondamentale de la statique donne selon \vec{e}_z :

$$m_2 g - k[z_2(0) - \ell_0] = 0.$$

Ainsi :

$$z_2(0) = \ell_0 + \frac{m_2 g}{k} = \ell_0 + \frac{2mg}{k}$$

La position du centre de masse du système S à l'équilibre s'obtient en écrivant sa définition :

$$\vec{OG}(0) = \frac{m_1 \vec{OM}_1(0) + m_2 \vec{OM}_2(0)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{OM}_2(0).$$

Ainsi :

$$z_G(0) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\ell_0 + \frac{m_2 g}{k} \right) = \frac{2}{3} \left(\ell_0 + \frac{2mg}{k} \right)$$

2

[1] Définir le système étudié. Est-il isolé ?

Le système S est l'ensemble des deux particules ponctuelles et du ressort : $\{M_1, \text{ressort}, M_2\}$.
Le référentiel d'étude est le référentiel du laboratoire \mathcal{R}_g galiléen.

Le bilan des forces extérieures appliquées au système est :

- en M_1 : le poids, $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g} = m_1 g \vec{e}_z$;
- en M_2 : le poids, $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g} = 2m_1 g \vec{e}_z$.

Le ressort est sans masse.

Le théorème du centre de masse appliqué à S dans \mathcal{R}_g s'écrit :

$$(m_1 + m_2) \frac{d\vec{v}(G, \mathcal{R}_g)}{dt} = (m_1 + m_2) \vec{g}.$$

Le référentiel barycentrique est en chute libre, son mouvement est uniformément accéléré et ce n'est pas un référentiel galiléen :

$$\vec{a}(G, \mathcal{R}_b) = \frac{d\vec{v}(G, \mathcal{R}_g)}{dt} = \vec{g}.$$

En considérant qu'à l'instant $t = 0$, le système est abandonné sans vitesse initiale à partir de la position $z_G(0)$, l'intégration de l'équation précédente donne successivement :

$$v_G(t) = gt$$

$$z_G(t) = \frac{1}{2} gt^2 + z_G(0) = \frac{1}{2} gt^2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\ell_0 + \frac{m_2 g}{k} \right).$$

Ainsi :

$$z_G(t) = \frac{1}{2} gt^2 + \frac{2}{3} \left(\ell_0 + \frac{2m_1 g}{k} \right)$$

3

Le référentiel \mathcal{R}^* n'est pas galiléen. Tout se passe comme si le mobile réduit subissait les mêmes forces que M_2 dans ce référentiel.

[2] Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans \mathcal{R}^* au mobile fictif soumis à la force intérieure \vec{F}_2 , à la force extérieure \vec{P}_2 et à la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}(M_2)$.

[3] Résoudre l'équation différentielle vérifiée par le vecteur position \vec{r} du mobile réduit. Rappelons que le référentiel barycentrique est toujours en translation par rapport à \mathcal{R}_g . Il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis.

La particule fictive M est caractérisée par :

- sa masse réduite : $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{3} m$;
- son vecteur position : $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1 M_2} = r \vec{\ell}_z$.

Dans le référentiel non galiléen du centre de masse, elle est soumise aux forces appliquées à M_2 :

- la force intérieure de contact exercée par la particule M_1 : $\vec{T}_2 = -k[r(t) - \ell_0] \vec{\ell}_z$;
- la force extérieure à distance exercée par la Terre : $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$;
- la force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie}(M_2) = -m_2 \vec{a}(G, \mathcal{R}_g) = -m_2 \vec{g} = -\vec{P}_2$.

La force d'inertie de Coriolis est nulle car le référentiel barycentrique est en translation par rapport à \mathcal{R}_g .

Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$\mu \ddot{r} \vec{\ell}_z = \vec{T}_2 + \underbrace{\vec{P}_2 + \vec{F}_{ie}(M_2)}_{\vec{0}} = \vec{T}_2.$$

L'équation différentielle du mouvement du mobile réduit dans \mathcal{R}^* est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$:

$$\ddot{r} + \frac{k}{\mu} [r(t) - \ell_0] = 0.$$

Compte tenu des conditions initiales :

$$\dot{r}(0) = 0 \quad \text{et} \quad r(0) = z_2(0) = \ell_0 + \frac{2mg}{k}.$$

La solution de l'équation est :

$$r(t) = \ell_0 + \frac{m_2 g}{k} \cos(\omega_0 t) = \ell_0 + \frac{2mg}{k} \cos(\omega_0 t)$$

La masse réduite intervient dans la pulsation qui caractérise le mouvement vibratoire du système dans le référentiel barycentrique.



[4] Le mouvement des particules M_1 et M_2 dans \mathcal{R}_g se déduit de celui de la particule fictive par :

$$\overrightarrow{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

Le mouvement des particules dans le référentiel du laboratoire s'obtient par les relations :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_1 = \overrightarrow{OG} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_2 = \overrightarrow{OG} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{cases}$$

Le mouvement des particules dans le référentiel du laboratoire s'obtient par les relations vectorielles :

$$\begin{cases} \vec{OM}_1 = \vec{OG} + \vec{GM}_1 = \vec{OG} - \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r} \\ \vec{OM}_2 = \vec{OG} + \vec{GM}_2 = \vec{OG} + \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} z_1(t) = z_G(t) - \frac{m_2}{m_1+m_2} r(t) \\ z_2(t) = z_G(t) + \frac{m_1}{m_1+m_2} r(t) \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} z_1(t) = \frac{1}{2} g t^2 + \frac{m_2^2}{m_1+m_2} \left(\frac{g}{k}\right) [1 - \cos(\omega_0 t)] \\ z_2(t) = \frac{1}{2} g t^2 + \ell_0 + \frac{m_2^2}{m_1+m_2} \left(\frac{g}{k}\right) \left[1 + \frac{m_1}{m_2} \cos(\omega_0 t)\right] \end{cases}$$

En remplaçant les masses par leurs valeurs, le résultat final est :

$$\begin{cases} z_1(t) = \frac{1}{2} g t^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{mg}{k}\right) [1 - \cos(\omega_0 t)] \\ z_2(t) = \frac{1}{2} g t^2 + \ell_0 + \frac{4}{3} \left(\frac{mg}{k}\right) \left[1 + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t)\right] \end{cases}$$

Le mouvement du système est la composition de deux mouvements : un mouvement d'ensemble qui est un mouvement de chute libre caractérisé par la trajectoire de G et un mouvement propre oscillatoire du système dans le référentiel barycentrique.

en conclusion

L'introduction du mobile réduit M n'est pas réservée au système isolé de deux particules. Le référentiel \mathcal{R}^* n'est pas galiléen mais on peut encore appliquer le principe fondamental de la dynamique à M à condition de considérer qu'il subit les mêmes forces que M_2 dans ce référentiel : les forces extérieures, les forces intérieures et la force d'inertie d'entraînement. La force d'inertie de Coriolis est nulle car le référentiel barycentrique est en translation par rapport à \mathcal{R}_g .



> Corrigé p. 352

Rayonnement gravitationnel par un système de deux étoiles

(d'après e3a)

La théorie d'Einstein de la relativité générale prévoit l'existence de phénomènes ondulatoires associés aux champs de gravitation : les ondes gravitationnelles. Celles-ci peuvent être produites par l'effondrement d'un système binaire d'étoiles à neutrons.

Le référentiel d'étude \mathcal{R}_g est supposé galiléen.

A. Point matériel en rotation autour d'un astre

Considérons un astre A de masse M , supposé immobile dans \mathcal{R}_g , autour duquel gravite un petit objet S de masse $m \ll M$. Désignons par G la constante de gravitation universelle et notons $r = AS$

$$\text{et } \vec{z}_r = \frac{\vec{AS}}{r}.$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}.$$

1. Rappeler l'expression de la force de gravitation subie par S de la part de A . Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ qui sera exprimée en prenant l'origine de l'énergie potentielle à l'infini.

2. Montrer que le moment cinétique de S relativement au point A dans \mathcal{R}_g , noté $\vec{L}_A(S/\mathcal{R}_g)$, est un vecteur constant. En déduire que la trajectoire de S est située dans un plan passant par A .

3. Admettons pour simplifier que le point S ait une trajectoire circulaire de rayon R , avec une vitesse angulaire de rotation ω . Exprimer ω en fonction de G, M et R .

4. Rappeler l'énoncé de la troisième loi de Kepler relative à la période de rotation des satellites autour d'une étoile. Démontrez explicitement cette loi dans le cas d'une trajectoire circulaire.

5. Déterminer l'énergie mécanique du système S et commenter son signe.

B. Système binaire : Point matériel fictif

Considérons désormais l'ensemble formé par deux étoiles A_1 et A_2 , de masses identiques M , en interaction gravitationnelle. Cet ensemble est supposé mécaniquement isolé.

1. Justifier que le barycentre B des deux étoiles est animé dans \mathcal{R}_g d'un mouvement rectiligne uniforme (la norme de sa vitesse dans \mathcal{R}_g sera notée v_B). Le référentiel barycentrique du système des deux étoiles est-il galiléen ?

2. Montrer que, dans le référentiel barycentrique, le mouvement du point F défini par $\vec{BF} = \vec{A_1A_2}$ est celui d'un point matériel fictif, qui est soumis à la même force que celle qui agit sur A_2 et dont on exprimera la masse μ en fonction de M .

3. Dans le référentiel barycentrique, le point F est animé d'un mouvement circulaire de rayon R et de centre B . Déterminer la vitesse angulaire ω de ce mouvement en fonction de G, M et R .

Soit un système de deux étoiles à neutron de masses $M = 2,8 \cdot 10^{30}$ kg. Peu de temps avant l'effondrement, elles ont une période de rotation très faible $T = 0,1$ s.

4. Déterminer numériquement la distance qui sépare ces deux étoiles. Déterminer la norme de la vitesse v_A des étoiles dans le référentiel barycentrique.

5. Décrire les trajectoires des deux points A_1 et A_2 dans le référentiel barycentrique. Illustrer à l'aide d'une représentation graphique.

C. Énergie mécanique du système

1. Exprimer l'énergie cinétique dans \mathcal{R}_g du système des deux étoiles en fonction de M, v_B et de l'énergie cinétique \mathcal{E}_C^* du système dans son référentiel barycentrique.

2. Dans le cas où le mouvement de F est circulaire dans le référentiel barycentrique, exprimer l'énergie cinétique \mathcal{E}_C^* du système des deux étoiles en fonction de ω, M et R .

3. Exprimer l'énergie mécanique \mathcal{E}_m du système des deux étoiles dans le référentiel \mathcal{R}_g , en fonction de M, G, R et v_B .

D. Effondrement du système binaire

Le système binaire des deux étoiles A_1, A_2 est la source d'ondes gravitationnelles, qui transportent une certaine énergie. Un calcul de relativité générale

montre que la puissance ainsi « rayonnée » s'écrit, dans le référentiel \mathcal{R}_g :

$$\mathcal{P}_{\text{og}} = KM^2 R^4 \omega^6$$

où K est une constante s'exprimant en fonction de G et c (vitesse de la lumière dans le vide) sous la

$$\text{forme : } K = \frac{8G}{5c^5}$$

L'émission de ces ondes n'affecte pas la vitesse v_B du barycentre. Du point de vue mécanique, l'émission des ondes gravitationnelles peut être modélisée par une force non conservative agissant sur le système des deux étoiles, avec une puissance $-\mathcal{P}_{\text{og}}$.

1. Qu'est ce qu'une force non conservative ?

Quelle relation existe-t-il entre $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt}$ et \mathcal{P}_{og} ?

Quelle est la conséquence de cette perte d'énergie sur la distance R entre les deux étoiles ?

Le rayon R de la trajectoire est désormais considéré comme une fonction $R(t)$ du temps et il est admis que l'expression \mathcal{E}_m de l'énergie mécanique déterminée à la question C.3. reste valable.

2. Montrer que R varie selon une loi : $\frac{dR}{dt} = -\frac{\alpha}{R^3}$, et exprimer α en fonction de K , G et M .

3. À l'instant $t = 0$, la distance entre les étoiles est $R(t = 0) = R_0$. Déterminer $R(t)$ en fonction de R_0 , t et α . Représenter graphiquement l'allure de la trajectoire de l'une des deux étoiles dans le référentiel barycentrique.

Les deux étoiles à neutron sont assimilées à des sphères de diamètre (très faible) $a = 20$ km.

4. Déterminer, en fonction de R_0 , a et α , le temps t_c au bout duquel les deux étoiles entrent en contact. Exprimer en fonction de G , M et a , la vitesse angulaire de rotation ω_c atteinte par le système à l'instant t_c . Calculer t_c et ω_c sachant que :

$$R_0 = 4,6 \cdot 10^5 \text{ m et } M = 2,8 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$$

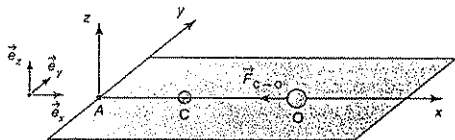


» Corrigé p. 354

Un modèle de la molécule CO

Le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_g(A; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est galiléen et le champ de pesanteur négligeable à l'échelle atomique.

Une molécule diatomique de monoxyde de carbone CO est constituée d'un atome de carbone C de masse m_C et d'un atome d'oxygène O de masse m_O .



Les atomes sont assimilés à des points matériels et sont repérés par leurs abscisses respectives x_C et x_O . Leur mouvement a lieu selon l'axe $(A; \vec{x})$ et est limité à la demi-droite (Ax) .

La force qu'exerce C sur O est :

$$\vec{F}_{C \rightarrow O} = \left(-\frac{A}{x^7} + \frac{B}{x^{13}} \right) \vec{x}$$

Les constantes A et B sont positives et $x = x_O - x_C$ est la distance relative entre les deux atomes. Les deux éléments constituant le système S ne sont soumis qu'à cette force d'interaction d'origine électromagnétique.

L'étude sera effectuée dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* associé au centre de masse G du système des deux atomes.

1. Justifier le caractère galiléen du référentiel barycentrique.

2. Écrire les deux équations différentielles du mouvement de C et O dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* . En déduire l'équation du mouvement du mobile réduit M dont vous préciserez les caractéristiques.

3. Déterminer l'énergie potentielle d'interaction $\mathcal{E}_P(x)$ de la molécule. L'origine de cette énergie est choisie pour une distance infinie séparant les deux atomes.

4. Exprimer la valeur $x_{\text{éq}}$ de x à l'équilibre de la molécule dans le référentiel barycentrique. Quelle est la valeur correspondante de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_P(x_{\text{éq}})$?

5. Tracer qualitativement l'allure du graphe $\mathcal{E}_P(x)$. L'équilibre $x_{\text{éq}}$ est-il stable ? Quelle est l'expression de l'énergie de dissociation \mathcal{E}_d de la molécule ?

6. En effectuant un développement limité de $\mathcal{E}_P(x)$ au voisinage de $x_{\text{éq}}$, exprimer la pulsation ω des petites oscillations des atomes autour de leur position

d'équilibre en fonction de μ , A et x_{eq} . Comparer les amplitudes des vibrations des atomes de carbone et

d'oxygène sachant que $\frac{m_{\text{O}}}{m_{\text{C}}} = \frac{4}{3}$.

3

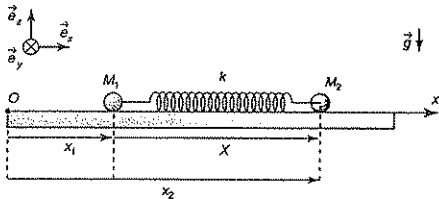
45 min

> Corrigé p. 355

Système pseudo isolé de deux particules liées par un ressort

Le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.

Deux particules ponctuelles M_1 et M_2 de masses respectives $m_1 = 2m$ et $m_2 = m$ sont liées par un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Elles sont astreintes à glisser sans frottement le long d'un axe (Ox) , leurs positions respectives étant repérées par les abscisses x_1 et x_2 .



À l'instant $t = 0$, les vitesses et positions initiales des deux particules dans \mathcal{R}_g sont respectivement :

$$\dot{x}_1(0) = v_1(0) = 0; \quad \dot{x}_2(0) = v_2(0) = 0;$$

$$x_1(0) = 0; \quad x_2(0) = \ell_0 + D.$$

La position relative de la particule M_2 par rapport à la particule M_1 est notée :

$$X(t) = x_2(t) - x_1(t).$$

1. Déterminer la vitesse du centre de masse G du système S des deux particules. Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* des deux particules est-il galiléen ?

2. Pour l'étude du mouvement dans \mathcal{R}^* , exprimer les caractéristiques du mobile réduit M . Exprimer $\overline{GM}_1 = x_1^*$ et $\overline{GM}_2 = x_2^*$ en fonction de X .

3. Par une étude dynamique, exprimer x_1^* et x_2^* dans \mathcal{R}^* . Déterminer les équations horaires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans le référentiel du laboratoire.

4. Dédurre de la question précédente l'équation horaire du mouvement de la particule M_2 lorsque

la particule M_1 est fixée à l'origine O du référentiel du laboratoire.

5. Revenons au cas où la particule M_1 est libre de se déplacer. Donner l'énergie cinétique $\mathcal{E}_C^*(S)$ du système S dans le référentiel barycentrique et son énergie cinétique $\mathcal{E}_C(S)$ dans le référentiel du laboratoire.

6. Quelle est l'énergie potentielle du système ?

7. Dédurre de l'énergie mécanique barycentrique $\mathcal{E}_m^*(S)$ l'équation différentielle du mouvement du mobile réduit vérifiée par $X(t)$.

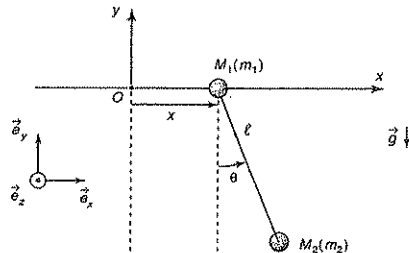
4

1h

> Corrigé p. 358

Oscillations d'un système à deux degrés de liberté

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen. Le champ de pesanteur terrestre est uniforme et la résistance de l'air négligeable.



Un pendule est constitué d'un point matériel M_2 de masse m_2 relié par une tige rigide sans masse de longueur ℓ à un point matériel M_1 mobile, de masse m_1 et pouvant glisser sans frottement sur l'axe horizontal (Ox) . La position de M_2 par rapport à M_1 est repérée par l'angle θ et la position de M_1 sur l'axe (Ox) par l'abscisse x .

À l'instant initial $t = 0$, la particule M_2 est abandonnée sans vitesse initiale d'un angle θ_0 dans le plan (Oxy) . Elle reste dans ce plan tout au long de son mouvement étudié dans le cas des petites oscillations où θ et $\dot{\theta}$ sont des infiniment petits d'ordre 1.

1. Intégrale première de la quantité de mouvement : en appliquant le théorème de la quantité de

mouvement au système $\{M_1, \text{tige}, M_2\}$, déterminer $\dot{\alpha}$ en fonction de ℓ , m_1 , m_2 et θ .

2. **Intégrale première de l'énergie** : à partir de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m du système exprimée dans le référentiel \mathcal{R}_g , déterminer la pulsation ω des petites oscillations du pendule.

3. Retrouver l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $\theta(t)$ en appliquant le théorème du moment cinétique à M_2 dans le référentiel $\mathcal{R}_1(M_1; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de la particule M_1 .

4. Retrouver cette équation en raisonnant dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* et en introduisant le mobile réduit.

5. Analyser la situation où $m_1 \gg m_2$.

Tester ses connaissances

1 Réponse b. Utilisons le vecteur position de M_2 dans le référentiel barycentrique :

$$\overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

Cette équation implique :

$$\vec{r} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \overrightarrow{GM_2} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \overrightarrow{GM_2} = 5 \overrightarrow{GM_2}.$$

Puisque le centre de masse G du système est à 2 cm de M_2 . La distance qui sépare les deux particules est de 10 cm.

2 Réponse a. Le théorème de Kœnig pour le moment cinétique s'écrit :

$$\vec{L}(S/\mathcal{R}) = \underbrace{m \overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}(G)}_{\text{mouvement d'ensemble de } S} + \underbrace{\vec{L}^*(S)}_{\text{de } S \text{ autour de } G}.$$

3 Réponse c. Le théorème de Kœnig pour l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}) &= \underbrace{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_G^2}_{\text{énergie cinétique d'ensemble}} + \underbrace{\mathcal{E}_C^*(S)}_{\text{énergie cinétique barycentrique}} \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$v_G = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - 2 \mathcal{E}_C^*(S)}{m_1 + m_2}} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4 Réponse b. Seules les forces *extérieures* interviennent dans le mouvement du centre d'inertie G .

5 Réponse b. Il faut prendre en compte les puissances des forces *intérieures* et *extérieures* appliquées au système.

6 Réponse c. La quantité de mouvement totale (ou résultante cinétique) du système isolé [pistolet-balle] est constante. En conséquence, dans le référentiel terrestre, cette quantité de mouvement, exprimée successivement

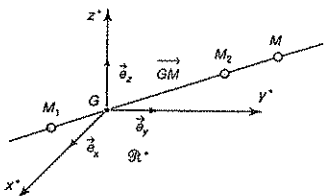
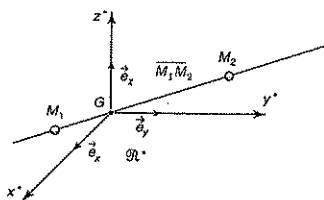
à l'instant $t = 0^+$ (juste après le tir) et à l'instant $t = 0^-$ (juste avant), est :

$$M \underbrace{\vec{v}_1(M_1/\mathcal{R}_g)}_{\text{vitesse du pistolet}} + m \underbrace{\vec{v}_2(M_2/\mathcal{R}_g)}_{\text{vitesse de la balle}} = \vec{0}.$$

Ainsi la vitesse de recul du pistolet est :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(M_1/\mathcal{R}_g) &= -\frac{m}{M} \vec{v}_2(M_2/\mathcal{R}_g). \\ v_1 &= -2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

7 Réponse b. Le mobile réduit associé au système est dans la position (2) :



Le passage d'un schéma à l'autre s'effectue par la relation : $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{GM}$.

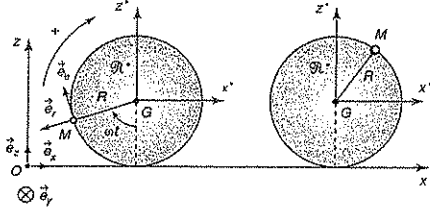
8 Les positions barycentriques des deux particules s'expriment en fonction de $\overrightarrow{M_1 M_2}$ par :

a. $\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{M_1 M_2}$.

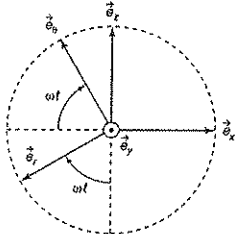
f. $\overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{M_1 M_2}$.

Savoir appliquer le cours

1 Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* de la roue, en translation par rapport à \mathcal{R} , est représenté ci-dessous pour deux positions de celle-ci :



Pour projeter \vec{e}_r et \vec{e}_θ dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_z) , il est utile d'utiliser le schéma suivant :



$$\begin{cases} \vec{e}_r = -\sin\omega t \vec{e}_x - \cos\omega t \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = -\cos\omega t \vec{e}_x + \sin\omega t \vec{e}_z \end{cases}$$

• La loi de composition des vitesses donne pour le mouvement de translation de \mathcal{R}^* par rapport à \mathcal{R} :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}^*(M) + \vec{v}_{\text{ent}}(M).$$

$$\text{Or } \begin{cases} \vec{v}^*(M) = R\omega \vec{e}_\theta = R\omega[-\cos\omega t \vec{e}_x + \sin\omega t \vec{e}_z] \\ \vec{v}_{\text{ent}}(M) = \vec{v}_G = R\omega \vec{e}_x \end{cases}$$

Ainsi : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = R\omega(1 - \cos\omega t)\vec{e}_x + R\omega \sin\omega t \vec{e}_z$

• La loi de composition des accélérations donne pour le mouvement de translation de \mathcal{R}^* par rapport à \mathcal{R} :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}^*(M) + \vec{a}_{\text{ent}}(M).$$

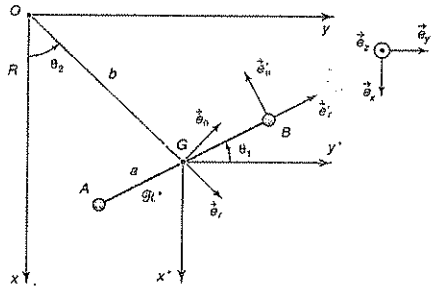
L'accélération de Coriolis est nulle car $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$.

$$\begin{cases} \vec{a}^*(M) = \frac{d\vec{v}^*(M)}{dt} = R\omega \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -R\omega^2 \vec{e}_r \\ = R\omega^2(\sin\omega t \vec{e}_x + \cos\omega t \vec{e}_z) \\ \vec{a}_{\text{ent}}(M) = \vec{0} \end{cases}$$

Le mouvement propre de la roue dans son référentiel barycentrique est une rotation uniforme, son accélération est centripète.

Ainsi : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = R\omega^2(\sin\omega t \vec{e}_x + \cos\omega t \vec{e}_z)$

2 Le schéma représentatif du problème est le suivant :



Application du théorème de Koenig pour le moment cinétique :

$$\vec{L}_0(S)_{/\mathcal{R}} = \underbrace{2m\vec{OG} \wedge \vec{v}(G)}_{\text{mouvement d'agitation d'ensemble de } S} + \underbrace{\vec{L}^*(S)}_{\text{mouvement de } S \text{ autour de } G}$$

or $2m\vec{OG} \wedge \vec{v}(G) = 2mb\vec{e}_x \wedge b\omega_2\vec{e}_\theta = 2mb^2\omega_2\vec{e}_z$;

Le moment cinétique barycentrique du système est le moment cinétique barycentrique du mobile fictif de masse réduite $\mu = \frac{m}{2}$, de vecteur position $\vec{GM} = \vec{AB}$.

Sa vitesse \vec{v} est la vitesse relative de B par rapport à A : $\vec{v} = a\omega_1\vec{e}_\theta$.

$$\begin{aligned} \vec{L}^*(S) &= \vec{GM} \wedge \mu \vec{v} = \vec{AB} \wedge \mu \vec{v} = a\vec{e}_r \wedge \frac{m}{2} a\omega_1\vec{e}_\theta \\ &= \frac{m}{2} a^2 \omega_1 \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Ainsi : $\vec{L}_0(S)_{/\mathcal{R}} = \left(2mb^2\omega_2 + \frac{m}{2}a^2\omega_1 \right) \vec{e}_z$

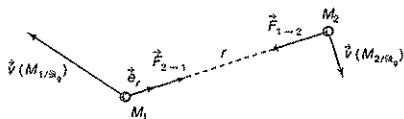
Application du théorème de Koenig pour l'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_C(S)_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\frac{1}{2}2m v_G^2}_{\text{énergie cinétique d'ensemble}} + \underbrace{\mathcal{E}_C^*(S)}_{\text{énergie cinétique barycentrique}} = m(b\omega_2)^2 + \frac{1}{2}\mu v^2.$$

L'énergie cinétique barycentrique du système est l'énergie cinétique barycentrique du mobile fictif.

$$\Rightarrow \mathcal{E}_C(S)_{/\mathcal{R}} = mb^2\omega_2^2 + m\frac{a^2}{4}\omega_1^2$$

3 Considérons le système indéformable de deux points matériels M_1 et M_2 : la distance r qui les sépare est constante.



Calculons la puissance des forces intérieures, compte tenu du principe des actions réciproques :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}} &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(M_2/R_s) + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(M_1/R_s) \\ &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot [\vec{v}(M_2/R_s) - \vec{v}(M_1/R_s)] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \left(\frac{d\vec{M}_1 M_2}{dt} \right)_{/R_s}$$

La force intérieure $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est colinéaire au vecteur

$$\text{unitaire } \vec{e}_r = \frac{\vec{M}_1 M_2}{\|\vec{M}_1 M_2\|} = \frac{\vec{M}_1 M_2}{r}$$

Ainsi : $\vec{M}_1 M_2 = r \vec{e}_r$, et $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{e}_r$,

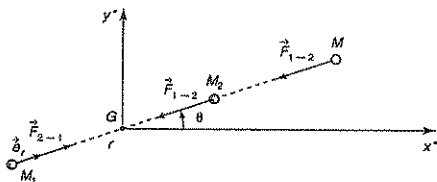
La puissance \mathcal{P}_{int} s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = F_{1 \rightarrow 2} r \underbrace{\vec{e}_r \cdot \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt} \right)_{/R_s}}_0 = 0$$

En conséquence $\delta \mathcal{F}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{int}} dt = 0$.

4 Dans le référentiel barycentrique, l'énergie mécanique de la particule fictive soumise à la force centrale de centre G (centre de masse du système) et dérivant du potentiel d'interaction est :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \mu v^2 + \mathcal{E}_p^{\text{elas}} = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} k r^2.$$



Le mouvement du mobile fictif M étant à force centrale, il y a conservation du moment cinétique :

$$\vec{L}^*(M) = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}(M)$$

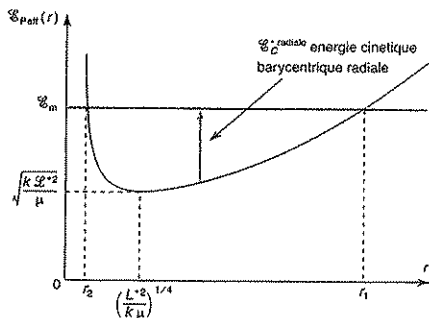
$$\Rightarrow L^* = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cste}$$

D'où l'expression de l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^{*2}}{2\mu r^2} + \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \mathcal{E}_{\text{Peff}}(r),$$

$$\mathcal{E}_{\text{Peff}}(r) = \frac{L^{*2}}{2\mu r^2} + \frac{1}{2} k r^2$$

Le tracé du diagramme de l'énergie potentielle effective en fonction de r donne :



Tous les états de la particule fictive sont liés.

- $\mathcal{E}_m < \sqrt{\frac{k L^{*2}}{\mu}}$ est un cas inconcevable à écarter : il correspond à une énergie cinétique radiale barycentrique $\mathcal{E}_C^{\text{radiale}} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$ négative.

- $\mathcal{E}_m = \sqrt{\frac{k L^{*2}}{\mu}}$: l'énergie cinétique radiale du mobile réduit est nulle, l'énergie cinétique barycentrique de M est donc orthoradiale. Le mouvement de M est ainsi circulaire de rayon $R = \left(\frac{L^{*2}}{k\mu} \right)^{1/4}$. La conservation

du moment cinétique implique que $\frac{d\theta}{dt}$ est constant, le mouvement de M est circulaire et uniforme, il en est de même pour les deux particules M_1 et M_2 . C'est un état lié.

- $\mathcal{E}_m > \sqrt{\frac{k L^{*2}}{\mu}}$ correspond aussi à un état lié : le mouvement de M est borné.

S'entraîner

1 Partie A

1. La force de gravitation subie par S de la part de A

$$\text{est : } \vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r = f(r) \vec{e}_r.$$

La force gravitationnelle est centrale, de centre de force A , et dérive d'une énergie potentielle par la relation :

$$f(r) = -G \frac{Mm}{r^2} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}.$$

En séparant les variables :

$$d\mathcal{E}_p = G M m \frac{dr}{r^2}.$$

L'intégration donne :

$$\int_1^{\infty} d\mathcal{E}_p = G M m \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^2};$$

$$\mathcal{E}_p(\infty) - \mathcal{E}_p(r) = \frac{G M m}{r}.$$

L'énergie potentielle gravitationnelle est :

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{G M m}{r}$$

2. S n'est soumis qu'à la seule force de gravitation. Le théorème du moment cinétique appliqué à S par rapport au point A dans le référentiel \mathcal{R}_g galiléen donne :

$$\left(\frac{d\vec{L}_A(S/\mathcal{R}_g)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{A, \text{ext}} = \vec{AS} \wedge \vec{F} = \vec{0}.$$

car la force \vec{F} passe par A .

Le moment cinétique de S par rapport à A , $\vec{L}_A(S/\mathcal{R}_g)$, est un vecteur constant.

Effectuons le produit scalaire :

$$\vec{AS} \cdot \vec{L}_A(S/\mathcal{R}_g) = \vec{AS} \cdot (\vec{AS} \wedge m\vec{v}(S/\mathcal{R}_g)) = 0$$

⇒ La trajectoire de S est dans le plan passant par A , normal à $\vec{L}_A(S/\mathcal{R}_g)$.

3. Si le point S décrit une trajectoire circulaire de rayon R à la vitesse angulaire ω , le principe fondamental de la dynamique appliqué à S dans \mathcal{R}_g permet d'écrire :

$$m\vec{a}(S/\mathcal{R}_g) = -m\omega^2 R \vec{e}_r = -G \frac{Mm}{R^2} \vec{e}_r.$$

⇒

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

4. Énoncé de la troisième loi de Kepler : « Le carré de la période de rotation est proportionnel au cube du rayon de l'orbite ».

En considérant que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, l'équation précédente donne :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R^{\frac{3}{2}}$$

5. L'énergie mécanique de S est :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m(S/\mathcal{R}_g) &= \mathcal{E}_c(S/\mathcal{R}_g) + \mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{R} \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 - \frac{G M m}{R} \end{aligned}$$

⇒

$$\mathcal{E}_m(S/\mathcal{R}_g) = -\frac{G M m}{2R}$$

Cette énergie mécanique est négative, elle correspond à un état lié de l'association $\{A, S\}$: il faut fournir de l'énergie à S pour l'amener à l'infini.

Partie B

1. Le système étant isolé, le barycentre B des deux étoiles est animé dans \mathcal{R}_g d'un mouvement rectiligne uniforme. Ce résultat s'obtient en appliquant le théorème de la quantité de mouvement au système binaire constitué des deux étoiles dans le référentiel \mathcal{R}_g .

Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* du système des deux étoiles dont l'origine est B est entraîné dans ce mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_g . Il est donc lui-même galiléen.

2. Appliquons la relation fondamentale de la dynamique dans \mathcal{R}^* galiléen aux deux étoiles :

$$\begin{cases} M \left(\frac{d^2 \vec{BA}_1}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ M \left(\frac{d^2 \vec{BA}_2}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M \left(\frac{d^2 \vec{BA}_1}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ M \left(\frac{d^2 \vec{BA}_2}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M \left(\frac{d^2 \vec{BA}_1}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ M \left(\frac{d^2 \vec{BA}_2}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad (2)$$

L'opération (2) - (1) donne :

$$\frac{M}{2} \left(\frac{d^2 \vec{A}_1 \vec{A}_2}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}.$$

Équation qui peut s'écrire :

$$\mu \left(\frac{d^2 \vec{BF}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}.$$

Il s'agit du principe fondamental de la dynamique appliqué à un mobile fictif F de masse μ repéré dans le référen-

tiel barycentrique par $\vec{BF} = \vec{A_1A_2}$ et soumis à la même force que celle qui agit sur A_2 . La masse réduite μ est :

$$\mu = \frac{M}{2}$$

Puisque \mathcal{R}^* est en translation par rapport à \mathcal{R} , il est inutile de préciser le référentiel de dérivation et on peut se contenter d'écrire :

$$\mu \frac{d^2 \vec{BF}}{dt^2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

3. F décrit une trajectoire circulaire de centre B et de rayon R . La relation fondamentale appliquée à F dans \mathcal{R}^* donne :

$$\mu \frac{d^2 \vec{BF}}{dt^2} = -\frac{GM M}{R^2} \vec{e}_r;$$

avec : $\vec{A_1A_2} = \vec{BF} = R\vec{e}_r$,

$$\Rightarrow -R\omega^2 \vec{e}_r + \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_\theta = -2 \frac{GM}{R^2} \vec{e}_r.$$

En conséquence, la trajectoire de F est circulaire uniforme à la vitesse angulaire constante :

$$\omega = \sqrt{2 \frac{GM}{R^3}}$$

4. Sachant que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, la distance R qui sépare les deux étoiles est :

$$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{2\pi^2}} = 4,6 \cdot 10^5 \text{ m}$$

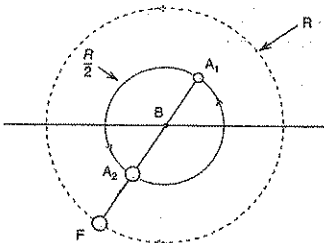
Les positions et vitesses barycentriques des deux étoiles sont :

$$\begin{cases} \vec{BA}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{A_1A_2} = -\frac{1}{2} \vec{A_1A_2} \\ \vec{BA}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{A_1A_2} = \frac{1}{2} \vec{A_1A_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}_1^* = -\frac{1}{2} \vec{v} \\ \vec{v}_2^* = \frac{1}{2} \vec{v} \end{cases}$$

Puisque $v = R\omega$, la norme de la vitesse v_A des étoiles dans le référentiel barycentrique est :

$$v_A = \frac{\omega R}{2} = 1,43 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

5. Les trajectoires des deux points A_1 et A_2 dans le référentiel barycentrique sont des cercles concentriques de même rayon $\frac{R}{2}$:



Partie C

1. L'énergie cinétique dans \mathcal{R}_g du système des deux étoiles est obtenue en appliquant le théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}(M+M)v_B^2 + \mathcal{E}_C^* = Mv_B^2 + \mathcal{E}_C^*.$$

2. L'énergie cinétique barycentrique du système des deux étoiles est l'énergie cinétique du mobile fictif dans ce référentiel. Si le mouvement de F est circulaire uniforme dans \mathcal{R}^* :

$$\mathcal{E}_C^* = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2} \right) R^2 \omega^2$$

3. L'énergie potentielle d'interaction des deux étoiles distantes de R étant inchangée :

$$\mathcal{E}_P = -\frac{GM^2}{R}$$

L'énergie mécanique \mathcal{E}_m du système des deux étoiles dans le référentiel \mathcal{R}_g est :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= Mv_B^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2} \right) R^2 \omega^2 - \frac{GM^2}{R} \\ &= Mv_B^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2} \right) R^2 \cdot 2 \frac{GM}{R^3} - \frac{GM^2}{R} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_m = Mv_B^2 - \frac{GM^2}{2R}$$

Partie D

1. Une force non conservative ne dérive pas d'une énergie potentielle. Le théorème de la puissance mécanique donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -\mathcal{P}_{og}$$

À cette perte d'énergie correspond une diminution de la distance R entre les deux étoiles.

2. Calculons la dérivée :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \frac{GM^2}{2R^2} \frac{dR}{dt}$$

Rappelons que v_B n'est pas modifiée par l'émission des ondes gravitationnelles.

$$\mathcal{P}_{og} = KM^2 R^4 \omega^6 \quad \text{et} \quad \omega^2 = 2 \frac{GM}{R^3}$$

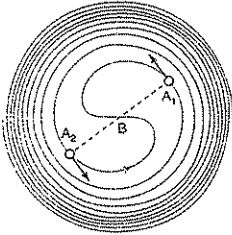
Ainsi :

$$\frac{dR}{dt} = -16K \frac{G^2 M^3}{R^3} \quad \text{et} \quad \alpha = 16KG^2 M^3$$

3. Si $R(t=0) = R_0$, l'intégration donne :

$$R^4 - R_0^4 = -4\alpha t \Rightarrow R(t) = R_0 \left(1 - \frac{4\alpha t}{R_0^4} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Chaque étoile évolue en spirale vers le centre B :



4. Le temps t_c au bout duquel les deux étoiles entrent en contact est obtenu par :

$$\text{À l'instant } t_c, R = a \Rightarrow t_c = \frac{R_0^4 - a^4}{4\alpha} = \frac{R_0^4}{4\alpha} = 163 \text{ s}$$

La vitesse angulaire de rotation ω_c atteinte par le système à cet instant est :

$$\omega_c = \sqrt{2 \frac{GM}{a^3}} = 6,8 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

2 1. Le système S constitué des deux atomes est isolé, donc soumis à aucune force extérieure. Le théorème du centre de masse G appliqué à S dans le référentiel du laboratoire donne :

$$(m_O + m_C) \vec{a}(G/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}_g) = \text{csté}$$

vitesse d'entraînement de \mathcal{R}^* par rapport à \mathcal{R}_g

\mathcal{R}^* est en translation rectiligne uniforme ou fixe par rapport au référentiel du laboratoire \mathcal{R}_g galiléen, le référentiel barycentrique est aussi galiléen.

2. Le principe fondamental de la dynamique appliqué successivement aux deux atomes dans le référentiel barycentrique galiléen donne :

$$\left\{ \begin{aligned} m_O \left(\frac{d^2 \vec{GO}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} &= \vec{F}_{C \rightarrow O} & (1) \\ m_C \left(\frac{d^2 \vec{GC}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} &= \vec{F}_{O \rightarrow C} & (2) \end{aligned} \right.$$

Le principe des actions réciproques $\vec{F}_{O \rightarrow C} = -\vec{F}_{C \rightarrow O}$ donne le système des deux équations vectorielles :

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^2 \vec{GO}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} &= \frac{\vec{F}_{C \rightarrow O}}{m_O} & (1) \\ \left(\frac{d^2 \vec{GC}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} &= -\frac{\vec{F}_{C \rightarrow O}}{m_C} & (2) \end{aligned} \right.$$

La différence (1) - (2) permet d'écrire :

$$\left(\frac{d^2 \vec{CO}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \left(\frac{1}{m_O} + \frac{1}{m_C} \right) \vec{F}_{C \rightarrow O}$$

D'où l'équation différentielle :

$$\mu \left(\frac{d^2 \vec{CO}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{F}_{C \rightarrow O}$$

Cette équation est le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule fictive M appelée *mobile réduit* dont les caractéristiques sont les suivantes :

- sa *masse réduite* est $\mu = \frac{m_O m_C}{m_O + m_C}$;
- son vecteur position est $\vec{GM} = \vec{r} = \vec{CO}$;
- elle est soumise à la force appliquée à O : $\vec{F}_{C \rightarrow O}$.

3. L'énergie potentielle d'interaction est définie par :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_P(x) &= -(\vec{F}_{C \rightarrow O} \cdot d\vec{GO} + \vec{F}_{O \rightarrow C} \cdot d\vec{GC}) \\ &= -\vec{F}_{C \rightarrow O} \cdot (d\vec{GO} - d\vec{GC}) = -\vec{F}_{C \rightarrow O} \cdot d\vec{CO} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$d\mathcal{E}_P(x) = - \left(-\frac{A}{x^7} + \frac{B}{x^{13}} \right) dx = \left(\frac{A}{x^7} - \frac{B}{x^{13}} \right) dx$$

L'intégration de cette équation donne :

$$\int_x^\infty d\mathcal{E}_P(x) = A \int_x^\infty \frac{1}{x^7} dx - B \int_x^\infty \frac{1}{x^{13}} dx$$

En choisissant l'origine de cette énergie potentielle $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_P(x) = 0$, l'expression de l'énergie potentielle d'interaction est :

$$\mathcal{E}_P(x) = -\frac{A}{6x^6} + \frac{B}{12x^{12}}$$

4. La relation fondamentale de la statique fournit la position d'équilibre :

$$-\frac{A}{x_{\text{éq}}^7} + \frac{B}{x_{\text{éq}}^{13}} = 0$$

D'où :

$$-\frac{A}{x_{\text{éq}}^6} \left(x_{\text{éq}}^6 - \frac{B}{A} \right) = 0$$

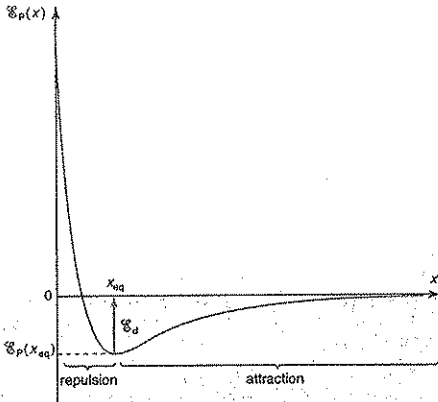
En excluant la situation où une distance infinie sépare les atomes (ce qui correspond à une interaction nulle), la valeur $x_{\text{éq}}$ de x à l'équilibre est :

$$x_{\text{éq}} = \left(\frac{B}{A} \right)^{\frac{1}{6}}$$

La valeur de l'énergie potentielle correspondante est :

$$\mathcal{E}_P(x_{\text{éq}}) = -\frac{A^2}{12B}$$

5. Le tracé de l'évolution de $\mathcal{E}_p(x)$ est le suivant :



La position x_{eq} correspond à un minimum de l'énergie potentielle, c'est une position d'équilibre stable. L'énergie de dissociation \mathcal{E}_d de la molécule est l'énergie qu'il faut lui fournir pour la séparer en atomes libres à partir de sa position d'équilibre, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}_d = \mathcal{E}_p(\infty) - \mathcal{E}_p(x_{\text{eq}}) = \frac{A^2}{12B}$$

6. Effectuons un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\mathcal{E}_p(x)$ au voisinage de la position d'équilibre x_{eq} .

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p(x) &= \mathcal{E}_p(x_{\text{eq}}) + (x - x_{\text{eq}}) \left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \right)_{x_{\text{eq}}} + \frac{1}{2} (x - x_{\text{eq}})^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x_{\text{eq}}} \\ &= \mathcal{E}_p(x_{\text{eq}}) + \frac{1}{2} (x - x_{\text{eq}})^2 \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x_{\text{eq}}} \end{aligned}$$

Or

$$\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x_{\text{eq}}} = -\frac{7A}{x_{\text{eq}}^8} + \frac{13B}{x_{\text{eq}}^{14}} = -\frac{7A}{x_{\text{eq}}^8} + \frac{13A}{x_{\text{eq}}^8} = \frac{6A}{x_{\text{eq}}^8}$$

D'où l'expression approchée de l'énergie potentielle de la molécule au voisinage de sa position d'équilibre stable :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(x_{\text{eq}}) + \frac{3A}{x_{\text{eq}}^8} (x - x_{\text{eq}})^2$$

Puisque la molécule CO n'est soumise à aucune force extérieure, son énergie mécanique propre (ou barycentrique) est une intégrale première du mouvement et se décompose de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_m^*(\text{CO}) = \mathcal{E}_C^*(\text{CO}) + \mathcal{E}_p(x) = \text{cste.}$$

L'énergie cinétique barycentrique du système S est l'énergie cinétique barycentrique du mobile réduit :

$$\mathcal{E}_C^*(\text{CO}) = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2$$

Développons l'expression de l'énergie mécanique propre :

$$\mathcal{E}_m^*(\text{CO}) = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 + \frac{3A}{x_{\text{eq}}^8} (x - x_{\text{eq}})^2 + \mathcal{E}_p(x_{\text{eq}}) = \text{cste.}$$

Soit en dérivant par rapport au temps :

$$\dot{x} \left[\mu \dot{x} + \frac{6A}{x_{\text{eq}}^8} (x - x_{\text{eq}}) \right] = 0;$$

et en éliminant la solution $\dot{x} = 0$ puisque la molécule est en mouvement, on obtient :

$$\ddot{x} + \frac{6A}{\mu x_{\text{eq}}^8} (x - x_{\text{eq}}) = 0$$

La pulsation de vibration de la molécule écartée légèrement de sa position d'équilibre stable est :

$$\omega = \sqrt{\frac{6A}{\mu x_{\text{eq}}^8}}$$

C'est la masse réduite μ qui intervient dans la pulsation des oscillations.

Les positions barycentriques des deux atomes se déduisent de x par les relations :

$$\vec{GC} = -\frac{m_O}{m_C + m_O} \vec{GM} \quad \text{et} \quad \vec{GO} = \frac{m_C}{m_C + m_O} \vec{GM}$$

Chaque atome vibre à la même pulsation ω et le rapport des amplitudes est le rapport des masses des atomes :

$$\frac{X_C}{X_O} = -\frac{m_O}{m_C} = -\frac{4}{3}$$

Les atomes vibrent en opposition de phase. La masse de l'atome de carbone étant plus faible que la masse de l'atome d'oxygène, l'amplitude de ses oscillations est plus élevée.

3 1. Le système S est l'ensemble des deux particules ponctuelles et du ressort : $\{M_1, \text{ressort}, M_2\}$. Le référentiel d'étude est le référentiel du laboratoire \mathcal{R}_g galiléen. Le bilan des forces extérieures appliquées au système est :

• En M_1 : le poids $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g} = -2mg \vec{e}_z$.

La réaction du support \vec{R}_1 normale au support car M_1 glisse sans frottement.

Cette réaction compense le poids de la particule et empêche celle-ci de pénétrer dans le support, ainsi :

$$\vec{R}_1 = -\vec{P}_1 = 2mg \vec{e}_z$$

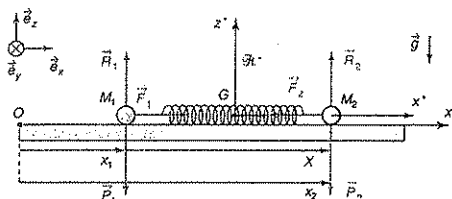
• En M_2 : le poids $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g} = -mg \vec{e}_z$.

La réaction du support \vec{R}_2 , normale au support car M_2 glisse sans frottement.

$$\vec{R}_2 = -\vec{P}_2 = mg \vec{e}_z$$

Le ressort étant sans masse, il ne s'y applique ni poids, ni réaction du support.

Les forces de rappel \vec{F}_1 et \vec{F}_2 exercées par le ressort sur chacune de ces particules sont des forces intérieures. Elles ne sont pas prises en compte dans le théorème du centre de masse.



La masse totale du système étant égale à $3m$, le théorème du centre de masse appliqué à S dans \mathcal{R}_g s'écrit :

$$3m \frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R}_g)}{dt} = -3mg\vec{z}_z + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{0}.$$

En effet, l'équilibre selon \vec{z}_z de la particule M_1 implique :

$$-2mg\vec{z}_z + \vec{R}_1 = \vec{0}.$$

Et l'équilibre selon \vec{z}_z de la particule M_2 :

$$-mg\vec{z}_z + \vec{R}_2 = \vec{0}.$$

Ainsi :

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}_g) = \text{cste}$$

Le référentiel barycentrique est galiléen car il est en translation rectiligne uniforme ou fixe par rapport au référentiel galiléen du laboratoire.

Poursuivons le raisonnement pour déterminer précisément la valeur de $\vec{v}(G)$.

Le centre de masse du système est défini par :

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{3}(2\vec{OM}_1 + \vec{OM}_2).$$

$$\Rightarrow \vec{v}(G/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{3} \left(2 \underbrace{\vec{v}(M_1/\mathcal{R}_g)}_{\vec{v}_1} + \underbrace{\vec{v}(M_2/\mathcal{R}_g)}_{\vec{v}_2} \right) = \text{cste}.$$

Considérons les conditions initiales :

$$v_2(0) = v_1(0) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}(G/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$$

Le centre de masse est fixe par rapport au référentiel du laboratoire, le référentiel barycentrique est fixe dans ce référentiel.

La position de G est à tout instant :

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(2\vec{OM}_1(t) + \vec{OM}_2(t)) = \frac{1}{3}(2\vec{OM}_1(0) + \vec{OM}_2(0))$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\ell_0 + D)\vec{z}_z = x_C \vec{z}_z$$

La position de G reste fixe lors des vibrations de M_1 et M_2 .

2. Le mobile réduit est caractérisé par :

• sa masse réduite : $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{3}m$;

• son vecteur position : $\vec{GM} = \vec{M}_1 \vec{M}_2 = X \vec{e}_x$.

De ce vecteur position, par dérivées successives, on peut déduire la vitesse et l'accélération du mobile réduit dans \mathcal{R}^* :

$$\vec{v} = \dot{X} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{a} = \ddot{X} \vec{e}_x.$$

Le mouvement des deux points matériels M_1 et M_2 se déduit de l'étude de la particule fictive.

En écrivant d'une part, la définition du centre d'inertie G du système et d'autre part, l'expression de la position relative \vec{r} de M_2 par rapport à M_1 :

$$\begin{cases} m_1 \vec{GM}_1 + m_2 \vec{GM}_2 = \vec{0} \\ \vec{r} = \vec{M}_1 \vec{M}_2 = \vec{GM}_2 - \vec{GM}_1 \end{cases}$$

on peut déduire les positions barycentriques des deux particules en fonction de \vec{r} :

$$\vec{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

En projection suivant \vec{e}_x et en considérant que $m_1 = 2m$ et $m_2 = m$, on obtient :

$$x_1^* = -\frac{1}{3}X \quad \text{et} \quad x_2^* = \frac{2}{3}X$$

3. Adoptons le mobile réduit pour système. Son mouvement est étudié dans le référentiel barycentrique galiléen. Il est soumis à la résultante des forces appliquées à M_2 :

$$\vec{F} = \underbrace{\vec{P}_2 + \vec{R}_2}_0 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_2 = -k(X - \ell_0)\vec{e}_x.$$

Le principe fondamental de la dynamique donne dans \mathcal{R}^* :

$$\mu \vec{a} = \vec{F}_2.$$

Cette équation projetée suivant \vec{e}_x est :

$$\frac{2}{3}m \ddot{X} = -k(X - \ell_0).$$

D'où l'équation différentielle du mouvement du mobile réduit M :

$$\frac{d^2}{dt^2}(X - \ell_0) + \frac{3k}{2m}(X - \ell_0) = 0.$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique

de pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$

La solution générale de cette équation est :

$$X(t) - \ell_0 = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

Compte tenu des conditions initiales :

$$\begin{aligned} \bullet X(0) - \ell_0 &= x_2(0) - x_1(0) - \ell_0 = D = A; \\ \bullet \dot{X} &= v_2(0) - v_1(0) = 0 = \omega_0 B \quad B = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) = \ell_0 + D \cos \omega_0 t}$$

Les positions barycentriques de chaque particule sont :

$$\boxed{x_1' = -\frac{X}{3} = -\frac{\ell_0}{3} - \frac{D}{3} \cos \omega_0 t}$$

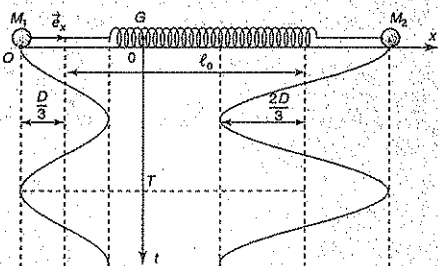
$$\boxed{x_2' = \frac{2}{3}X = \frac{2}{3}\ell_0 + \frac{2}{3}D \cos \omega_0 t}$$

Le mouvement des particules dans le référentiel du laboratoire vérifie les relations :

$$\begin{aligned} \vec{OM}_1 &= \vec{OG} + \vec{GM}_1 \quad \text{et} \quad \vec{OM}_2 = \vec{OG} + \vec{GM}_2 \\ \Rightarrow x_1 &= x_G + x_1' \quad \text{et} \quad x_2 = x_G + x_2' \end{aligned}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{D}{3}(1 - \cos \omega_0 t)} \quad \boxed{x_2 = \ell_0 + \frac{D}{3}(1 + 2 \cos \omega_0 t)}$$

Le schéma suivant permet de visualiser le mouvement des particules M_1 et M_2 au cours du temps dans le référentiel du laboratoire :



Les points matériels M_1 et M_2 oscillent en opposition de phase autour de leur position d'équilibre avec une période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{3k}}$$

Les amplitudes associées aux deux particules sont dans un rapport égal à -2 .

4. La particule M_1 est maintenant fixe dans le référentiel du laboratoire et ne peut pas être mise en mouvement, son inertie est infinie par rapport à l'inertie de M_2 . En conséquence :

$$m_1 \gg m_2.$$

La position du centre de masse G du système devient :

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2}{m_1 + m_2} \approx \vec{OM}_1.$$

Le centre de masse G du système de deux points matériel est plus proche de la masse la plus élevée. Puisque la masse m_1 est infinie par rapport à la masse m_2 , G coïncide avec M_1 .

Le référentiel barycentrique est le référentiel du laboratoire

$$\mathcal{R}_g(\vec{O}; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z).$$

confondu avec G

La position du mobile réduit est définie par :

$$\vec{GM} = \vec{M}_1 \vec{M}_2 = \vec{GM}_2.$$

La trajectoire de M_2 se confond avec la trajectoire du mobile réduit.

La masse du mobile réduit est :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_2.$$

Le mobile réduit a exactement les mêmes caractéristiques que la particule M_2 , il se confond entièrement avec elle. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M_2 dans \mathcal{R}^* ou \mathcal{R}_g donne :

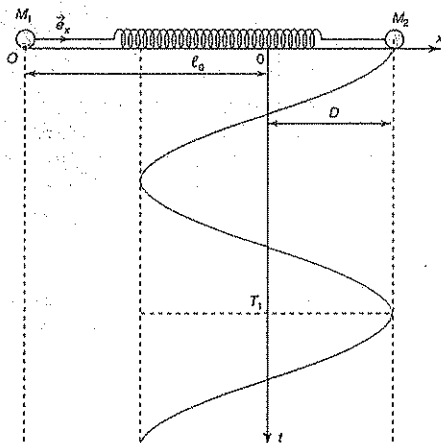
$$\mu \frac{d^2 \vec{GM}}{dt^2} = \vec{F}_2.$$

L'équation horaire de M_2 est l'équation horaire de M :

$$x_2(t) = X(t) = \ell_0 + D \cos \omega_1 t;$$

$$\text{avec } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}$$

Le schéma suivant permet de visualiser le mouvement oscillatoire de la particule M_2 au cours du temps. Les vibrations sont périodiques de période $T_1 = \sqrt{3}T_0$ autour de la position d'équilibre ℓ_0 de M_2 et l'amplitude des oscillations est D .



5. *Remarque* : nous venons de voir que l'équation du mouvement découle de l'application du principe fondamental de la dynamique. Une autre méthode consiste à écrire les lois de conservation pour un système isolé : conservation de l'énergie mécanique ou conservation du moment cinétique dans le référentiel barycentrique.

L'énergie cinétique barycentrique de S est l'énergie cinétique du mobile réduit dans ce référentiel. Ainsi :

$$\mathcal{E}_C(S) = \frac{1}{2} \mu v^2.$$

Son expression est donc :

$$\mathcal{E}_C(S) = \frac{1}{3} m \dot{X}^2.$$

Le théorème de Kœnig permet de passer à l'énergie mécanique de système dans le référentiel du laboratoire :

$$\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_G^2 + \mathcal{E}_C(S).$$

Comme le centre de masse est fixe dans le référentiel du laboratoire :

$$\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_0) = \mathcal{E}_C(S) = \frac{1}{3} m \dot{X}^2$$

6. L'énergie potentielle du système est l'énergie potentielle élastique des deux points matériels M_1 et M_2 . Leurs poids sont orthogonaux aux déplacements des particules et ne travaillent pas : l'énergie potentielle de pesanteur est constante et fixée à zéro.

Les points matériels M_1 et M_2 subissent l'action des forces élastiques \vec{F}_1 et \vec{F}_2 :

$$\vec{F}_2 = -k(X - \ell_0) \vec{e}_x = -\vec{F}_1.$$

Elles dérivent de la fonction énergie potentielle élastique :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_P^{\text{elas}}(S) &= -\vec{F}_1 \cdot dx_1 \vec{e}_x - \vec{F}_2 \cdot dx_2 \vec{e}_x \\ &= -\vec{F}_2 \cdot (dx_2 - dx_1) \vec{e}_x ; \\ &= k(X - \ell_0) \vec{e}_x \cdot dX \vec{e}_x \\ &= k(X - \ell_0) d(X - \ell_0). \end{aligned}$$

En choisissant l'origine de cette énergie potentielle lorsque le système au repos (la distance séparant M_1 et M_2 étant alors $X = \ell_0$), l'énergie potentielle d'interaction due à la présence du ressort est :

$$\mathcal{E}_P^{\text{elas}}(X) = \frac{1}{2} k (X - \ell_0)^2$$

7. Le système est conservatif, les forces qui lui sont appliquées sont conservatives ou ne travaillent pas.

$$\mathcal{E}_m^*(S) = \mathcal{E}_C(S) + \mathcal{E}_P^{\text{elas}} = \text{cste.}$$

Développons son expression :

$$\mathcal{E}_m^*(S) = \frac{1}{3} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} k (X - \ell_0)^2 = \text{cste.}$$

Sa dérivée par rapport à t est nulle :

$$\frac{d\mathcal{E}_m^*(S)}{dt} = \dot{X} \left[\frac{2}{3} m \dot{X} + k(X - \ell_0) \right] = 0.$$

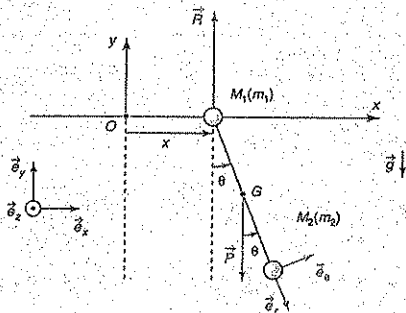
En éliminant la solution parasite $\dot{X} = 0$ (le système est en mouvement) :

$$\dot{X} + \frac{3k}{2m} (X - \ell_0) = 0.$$

On retrouve l'équation du mouvement du mobile réduit obtenu dans le référentiel barycentrique galiléen par application du principe fondamental de la dynamique.

4 1. Le système des deux points matériels est à deux degrés de liberté ; l'abscisse x de M_1 et l'élongation angulaire θ de M_2 varient de façon indépendante. Appliquons le théorème de la quantité de mouvement au système S dans le référentiel terrestre galiléen.

Le bilan des forces extérieures appliquées à S se réduit à la réaction \vec{R} de l'axe sur M_1 et au poids \vec{P} des deux masses dont le point d'application est le centre de masse G du système. Ces deux forces verticales sont représentées sur le schéma ci-dessous :



Les tensions exercées par la tige sur M_1 et M_2 sont des forces intérieures au système non prises en compte dans le théorème de la quantité de mouvement. Celui-ci s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{P}(S/\mathcal{R}_0)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{R}.$$

La composante horizontale de la résultante \vec{F}_{ext} étant nulle, il y a conservation de la quantité de mouvement du système selon \vec{e}_x :

$$\begin{aligned} p_x(S/\mathcal{R}_0) &= \underbrace{p_x(M_1(t)/\mathcal{R}_0)}_{\text{instant } t} + \underbrace{p_x(M_2(t)/\mathcal{R}_0)}_{\text{instant } t} \\ &= \underbrace{p_x(M_1(0)/\mathcal{R}_0)}_{\text{instant initial}} + \underbrace{p_x(M_2(0)/\mathcal{R}_0)}_{\text{instant initial}} = 0. \end{aligned}$$

Le système étant au repos à l'instant $t = 0$, la quantité de mouvement initiale est nulle.

Or :

$$\vec{P}(S/\mathcal{R}_0) = (m_1 + m_2) \vec{v}(S/\mathcal{R}_0).$$

En conséquence :

$$p_A(S/\mathcal{R}_g) = (m_1 + m_2)\dot{x}_G = 0.$$

L'abscisse du centre de masse G est constante.

Comme on a :

$$M_1 G = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell;$$

Il vient :

$$x_G = x + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell \sin \theta.$$

Finalement $\dot{x}_G = 0$ donne :

$$\dot{x} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell \dot{\theta} \cos \theta$$

2. L'énergie mécanique du système dans \mathcal{R}_g se décompose en deux termes :

(i) son énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g) &= \mathcal{E}_C(M_1/\mathcal{R}_g) + \mathcal{E}_C(M_2/\mathcal{R}_g) \\ &= \frac{1}{2} m_1 v^2(M_1/\mathcal{R}_g) + \frac{1}{2} m_2 v^2(M_2/\mathcal{R}_g). \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{v}(M_2/\mathcal{R}_g) = \left(\frac{d\vec{OM}_2}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d\vec{OM}_1}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} + \left(\frac{d\vec{M}_1\vec{M}_2}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} \\ \quad = \dot{x} \vec{e}_x + \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{v}(M_1/\mathcal{R}_g) = \dot{x} \vec{e}_x \end{cases}$$

d'où :

$$\mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 [\dot{x}^2 + (\ell \dot{\theta})^2 + 2\ell \dot{x} \dot{\theta} \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta}_{\cos \theta}]$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\ell \dot{\theta})^2 + m_2 \ell \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta.$$

Dans le cas des petites oscillations ($\cos \theta \approx 1$), avec

$\dot{x} \approx -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell \dot{\theta}$ cette expression devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g) &= \frac{1}{2} \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} (\ell \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\ell \dot{\theta})^2 - \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} (\ell \dot{\theta})^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\ell \dot{\theta})^2 \end{aligned}$$

(ii) son énergie potentielle qui se réduit à l'énergie potentielle de pesanteur de la particule M_2 :

$$\mathcal{E}_p^{\text{pes}}(M_2) = -m_2 g \ell \cos \theta.$$

L'origine de cette énergie potentielle est choisie à l'altitude $y = 0$.

L'énergie mécanique du système est donc, pour les oscillations de faible amplitude :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m(S/\mathcal{R}_g) &= \mathcal{E}_C(S/\mathcal{R}_g) + \mathcal{E}_p(S) \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ell \dot{\theta})^2 - m_2 g \ell \cos \theta. \end{aligned}$$

Le système est conservatif car d'une part les forces extérieures sont conservatives ou ne travaillent pas et d'autre part la puissance des forces intérieures est nulle car la distance relative entre les deux particules M_1 et M_2 est constante et égale à ℓ .

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} &= m_2 \underbrace{\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \ell^2 \dot{\theta}}_{=0} \left[\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) \sin \theta \right] \\ &= \underbrace{\mathcal{P}_{\text{int}}^{\text{ac}}}_0 + \underbrace{\mathcal{P}_{\text{ext},i,2}^{\text{nc}}}_{(M_1, M_2 = \text{cte})} = 0. \end{aligned}$$

D'où l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) \sin \theta = 0.$$

Cette équation différentielle n'est pas linéaire, elle le devient dans le cas des petites oscillations ($\sin \theta \approx \theta$) :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\omega^2 = \frac{g}{\ell} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)}$$

3. Plaçons nous maintenant dans le référentiel \mathcal{R}_1 de la particule M_1 , il n'est pas galiléen car il est en translation rectiligne non uniforme par rapport à \mathcal{R}_g .

M_1 est un point fixe dans ce référentiel puisqu'il en est l'origine. Appliquons en ce point le théorème du moment cinétique au point M_2 .

• Bilan des forces appliquées à M_2 dans ce référentiel

- le poids, $\vec{P}_2 = -m_2 g \vec{e}_z$;
- la tension exercée par la tige, $\vec{T}_2 = -T_2 \vec{e}_r$;
- la force d'inertie d'entraînement,

$$\vec{F}_{1e} = -m_2 \vec{a}(M_1/\mathcal{R}_g) = -m_2 \ddot{x} \vec{e}_x.$$

La force d'inertie de Coriolis est nulle car \mathcal{R}_1 est en translation par rapport à \mathcal{R}_g .

La droite d'action de \vec{T}_2 passant par M_1 , son moment calculé en ce point est nul.

$$\left(\frac{d\vec{L}_{M_1}(M_2/\mathcal{R}_g)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{M_1}(\vec{P}_2) + \vec{M}_{M_1}(\vec{T}_2) + \vec{M}_{M_1}(\vec{F}_{1e}).$$

Le moment cinétique de la particule M_2 est :

$$\begin{aligned} \vec{L}_{M_1}(M_2/\mathcal{R}_1) &= \vec{M}_1 \vec{M}_2 \wedge m_2 \left(\frac{d\vec{M}_1 \vec{M}_2}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} \\ &= m_2 \ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = m_2 \ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_r. \end{aligned}$$

Les moments des forces sont :

- $\vec{M}_{M_1}(\vec{P}_2) = \vec{M}_1 \vec{M}_2 \wedge m_2 \vec{g} = -m_2 g \ell \sin \theta \vec{e}_z$;
- $\vec{M}_{M_1}(\vec{F}_{1e}) = \vec{M}_1 \vec{M}_2 \wedge (-m_2 \ddot{x} \vec{e}_x) = -m_2 \ddot{x} \ell \cos \theta \vec{e}_z$.

Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$m_2 \ell^2 \dot{\theta} = -m_2 g \ell \sin \theta - m_2 \ddot{x} \ell \cos \theta \quad (1)$$

Pour obtenir une équation ne contenant que des termes en θ , dérivons l'équation suivante :

$$\dot{x} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell (-\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

En remplaçant dans l'équation (1) et après simplification, il vient :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \theta \ddot{\theta} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta.$$

Le mouvement est de faible amplitude, θ et $\dot{\theta}$ sont petits et on adopte l'approximation :

$$\sin \theta \approx \theta \text{ et } \cos \theta \approx 1.$$

On en déduit que $\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta$ est du troisième ordre devant les autres termes, négligeons-le :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \theta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\theta}.$$

On retrouve au premier ordre l'équation différentielle obtenue dans la question précédente.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \theta = 0 \quad (2)$$

Avec les conditions initiales imposées sa solution est :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right)}.$$

4. Traitons le problème dans le référentiel barycentrique non galiléen \mathcal{R}^* , θ représentant l'orientation de la tige dans ce référentiel.

La particule fictive M est caractérisée par :

- sa masse réduite : $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$;
- son vecteur position : $\vec{GM} = \vec{M}_1 \vec{M}_2 = \ell \vec{e}_\theta$;
- son vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\vec{M}_1 \vec{M}_2}{dt} = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta$.

Elle est soumise à toutes les forces appliquées à M_2 :

- la force intérieure de contact exercée par la tige : \vec{T}_2 ;
- la force extérieure à distance exercée par la Terre : $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$;

la force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie}(M_2) = -m_2 \vec{x} \ddot{\theta}$.
Le théorème du moment cinétique appliqué au mobile fictif M et calculé au point fixe G origine du référentiel \mathcal{R}^* donne :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}^*(M)}{dt} &= \vec{M}_G(\vec{P}_2) + \underbrace{\vec{M}_G(\vec{T}_2)}_{\vec{0}} + \vec{M}_G(\vec{F}_{ie}) \\ &= \vec{GM}_2 \wedge \vec{P}_2 + \vec{GM}_2 \wedge \vec{F}_{ie}, \end{aligned}$$

avec :

$$\vec{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{GM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{M}_1 \vec{M}_2.$$

En conséquence :

$$\vec{M}_G(\vec{P}_2) = \vec{GM}_2 \wedge \vec{P}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{M}_1 \vec{M}_2 \wedge \vec{P}_2$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{M}_{M_1}(\vec{P}_2)$$

$$\vec{M}_G(\vec{F}_{ie}) = \vec{GM}_2 \wedge \vec{F}_{ie} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{M}_1 \vec{M}_2 \wedge \vec{F}_{ie}$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{M}_{M_1}(\vec{F}_{ie})$$

$$\vec{L}^*(M) = \mu \vec{GM} \wedge \vec{v}$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} m_2 \vec{M}_1 \vec{M}_2 \wedge \frac{d\vec{M}_1 \vec{M}_2}{dt}$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{L}_{M_1}(M_2/\mathcal{R}_1).$$

Le théorème du moment cinétique se décompose ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{d\vec{L}_{M_1}(M_2/\mathcal{R}_1)}{dt} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{M}_{M_1}(\vec{P}_2) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{M}_{M_1}(\vec{F}_{ie}). \end{aligned}$$

En simplifiant, on retrouve l'équation obtenue dans le référentiel \mathcal{R}_1 :

$$\frac{d\vec{L}_{M_1}(M_2/\mathcal{R}_1)}{dt} = \vec{M}_{M_1}(\vec{P}_2) + \vec{M}_{M_1}(\vec{F}_{ie}).$$

Rappelons qu'il est inutile de préciser le référentiel de dérivation car les trois référentiels considérés dans ce problème sont en translation les uns par rapport aux autres.

5. Dans la situation où $m_1 \gg m_2$, le point M_1 est pratiquement immobile et la pulsation ω des oscillations de M_2 est :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Nous retrouvons l'équation du mouvement du pendule simple, tout se passe comme si M_1 était l'extrémité fixe du pendule.

Caractère galiléen approché des référentiels de la mécanique



Nous avons considéré jusqu'ici le référentiel lié à la surface de la Terre ou référentiel du laboratoire comme galiléen et, lors de l'étude du mouvement des satellites autour de la Terre, nous avons affirmé le caractère galiléen du référentiel géocentrique.

Il est temps de poser le problème de la pertinence et des limites de ces affirmations.

1 Les référentiels galiléens

1.1. Qu'est ce qu'un référentiel galiléen ?

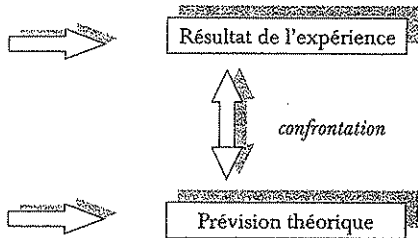
C'est le principe d'inertie qui postule l'existence d'au moins un référentiel galiléen : il existe au moins un référentiel privilégié dit galiléen (ou d'inertie) dans lequel un point matériel isolé est soit en mouvement rectiligne uniforme soit au repos.

1.2. Comment savoir si un référentiel est galiléen ?

La réponse est donnée expérimentalement. Les lois de la mécanique n'étant valables que dans les référentiels galiléens, nous dirons qu'un référentiel est galiléen si le principe fondamental de la dynamique y est applicable.

Un test expérimental est effectué sur un point matériel soumis à des actions déterminées

Le principe fondamental de la dynamique est appliqué à ce point en supposant le référentiel d'étude \mathcal{R} galiléen



C'est la comparaison entre le mouvement expérimental et le mouvement théorique déduit du principe fondamental qui permettra de conclure au caractère galiléen ou non galiléen du référentiel d'étude \mathcal{R} :

- si la confrontation est négative : les résultats expérimentaux ne sont pas en accord avec les conclusions de l'application du principe fondamental, ce désaccord est attribué à la nature non galiléenne du référentiel \mathcal{R} ;
- si la confrontation est positive : le référentiel \mathcal{R} est galiléen *pour cette expérience et à la précision que nous nous sommes accordée.*

Exemple 1 :

Preons l'exemple d'un point matériel M de masse m abandonné sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur terrestre \vec{g} . Les frottements dus à l'air sont négligés.

Dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T , l'équation horaire du mouvement de M se déduit du principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a}(M, \mathcal{R}_T) = m\vec{g}$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{OM}_0 \quad \text{ou} \quad \vec{M}_0M = \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Le mouvement de chute libre de la particule M est vertical, la verticale du lieu étant définie par la direction du champ de pesanteur \vec{g} . Ce résultat est facilement vérifié au laboratoire, le référentiel terrestre est, dans ces conditions, galiléen.

Reich reproduisit cette expérience à Freiberg (ville de latitude $\lambda = 49^\circ$) dans un puits de mine pour limiter les perturbations dues au vent : pour une hauteur de chute de 158 m, il observa une trajectoire de la particule non plus verticale, mais déviée vers l'est de 2,8 cm. Cet écart aux prévisions théoriques est mesurable pour une hauteur de chute suffisamment grande. C'est la force de Coriolis due au caractère non galiléen du référentiel terrestre qui est responsable de cette déviation.

Exemple 2 :

Avec l'hypothèse du caractère galiléen du référentiel terrestre, le principe fondamental de la dynamique appliqué au pendule simple écarté de sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse initiale à l'action de son poids et de la tension du fil prévoit un mouvement oscillatoire dans un plan fixe déterminé par les conditions initiales. Léon Foucault réalisa cette expérience le 31 mars 1851 au Panthéon (Paris - latitude $\lambda = 49^\circ$) : le fil mesurait 67 m de long et supportait une masse de 28 kg. Tout le monde pu observer la lente rotation du plan d'oscillation du pendule qui effectua un tour complet en 31 h 47 min. Cette expérience fut la première preuve expérimentale de la rotation de la Terre sur elle-même

et du caractère non galiléen du référentiel terrestre car elle permet à la force de Coriolis d'avoir le temps de s'exprimer dans un espace restreint.

En conséquence, le référentiel terrestre n'est que la réalisation approchée d'un référentiel galiléen dans l'approximation de petits mouvements ayant lieu dans de faibles intervalles de temps.

1.3. Recherche des référentiels galiléens

Supposons une particule matérielle M isolée (elle ne subit aucune interaction extérieure) en mouvement dans deux référentiels galiléens : le référentiel \mathcal{R}_g et le référentiel \mathcal{R}'_g d'origine O' . En application du principe de l'inertie, le point M est animée d'un mouvement rectiligne uniforme dans ces deux référentiels et les vecteurs vitesses $\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$ et $\vec{v}(M/\mathcal{R}'_g)$ sont des vecteurs constants. La loi de composition des vitesses donne pour la particule M :

$$\underbrace{\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)}_{\text{vecteur constant}} = \underbrace{\vec{v}(M/\mathcal{R}'_g)}_{\text{vecteur constant}} + \underbrace{\vec{v}(O'/\mathcal{R}_g)}_{\text{vitesse d'entraînement due à la translation de } \mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g} + \underbrace{\vec{\omega}(\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{O'M}}_{\text{vitesse d'entraînement due à la rotation de } \mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g}$$

En conséquence

$$\vec{v}(O'/\mathcal{R}_g) + \vec{\omega}(\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{O'M} = \underbrace{\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) - \vec{v}(M/\mathcal{R}'_g)}_{\text{vecteur constant indépendamment de la position de } M}$$

Cette propriété indépendante de la position de M se traduit par :

- $\vec{\omega}(\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$: \mathcal{R}'_g est en translation par rapport à \mathcal{R}_g ;
- $\vec{v}(O'/\mathcal{R}_g) = \vec{\text{constante}}$: cette translation est rectiligne uniforme.

Ainsi l'existence d'un référentiel galiléen implique l'existence d'une infinité de référentiels galiléens tous en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. Il suffit donc d'en connaître un seul, à partir duquel on pourra en construire une infinité : ce sera le référentiel de Copernic (présenté au paragraphe 3.1.2.).

2 Terme de marée

2.1. Champ extérieur de gravitation d'un astre

Un astre est assimilable à une boule de centre A à l'intérieur de laquelle la répartition des masses a une symétrie sphérique, sa masse volumique $\rho(r)$ ne dépend ainsi que de la distance au centre r .

Une particule d'épreuve M de masse m est soumise de la part de cet astre à la force d'interaction gravitationnelle :

$$\vec{F}_{\text{astre} \rightarrow M}^{\text{grav}} = -G \frac{M_{\text{astre}} m}{r^2} \vec{e}_r$$

$G = 6,672 \cdot 10^{-11}$ (SI) est la constante de gravitation universelle et \vec{e}_r le vecteur unitaire de direction \vec{AM} .

En isolant, dans l'équation précédente, le terme caractéristique de la particule, on fait apparaître le *champ de gravitation* créé par l'astre au point M de l'espace :

$$\vec{F}_{\text{astre} \rightarrow M}^{\text{grav}} = m \underbrace{\left[-G \frac{M_{\text{astre}}}{r^2} \vec{e}_r \right]}_{\text{champ de gravitation}} = m \vec{\mathcal{G}}_{\text{astre}}(M).$$

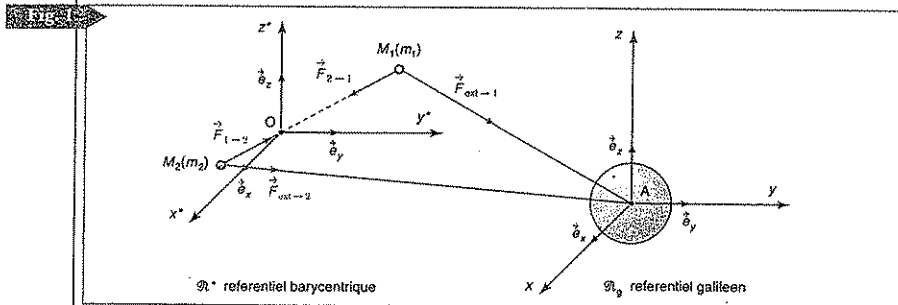
Ce champ a la même valeur que si toute la masse de l'astre était concentrée en son centre A :

$$\vec{\mathcal{G}}_{\text{astre}}(M) = -G \frac{M_{\text{astre}}}{r^2} \vec{e}_r = -G \frac{M_{\text{astre}}}{r^3} \vec{AM}$$

2.2. Système non isolé de deux points matériels en interaction gravitationnelle

2.2.1. Principe fondamental appliqué dans le référentiel barycentrique

Un système S constitué de deux points matériels M_1 et M_2 en interaction gravitationnelle, de masses respectives m_1 et m_2 est soumis au champ gravitationnel d'un astre extérieur à symétrie sphérique, de centre A et de masse M_{astre} . Le référentiel \mathcal{R}_g de cet astre est supposé galiléen. Par contre, le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* associé au système S , en translation par rapport à \mathcal{R}_g et admettant comme origine le centre de masse O du système, n'est pas galiléen car il n'est pas isolé.



Dans le référentiel barycentrique, la particule M_1 est soumise :

- à la force intérieure gravitationnelle exercée par la particule M_2 :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = m_1 \underbrace{\vec{\mathcal{G}}_{M_2}}_{\substack{\text{champ de gravitation} \\ \text{exercé par } M_2 \text{ en } M_1}}(M_1) ;$$

- à la force extérieure gravitationnelle exercée par l'astre A :

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} = m_1 \underbrace{\vec{\mathcal{G}}_A}_{\substack{\text{champ de gravitation} \\ \text{exercé par } A \text{ en } M_1}}(M_1) ;$$

- à la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{\text{ie}}(M_1) = -m_1 \left(\frac{d^2 \vec{AO}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_g} = -m_1 \vec{a}(O_{/\mathcal{R}_g}).$$

La force d'inertie de Coriolis est nulle car le référentiel barycentrique est en translation par rapport à \mathcal{R}_g .

Le théorème du centre de masse appliqué au système S dans le référentielle \mathcal{R}_g galiléen n'inclut pas les forces intérieures au système, il permet d'accéder à $\vec{a}(O/\mathcal{R}_g)$:

$$(m_1 + m_2)\vec{a}(O/\mathcal{R}_g) = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow S} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} = m_1 \underbrace{\vec{\mathcal{G}}_A(M_1)}_{\text{champ de gravitation exercé par } A \text{ en } M_1} + m_2 \underbrace{\vec{\mathcal{G}}_A(M_2)}_{\text{champ de gravitation exercé par } A \text{ en } M_2}.$$

L'expression de la force d'inertie d'entraînement est donc :

$$\vec{F}_{\text{ie}}(M_1) = -\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \vec{\mathcal{G}}_A(M_1) - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{\mathcal{G}}_A(M_2).$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule M_1 dans \mathcal{R}^* donne :

$$m_1 \vec{a}^*(M_1) = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{F}_{\text{ie}}(M_1);$$

$$m_1 \vec{a}^*(M_1) = m_1 \vec{\mathcal{G}}_{M_2}(M_1) + m_1 \vec{\mathcal{G}}_A(M_1) - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \vec{\mathcal{G}}_A(M_1) - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{\mathcal{G}}_A(M_2).$$

L'équation obtenue après simplification fait apparaître le *terme différentiel de marée* dû à l'influence de l'astre A sur le mouvement de M_1 dans le référentiel barycentrique :

$$\vec{a}^*(M_1) = \vec{\mathcal{G}}_{M_2}(M_1) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underbrace{[\vec{\mathcal{G}}_A(M_1) - \vec{\mathcal{G}}_A(M_2)]}_{\text{terme de gravitation différentielle ou terme de « marée »}.$$

Le *terme de marée* $\vec{\delta}_A$ représente l'écart au comportement galiléen de \mathcal{R}^* dû à la présence de l'astre A :

$$\vec{\delta}_A = \vec{\mathcal{G}}_A(M_1) - \vec{\mathcal{G}}_A(M_2)$$

Le référentiel barycentrique est assimilé à un référentiel galiléen dans la région de l'espace où $\vec{\mathcal{G}}_A$ est quasiment uniforme.

2.2.2. Expression du terme de marée dans le cas particulier important : $m_2 \gg m_1$

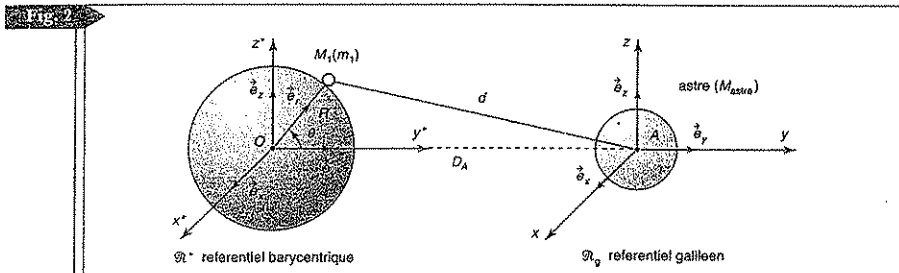
Dans cette situation, M_2 est en O et $\frac{m_2}{m_1 + m_2} \approx 1$.

L'équation du mouvement de M_1 dans \mathcal{R}^* devient :

$$\vec{a}^*(M_1) = \vec{\mathcal{G}}_O(M_1) + \underbrace{[\vec{\mathcal{G}}_A(M_1) - \vec{\mathcal{G}}_A(O)]}_{\text{terme lié au caractère non galiléen de } \mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{G}}_O(M_1) + \vec{\delta}_A(M_1)$$

Pour évaluer l'importance du terme de marée, nous allons nous placer dans la situation où la particule M_1 est à proximité de O avec l'hypothèse (figure 2) :

$$OA = D_A \gg R.$$



Le terme de marée s'écrit :

$$\vec{\delta}_A(M_1) = \vec{\mathcal{G}}_A(M_1) - \vec{\mathcal{G}}_A(O) = G \frac{M_{\text{astre}}}{d^3} \vec{M}_1 A - G \frac{M_{\text{astre}}}{D_A^2} \vec{z}_y.$$

Or $\vec{M}_1 A = \vec{OA} - \vec{OM}_1 = D_A \vec{z}_y - R \vec{z}_r$

En élevant cette expression au carré :

$$d^2 = D_A^2 + R^2 - 2D_A R \underbrace{\vec{z}_y \cdot \vec{z}_r}_{\cos \theta} = D_A^2 \left(1 - 2 \frac{R}{D_A} \cos \theta + \frac{R^2}{D_A^2} \right);$$

d'où :
$$\frac{1}{d^3} = \frac{1}{D_A^3} \left(1 - 2 \frac{R}{D_A} \cos \theta + \frac{R^2}{D_A^2} \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

En ne conservant que les termes du premier ordre en $\frac{R}{D_A}$ du développement limité, on obtient :

$$\frac{1}{d^3} \approx \frac{1}{D_A^3} \left(1 + 3 \frac{R}{D_A} \cos \theta \right).$$

En remplaçant dans le terme de marée :

$$\vec{\delta}_A(M_1) \approx G \frac{M_{\text{astre}}}{D_A^3} \left(1 + 3 \frac{R}{D_A} \cos \theta \right) (D_A \vec{z}_y - R \vec{z}_r) - G \frac{M_{\text{astre}}}{D_A^2} \vec{z}_y$$

$$\vec{\delta}_A(M_1) = G \frac{M_{\text{astre}} R}{D_A^3} \left[3 \cos \theta \vec{z}_y - \left(1 + 3 \frac{R}{D_A} \cos \theta \right) \vec{z}_r \right]$$

terme négligeable
devant 1

Ainsi :

$$\vec{\delta}_A(M_1) = G \frac{M_{\text{astre}} R}{D_A^3} (3 \cos \theta \vec{z}_y - \vec{z}_r)$$

Commentaires :

- (i) Le terme de marée est en $\frac{1}{D_A^3}$, il est beaucoup plus faible que le champ de gravitation de l'astre en $\frac{1}{D_A^2}$.

- (ii) Le référentiel barycentrique peut être assimilé à un référentiel galiléen lorsque :

$$\|\vec{\delta}_A(M_1)\| \ll \|\vec{\mathcal{G}}_O(M_1)\|.$$

(iii) La valeur maximale du terme de marée est obtenue pour $\theta = 0$, elle correspond à $\vec{z}_y = \vec{z}_r$:

$$[\delta_A]_{\max} \approx 2 \frac{GM_{\text{astre}} R}{D_A^3}$$

3 Les référentiels usuels de la mécanique newtonienne

3.1. Les référentiels en astronomie

3.1.1. Le référentiel de Kepler ou référentiel héliocentrique

Le référentiel de Kepler \mathcal{R}_K est défini par :

- son origine S située au centre de masse du Soleil,
- ses trois axes Sx_K, Sy_K, Sz_K dirigés vers trois étoiles suffisamment éloignées du système solaire pour être considérées comme *fixes*.

Ce référentiel permet l'étude des mouvements d'objets dans le système solaire.

3.1.2. Le référentiel de Copernic

Le référentiel de Copernic \mathcal{R}_C est une amélioration du référentiel de Kepler, il est défini par :

- son origine C située au centre de masse du système solaire ;
- ses trois axes Cx_C, Cy_C, Cz_C parallèles à ceux du référentiel de Kepler \mathcal{R}_K .

Le référentiel de Kepler est en translation par rapport au référentiel de Copernic, mais la masse du Soleil est si importante (elle représente 99,97 % de la masse du système solaire) que l'on peut considérer le centre de masse C du système solaire quasiment confondu avec le centre S du Soleil.

Nous confondrons dans ce qui suit le référentiel de Kepler et le référentiel de Copernic.

Des observations astronomiques ont révélé le mouvement rectiligne uniforme d'une météorite suffisamment éloignée pour être isolée des autres planètes du système solaire : le référentiel de Copernic est galiléen avec une excellente précision.

a. Caractère galiléen du référentiel de Copernic

Le référentiel \mathcal{R}^* est le référentiel du système {Soleil - point matériel M_1 } confondu avec le référentiel de Copernic car la masse de M_1 est très négligeable devant celle du Soleil.

$$\vec{x}^*(M_1) = \underbrace{\vec{\mathcal{G}}_O(M_1)}_{\text{champ de gravitation du Soleil}} + \underbrace{\vec{\delta}_{\text{galaxie}}(M_1)}_{\text{terme lié à la présence de la galaxie rendant } \mathcal{R}^* \text{ non galiléen}}$$

Comparons le terme de marée dû à la galaxie dont le centre de masse se situe au point A avec le champ de gravitation créé par le Soleil en un point M_1 situé au voisinage de la Terre de centre de masse T (figure 2) :

Remarque

$\|\vec{OM}_1\| \approx \|\vec{OT}\|$ car le rayon de la Terre est négligeable devant la distance Soleil - Terre notée R .

$$\begin{cases} \|\vec{OA}\| = D_{\text{galaxie}} \\ \|\vec{OM}_1\| \approx \|\vec{OT}\| = R \end{cases}$$

Le terme de marée est alors :

$$\delta_{\text{galaxie}} = 2 \frac{GM_{\text{galaxie}} R}{D_{\text{galaxie}}^3}$$

Il est à comparer avec le champ de gravitation dû au Soleil en un point du voisinage de la Terre :

$$\mathcal{G}_{\text{Soleil}}(T) = G \frac{M_{\text{Soleil}}}{R^2}$$

Le rapport de ces deux grandeurs donne :

$$\frac{\delta_{\text{galaxie}}}{\mathcal{G}_{\text{Soleil}}(T)} \approx 2 \frac{M_{\text{galaxie}}}{M_{\text{Soleil}}} \left(\frac{R}{D_{\text{galaxie}}} \right)^3$$

En prenant pour valeurs :

$$M_{\text{galaxie}} \approx 2,6 \cdot 10^{41} \text{ kg}; \quad M_{\text{Soleil}} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}; \quad D_{\text{galaxie}} \approx 2,8 \cdot 10^{20} \text{ m}; \quad R \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

Le rapport donne :

$$\frac{\delta_{\text{galaxie}}}{\mathcal{G}_{\text{Soleil}}(T)} \approx 4 \cdot 10^{-17}$$

Il est le meilleur référentiel galiléen du système solaire sur lequel peut s'appuyer tout le développement des lois de la mécanique. À partir du référentiel de Copernic, utilisé comme référentiel galiléen de base, se construisent une infinité de référentiels en translation rectiligne uniforme.

b. Application du théorème du centre de masse à la Terre dans le référentiel de Copernic galiléen

$$M_T \vec{a}(T/\mathcal{R}_C) = M_T \sum_i \vec{\mathcal{G}}_{A_i}(T)$$

$\vec{\mathcal{G}}_{A_i}(T)$ est le champ de gravitation des astres A_i du système solaire au centre de masse T de la Terre. Comparons l'influence de ces astres sur le mouvement de la Terre :

	Soleil	Lune	Vénus	Mars	Jupiter
$\mathcal{G}_{A_i}(T) (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	$1 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{-7}$

Avec une approximation inférieure à 1 %, le mouvement de la Terre dans le système solaire est principalement dû à la présence du Soleil.

3.2. Le référentiel géocentrique

Le référentiel de Copernic est mal adapté pour étudier le mouvement d'un objet au voisinage de sa surface de la Terre, on lui préférera le référentiel géocentrique.

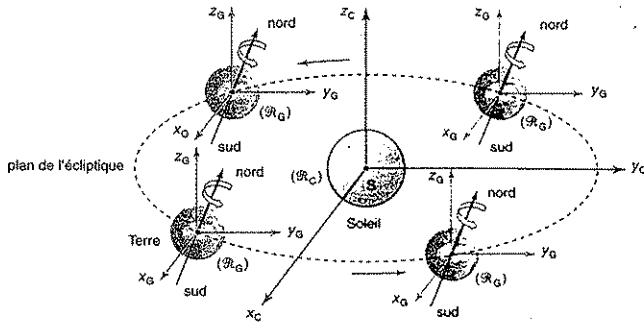
Le référentiel géocentrique \mathcal{R}_C est défini par :

- son origine T située au centre de masse de la Terre ;
- ses trois axes Tx_C, Ty_C, Tz_C parallèles à ceux du référentiel de Copernic \mathcal{R}_C ;

$$\vec{\Omega}_{\text{ent}(\mathcal{R}_C/\mathcal{R}_C)} = \vec{0}$$

Il est en translation quasi-circulaire de rayon $ST \approx 1,5 \cdot 10^{11}$ m par rapport au référentiel de Copernic et n'est donc pas rigoureusement galiléen. Sa période de révolution est de 365,25 jours (soit une année), sa trajectoire est plane, ce plan est appelé écliptique.

Évolution de la Terre autour du Soleil dans le référentiel de Copernic



3.2.1. Caractère galiléen approché du référentiel géocentrique

Pour évaluer le caractère galiléen du référentiel géocentrique, nous allons considérer l'influence des deux astres, le Soleil et la Lune, dont le champ de gravitation est le plus élevé au voisinage de la Terre.

Nous allons comparer terme de marée et champ de gravitation pour les deux astres à partir des données suivantes :

$$D_{\text{Lune}} \approx 384\,000 \text{ km} ; \quad D_{\text{Soleil}} \approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ km} ; \quad R_T \approx 6\,400 \text{ km}$$

$$M_{\text{Lune}} \approx 7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg} ; \quad M_{\text{Soleil}} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} ; \quad M_{\text{Terre}} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$\frac{\delta_{\text{Soleil}}}{g_{\text{Terre}}(M_1)} \approx 2 \frac{M_{\text{Soleil}}}{M_{\text{Terre}}} \left(\frac{R_T}{D_{\text{Soleil}}} \right)^3 \approx 5,2 \cdot 10^{-8}$$

$$\frac{\delta_{\text{Lune}}}{g_{\text{Terre}}(M_1)} \approx 2 \frac{M_{\text{Lune}}}{M_{\text{Terre}}} \left(\frac{R_T}{D_{\text{Lune}}} \right)^3 \approx 1,1 \cdot 10^{-7}$$

Dans le domaine de la dynamique terrestre, le référentiel géocentrique est remarquablement galiléen, on ne considère que le champ de gravitation de la Terre.

Si on considère un point à une distance $R = 50 R_T$ du centre de masse T de la Terre :

$$\frac{\delta_{\text{Soleil}}}{g_{\text{Terre}}(M_1)} \approx 2 \frac{M_{\text{Soleil}}}{M_{\text{Terre}}} \left(\frac{R}{D_{\text{Soleil}}} \right)^3 \approx 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ (0,65 \%)}.$$

$$\frac{\delta_{\text{Lune}}}{g_{\text{Terre}}(M_1)} \approx 2 \frac{M_{\text{Lune}}}{M_{\text{Terre}}} \left(\frac{R}{D_{\text{Lune}}} \right)^3 \approx 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ (1,4 \%)}.$$

Le référentiel géocentrique peut encore être considéré comme galiléen avec une bonne approximation.

3.2.2. Marées océaniques

À la surface de la Terre, l'influence lunaire est prépondérante :

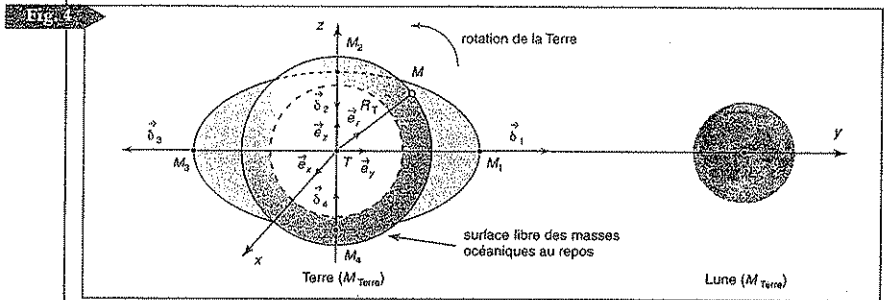
$$\frac{\delta_{\text{Lune}}}{\delta_{\text{Soleil}}} \approx 2,1.$$

Pour simplifier, la Lune est supposée fixe dans le référentiel géocentrique et située dans le plan équatorial. Le terme différentiel de marée représentant l'action de la Lune est la différence entre le champ gravitationnel en un point M de la surface du globe terrestre et le champ gravitationnel au centre de masse T de la Terre :

$$\vec{\delta}_{\text{Lune}} = \vec{g}_{\text{Lune}}(M) - \vec{g}_{\text{Lune}}(T) = G \frac{M_{\text{Lune}} R_T}{D_{\text{Lune}}^3} (3 \cos \theta \vec{e}_y - \vec{e}_z).$$

Nous venons de le voir, ce terme est en général négligé. Il est néanmoins responsable des marées océaniques du fait de l'énormité des masses d'eau mises en jeu. Déterminons son expression en différents points de la surface de la Terre :

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
	$\vec{e}_r = \vec{e}_y$	$\vec{e}_r = \vec{e}_z$	$\vec{e}_r = -\vec{e}_y$	$\vec{e}_r = -\vec{e}_z$
$\vec{\delta}_{\text{Lune}}$	$\vec{\delta}_1 = 2G \frac{M_{\text{Lune}} R_T}{D_{\text{Lune}}^3} \vec{e}_y$	$\vec{\delta}_2 = G \frac{M_{\text{Lune}} R_T}{D_{\text{Lune}}^3} \vec{e}_z$	$\vec{\delta}_3 = -2G \frac{M_{\text{Lune}} R_T}{D_{\text{Lune}}^3} \vec{e}_y$	$\vec{\delta}_4 = -G \frac{M_{\text{Lune}} R_T}{D_{\text{Lune}}^3} \vec{e}_z$



La présence de ce terme de marée modifie localement la force de gravité ressentie à la surface de la Terre et agit sur les masses liquides facilement déformables des océans :

- le phénomène est répulsif en M_1 et M_3 : ceci se traduit par deux bourrelets océaniques correspondant à des marées hautes ;
- le phénomène est attractif en M_2 et M_4 : le terme de marée y est minimal et correspond aux marées basses.

La Terre tournant autour d'elle-même en 24 heures, il y a une marée haute toutes les 12 heures. L'action du Soleil n'est que deux fois moins importante que celle de la Lune et tend elle aussi à constituer deux bourrelets océaniques. Les actions de ces deux astres peuvent donc, en fonction de leurs positions relatives, s'ajouter en créant des marées plus importantes ou se contrarier en créant des marées plus faibles :

- lorsque le Soleil, la Lune et la Terre sont alignés les marées ont une grande amplitude (marées de vives eaux) à cause de l'effet cumulatif des actions gravitationnelles des deux astres ;
- lorsque le Soleil, la Lune et la Terre forment un angle droit les effets se contrarient et les marées sont faibles (marées de mortes eaux).

3.3. Le référentiel terrestre

Le référentiel naturel d'étude pour les expériences de mécanique effectuées sur la Terre ou au laboratoire est le référentiel terrestre \mathcal{R}_T mieux adapté que le référentiel géocentrique.

Par rapport au référentiel de Copernic, le mouvement de la Terre est la composition :

- du mouvement de révolution de son centre de masse T autour du centre de masse S du Soleil (période 1 année) ;
- du mouvement de rotation propre autour de l'axe des pôles (période 24 h) :

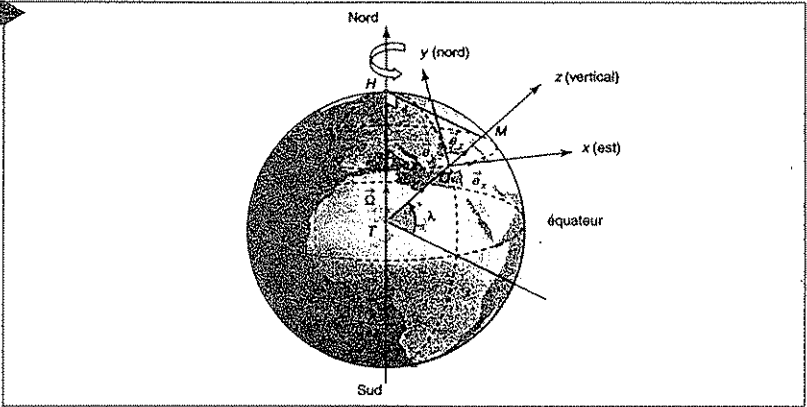
$$\vec{\Omega}_{\text{ent}}(\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C) = \vec{\Omega}.$$

Le référentiel terrestre n'est pas galiléen.

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est lié au point origine O de latitude λ sur la surface de la Terre et muni de la base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ telle que :

- \vec{e}_x est orienté vers l'est ;
- \vec{e}_y est orienté vers le nord ;
- \vec{e}_z est à la verticale du point O .

Fig.



3.3.1. Expression du principe fondamental dans le référentiel terrestre non galiléen

Le référentiel terrestre est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Un objet ponctuel M de masse m est soumis à la force d'attraction gravitationnelle de la Terre (l'action des autres astres est négligée) et à la résultante \vec{F}_a des autres forces appliquées. L'expression du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel \mathcal{R}_T non galiléen prend aussi en compte les forces d'inerties :

$$m \vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{F}_a + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}.$$

H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation de la Terre et en prenant en compte la rotation uniforme de la Terre :

$$m \vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{F}_a + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) + m \Omega^2 \overrightarrow{HM} - 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T).$$

3.3.2. Définition expérimentale du poids d'un corps

Le poids \vec{P} d'un corps ou force de pesanteur est défini expérimentalement comme l'opposé de la force qui le maintient en équilibre dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T .

Le point matériel est suspendu à un fil, le poids est la force qui compense la tension \vec{T} du fil :

$$\underbrace{\vec{P}}_{\text{poids}} = -\vec{T}.$$

Le principe fondamental donne :

$$m \underbrace{\vec{a}(M/\mathcal{R}_T)}_{\vec{0}} = \vec{T} + m \underbrace{\vec{\mathcal{G}}_T(M)}_{\vec{0}} + m \Omega^2 \overrightarrow{HM} - 2m \vec{\Omega} \wedge \underbrace{\vec{v}(M/\mathcal{R}_T)}_{\vec{0}};$$

$$\underbrace{\vec{P}}_{\text{force de pesanteur}} = \underbrace{m \vec{\mathcal{G}}_T(M)}_{\text{attraction gravitationnelle terrestre}} + \underbrace{m \Omega^2 \overrightarrow{HM}}_{\text{force d'inertie d'entraînement}}.$$

Le poids d'un corps est la résultante de l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre et de la force axifuge d'inertie d'entraînement due au mouvement de rotation propre de la Terre.

Conséquence : relation fondamentale de la dynamique simplifiée

Pour un point matériel M en mouvement dans le référentiel terrestre, on écrit la relation fondamentale de la dynamique sous la forme :

$$m \vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{P}_a + m \vec{g}(M) - 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T).$$

le poids contient
le terme d'inertie
d'entraînement

Attention

On ne tient compte que de la force d'inertie de Coriolis, car la force d'inertie d'entraînement est déjà prise en compte dans le poids.

3.3.3. Champ de pesanteur terrestre

Le champ de pesanteur terrestre est défini par la relation :

$$\vec{P} = m \vec{g}.$$

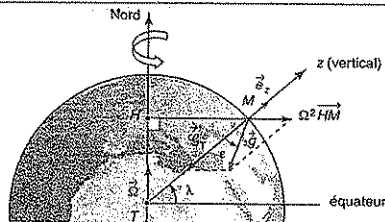
force de pesanteur champ de pesanteur

Ainsi :

$$\vec{g} = \underbrace{\vec{\mathcal{G}}_T(M)}_{\text{champ de gravitation}} + \underbrace{\Omega^2 \overrightarrow{HM}}_{\text{terme axifuge d'entraînement}}.$$

Si la Terre est supposée sphérique, le champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}_T(M)$ est dirigé en tout point M vers son centre T . En revanche, le champ de pesanteur \vec{g} , dont la direction est matérialisée par celle du fil à plomb, n'est pas dirigé vers le centre de la Terre à cause du terme axifuge dû à la rotation propre de la Terre.

FIG. 3



Remarque

Dans les chapitres précédents, en première approximation et en supposant le référentiel terrestre galiléen, nous avons assimilé champ de gravitation et champ de pesanteur. Même si, pratiquement, les effets sont faibles, leur distinction est importante théoriquement car elle met en évidence la rotation de la Terre.

3.3.4. Caractère galiléen approché du référentiel terrestre

a. Importance du terme axifuge

La contribution axifuge au champ de pesanteur dépend de la latitude λ , elle est maximale à l'équateur :

$$\Omega^2 R_T = (7,3 \cdot 10^{-5})^2 \times 6,4 \cdot 10^6 \approx 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

• Les mesures expérimentales de g fournissent diverses valeurs de g en fonction de la latitude, elles sont comprises entre $9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ aux pôles et $9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ à l'équateur. Pour un champ de pesanteur g moyen de l'ordre de $g \approx 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, l'écart relatif entre les valeurs du champ de pesanteur et du champ de gravitation est :

$$\frac{\Omega^2 R_T}{g} \approx 0,35 \text{ \%}.$$

• L'écart, maximum entre la verticale terrestre et la direction au centre de la Terre est inférieur à $6'$.

Négliger l'influence du terme axifuge correspondant à la force d'inertie d'entraînement revient à substituer à la force de gravitation la notion de poids et à considérer le champ \vec{g} radial avec une approximation inférieure à $0,5 \text{ \%}$.

b. Importance de la force de Coriolis

L'équation du mouvement de M dans \mathcal{R}_T est :

$$m \vec{a}(M_{/\mathcal{R}_T}) = \vec{F}_a + m \vec{g} - 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M_{/\mathcal{R}_T}).$$

La force d'inertie de Coriolis a une norme maximale $2m\Omega v_{\text{rel}}$.

• Si la force de Coriolis est dirigée selon la verticale, elle est à comparer à la force de pesanteur mg . Considérons dans quelle mesure elle n'excède pas 1 \% du poids :

$$\frac{F_{ic}}{mg} = \frac{2\Omega v_{\text{rel}}}{g} < \frac{1}{100}.$$

À la limite des 1 \% , la force de Coriolis est négligeable si :

$$v_{\text{rel}} < \frac{g}{200\Omega} = \frac{9,8}{200 \times 7,3 \cdot 10^{-5}} \approx 700 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2\,500 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

L'influence de la force d'inertie de Coriolis est donc très faible même pour une vitesse du mobile élevée.

• Si la force de Coriolis est dirigée selon l'horizontale, elle doit être comparée à la composante horizontale de la force appliquée \vec{F}_a .

Analyse dimensionnelle

Pendant la durée T , le corps M se déplace d'une longueur caractéristique L à la vitesse v :

$$v = \frac{L}{T}.$$

Tout au long de son mouvement, c'est-à-dire pendant la durée caractéristique T , le corps M est soumis à la force de Coriolis qui provoque une modification de sa trajectoire dont la déviation est L_{cor} . Cette longueur est obtenue par l'analyse dimensionnelle de l'accélération de Coriolis $\vec{a}_{\text{cor}} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$:

$$\frac{L_{\text{cor}}}{T^2} \approx \Omega v.$$

Or Ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles et dimensionnellement elle est liée à sa période de rotation $T_{\text{rot}} = 24 \text{ h}$ par :

$$\Omega \approx \frac{1}{T_{\text{rot}}}.$$

En conséquence :

$$\frac{L_{\text{cor}}}{L} = \frac{T}{T_{\text{rot}}}$$

L'influence de la force de Coriolis est négligeable sur le mouvement d'un corps si la déviation qu'il provoque est négligeable devant la longue caractéristique du déplacement du corps. Autrement dit, si $T \ll T_{\text{rot}}$.

Le référentiel terrestre peut donc être considéré galiléen avec une bonne approximation pour l'étude de phénomènes ayant lieu à la surface de la Terre et de durée très inférieure à la période propre de révolution de la Terre (soit 24 h).

Les effets de Coriolis sont relativement faibles, mais ils peuvent être mis en évidence en effectuant des mesures suffisamment fines et joue un rôle très important à l'échelle planétaire dans l'écoulement de fluides tels que l'atmosphère ou les océans.

Avant la colle

Tester ses connaissances

> Corrigés p. 383

- 1 Les référentiels de la Terre et de la Lune sont supposés galiléens. L'indication d'une pesée sur la Terre donne 75 kg. Quelle serait l'indication d'une même pesée sur la Lune ?

Données :

$$M_{\text{Terre}} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}; \quad M_{\text{Lune}} \approx 7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

$$R_T \approx 6\,380 \text{ km}; \quad R_{\text{Lune}} \approx 1\,738 \text{ km}.$$

- a. 450 kg b. 75 kg c. 12,5 kg

- 2 Le référentiel terrestre est supposé galiléen. À quelle altitude h faut-il s'élever pour avoir une variation relative du champ de pesanteur terrestre de 0,5 %. Données : $R_T = 6\,400 \text{ km}$.

- a. $h = 16 \text{ m}$ c. $h = 1,6 \text{ km}$

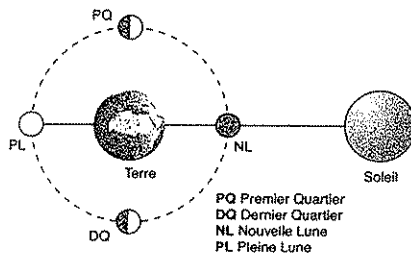
- b. $h = 160 \text{ m}$ d. $h = 16 \text{ km}$

- 3 Le rayon de la Terre est $R_T = 6\,400 \text{ km}$ et le champ de pesanteur terrestre est $g_0 = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ alors que celle-ci tourne autour de l'axe des pôles avec la vitesse angulaire $\Omega_0 = 7,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Il y aurait impesanteur à l'équateur, c'est-à-dire $\vec{g} = \vec{0}$, si la Terre tournait :

- a. 5 fois plus vite. c. 17 fois plus vite.

- b. 12 fois plus vite. d. 24 fois plus vite.

- 4 Pour quelles positions de la Lune avons-nous les marées de plus grande amplitude ?



- a. NL b. PL

- c. PQ d. DQ

- 5 Les tourbillons atmosphériques tels que les dépressions et les anticyclones ont des tailles de l'ordre de 1 000 km et la vitesse des vents avoisine $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. L'influence de la force d'inertie de Coriolis a une influence majeure dans la formation de ces tourbillons.

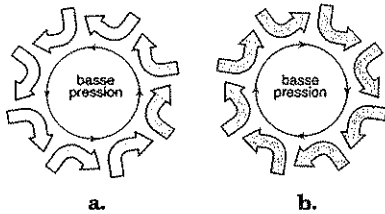
- a. Vrai b. Faux

- 6 Le tourbillon qui se forme au-dessus du siphon d'un lavabo (de taille $L = 10 \text{ cm}$) lors de l'écoulement de l'eau (à la vitesse

$v = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$) tourne dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère Sud, dans le sens contraire dans l'hémisphère Nord. C'est la force d'inertie de Coriolis qui est à l'origine de ce phénomène.

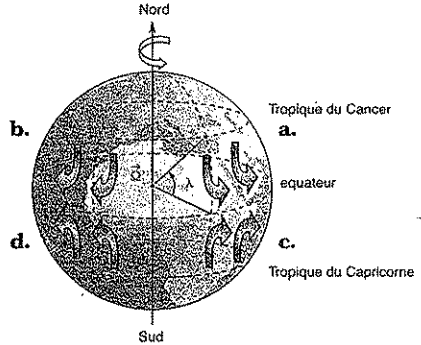
- a. Vrai b. Faux

7 Lorsqu'il se forme une dépression dans l'Atlantique Nord les vents qui arrivent pour combler cette dépression sont déviés sans parvenir au centre de la dépression. Dans quel sens tourbillonne le cyclone ainsi constitué ?



8 Les alizés sont des vents qui soufflent des tropiques vers l'équateur. Ils sont déviés par la force de Coriolis

- a. Dans l'hémisphère Nord vers l'Est.
 b. Dans l'hémisphère Nord vers l'Ouest.
 c. Dans l'hémisphère Sud vers l'Est.
 d. Dans l'hémisphère Sud vers l'Ouest.



Savoir appliquer le cours

> Corrigés p. 385

1 (PCSI) La Terre, supposée sphérique et de rayon $R_T = 6400 \text{ km}$, tourne autour de l'axe Nord-Sud à la vitesse angulaire $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

En un point de latitude λ à la surface de la Terre, une particule matérielle M de masse m est à l'équilibre, suspendue à un fil. Montrer que l'intensité du champ de pesanteur \vec{g} dépend de la latitude λ et peut se mettre sous la forme :

$$g(\lambda) = g_E(1 + a \sin^2 \lambda).$$

Préciser la signification de g_E et calculer a . En ne conservant que les termes du premier ordre en Ω , à quelle latitude λ l'angle ε que fait la verticale du lieu avec la direction du

champ de gravitation est-elle maximale ? Calculer ε_{\max} .

Données : $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et

$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ (S.I.)}$.

$M_{\text{Terre}} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_T \approx 6380 \text{ km}$;

2 Un mobile glisse sans frottement avec une vitesse $v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ sur une table horizontale dans un laboratoire à la latitude $\lambda = 45^\circ$. Montrer que sa trajectoire est circulaire et préciser son rayon R_C . $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Peut-on considérer le référentiel du laboratoire galiléen pour ce type d'expérience.

Déviations vers l'Est de la chute libre

L'étude est réalisée dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ en un lieu de latitude λ . L'axe (Ox) , tangent au parallèle, est dirigé vers l'Est, (Oy) tangent au méridien, est dirigé vers le Nord et (Oz) est la verticale du lieu.

La vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe Sud-Nord est

$$\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La résistance de l'air est négligeable et le champ de pesanteur supposé uniforme :

$$\vec{g} = -g\vec{e}_z.$$

Une particule M de masse m est en chute libre, abandonnée sans vitesse initiale à partir d'un point A situé à une hauteur h au-dessus du sol.

- 1 Effectuer le bilan des forces appliquées au point M dans le référentiel terrestre.
- 2 Montrer que dans l'hémisphère Nord, au premier ordre près en Ω , la particule est déviée par rapport à la verticale d'une quantité x_1 vers l'Est.
- 3 Montrer que dans l'hémisphère Nord, au second ordre près en Ω , la particule est déviée par rapport à la verticale d'une quantité y_1 vers le Sud et d'une quantité x_1 vers l'Est. Qu'en est-il dans l'hémisphère Sud ?
Exprimer les déviations x_1 et y_1 à l'arrivée au sol en fonction de Ω , h , λ et g .
- 4 Calculer x_1 et y_1 pour $h = 158 \text{ m}$ et $\lambda = 49^\circ$. On prendra $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Était-il nécessaire de prendre en compte la déviation vers le Sud ?

résolution méthodique

Reprenons l'étude systématique d'un problème de mécanique.

- [1] Définir le système M étudié.
- [2] Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre non galiléen \mathcal{R}_T .
- [3] Effectuer le bilan des forces appliquées au système.

Le référentiel terrestre n'étant pas galiléen, il faut prendre en compte les forces d'inerties. La force axifuge étant incluse dans le poids de la particule M , seule la force d'inertie de Coriolis doit être prise en compte.

- [4] Expression du principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans \mathcal{R}_T .

Le principe fondamental de la dynamique est écrit ici sous sa forme simplifiée :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \underbrace{\vec{F}_a}_{\substack{\text{forces appliquées} \\ \text{autres que le poids}}} + \underbrace{m\vec{g}(M)}_{\substack{\text{le poids contient le terme} \\ \text{d'inertie d'entraînement}}} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}$$

Dans ce problème de chute libre : $\vec{F}_a = \vec{0}$.

Le système est le point matériel M .

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre en rotation par rapport au référentiel géocentrique galiléen, c'est un référentiel non galiléen.

Bilan des forces appliquées au point M :

- le poids \vec{P} exercé par la Terre : $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$;
- la force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic}(M) = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T)$.

La force d'inertie d'entraînement est prise en compte dans le poids de la particule.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans \mathcal{R}_T est :

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{P} + \vec{F}_{ic} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T).$$

Le mouvement de M est indépendant de sa masse, les frottements de l'air étant négligés :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T).$$

2

[5] Projeter les vecteurs dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ liée au référentiel terrestre.

Attention : il faut projeter le vecteur rotation de la Terre dans cette base. Pour « voir » les angles, utilisez un schéma représentatif tel que celui indiqué ci-dessous. Orientez tous les angles pour qu'ils soient positifs et, de préférence, faites en sorte que leurs valeurs soient inférieures à $\frac{\pi}{2}$.

[6] Détermination des équations du mouvement.

Le système étant à trois degrés de liberté, le caractère vectoriel du principe fondamental de la dynamique permet d'obtenir trois équations différentielles linéaires mais couplées. Pour obtenir une solution approchée, nous allons appliquer une *méthode de perturbation* : on suppose que la force perturbatrice, ici la force de Coriolis, engendre de faibles modifications du mouvement. En effet la très faible valeur de Ω minimise l'influence de la rotation de la Terre : les termes en Ω sont des infiniment petits du premier ordre et les termes en Ω^2 des infiniment petits du second ordre.

Le problème considère que le champ de pesanteur est orienté vers le centre T de la Terre, or celui-ci s'exprime de la façon suivante :

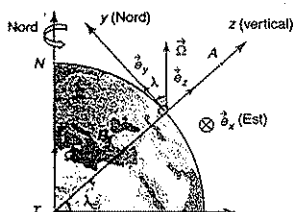
$$\vec{g} = \vec{g}_T(M) + \Omega^2 \vec{HM}$$

champ de pesanteur
champ de gravitation
terme aérostatique d'équilibre

Le champ de pesanteur est donc assimilé au champ de gravitation et l'approximation adoptée néglige les termes en Ω^2 .

Les grandeurs cinétiques du point M sont :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad \vec{v}(M/\mathcal{R}_T) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \quad \vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$



Le vecteur vitesse rotation d'entraînement du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique est :

$$\vec{\Omega} = \Omega \cos \lambda \vec{e}_y + \Omega \sin \lambda \vec{e}_z.$$

Exprimons les forces appliquées à M dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

• La force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{ic}(M) = -2m\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -2m\Omega \begin{pmatrix} \dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda \\ \dot{x} \sin \lambda \\ -\dot{x} \cos \lambda \end{pmatrix}.$$

• Le poids de M : $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M dans \mathcal{R}_T et projeté dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ donne :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2\Omega \begin{pmatrix} \dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda \\ \dot{x} \sin \lambda \\ -\dot{x} \cos \lambda \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi un système de trois équations différentielles :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\Omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} = -2\Omega \dot{x} \sin \lambda & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{z} = -g + 2\Omega \dot{x} \cos \lambda & (3) \end{cases}$$

Plaçons-nous à l'ordre 0 en considérant que l'effet de la force de Coriolis est négligeable sur le mouvement de M . Déduisons alors une expression approchée de la vitesse instantanée du système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \Rightarrow \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_T} = \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases}.$$

Exprimons la force de Coriolis en utilisant le vecteur vitesse établi :

$$\vec{F}_{ic}(M) = -2m\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix} = -2m\Omega \begin{pmatrix} -\cos \lambda gt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le principe fondamental de la dynamique de la dynamique donne maintenant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega \cos \lambda gt & (1') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} = 0 & (2') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{z} = -g & (3') \end{cases}$$

Le mouvement du mobile selon \vec{e}_x apparaît.

L'équation (3') donne par intégrations successives par rapport à t et compte tenu des conditions initiales :

$$\dot{z} = -gt \quad \text{et} \quad \dot{z} = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

L'équation (2') :

$$\dot{y} = 0 \quad \text{et} \quad y = 0$$

L'équation (1') :

$$\dot{x} = g\Omega \cos\lambda t^2$$

Intégration :

$$x(t) = \frac{1}{3}g\Omega \cos\lambda t^3$$

L'abscisse x indiquant l'Est, la particule est déviée dans cette direction au premier ordre en Ω et quel que soit l'hémisphère puisque l'expression est indépendante du signe de λ . La faible valeur de Ω justifie la méthode des perturbations car la déviation est négligeable devant la longueur caractéristique du phénomène : 158 m.

3

Pour affiner la précision de nos résultats, résolvons directement le système des équations (1), (2) et (3). Nous négligerons les termes en Ω^2 .

L'intégration de l'équation (2) donne : $\dot{y} = -2\Omega x \sin\lambda$ (4)

L'intégration de (3) : $\dot{z} = -gt + 2\Omega x \cos\lambda$.

Reportons ces résultats dans l'équation (1) :

$$\ddot{x} = -2\Omega [(-gt + 2\Omega x \cos\lambda) \cos\lambda + 2\Omega x \sin^2\lambda].$$

En développant :

$$\ddot{x} = 2\Omega \cos\lambda gt - 4\Omega^2 x.$$

Le terme en Ω^2 est négligé :

$$\ddot{x} = 2\Omega \cos\lambda gt.$$

La déviation vers l'Est est obtenue à nouveau :

$$x(t) = \frac{1}{3}g\Omega \cos\lambda t^3$$

L'intérêt, *a priori*, de cette méthode est que la déviation est accessible en remplaçant x dans l'équation (4) :

$$\dot{y} = -\frac{1}{3}\Omega^2 \sin(2\lambda)gt^3.$$

Intégration :

$$y(t) = -\frac{1}{12}\Omega^2 \sin(2\lambda)gt^4$$

Il s'agit d'une déviation vers le Sud pour une chute libre dans l'hémisphère Nord et vers le Nord pour l'hémisphère Sud. Cette déviation est beaucoup plus faible que la déviation vers l'Est car elle est en Ω^2 . Elle ne sera pas mesurable.

De la même façon, on obtient $z(t)$: $\dot{z} = -gt + \frac{2}{3}\Omega^2 \cos^2 \lambda gt^3$

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{6}\Omega^2 \cos^2 \lambda gt^4$$

Pour évaluer la durée t_1 de la chute, il faudrait résoudre l'équation du second degré :

$$h - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{6}\Omega^2 \cos^2 \lambda gt^4 = 0.$$

Nous allons voir qu'une telle exactitude est inutile, négligeons plutôt le terme en Ω^2 :

$$h - \frac{1}{2}gt_1^2 = 0.$$

La durée de la chute est ainsi :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

En remplaçant t_1 dans les expressions de x et y , on accède à la déviation de M à son arrivée au sol :

$$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{3}g\Omega \cos \lambda \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$y_1 = y(t_1) = -\frac{1}{3g}\Omega^2 h^2 \sin(2\lambda)$$

4

Nous allons remarquer que la précision imposée dans la question précédente est inutile puisque le phénomène révélé (la déviation vers le Sud dans l'hémisphère Nord) est inobservable.

A.N. : $x_1 = 2,8 \text{ cm}$ $y_1 = -4,4 \text{ }\mu\text{m}$ pour une durée de chute de $t_1 = 5,7 \text{ s}$.

La déviation vers le Sud est inobservable, le raisonnement établi à l'ordre 1 suffit.

en conclusion

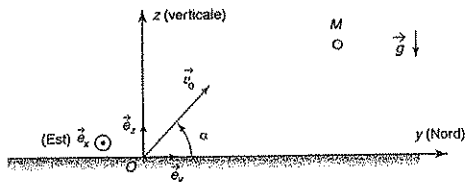
Les valeurs des déviations obtenues sont faibles et justifient a posteriori l'utilisation de la méthode des perturbations.

1 **30 min**

> Corrigé p. 387

La solitude du joueur de rugby

Un terrain de rugby est placé à la latitude $\lambda = 45^\circ$ et est orienté Sud-Nord. La résistance de l'air est négligeable. Un joueur tire une pénalité à 40 m face aux poteaux avec une vitesse initiale $v_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ faisant un angle $\alpha = 45^\circ$ avec l'horizontale. En ne conservant que les termes du premier ordre en Ω (vitesse de rotation de la Terre autour de son axe), déterminer la position du point de chute. Le joueur devra-t-il prendre en compte la force d'inertie de Coriolis pour ajuster son tir ? $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

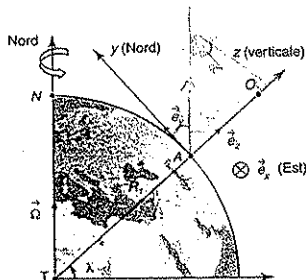
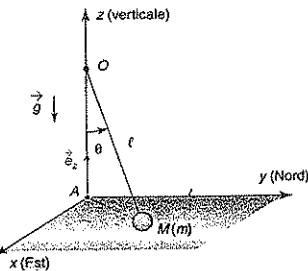


2 **45 min**

> Corrigé p. 387

Étude simplifiée du pendule de Foucault

Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur ℓ et de masse négligeable, dont une extrémité porte une particule ponctuelle M de masse m . Son autre extrémité est fixée en un point O de la verticale du lieu (Az) à la latitude λ sur la Terre.



On note Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe SN et les oscillations du pendule sont supposées de faible amplitude de telle sorte que le mouvement de M a lieu pratiquement dans le plan horizontal (Axy).

À l'instant $t = 0$, la particule M est abandonnée en un point M_0 de ce plan sans vitesse initiale :

$$\vec{AM}_0 = x_0 \vec{e}_x$$

La résistance de l'air est négligeable et le champ de pesanteur supposé uniforme :

$$\vec{g} = -g \vec{e}_z$$

1. Montrer qu'en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, les équations du mouvement de M dans le plan horizontal s'écrivent :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\Omega \sin \lambda \dot{y}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y - 2\Omega \sin \lambda \dot{x}$$

2. En posant $Z = x + jy$ avec $j^2 = -1$, montrer que la solution complexe du problème est :

$$Z(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) e^{-j\Omega \sin \lambda t}$$

Vous effectuerez pour cela les approximations qui s'imposent en calculant le rapport $\frac{\Omega}{\omega_0}$.

Déduire de ce résultat les solutions réelles $x(t)$ et $y(t)$.

3. Calculer la période T de rotation du plan d'oscillation du pendule contenant l'axe (Az). Que se passe-t-il si le pendule est dans l'hémisphère Sud, à l'équateur ou aux pôles ?

Données :

$$\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}; \quad g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2};$$

$$\ell = 67 \text{ m}; \quad m = 28 \text{ kg}; \quad x_0 = 3 \text{ m}; \quad \lambda = 48,85^\circ$$

3

45 min

> Corrigé p. 389

Tir d'un obus vers le zénith

(d'après ENSTIM)

En un lieu A de latitude $\lambda = 48^\circ \text{N}$, un canon tire un obus à la vitesse $v_0 = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ suivant la verticale ascendante (Az) . On désigne par $(Axyz)$ un repère orthonormé lié à la Terre, (Ay) étant dirigé vers le Nord.

On assimile la Terre à une sphère homogène, tournant autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On note \vec{g} le champ de pesanteur terrestre, de module g supposé constant et égal à $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

La résistance de l'air est négligée.

A. Mouvement de l'obus dans le référentiel terrestre non galiléen

L'étude est effectuée dans le référentiel terrestre

$\mathcal{R}_T(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

1. Écrire l'équation du mouvement de l'obus. Pourquoi la force d'inertie d'entraînement n'intervient pas explicitement dans l'équation du mouvement ?

2. M repérant la position de l'obus, on pose

$\vec{AM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, montrer que :

$$\ddot{x} = -2\Omega(v_0 - gt)\cos\lambda.$$

En déduire une expression approchée de l'abscisse x de l'obus. Évaluer x au moment où l'obus tombe sur le sol. La déviation se fait-elle vers l'Ouest ou vers l'Est ? Le résultat dépend-il de l'hémisphère dans lequel on effectue le tir ?

B. Mouvement de l'obus dans le référentiel géocentrique

1. Rappeler la définition du référentiel géocentrique. Pourquoi peut-il être supposé galiléen pour ce type d'expérience ?

2. Déterminer la vitesse initiale de l'obus dans ce référentiel.

3. Si on considère le champ de gravitation uniforme sur la trajectoire de l'obus, montrer alors que celui-ci retombe en A . Comment l'observateur géocentrique peut-il justifier la déviation évaluée au paragraphe précédent ?

Tester ses connaissances

1 Tout dépend de ce que nous entendons par « pesée » :

• Comparons les champs de gravitation à la surface de la Terre et à la surface de la Lune :

$$g_{\text{Terre}} = G \frac{M_{\text{Terre}}}{R_T^2}$$

$$g_{\text{Lune}} = G \frac{M_{\text{Lune}}}{R_L^2} \Rightarrow \frac{g_{\text{Terre}}}{g_{\text{Lune}}} = \frac{M_{\text{Terre}}}{M_{\text{Lune}}} \left(\frac{R_L}{R_T} \right)^2 \approx 6.$$

Les référentiels étant galiléens, le champ de pesanteur \vec{g} est assimilé au champ de gravitation \vec{g} : le poids de l'objet évalué sur la Terre est 6 fois plus élevé que le poids du même objet évalué sur la Lune : la pesée y indique $\frac{75}{6} = 12,5$ kg. Réponse **c**.

• Si le résultat d'une pesée est la détermination d'une masse par comparaison avec des masses marquées : le résultat obtenu avec une balance est en kg et il faut placer 75 kg sur le second plateau pour l'équilibrer. Réponse **b**.

2 Réponse **d**. Le référentiel terrestre est galiléen, on assimile champ de pesanteur et champ de gravitation. Exprimons l'intensité de la pesanteur au sol et à une altitude h :

$$g(0) \approx g_{\text{Terre}}(0) = G \frac{M_{\text{Terre}}}{R_T^2}$$

$$g(h) \approx g_{\text{Terre}}(h) = G \frac{M_{\text{Terre}}}{(R_T + h)^2}$$

$$\Rightarrow g(h) = g(0) \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

En faisant apparaître le rapport très faible $\frac{h}{R_T}$, cette expression devient :

$$g(h) = g(0) \left(1 + \frac{h}{R_T} \right)^{-2}$$

Son développement limité donne au premier ordre en $\frac{h}{R_T}$:

$$g(h) \approx g(0) \left(1 - 2 \frac{h}{R_T} \right)$$

D'où l'écart relatif évalué à 5 % :

$$\frac{g(0) - g(h)}{g(0)} \approx 2 \frac{h}{R_T} = \frac{5}{1000}$$

Ainsi :

$$h = \frac{5}{2000} R_T = 16 \text{ km.}$$

Remarque : en négligeant le terme centrifuge qui croît avec l'altitude, le champ de pesanteur est orienté vers le centre T de la Terre et est supposé uniforme et égal à $9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ jusqu'à une altitude d'une dizaine de kilomètres à 0,5 % près.

3 Réponse **c**. Considérons un point matériel M de masse m à l'équilibre sur la surface de la Terre (supposée sphérique de centre T) au niveau de l'équateur. En prenant en compte le terme axifuge dû à la rotation de la Terre, le champ de pesanteur terrestre est défini par :

$$\vec{g}(M) = \vec{g}_T(M) + \Omega_0^2 \vec{T}M = -G \frac{M_{\text{Terre}}}{R_T^2} \vec{z}_T + \Omega_0^2 R_T \vec{e}_r$$

champ de pesanteur
champ de gravitation
terme axifuge d'entraînement

Le champ de pesanteur terrestre est :

$$g_0 = G \frac{M_{\text{Terre}}}{R_T^2} - \Omega_0^2 R_T$$

Pour que le point M soit en impesanteur, il faut que le terme d'entraînement compense le champ de gravitation :

$$0 = G \frac{M_{\text{Terre}}}{R_T^2} - \Omega_0^2 R_T$$

Le rapport des vitesses angulaires est :

$$n = \frac{\Omega}{\Omega_0} = \sqrt{1 + \frac{g_0}{R_T \Omega_0^2}} \approx 17.$$

4 Réponses **a** et **b**. Le terme de marée prenant en compte l'action conjuguée de la Lune et du Soleil est obtenu par la somme vectorielle :

$$\vec{\delta} = \vec{\delta}_{\text{Lune}} + \vec{\delta}_{\text{Soleil}} = \vec{g}_{\text{Lune}}(M) - \vec{g}_{\text{Lune}}(T) + \vec{g}_{\text{Soleil}}(M) - \vec{g}_{\text{Soleil}}(T)$$

Lorsque le Soleil, la Lune et la Terre sont alignés, les actions du Soleil et de la Lune s'additionnent, les marées ont une grande amplitude (marées de vives eaux).

5 Réponse **a**. Une analyse dimensionnelle permet de répondre à cette question. La déviation L_{cor} due à la force de Coriolis vérifie l'équation dimensionnelle :

$$\frac{L_{\text{cor}}}{L} \approx \frac{T}{T_{\text{rot}}}$$

T_{rot} correspond à 24 h, période propre de rotation de la Terre, T est la durée caractéristique du phénomène étudié et L sa longueur caractéristique. La vitesse du corps étudié est donnée par :

$$v = \frac{L}{T}$$

On peut donc accéder à un ordre de grandeur de la déviation L_{cor} :

$$L_{cor} \approx \frac{L^2}{vT_{rot}}$$

Pour les tourbillons atmosphériques :

$$L_{cor} \approx \frac{(1\,000 \times 10^3)^2}{10 \times (24 \times 3\,600)} \approx 1\,160 \text{ km.}$$

La déviation est de l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique du phénomène étudié, elle n'est donc pas négligeable et joue un rôle prépondérant.

6 Réponse b. Utilisons la même formule que pour l'exercice précédent.

Pour les tourbillons de l'eau dans un lavabo :

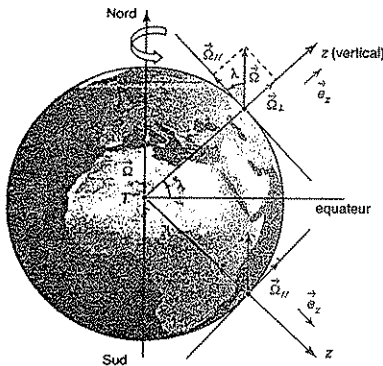
$$L_{cor} \approx \frac{(0,1)^2}{0,1 \times (24 \times 3\,600)} \approx 1 \mu\text{m.}$$

La déviation est négligeable et la force de Coriolis n'influe pas sur le sens de rotation de l'écoulement de l'eau dans un lavabo qui se vide. Pour que le phénomène soit visible, il faudrait un bassin d'eau moins plusieurs dizaines de kilomètres. Le sens de rotation de l'eau est dû à la géométrie du lavabo et aux micro-courants créés lors de son remplissage.

7 Réponse a. Le vecteur vitesse rotation de la Terre peut être décomposé en deux termes, une composante suivant la verticale et une composante parallèle au plan horizontal :

$$\vec{\Omega} = \underbrace{\vec{\Omega}_\perp}_{\text{composante verticale}} + \underbrace{\vec{\Omega}_\parallel}_{\text{composante horizontale}} = \Omega \sin \lambda \vec{e}_z + \vec{\Omega}_\parallel$$

Deux situations sont à considérer selon que l'on se place dans l'hémisphère Nord ou dans l'hémisphère Sud. Elles sont représentées sur le schéma suivant :



• Dans l'hémisphère Nord $\vec{\Omega}_\perp$ est orienté suivant \vec{e}_z .

• Dans l'hémisphère Sud $\vec{\Omega}_\perp$ est orienté suivant $(-\vec{e}_z)$.

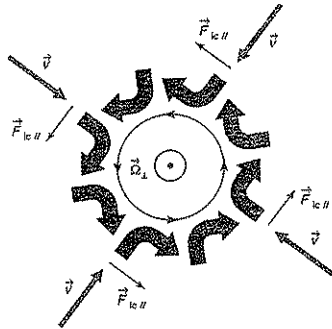
La force d'inertie de Coriolis se décompose en deux termes :

$$\vec{F}_{ic} = \underbrace{-2m\vec{\Omega}_\perp \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_T}}_{\text{influence selon la verticale}} - \underbrace{2m\vec{\Omega}_\perp \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_T}}_{\text{influence dans le plan horizontal}}$$

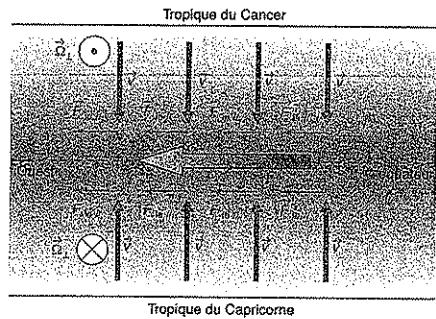
La composante active qui explique la rotation dans le plan horizontal est :

$$\vec{F}_{ic\parallel} = -2m\vec{\Omega}_\perp \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_T} = 2m\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_T} \wedge \vec{\Omega}_\perp$$

Le trièdre $(\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_T}, \vec{\Omega}_\perp, \vec{F}_{ic\parallel})$ est direct.



8 Réponses b. et d. Par la même méthode que l'exercice précédent : les alizés soufflent à l'Ouest dans les deux hémisphères.



Savoir appliquer le cours

1 Le poids \vec{P} d'un corps ou force de pesanteur est défini expérimentalement comme l'opposé de la tension qui le maintient en équilibre dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T .

$$\vec{P} = -\vec{T}.$$

poids

À l'équilibre de la particule dans \mathcal{R}_T , le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m \frac{d(M)_{\mathcal{R}_T}}{dt} = \vec{T} + \underbrace{m\vec{\mathcal{G}}_T(M)}_{\text{champ de gravitation à la surface terrestre}} + m\Omega^2 \overrightarrow{HM} - 2m\vec{\Omega} \wedge \underbrace{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_T}}_{\vec{0}}$$

$$\vec{P} = \underbrace{m\vec{\mathcal{G}}_T(M)}_{\text{attraction gravitationnelle terrestre}} + \underbrace{m\Omega^2 \overrightarrow{HM}}_{\text{force d'inertie d'entraînement}}$$

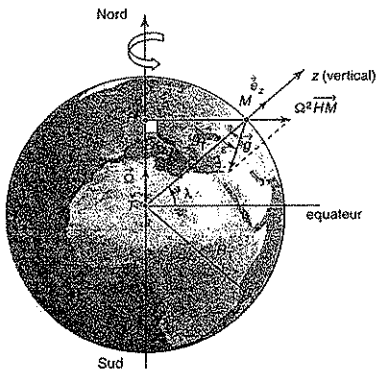
Le champ de pesanteur terrestre est défini par la relation :

$$\vec{P} = m \vec{g}.$$

force de pesanteur champ de pesanteur

Ainsi :

$$\vec{g} = \underbrace{\vec{\mathcal{G}}_T(M)}_{\text{champ de gravitation}} + \underbrace{\Omega^2 \overrightarrow{HM}}_{\text{terme axifuge d'entraînement}}$$



La projection de cette équation suivant \vec{e}_z donne :

$$-g \cos \varepsilon = -\frac{GM_T}{R_T^2} + \Omega^2 \|\overrightarrow{HM}\| \cos \lambda$$

avec $\|\overrightarrow{HM}\| = R_T \cos \lambda$.

L'écart ε d'orientation entre le champ de gravitation et le champ de pesanteur étant très faible : $\cos \varepsilon \approx 1$.

$$g(\lambda) = \frac{GM_T}{R_T^2} - \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda$$

$$= \frac{GM_T}{R_T^2} - \Omega^2 R_T + \Omega^2 R_T \sin^2 \lambda.$$

À l'équateur, le champ de pesanteur g_E est :

$$g_E = g(0) = \frac{GM_T}{R_T^2} - \Omega^2 R_T.$$

$$g(\lambda) = g_E \left[1 + \left(\frac{\Omega^2 R_T}{\frac{GM_T}{R_T^2} - \Omega^2 R_T} \right) \sin^2 \lambda \right].$$

En introduisant le paramètre sans dimension a :

$$a = \frac{\Omega^2 R_T}{\frac{GM_T}{R_T^2} - \Omega^2 R_T} = 3,5 \cdot 10^{-3}$$

on obtient l'expression attendue :

$$g(\lambda) = g_E (1 + a \sin^2 \lambda).$$

En négligeant les termes en Ω^2 , g est considéré indépendant de λ :

$$g(\lambda) = g_E \left[1 + \left(\frac{\Omega^2 R_T}{\frac{GM_T}{R_T^2} - \Omega^2 R_T} \right) \sin^2 \lambda \right]$$

terme négligeable

$$\approx g_E = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9,77 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

g_E est le champ de pesanteur à l'équateur.

Pour déterminer ε_{\max} , utilisons la relation des sinus :

$$\frac{\sin \varepsilon}{\Omega^2 \|\overrightarrow{HM}\|} = \frac{\sin \lambda}{g}$$

Or $\|\overrightarrow{HM}\| = R_T \cos \lambda$ et ε est faible car il est en Ω^2 :

$$\varepsilon \approx \frac{\Omega^2 R_T}{2g} \sin(2\lambda).$$

Ainsi l'angle ε est maximal lorsque $\lambda = 45^\circ$ et

$$\varepsilon_{\max} \approx \frac{\Omega^2 R_T}{2g} = 1,74 \cdot 10^{-3} \text{ rad (soit } 6').$$

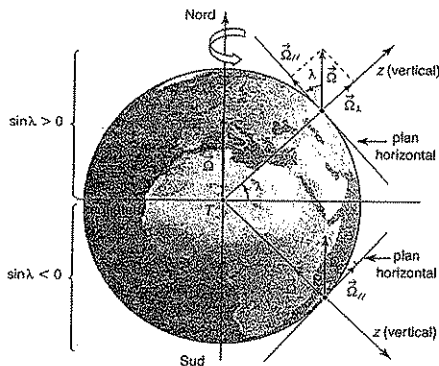
2 Considérons la particule glissant sans frottement sur le plan horizontal, le principe fondamental appliqué dans le référentiel terrestre donne :

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \underbrace{\vec{R}}_{\text{réaction normale au support}} + \underbrace{m\vec{g}(M)}_{\text{le poids contient le terme d'inertie d'entraînement}} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T).$$

Le vecteur vitesse rotation de la Terre peut être décomposé en deux termes, une composante suivant la verticale et une composante parallèle au plan horizontal :

$$\vec{\Omega} = \underbrace{\vec{\Omega}_z}_{\text{composante verticale}} + \underbrace{\vec{\Omega}_H}_{\text{composante horizontale}} = \Omega \sin \lambda \vec{e}_z + \vec{\Omega}_H.$$

Deux situations sont à considérer selon que l'on se place dans l'hémisphère Nord ou dans l'hémisphère Sud. Elles sont représentées sur le schéma suivant :



- Dans l'hémisphère Nord $\vec{\Omega}_H$ est orienté suivant \vec{e}_z .
- Dans l'hémisphère Sud $\vec{\Omega}_H$ est orienté suivant $(-\vec{e}_z)$.

Le principe fondamental donne :

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \underbrace{\vec{R} + m\vec{g} - 2m\vec{\Omega}_z \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T)}_{\text{selon l'axe } Oz} - \underbrace{2m\vec{\Omega}_H \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T)}_{\text{dans le plan horizontal } xOy}.$$

L'équation du mouvement du mobile M dans le plan horizontal est :

$$m \left(\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R}_T)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_T} = -2m\Omega \sin \lambda \vec{e}_z \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T) \quad (1).$$

C'est la projection de la force d'inertie de Coriolis, due à la rotation de la Terre, dans le plan horizontal qui est responsable du mouvement de M, elle fait intervenir la composante verticale de $\vec{\Omega}$.

Le produit scalaire de l'équation (1) par $\vec{v}(M/\mathcal{R}_T)$ donne :

$$\left(\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R}_T)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_T} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R}_T) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = 0.$$

La force de Coriolis ne modifie pas le module de la vitesse. Le mouvement de M est circulaire uniforme : le module de la vitesse est égal à la vitesse initiale v_0 . L'accélération tangentielle à la trajectoire est nulle. Plaçons-nous en coordonnées polaires, R_C étant le rayon de la trajectoire circulaire de M :

$$\begin{cases} \vec{v}(M/\mathcal{R}_T) = v_0 \vec{e}_\theta \\ \left(\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R}_T)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_T} = -\frac{v_0^2}{R_C} \vec{e}_r \end{cases}$$

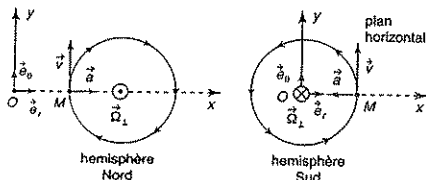
L'équation du mouvement (1) donne :

$$-\frac{v_0^2}{R_C} \vec{e}_r = -2\Omega v_0 \sin \lambda \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = 2\Omega v_0 \sin \lambda \vec{e}_r.$$

D'où le rayon (ici algébrique) de la trajectoire du mobile :

$$R_C = -\frac{v_0}{2\Omega \sin \lambda}.$$

- Dans l'hémisphère Nord : $\sin \lambda > 0$, $R_C < 0$ et le mobile tourne dans le sens direct.
- Dans l'hémisphère Sud : $\sin \lambda < 0$, $R_C > 0$ et le mobile tourne dans le sens trigonométrique.



A.N. : $R_C \sim 10 \text{ km}$.

À l'échelle du laboratoire, la trajectoire du mobile est quasiment rectiligne et le référentiel du laboratoire peut être considéré comme galiléen pour cette expérience. La déviation due à la force de Coriolis n'est notable que sur de longues distances.

S'entraîner

1 Le système étudié dans le référentiel terrestre non galiléen est le ballon de rugby. Il est soumis à son poids qui prend en compte la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre et à la force d'inertie de Coriolis. L'expression simplifiée du théorème du centre de masse est :

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \underbrace{m\vec{g}(M)}_{\substack{\text{le poids contient le terme} \\ \text{d'inertie d'entraînement}}} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T).$$

Le mouvement a lieu sans frottement, il est indépendant de la masse du ballon. Sa projection dans la base $(\vec{z}_x, \vec{z}_y, \vec{z}_z)$ est :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

On obtient le système des trois équations :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega(-\cos\lambda\dot{z} + \sin\lambda\dot{y}) \\ \ddot{y} = -2\Omega\sin\lambda\dot{x} \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega\cos\lambda\dot{x} \end{cases}$$

En intégrant une fois par rapport au temps :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\Omega(-\cos\lambda z + \sin\lambda y) \\ \dot{y} = -2\Omega\sin\lambda x + v_0\cos\alpha \approx v_0\cos\alpha \\ \dot{z} = -gt + 2\Omega\cos\lambda x + v_0\sin\alpha \approx -gt + v_0\sin\alpha \end{cases}$$

Ces approximations permettent d'avoir les solutions approchées de y et z :

$$\begin{cases} y \approx v_0\cos\alpha t \\ z \approx -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t \end{cases}$$

Une expression approchée de \dot{x} est obtenue en remplaçant y et z par leurs valeurs :

$$\dot{x} \approx 2\Omega t \left[\frac{1}{2}g\cos\lambda t + v_0 \underbrace{(\sin\lambda\cos\alpha - \cos\lambda\sin\alpha)}_{\sin(\lambda-\alpha)} \right]$$

Comme $\alpha = \lambda$, le dernier terme est nul :

$$\dot{x} \approx \Omega g \cos\lambda t^2.$$

La valeur de x est obtenue par intégration :

$$x \approx \frac{1}{3}\Omega g \cos\lambda t^3$$

L'instant de la chute est obtenu par l'annulation de $z(t)$:

$$z \approx t \left(-\frac{1}{2}gt + v_0\sin\alpha \right).$$

Cet instant est $t_0 = \frac{2v_0\sin\alpha}{g} = 2,9$ s, il correspond à une déviation vers l'Est du ballon :

$$x_0 = x(t_0) \approx \frac{8\Omega v_0^3}{3g^2} \cos\lambda \sin^3\alpha = 4 \text{ mm}.$$

La déviation est complètement négligeable. Le joueur n'en tiendra pas compte.

2 1. Le système étudié est le point matériel M de masse m .

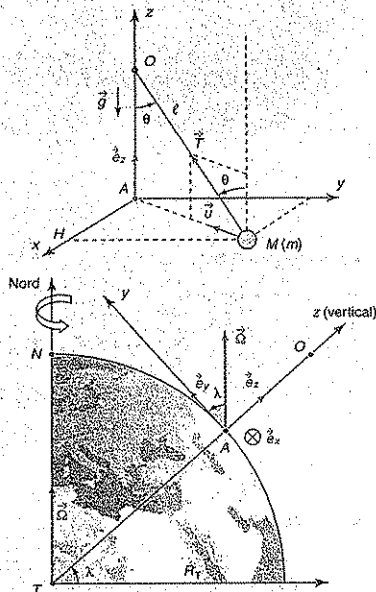
Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre \mathcal{R}_T non galiléen.

Forces appliquées au point M :

- La tension \vec{T} du fil : $\vec{T} = T_x\vec{e}_x + T_y\vec{e}_y + T_z\vec{e}_z$.
- Le poids \vec{P} exercé par la Terre : $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$.
- La force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{ic}(M) = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_T).$$

La force d'inertie d'entraînement est prise en compte dans le poids de la particule.



Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans \mathcal{R}_T est :

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ic}.$$

Pour les faibles oscillations du pendule, le mouvement de M a lieu dans le plan horizontal (Axy), ses grandeurs cinétiques sont :

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y, & \vec{v}(M, \partial_t) &= \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y, \\ \vec{a}(M, \partial_t) &= \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y. \end{aligned}$$

Exprimons les forces appliquées à M dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

• Pour projeter la tension \vec{T} , introduisons le vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{MA}}{\|\vec{MA}\|}$:

$$\vec{T} = T \sin \theta \vec{u} + T \cos \theta \vec{e}_z = T \sin \theta \frac{\vec{MA}}{\|\vec{MA}\|} + T \cos \theta \vec{e}_z.$$

Or $\sin \theta = \frac{\|\vec{MA}\|}{\ell}$ et les petites oscillations impliquent l'approximation $\cos \theta \approx 1$.

$$\begin{aligned} \vec{T} &= T \frac{\vec{MA}}{\ell} + T \vec{e}_z = T \frac{\vec{MH}}{\ell} + T \frac{\vec{HA}}{\ell} + T \vec{e}_z \\ &= -T \frac{x}{\ell} \vec{e}_x - T \frac{y}{\ell} \vec{e}_y + T \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\vec{P} = -mg \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_{ic}(M) = -2m\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = -2m\Omega \begin{pmatrix} -\dot{y} \sin \lambda \\ \dot{x} \sin \lambda \\ -\dot{x} \cos \lambda \end{pmatrix}$$

Le principe fondamental projeté dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ permet d'obtenir les équations du mouvement :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T \frac{x}{\ell} + 2m\Omega \dot{y} \sin \lambda & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -T \frac{y}{\ell} - 2m\Omega \dot{x} \sin \lambda & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -mg + T + 2m\Omega \dot{x} t \cos \lambda & (3) \end{cases}$$

Évaluons dans l'équation (3) l'ordre de grandeur de $2\Omega \dot{x}$ à comparer à g , ce terme est de l'ordre de $2\Omega x_0 \omega_0$ et pour x_0 de l'ordre du mètre le rapport est :

$$\frac{2\Omega x_0 \omega_0}{g} \approx 5,7 \cdot 10^{-6}$$

Il est donc négligeable et justifie l'approximation :

$$T \approx mg$$

Les équations (1) et (2) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\Omega \dot{y} \sin \lambda & (1') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\Omega \dot{x} \sin \lambda & (2') \end{cases}$$

Ces équations forment un système d'équations différentielles linéaires couplées car y intervient dans l'équation différentielle de x et réciproquement.

2. Pour les découpler, effectuons l'opération $(1') + j(2')$ en posant $\underline{Z} = x + jy$:

$$(\ddot{x} + j\ddot{y}) + \omega_0^2(x + jy) = 2\Omega(j\dot{y} - \dot{x}) \sin \lambda.$$

Cette équation peut encore s'écrire :

$$(\ddot{x} + j\ddot{y}) + 2j\Omega \sin \lambda (\dot{x} + j\dot{y}) + \omega_0^2(x + jy) = 0.$$

Ainsi :

$$\underline{\ddot{Z}} + 2j\Omega \sin \lambda \underline{\dot{Z}} + \omega_0^2 \underline{Z} = 0.$$

On cherche les solutions en $\underline{C}e^{rt}$, l'équation caractéristique de l'équation différentielle est :

$$r^2 + 2j\Omega \sin \lambda r + \omega_0^2 = 0.$$

C'est une équation du second degré dont le discriminant est :

$$\Delta' = -(2\Omega \sin \lambda)^2 - 4\omega_0^2 = -4(\Omega^2 \sin^2 \lambda + \omega_0^2) = -4\omega_0^2 \left(\frac{\Omega^2 \sin^2 \lambda}{\omega_0^2} + 1 \right)$$

Remarque : une application numérique donne $\Omega = 2 \cdot 10^{-4} \omega_0$, les termes en Ω sont négligeables devant les termes en ω_0 .

Les deux solutions complexes sont :

$$r_1 = -j\Omega \sin \lambda - j\omega_0 \quad \text{et} \quad r_2 = -j\Omega \sin \lambda + j\omega_0.$$

La solution recherchée s'écrit :

$$\underline{Z}(t) = \underline{C}_1 e^{r_1 t} + \underline{C}_2 e^{r_2 t} = \underline{C}_1 e^{(-j\Omega \sin \lambda - j\omega_0)t} + \underline{C}_2 e^{(-j\Omega \sin \lambda + j\omega_0)t}$$

et

$$\underline{Z}(t) = e^{-j\Omega \sin \lambda t} [\underline{C}_1 e^{-j\omega_0 t} + \underline{C}_2 e^{j\omega_0 t}].$$

De la condition initiale $\underline{Z}_0 = x_0$ on déduit :

$$\underline{Z}_0 = \underline{C}_1 + \underline{C}_2 = x_0.$$

La dérivée de $\underline{Z}(t)$ est :

$$\underline{\dot{Z}}(t) = r_1 \underline{C}_1 e^{r_1 t} + r_2 \underline{C}_2 e^{r_2 t}$$

La masse m étant abandonnée sans vitesse initiale :

$$\underline{\dot{Z}}(0) = r_1 \underline{C}_1 + r_2 \underline{C}_2 = 0$$

$$(-j\Omega \sin \lambda - j\omega_0) \underline{C}_1 + (-j\Omega \sin \lambda + j\omega_0) \underline{C}_2 = 0.$$

Puisque $\Omega \ll \omega_0$, cette équation donne $\underline{C}_1 = \underline{C}_2 = \frac{x_0}{2}$ et la solution $\underline{Z}(t)$ est :

$$\underline{Z}(t) \approx \frac{x_0}{2} e^{-j\Omega \sin \lambda t} [e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}].$$

Finalement :

$$\underline{Z}(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) e^{-j\Omega \sin \lambda t}$$

Pour obtenir les solutions réelles :

$$\underline{Z} = x + jy = x_0 \cos(\omega_0 t) [\cos(\Omega \sin \lambda t) - j \sin(\Omega \sin \lambda t)].$$

Le mouvement de M est décrit par les équations horaires :

$$\begin{cases} x(t) \approx x_0 \cos(\omega_0 t) [\cos(\Omega \sin \lambda t)] \\ y(t) \approx x_0 \cos(\omega_0 t) [-\sin(\Omega \sin \lambda t)] \end{cases}$$

3. Le vecteur position de M est :

$$\vec{AM} = x_0 \cos(\omega_0 t) [\cos(\Omega \sin \lambda t) \vec{z}_x - \sin(\Omega \sin \lambda t) \vec{z}_y]$$

Observons que c'est la composante selon la verticale \vec{z}_z de $\vec{\Omega}$ qui intervient dans la rotation du plan d'oscillation du pendule. La composante du vecteur rotation active est :

$$\vec{\Omega}_1 = \underbrace{\Omega \sin \lambda t}_{\text{positif}} \vec{z}_z$$

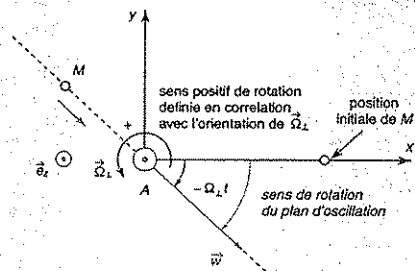
Le vecteur position de M peut aussi s'écrire :

$$\vec{AM} = x_0 \cos(\omega_0 t) [\cos(-\Omega_1 t) \vec{z}_x + \sin(-\Omega_1 t) \vec{z}_y]$$

En faisant intervenir le vecteur unitaire tournant

$$\vec{w}(t) = \cos(-\Omega_1 t) \vec{z}_x + \sin(-\Omega_1 t) \vec{z}_y, \text{ on obtient :}$$

$$\vec{AM} = \underbrace{x_0 \cos(\omega_0 t)}_{\substack{\text{oscillation} \\ \text{du pendule} \\ \text{dans le plan} \\ \text{d'oscillation}}} \underbrace{\vec{w}(t)}_{\substack{\text{rotation} \\ \text{du plan} \\ \text{d'oscillation}}}$$



Ainsi le plan d'oscillation vertical ($\vec{z}_z, \vec{w}(t)$) qui contient le mouvement du pendule est en très lente rotation autour de l'axe (Az) dans le sens négatif avec la période :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda} = 31 \text{ h } 47 \text{ min.}$$

Cette période de rotation est à comparer avec la période propre des oscillations :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 16,4 \text{ s.}$$

• Lorsque le pendule est dans l'hémisphère Sud, le vecteur $\vec{\Omega}_1 = \Omega \sin \lambda \vec{z}_z$ est dirigé suivant $(-\vec{z}_z)$ et le sens de rotation est le sens trigonométrique.

• Aux pôles ($\lambda = \frac{\pi}{2}$) et la période de rotation est d'une journée.

• À l'équateur ($\lambda = 0$) la période est infinie et le plan des oscillations est fixe.

3 Partie A

1. Le système est l'obus M supposé ponctuel, son mouvement est analysé dans le référentiel terrestre non galiléen. Il est soumis à son poids et à la force d'inertie de Coriolis. La force d'inertie d'entraînement n'apparaît pas explicitement dans le bilan des forces car elle est incluse dans le poids de l'obus.

L'expression du théorème du centre de masse est :

$$m \vec{a}(M/\mathcal{R}_{\text{Ter}}) = m \vec{g} - 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_{\text{Ter}}).$$

En simplifiant par m :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}_{\text{Ter}}) = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}_{\text{Ter}}).$$

2. Le mouvement a lieu sans frottement, il est indépendant de la masse de l'obus. Sa projection dans la base $(\vec{z}_x, \vec{z}_y, \vec{z}_z)$ est :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

On obtient le système des trois équations :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega(-\cos \lambda \dot{z} + \sin \lambda \dot{y}) & (1) \\ \ddot{y} = -2\Omega \sin \lambda \dot{x} & (2) \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega \cos \lambda \dot{x} & (3) \end{cases}$$

En intégrant une fois par rapport au temps les équations (2) et (3) et en faisant l'approximation suivante, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{y} = -2\Omega \sin \lambda x \\ \dot{z} = -gt + 2\Omega \cos \lambda x + v_0 \approx -gt + v_0 \end{cases} \quad (4)$$

En remplaçant dans l'équation (1), il vient :

$$\ddot{x} = 2\Omega[-\cos \lambda(-gt + v_0) - 2\Omega \sin^2 \lambda x].$$

En négligeant le terme de correction en Ω^2 dû à la rotation de la Terre :

$$\ddot{x} \approx -2\Omega(v_0 - gt) \cos \lambda.$$

En intégrant deux fois par rapport au temps, on obtient la déviation de la trajectoire de l'obus :

$$x \approx \Omega \ell^2 \left(\frac{1}{3} g t^2 - v_0 \right) \cos \lambda$$

L'instant correspondant à l'arrivée au sol de l'obus est obtenu par l'annulation de $z(t)$. L'altitude de l'obus est obtenue en intégrant l'équation (4) :

$$z(t) = t \left(v_0 - \frac{1}{2} g t \right).$$

À l'instant $t_0 = \frac{2v_0}{g}$, l'obus arrive au sol et sa déviation est :

$$x_0 = x(t_0) \approx -\frac{4}{3} \Omega \frac{v_0^3}{g^2} \cos \lambda$$

$$x_0 \approx -65,1 \text{ cm.}$$

C'est une déviation vers l'Ouest, quelle que soit l'hémisphère car $\cos \lambda$ est toujours positif.

Partie B

1. Le référentiel géocentrique \mathcal{R}_G est défini par :

- son origine T située au centre de masse de la Terre ;
- ses trois axes Tx_G, Ty_G, Tz_G parallèles à ceux du référentiel de Copernic \mathcal{R}_C :

$$\vec{\Omega}_{em}(\mathcal{R}_G/\mathcal{R}_C) = \vec{0}.$$

Le référentiel de Copernic est un excellent référentiel galiléen, le référentiel géocentrique est en translation quasi-circulaire par rapport au référentiel de Copernic et n'est donc pas rigoureusement galiléen. Cependant sur la durée de vol de l'obus, le changement de direction de la vitesse du centre T de la Terre sur son orbite est négligeable et on peut considérer que le mouvement du référentiel géocentrique est rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_C : on le considère galiléen sur cet intervalle de temps.

2. Utilisons la loi de composition des vitesses dans le cas où le référentiel relatif \mathcal{R}_T est en rotation autour d'un axe fixe par rapport au référentiel absolu \mathcal{R}_G :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M_0/\mathcal{R}_G) &= \vec{v}(M_0/\mathcal{R}_T) + \vec{v}_{em}(M_0) \\ &= \vec{v}(M_0/\mathcal{R}_T) + \vec{v}(A_0/\mathcal{R}_G) \end{aligned}$$

vitesse du point A coïncidant de M_0 évolué dans \mathcal{R}_G

$$\vec{v}(M_0/\mathcal{R}_G) = v_0 \vec{e}_z + \Omega R_T \cos \lambda \vec{e}_x$$

Pour un observateur du référentiel géocentrique, le tir s'effectue vers l'Est.

3. Appliquons le théorème du centre de masse dans le référentiel géocentrique galiléen. La seule force appliquée à M est son poids :

$$m \vec{a}(M/\mathcal{R}_G) = m \vec{g} \Rightarrow \vec{a}(M/\mathcal{R}_G) = \vec{g}.$$

Pour un observateur du référentiel géocentrique la trajectoire de l'obus est parabolique et a lieu dans le plan (Axz) imposé par la vitesse initiale. Il n'observe donc pas de déviation selon (Ay) .

Analysons le problème dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixe du référentiel géocentrique et confondue avec $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ à l'instant $t = 0$ du lancement. L'origine du repère lié au référentiel géocentrique est A_0 , il est confondu avec A à l'instant initial.

Le champ de pesanteur étant uniforme, il garde à tout instant son orientation :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}_G) = \vec{g} = -g \vec{e}_z.$$

En repérant dans \mathcal{R}_G la position de M par $\vec{A_0 M} = X \vec{e}_x + Y \vec{e}_y + Z \vec{e}_z$, projetons l'équation du mouvement de M dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et, par inté-

grations successives, exprimons vitesse et position de l'obus :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}_G) = \begin{cases} \ddot{X} = 0 \\ \ddot{Y} = 0 \\ \ddot{Z} = -g \end{cases} \quad \vec{v}(M/\mathcal{R}_G) = \begin{cases} \dot{X} = \Omega R_T \cos \lambda \\ \dot{Y} = 0 \\ \dot{Z} = -gt + v_0 \end{cases}$$

$$\vec{A_0 M} = \begin{cases} X = \Omega R_T \cos \lambda t \\ Y = 0 \\ Z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \end{cases}$$

Lorsque l'obus touche le sol, le temps s'écoulant de la même façon dans tous les référentiels, la durée de son mouvement est $t_0 = \frac{2v_0}{g}$. Sa position M_1 est alors

$$\vec{A_0 M_1} = \Omega R_T \cos \lambda t_0 \vec{e}_x.$$

Dans le référentiel géocentrique, la vitesse du point de lancement de la surface de la Terre est :

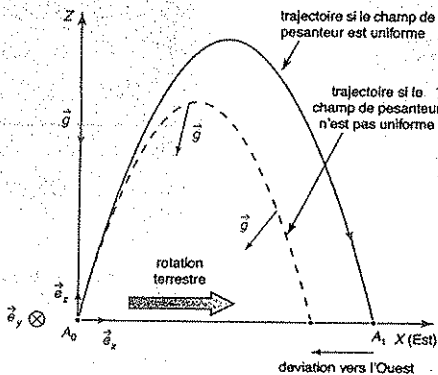
$$\vec{v}(A/\mathcal{R}_G) = \Omega R_T \cos \lambda \vec{e}_x.$$

Par intégration, sa position A_1 , lorsque l'obus arrive au sol, est :

$$\vec{A_0 A_1} = \Omega R_T \cos \lambda t_0 \vec{e}_x = \vec{A_0 M_1}$$

Ainsi A_1 est confondu avec M_1 : dans le référentiel géocentrique A a tourné et a parcouru la même distance que l'obus dans le même temps, ils se rencontrent à nouveau lorsque l'obus touche le sol.

Pour justifier la déviation vers l'Ouest de l'obus, considérons le caractère radial du champ de pesanteur qui ne peut pas être uniforme : il a nécessairement dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ une composante suivant $(-\vec{e}_x)$ qui tend à ramener l'obus vers l'arrière. Parcourant ainsi un chemin plus court que le prévoyait son caractère uniforme, il touche Terre à l'Ouest du point de lancement.



Index

A

- Accélération
 - absolue 274
 - d'entraînement 274
 - de Coriolis 275
 - relative 274
- Accéléromètre 303
- Actions
 - à distance 39
 - de contact 39
- Acuité de la résonance 160, 161, 162
- Amplitude
 - complexe 158
 - des oscillations 156
 - statique 160
- Analogies électromécaniques 163
- Aphélie 244
- Apogée 244, 258
- Approximation harmonique 77, 94, 111
- Argument 172
- Atome de Bohr 257

B

- Bande passante 160, 179
 - à -3 dB 190
 - à mi-puissance 163, 179
- Barrière de potentiel 77
- Base 11, 14, 28
 - cartésienne 11
- Battements 218
- Borné 78
- Bras de levier 205

C

- Causalité 37
- Centre
 - d'inertie 318
 - de force 235
 - de masse 318
- Champ
 - de gravitation 364
 - de pesanteur 372
- Changement de référentiel 271
- Cinématique 35
- Coefficient
 - de frottement 39

- de viscosité 140
- Composition des mouvements 273
- Condition de stabilité 74
- Conique 243
- Constante
 - de gravitation universelle 241
 - des aires 237
- Coordonnées
 - cartésiennes 11
 - cylindriques 11
- Cylindro-polaire 11

D

- Décrément logarithmique 118
- Degré de liberté 73
- Degrés de liberté 8
- Déphasage 156
- Dérivée d'une fonction composée 12
- Déterminisme mécanique 109
- Déterministe 35
- Développement en série de Fourier 157
- Déviations vers l'Est 376
- Diagramme d'énergie potentielle 77
- Différentielle totale 71
- Diffusion de Rutherford 260, 269
- Double produit vectoriel 226
- Dynamique 35

E

- Électron élastiquement lié 192
- Ellipse 244
- Énergie cinétique 70
 - barycentrique 333
- Énergie potentielle 71
 - centrifuge 282
 - effective 239
 - newtonienne 241
- Équation différentielle linéaire 156
- Équations horaires 9
- Équilibre
 - d'un point matériel 74
 - indifférent 76
 - instable 75
 - stable 74
- État
 - de diffusion 78, 242
 - lié 78, 242
- Excentricité 244

F
Facteur
 d'amortissement 115
 de qualité 115, 161
Fil idéal 41, 60
Filtrage passe-bande 162, 163
Filtre
 passe-bande 160
 passe-bas 159
Force
 centrale 235
 conservative 71
 d'inertie 280
 d'inertie d'entraînement 280
 d'inertie de Coriolis 280
 d'interaction gravitationnelle 240
 de repère 280
 newtonienne 240
Forme canonique 115

H
Hyperbole 245

I
Impédance mécanique 165
Intégrale première de l'énergie 74
Interaction
 électromagnétique 38
 gravitationnelle 38
Invariant de Runge-Lenz 259
Isochronisme 143
Isolé 36

L
Liaison 44
 bilatérale 48
Libre 39
Linéarisation de l'énergie potentielle 94
Loi
 de Coulomb 39
 de Kepler 247
 des aires 236
Loi de composition
 des accélérations 275
 des vitesses 274

M
Marées océaniques 369

Masse
 gravitationnelle 38, 241
 inerte 38, 241
 réduite 331
Mécanique
 classique 58
 newtonienne 58
Méthode de résolution complexe 158
Microphone électrostatique 191
Mobile réduit 331
Module 172
Moment
 cinétique 206
 cinétique barycentrique 320, 333
 d'une force 203
Mouvement 78
 absolu 271
 de translation 275
 relatif 271

N
Niveau de puissance 179

O
Orthonormées directes 28
Oscillateur électrique 163
Oscillateur harmonique 110
 amorti 115
Oscillations
 forcées 153
 libres 153

P
Parabole 245
Parabole de sûreté 16
Paramètre
 d'impact 249
 de la conique 244
Pendule de Foucault 381
Périgée 244, 258
Périhélie 244
Permittivité du vide 241
Phase 156
Plan de phase 109
Poids 38, 372
Point
 attracteur 117
 coïncident 273
 de phase 109
 de rebroussement 110
 matériel 35
Polaire 14



Portée 16

Portrait de phase 109

Première vitesse cosmique 249, 262

Principe

d'inertie 36

de l'action et de la réaction 37

des actions réciproques 37

fondamental de la dynamique 36

Produit

mixte 226

scalaire 14, 28

vectériel 209

Pseudo forces 280

Pseudo-isolé 36

Pseudo-période 118

Pseudo-périodique 116

Pseudo-pulsation 116

Puissance 69

d'une force 69

instantanée 179

moyenne temporelle 179

Puits de potentiel 77

Pulsation

de coupure 160

de résonance 160

R

Réduction canonique du problème à deux corps 329

Référentiel 7

barycentrique 318

d'entraînement 272

de Copernic 367

de définition 10

de dérivation 10

de Kepler 367

galiléen 36

géocentrique 368

héliocentrique 367

terrestre 370

Régime 155, 156

apériodique 118

critique 119

forcé ou établi 156

libre 112

Règle

de la main droite 28

du tire-bouchon 28

Relativité galiléenne 279

Repérage du point 8

Repère d'espace 8

Réponse

en élongation 159

en vitesse 161

Résonance 160

d'élongation 159

de puissance 179

de vitesse 162, 178

en puissance 162

Ressort idéal 41, 60

Résultante cinétique 319

Rotation autour d'un axe fixe 277

S

Satellite géostationnaire 250

Seconde vitesse cosmique 249, 262

Sinusoidal forcé 155, 156

Sismographe 303

Spirale d'Archimède 21, 282

Suspension automobile 141

Système pseudo-isolé 58

T

Technique de linéarisation 77

Temps absolu 9

Terme de marée 363

Théorème

de Koenig de l'énergie cinétique 321

de Koenig du moment cinétique 320

de l'énergie cinétique 71, 326

de l'énergie mécanique 71, 326

de la puissance cinétique 70, 326

de la puissance mécanique 72, 327

de la quantité de mouvement 323

du centre de masse 323

du moment cinétique 207

Tir balistique 16

Trajectoire 9

Trajectoire de phase 109

Travail d'une force 69

Troisième loi de Kepler 247, 339

V

Vecteur

accélération 10

position 9

quantité de mouvement 36

rotation d'entraînement 272, 277

vitesse 10

Vitesse

absolue 273

angulaire 13

aréolaire 237

d'entraînement 273

de libération 249, 262

de satellisation 262

relative 273